POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
LE GÉNIE EN PREMIÈRE CLASSE

PHS4700
Physique pour les applications multimédia
Automne 2018

PAGE COUVERTURE **OBLIGATOIRE** POUR TOUS LES DEVOIRS

Numéro du groupe : 2

Numéro de l'équipe : 2

Numéro de devoir : 1

Nom: Arar Signature :	Prénom : Tamer	Matricule : 1828776
Nom: Dandenault Signature :	Prénom : Vincent	Matricule : 1792866
Nom: Favreau Signature :	Prénom : Charles-Olivier	Matricule : 1789479
Nom: Turner Signature :	Prénom : Philippe	Matricule : 1850185

Table des matières

Introduction

Un avion possède des moteurs qui lui permettent de se diriger et de se déplacer dans l'espace. Ainsi, la physique joue un rôle particulier dans l'utilisation de cet appareil. Ce devoir a pour objectif d'étudier le comportement de l'avion CRJ-200. La simulation de cet avion sera effectuée sur un système d'objets se séparant en 5 différentes composantes et dont chacune sera représentée par un solide géométrique. D'abord, la cabine de pilotage sera représentée par un cône plein horizontal. Ensuite, le fuselage et les 2 moteurs seront représentés par des cylindres pleins horizontaux. Puis, les 2 ailes et l'aileron seront représentés par des parallélépipèdes. Pour continuer, deux situations seront analysées. Dans la première situation, on retrouve l'avion au sol, sans vitesse angulaire, et les moteurs appliquent alors une force dans une direction particulière. Dans la deuxième situation, la force appliquée par le moteur droit est réduite après un certain temps de vol et l'avion se retrouve alors à une nouvelle position. Ces situations seront analysées de manière méthodique en s'intéressant d'abord au centre de masse de l'avion. Ensuite, il y aura l'analyse de ce centre de masse avec le moment d'inertie de l'avion. Pour finir, la vitesse angulaire sera alors importante pour aider à l'obtention de la position et de l'orientation de l'avion dans l'espace après que des forces aient été appliquées sur celui-ci. Par conséquent, l'obtention des résultats de ces simulations sera effectuée à l'aide du programme MATLAB. Ce rapport, inclura, dans un premier temps, une présentation de la théorie et des équations reliées à ce problème et, dans un deuxième temps, la présentation des résultats de simulation et leur analyse.

Théorie et équations

Tout d'abord, il est nécessaire de connaître le centre de masse de l'avion au complet. Puisqu'il est formé de plusieurs solides différents (cône, parallélépipède, cylindre), on peut trouver le centre de masse de chacun de ces solides, pour ensuite avoir la sommation de ces centres de masse qui représentera celui du solide final.

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{N} m_n\, \vec{r}_{c,n}$$

Équation 1

Le cône plein (cabine de pilotage), de rayon *r*, de hauteur *h* et de masse *m*, a le moment d'inertie suivant lorsque son axe est centré au point *x = 0* et *y = 0*. Le cône a une masse répartie de la même manière autour de l'axe des x et de l'axe des y.

$$I_{c,zz} = \frac{3}{10} m r^2$$

Équation 2

$$I_{c,xx} = I_{c,yy} = \frac{m(12r^2 + 3h^2)}{80}$$

Équation 3

Le cylindre plein (fuselage et moteurs), de rayon *r*, de longueur *l* et de masse *m*, a le moment d'inertie suivant lorsqu'il est aligné avec l'axe des x par rapport à son centre de masse. Le cylindre du fuselage a une masse répartie de la même manière autour de l'axe des y et de l'axe des z.

$$I_{c,xx} = \frac{1}{2} m r^2$$

Équation 4

$$I_{c,yy} = I_{c,zz} = \frac{1}{4} m r^2 + \frac{1}{12} m l^2$$

Équation 5

Le parallélépipède plein a le moment d'inertie suivant lorsqu'il est aligné avec l'axe des x (longueur a), avec l'axe des y (largeur b) et avec l'axe des z (hauteur c) par rapport à son centre de masse.

$$I_{c,xx} = \frac{m}{12}(b^2 + c^2)$$
Équation 6

$$I_{c,yy} = \frac{m}{12}(a^2 + c^2)$$
Équation 7

$$I_{c,xx} = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$$
Équation 8

Ensuite, il faut calculer le moment d'inertie par rapport au centre de masse.

$$I_d = I_c + m\begin{pmatrix} ({d^2}_{c,y} + {d^2}_{c,z}) & -d_{c,x}d_{c,y} & -d_{c,x}d_{c,z} \\ -d_{c,y}d_{c,x} & ({d^2}_{c,x} + {d^2}_{c,z}) & -d_{c,y}d_{c,z} \\ -d_{c,z}d_{c,x} & -d_{c,z}d_{c,y} & ({d^2}_{c,x} + {d^2}_{c,y}) \end{pmatrix} = I_c + mT(\vec{d}_c)$$
Équation 9

L'équation 10 requiert la distance avec le centre de masse de l'avion.

$$\vec{d}_c = \left(d_{c,x}, d_{c,y}, d_{c,z}\right) = \vec{d} - \vec{r}_c$$
Équation 10

Le moment d'inertie est calculé dans un référentiel 1 et on veut transformer la matrice du moment d'inertie a un référentiel 2. On sait que :

$$\vec{v}^2 = \boldsymbol{R}^{2\leftarrow 1}\vec{v}^1$$
Équation 11

Ainsi, on doit, pour la matrice du moment d'inertie **I**, faire une rotation des axes vers un référentiel 2, en partant du référentiel 1, où **R** est la matrice de rotation.

$$\boldsymbol{I}^2 = \boldsymbol{R}^{2\leftarrow 1}\boldsymbol{I}^1(\boldsymbol{R}^{2\leftarrow 1})^{-1}$$
Équation 12

De plus, il faut le moment de force (torque) $\vec{\tau}$, le moment cinétique $\vec{L}$ et la vitesse angulaire $\vec{\omega}$.

$$\vec{\tau}_{j,i}(t) = \left(\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i\right) \times \vec{F}(t)$$

Équation 13

$$\vec{L}(t) = \boldsymbol{I}(t)\,\vec{\omega}(t)$$

Équation 14

Avec ce moment de force $\vec{\tau}$, on peut calculer l'accélération angulaire de l'avion en considérant sa vitesse angulaire $\vec{\omega}$, son moment d'inertie $\boldsymbol{I}$ et son moment cinétique $\vec{L}$.

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}(t) = \frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} &= \left(\boldsymbol{I}(t)\right)^{-1}[\vec{\tau}(t) - \tilde{\boldsymbol{\omega}}(t)\boldsymbol{I}(t)\vec{\omega}(t)] \\ &= \left(\boldsymbol{I}(t)\right)^{-1}\left[\vec{\tau}(t) + \vec{\mathrm{L}}(\mathrm{t}) \times \vec{\omega}(t)\right]\end{aligned}$$

Équation 15

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z(t) & \omega_y(t) \\ \omega_z(t) & 0 & -\omega_x(t) \\ -\omega_y(t) & \omega_x(t) & 0 \end{pmatrix}$$

Équation 16

Présentation et analyse des résultats

Tout d'abord, notre approche a été de placer l'avion sur sa position initiale, c'est-à-dire avec les données qui nous ont été fournies. En premier lieu, il a été important de trouver tous les centres de masse de chacune des parties de l'avion. Ces centres de masse ont été, par la suite, à l'aide de l'équation 1, additionnés. Ce travail a été effectué dans le fichier *calculate_pcm.m* dans le projet. En deuxième lieu, le moment d'inertie de l'avion au complet a été trouvé. Ainsi, on a procédé en trouvant le moment d'inertie de chacune des parties géométriques de l'avion pour ensuite regarder l'inertie de chacune de ces parties appliqué centre de masse de l'avion et de les sommer pour obtenir le moment d'inertie de l'avion au complet. Ces calculs ont été programmé dans le fichier *CalculateMI.m.* En troisième lieu, le moment d'inertie, le centre de masse et l'orientation des forces ont été mis en rotation pour avoir les résultats dans le système d'axe de l'observateur. En quatrième lieu, on a trouvé l'accélération angulaire dans le référentiel de l'observateur. Ces calculs des deux derniers points sont programmés dans le fichier *Calculateaa.m*. Finalement, on a déplacé notre centre de masse pour le rendre relatif au nez de l'avion dans le référentiel de l'observateur. Concernant les unités de mesures, on utilise le KN pour la force, le kg pour la masse et des m pour les dimensions.

Ainsi, l'*équation 12* est utilisée. En quatrième lieu, on peut alors trouver le nouveau centre de masse de l'avion dans ce nouveau référentiel et son nouveau moment d'inertie. Le travail de ces 3 derniers points est programmé dans le fichier *CalculateMI.m* du projet. Enfin, en cinquième lieu, les équations *13*, *14*, *15* et *16* font objet majeur dans le calcul de l'accélération angulaire de l'avion dont la programmation figure dans le fichier *Calculateaa.m* du projet. Concernant les unités de mesures, on utilise le MN pour la force, le kg pour la masse et des m pour les longueurs.

Ensuite nous avons récoltés les résultats dans 2 cas de tests différents.

Cas 1

Dans le premier cas, la simulation sert à représenter la situation où l'avion est au sol. L'on pourrait penser à cette situation comme le décollage de l'avion. En effet, l'avion est caractérisé par une vitesse angulaire nulle et une force de 11 MN exercée par les deux moteurs. Dans cette simulation, la portée est de 260 MN.

Tableau I. Paramètres d'entrée dans le cas 1.

Expérience	**PosA** = [pos_x, pos_y, pos_z]	**Ar**	**Va** = [va_x, va_y, va_z]	Forces = [Force_md, Force_mg, Force_p]
1	[26.77, 0, 1.595]	0	[0,0,0]	[11000,11000,260000]

```
%Simulation Cas 1
posA = [3.82 + 22.95, 0, 1.345 + 0.25];
ar = 0;
va = [0,0,0];
Forces = [11 000,11000,260000];

[pcm, MI, aa] = Devoir1(posA,ar,va,Forces);
```

Ainsi, dans Matlab, la fonction Devoir1 est appelée avec les paramètres caractérisant la simulation du cas 1. Cela permet d'obtenir, par calcul, les valeurs que nous cherchons par rapport à l'avion, soit le point centre de masse, le moment d'inertie et l'accélération angulaire.

Vérifions si les résultats obtenus ont du sens.

Centre de masse

Dans le cas #1, le centre de masse de l'avions est $[9.5247 \quad 0 \quad 0.8527]$. Cela est logique et s'explique facilement. Effectivement, la coordonnée en X du centre de masse de l'avion est proche de la moitié de la longueur de l'avion, sans l'être exactement dû à l'impact de la masse de l'aileron et la masse de la cabine de pilotage. Aussi, l'avion est centré en 0 selon l'axe des Y. Le centre de l'avion est proche du 0 selon l'axe des Z, sans l'être exactement. La coordonnée en Z du centre de masse de l'avion est plutôt proche de la valeur du rayon de la cabine de pilotage, corrigée par l'impact de la masse de l'aileron de l'avion.

Moment d'inertie

En analysant le moment d'inertie $(1 \times 10^5) \times \begin{bmatrix} 2.6902 & 0 & 0.1910 \\ 0 & 3.6863 & 0 \\ 0.1910 & 0 & 6.1876 \end{bmatrix}$, il est possible d'émettre quelques observations. En effet, comme nous pouvons observer, le moment d'inertie est positif. Cela est logique étant donné que le moment d'inertie représente la répartition de la matière d'une forme, caractérisant sa géométrie.

Accélération angulaire

L'accélération angulaire de l'avion est $[0 \quad 0.0303 \quad 0]^T$. Les composantes en X et Z de l'accélération angulaire sont nulles étant donné que dans le cas 1, les forces des deux moteurs sont égales. Ainsi, aucune rotation sur ces axes est engendrée. La seule rotation sur l'avion dans la situation 1 est selon l'axe Y, cette rotation étant causée par la portée sur les ailes. Ce phénomène est bien visible dans le résultat apporté par Matlab. En effet, la composante en Y de l'accélération angulaire n'est pas nulle.

Cas 2

Dans un deuxième temps, nous avons expérimentés avec un cas différent. En effet, nous avons proposé que le pilote change les forces du moteur droit, en le réduisant de 11 MN à 8 MN. Voici les valeurs initiales.

Tableau II. Valeurs insérées dans la fonction devoir 1 lors des tests dans le cas 2.

Expérience	posA (m)	Ar (rad)	Va (rad/s)	Forces (KN)
1	[4198, 0 ,618]	0.15	[0.0, -0.003, -0.01]	[8000,11000,260000]

Dans ce cas-ci, nous avons eu les trois valeurs suivantes, soit le centre de masse, le moment d'inertie et l'accélération angulaire.

Centre de masse

Le centre de masse de l'avions est de $(1 \times 10^3) \times [4.1808 \quad 0 \quad 0.6158]$. Comme attendu, le centre de masse selon l'axe des *Y* reste de 0 (voir tableau 2) puisque l'avion a une symétrie selon l'axe des *Y*. De plus, en ce qui concerne nos valeurs selon l'axe des *X* et l'axe des *Z*, celles-ci sont logiques puisque la position initiale de l'avion était dans le 1er quadrant (X, et Z positif) avec un angle de rotation en 0 et π/2 comme inclinaison (0.15 rad).

Moment d'inertie

Le moment d'inertie du 2e cas est de $(1 \times 10^5) \times \begin{bmatrix} 2.8247 & 0 & 0.6992 \\ 0 & 3.6863 & 0 \\ 0.6992 & 0 & 6.0530 \end{bmatrix}$.

Comme nous pouvons observer, le moment d'inertie se trouve déplacé par rapport à son point original (cas 1) puisque l'avion a subi une rotation. En effet, la position de l'avion est différente ce qui fait que sa capacité de tourner va être différente. Comme nous pouvons observer, il est logique que le moment d'inertie soit positif. De plus, puisque l'avion est symétrique par rapport à l'axe de *Y,* seulement a composante *YY* de la matrice non nulle. Ceci n'est pas le cas pour l'axe des *X* et l'axe des *Z.*

Accélération angulaire

L'accélération angulaire de l'avion est de $[0.0008 \quad 0.5799 \quad 0.0101]^T$. Dans le cas 2, l'avion a une accélération par rapport aux trois axes, soit *X*, *Y* et *Z.* Ceci est causé par la rotation engendrée par la différence dans les forces deux moteurs. En effet, puisque le moteur de droit pousse l'avion de son cotée droit à 8 NM et que le moteur de gauche pousse l'avion de son cotée gauche à 11NM, l'avion commence à avoir une rotation angulaire. Comme nous pouvons remarquer, l'avion tourne de plus en plus vite, puisque l'accélération n'est pas nulle. Ceci est attendu lorsque les deux moteurs travaillent à forces différentes.

Conclusion

Pour conclure, le but d'étudier le comportement de l'avion CRJ-200 de Bombardier a été un succès. Une méthode de travail efficace a été mise en place pour atteindre la réalisation de ce travail. Ainsi, nous avons dû travailler sur la plateforme Git pour tous les fichiers Matlab et autres, afin que tous les membres de l'équipe puissent y avoir accès et y apporter des modifications. De plus, nous avons organisé plusieurs rencontres pour se tenir à jour dans le travail. Ces rencontres ont été dans le but de définir la méthode de travail employée, les unités de mesures utilisées, la définition d'une structure de fichiers Matlab, ce qu'il fallait avoir complété pour la prochaine rencontre et plus encore. Bien entendu, nous avons rencontré plusieurs défis dans la réalisation de ce devoir. En effet, Matlab n'était pas un programme connu par tous les membres de l'équipe et on a dû faire un effort pour l'apprendre. Un autre défi était de calculer à la main les résultats obtenus par la programmation sur Matlab afin de valider les résultats. Par ailleurs, il serait intéressant de simuler l'avion dans un cas extrême lorsqu'un de ses moteurs tombe en panne et dont la force exercée par ce dernier tombe à 0N.