目　录

3．用局部而非全局的反例对证明的批评

4．全局的反例对猜想的批评

（a）猜想之拒斥。让步法

（b）反例之拒斥。怪物排除法

（c）以例外排除法改进猜想。逐步排除。策略性撤退或稳扎稳打

（d）怪物校正法

（e）以引理并入法改进猜想。证明生成的定理 VS.素朴的猜想

5．全局而非局部的反例对证明分析的批评。严格性的问题

（a）守御定理的怪物排除

（b）隐藏引理

（c）一证多驳法

（d）证明 VS.证明分析。定理概念与证明分析之严格性概念的相对化

6．再论局部而非全局的反例对证明的批评。内容问题

（a）以更深入的证明扩增内容

（b）向最终证明与相应的充分必要条件进军

（c）不同证明得出不同定理

7．重谈内容问题

（a）素朴猜想的素朴性

（b）作为多证多驳法之基础的归纳

（c）演绎的猜测 VS.素朴的猜测

（d）以演绎猜测扩增内容

（e）逻辑的反例 VS.探试的反例

8．概念的形成

（a）以概念拉伸来反驳。重估怪物排除——兼重估错误与反驳之概念

（b）证明引生的概念 VS.素朴的概念。理论分类 VS.素朴分类

（c）再论逻辑反驳与探试反驳

（d）理论的概念拉伸 VS.素朴的概念拉伸。连续发展 VS.批判发展

（e）内容增加的极限。理论反驳 VS.素朴反驳

9．批评如何可把数学真理变为逻辑真理

（a）无限制的概念拉伸摧毁意义与真理

（b）温和的概念拉伸可将数学真理变为逻辑真理

第 2 章

编者引言

1．把猜想翻译成矢量代数“完全被认可的”术语。翻译的问题

2．猜想的另一个证明

3. 关于证明之终极性的一些疑问。翻译的程序以及实在论者的定义方法 VS.唯名论者的定义方法

附录 1

多证多驳法中的另一个案例研究

1．柯西为“连续性原理”所作的辩护

2．赛德尔的证明以及证明生成的一致收敛概念

3．阿贝尔的例外排除法

4．有关证明分析法之发现的障碍

附录 2

演绎主义方法 VS.探试法

作者简介

拉卡托斯（Imre Lakatos, 1922—1974），英籍匈牙利人，出身于匈牙利的一个犹太人家庭，是20世纪著名的数学哲学家、科学哲学家，也是现代科学哲学历史学派的主要代表之一。二战期间是积极的共产党人，1950年至1953年以修正主义者之名被监禁。1956年苏联出兵匈牙利后，流亡到英国，继续求学，获剑桥大学哲学博士学位，后入英国籍。从20世纪60年代初起到去世为止，一直在伦敦经济学院任教，与波普（Karl Popper）和沃特金斯（John Watkins）共事，继波普任科学方法、逻辑学和哲学系主任，并任《科学哲学》杂志主编。主要著作有《科学研究纲领方法论》、《数学、科学与认识论》、《证明与反驳》。

译者简介

方刚，博士，副教授，现任教于中国科学技术大学科技传播系。

兰钊，中国科学技术大学理学学士，目前正于美国伊利诺大学芝加哥分校（University of Illinois at Chicago）攻读博士学位。

西方数学文化理念传播译丛

丛书主编　汪　宇

Proofs and Refutations

证明与反驳

数　学　发　现　的　逻　辑

［英］伊姆雷·拉卡托斯　著

方刚　兰钊　译

復旦大學出版社

www.fudanpress.com.cn

图书在版编目（CIP）数据

证明与反驳——数学发现的逻辑/〔英〕伊姆雷·拉卡托斯著；方刚，兰钊译．—上海：复旦大学出版社，2007.3

（西方数学文化理念传播译丛）

书名原文：Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery

ISBN 978-7-309-05397-5

Ⅰ．证…　Ⅱ．①拉…②方…③兰…　Ⅲ．数学方法-科学方法论-研究　Ⅳ．01-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 022030 号

著作权合同登记号　图字：09-2005-407 号

证明与反驳——数学发现的逻辑

〔英〕伊姆雷·拉卡托斯　著　方　刚　兰　钊　译

责任编辑/范仁梅

复旦大学出版社有限公司出版发行

上海市国权路 579 号　邮编：200433

网址：fupnet@fudanpress.com　　http://www.fudanpress.com

门市零售：86-21-65642857　　团体订购：86-21-65118853

外埠邮购：86-21-65109143

上海申松立信印刷有限责任公司

开本 890×1240　1/32　印张 6.625　字数 191 千

2011 年 5 月第 1 版第 3 次印刷

印数 6701—8800

ISBN 978-7-309-05397-5/0・389

定价：15.00 元

* * *

目的是要解决数学方法论的某些问题。

内容提要

该书是匈牙利裔英国籍著名哲学家伊姆雷•拉卡托斯于 20 世纪 60 年代完成的一部探索数学史上新的发现产生过程的经典著作。书的主要内容包括作者用 5 年时间收集的两个典型的数学案例，以及本书的编者添加的拉卡托斯 1961 年在剑桥大学所撰博士论文的部分内容。

拉卡托斯是以对话体的形式进行写作的，他虚构了教师在课堂上与学生们讨论正多面体欧拉公式 V-E+F=2 的猜想与发现、证明和反驳的全过程，形象地展现了数学史上对此问题进行研究探索的真实的历史图景，以此来挑战和批判以希尔伯特为代表的认为数学等同于形式公理的抽象、把数学哲学与数学史割裂开来的形式主义数学史观。此篇光辉论著的主要目的是要解决数学方法论的基本问题，以一种探索和发现的情境逻辑来代替形式主义和逻辑实证主义的抽象教条。正如拉卡托斯所说，非形式、准经验的数学的发展，并不只靠逐步增加的毋庸置疑的定理的数目，而是靠以思辨与批评、证明与反驳之逻辑对最初猜想的持续不断的改进。

本书的写作形式也颇为新颖，作者以课堂讨论的对话形式来展现数学的发现，生动地体现了数学发展的辩证过程。正因为此，该书还可以作为数学教学的案例，给广大数学教师提供一种具有实践意义的教学法。

特别要提请读者注意的是，该著作脚注的内容十分丰富，诸多数学史上的争论都体现在注释之中，所以脚注部分也应该看作是正文的有机组成部分，不可忽略。

作者在著作后面还列了一个非常完整的参考书目，对书中提到的问题和观点感兴趣的读者可以按图索骥，定会有更大的收获。

编者前言

我们伟大的朋友和导师伊姆雷・拉卡托斯（Imre Lakatos）于 1974 年 2 月 2 日意外去世了。那时他正（像往常一样）忙于许多学术项目，最重要之一是出版他那才华横溢的论文《证明与反驳》（Proofs and Refutations）的增改本，此文曾分 4 部发表于《不列颠科学哲学杂志》（The British Journal for the Philosophy of Science, 14, 1963—1964）。拉卡托斯签订出书合同已久，但因他盼望修订与进一步改进此文，并另行增添些扎实的材料，而搁置了出版。这项工作一再拖延，相当程度上是由于他的兴趣转向物理科学之哲学，但在 1973 年夏天，他终于决定着手出版之事了。那个夏日里，我们分别同他讨论了出书计划；在他的身体境况不断恶化时，我们试图努力编出一本同拉卡托斯的设想尽可能接近的书。

于是，我们在原《证明与反驳》论文（作为本书第一章）的基础上增加了 3 段新文字。首先，我们为正文增添了第二部分，是关于庞加莱（Poincaré）对笛卡儿（Descartes）-欧拉（Euler）猜想所作的矢量代数证明的，取材于拉卡托斯 1961 年剑桥博士论文的第二章。（原《证明与

反驳》文稿是其博士论文的第一章经大量修订与改进的版本。）而其博士论文第三章的一部分成了现在的附录 1，内含对证明与反驳法增加的一个新的案例研究，案例是柯西（Cauchy）对于如下定理的证明：任何收敛的连续函数项级数的极限自身是连续的。正文的第二章和附录 1 应能消除读过《证明与反驳》的数学家所表达的疑虑：拉卡托斯所描述的证明分析（proof-analysis）法或许只适用于多面体研究，鉴于这个“近经验”（near empirical）主题的反例唾手可得，也许不适用于“真正的”数学。增加的第 3 段文字（附录 2）亦取材于拉卡托斯学位论文第三章的一部分，是关于他在数学的发展、表述、教学方面的主张。

拉卡托斯之所以推迟出版的原因之一，是他认识到，部分外加的材料固然含有许多新观点并对他的立场有发展之处，却仍需进一步斟酌和进一步对历史资料的研究，尤其是（附录 1 中）关于柯西与傅立叶材料的真实性的考证。我们也意识到这些材料中有若干疑难、模棱两可及遗漏之处。然而，我们以为不应当更改拉卡托斯的手稿内容。要做到详细阐释上述材料并作增补，我们均因种种条件限制不能提供翔实而不可或缺的历史资料研究。于是，面临着要么根本不出版这些材料，要么在未完成的状态下出版，我们决定选择后者。我们感觉，上述的材料是很使人感兴趣的；并希望它将激起其他学者在必要时来扩充和纠正它。

总而言之，我们认为，修改拉卡托斯的材料内容是不合适的，即便是对我们确信拉卡托斯已改变了立场的那些部分。所以，我们只限于（以星号标示的按语）指出其中我们应该说服拉卡托斯改动了的一部分，及指出（这常与前者是一回事的）我们相信拉卡托斯在如今出版时会修改的一部分材料。（在他完成学位论文到去世的 13 年中，他的学术立场当然变化极大。他在［1970］的文章中解释了其总体哲学的主要倾向。我们应当提到，拉卡托斯认为他的科学研究纲领方法论对他的数学哲学有重要的意义。）

我们处理表述内容的方法是，几乎完全不动拉卡托斯自己曾发表的材料（即正文第 1 章，仅有的例外是几处错印与模棱两可的小疏漏）。然而我们在相当程度上修改了之前未曾发表的材料——但是，再次强调，修改仅限于形式，不涉及内容。由于这看起来像是颇不寻常的步骤，故可能的话还是辩护几句较好。

拉卡托斯总是在他将要公开发表的所有材料的表达上费很大的心思，而且发表前他通常要让这些材料先在同事和朋友间广泛传阅，听取批评与改进的建议。我们肯定，此处首次发表的材料，他应该亦会如此处理，且改动得会比我们斗胆引入的更为剧烈。我们（经由亲身经验）所了解的拉卡托斯为了把他的主张尽可能表述清晰所付出的艰辛，也促使我们尽自己所能努力完善这些材料的表述。倘若拉卡托斯本人修改过底稿，这几段新文字便自然会比其所应当成就的面貌更好；但是，我们感觉同他是如此的亲近，同时也因为深入地参与了他以前的出版事务，于是，我们可以做一次合理的尝试，将这些材料改进到接近他自己的高标准要求。

我们非常高兴能有此机会来编辑拉卡托斯数学哲学方面一些重要著作并完成这个版本，因为，借此可以报答他所给予我们的一部分学术与私交的恩惠了。

约翰 • 沃拉尔

（John Worrall）

埃利·扎哈尔

（Elie Zahar）

致　谢

这本书的底稿历史较长，且变化较多，这在编者前言中已部分指出了。根据拉卡托斯加在他1963—1964年原论文（此处重印作第一章）上的致谢词，写作工作于1958—1959年在剑桥的国王学院（King's College）时开始，其第一次宣读是在1959年3月伦敦经济学院（London School of Economics）卡尔·波普尔（Karl Popper）的研讨班上。另一版本并入他1961年的剑桥博士论文里，本书的余下部分也以此为基础。学位论文的准备在R·B·布莱思怀特（R. B. Braithwaite）教授的指导下进行。与此一道，拉卡托斯还感谢了洛克菲勒基金会（Rockefeller Foundation）的经济资助，以及“接受了T·J·斯迈利（T. J. Smiley）博士的诸多帮助、鼓励和有价值的批评”。拉卡托斯致谢词的余下部分如此写道：

作者在伦敦经济学院准备这一最新版本时，曾努力留意尤其是以下诸位的批评与建议：J·阿加西（J. Agassi）博士、I·哈金（I. Hacking）博士、W·C·尼尔（W. C. Kneale）与R·蒙田（R. Montague）教授、A·穆斯格拉夫（A. Musgrave）、M·波兰尼（M. Polanyi）教授和J·W·N·瓦特金斯（J. W. N. Watkins）。在G波利亚（G. Pólya）与B·L·范德瓦尔登（B. L. Van der Waerden）教授的批判性评论的激励下，作者改进了例外排除法的处理。怪物排除法与怪物校正法的区分是B·麦克莱南（B. MacLennan）建议的。

此文当被视作在波利亚之复兴数学探试法与波普尔之批判哲学的背景下的产物。

1963—1964年版的原论文有如下的致献词：

献给乔治·波利亚75岁与卡尔·波普尔60岁生日。

准备此书时，编者们曾受到约翰·贝尔（John Bell）、迈克·哈莱特（Mike Hallet）、莫舍·玛肖韦（Moshé Machover）与杰里·拉韦兹（Jerry Ravetz）的帮助，他们皆欣然阅读了第二章与附录的草稿，并提出有助益的批评。

我们还要感谢桑德拉·D·米歇尔（Sandra D. Mitchell）的工作，尤其还有格里高利·柯里（Gregory Currie），他仔细评审了我们对于拉卡托斯著作的加工工作。

约翰·沃拉尔

埃利·扎哈尔

作者引言

思想史上屡见不鲜的是，当一个强有力的新方法出现时，可采用此新方法处理的问题之研究进步迅速、引人瞩目，余者却趋于被忽视甚至遗忘，其研究就会遭到鄙视。

由于元数学（metamathematics）劲头十足地发展，此一情形在我们世纪的数学哲学中看来业已出现。

元数学的主要内容是一种对数学的抽象，在其间，以形式系统替代数学理论、以合式公式（well-formed formula）的某种序列替代证明、以“理论上可有可无”却“排印简便”〔1〕的“缩略标记”（abbreviatory devices）替代定义。此种抽象由希尔伯特（Hilbert）发明，旨在提供一种强有力的技术工具，以解决数学方法论中的一部分问题。同时，却尚有在元数学抽象之运用范围外的问题，与非形式（inhaltliche，就内容而言）数学及其发展和解数学题的情境逻辑（situational logic）有关的所有问题仍然处在其中。

倾向于认为数学等同于其形式公理抽象（以及数学哲学等同于元数学）的数理哲学学派，我称之为“形式主义”学派。形式主义立场的最明白阐述之一可在卡尔纳普（Carnap）［1937］那里找到。卡尔纳普声称：（a）“哲学将让位于科学逻辑……”，（b）“科学逻辑不过是科学语言的逻辑句法……”，（c）“元数学是数学语言的句法”（第 xiii 页与第 9 页）。换言之，数学哲学将被元数学取代。

形式主义把数学哲学与数学史割裂开来，因为，据形式主义的数学概念，真正的数学并无历史。所有形式主义者皆会大体同意罗素那措词“罗曼蒂克”但立意严肃的评论，依此，则布尔（Boole）的《思想规律》（Laws of Thought）（1854）就是“古往今来第一本数学书”〔2〕。形式主义拒不承认大部分过去公认的数学之作为数学的资格，并对其发展只字不言。所有“创造”时期与几乎所有“批判”时期的数学理论都不许迈入形式主义的天堂，天堂里数学理论如炽天使（Seraphim）〔3〕一般存在，尘世间不确定性的种种污迹被清洗得一干二净。然而，形式主义者又往往为堕落的天使留一扇小小的后门：对一些“数学与非数学之混合物”来说，倘若后来发现有“在某种意义上容纳它们”的形式系统存在，它们亦可获准升天（柯利（Curry）［1951］，第 56—57 页）。依此种说法，则牛顿不能不等 4 个世纪，直到皮亚诺、罗素与奎因（Quine）以形式化微积分助他升入天堂了。狄拉克（Dirac）更是幸运：他还在世时，L·施瓦兹（L. Schwartz）便拯救了他的灵魂。或许我们这里倒该提提元数学家自相矛盾的困境：

就是照形式主义甚至演绎主义的标准来看，他们亦非诚实的数学家。迪厄多内（Dieudonné）说，以公理形式表述推理过程是“任何有志于诚实治学的数学家，都肩负着的绝对义务”（[1939]，第225页，斜体是我加的）。

当此形式主义处于支配地位之时，我们要套用康德（Kant）的话：数学史，在缺乏哲学的引导下，已变得盲目了；而数学哲学，在置数学史上最引人入胜的现象于不顾时，已变得空洞了。

“形式主义”乃是逻辑实证主义哲学的堡垒。根据逻辑实证主义，一命题之所以有意义仅当其为“重言式的”或是经验的陈述。由于非形式数学既非“重言式的”亦非经验的，其必为无意义的纯粹胡诌〔4〕。逻辑实证主义的教条对数学史与数学哲学都是有害的。

这些文章的目的是要解决数学方法论的某些问题。我使用“方法论”此词，其意义近于波利亚与伯奈斯（Bernays）的“探试法”〔5〕和波普尔的“发现的逻辑”或“情境逻辑”〔6〕。当下，套用“数学方法论”一词作为“元数学”的同义词无疑是形式主义的手法，这说明在形式主义的数学哲学中，没有作为发现的逻辑的方法论之地位〔7〕。形式主义者说，数学与形式化的数学是等同的。但是，在一个形式化的理论中可以发现（discover）什么呢？两种情形。第一，可发现一些问题的解法，而一个调试得当的图灵机（Turing Machine）可在有限的时间内解决这些问题（如：某个宣称的证明是否为一证明？）。没有数学家会对贯彻这些判定过程指定的枯燥机械的“方法”感兴趣。第二，还可以发现一些问题的解法（如：在一不可判定的理论中，某公式是否为一定理？），在这些问题中，可作指导的“方法”只有“无法驾驭的顿悟与好运气”了。

现在，现实的数学不再坚持机械的理性主义与瞎猜的非理性主义之间的苍白选择了〔8〕：研究非形式数学，可为正开展工作的数学家得出一套丰富的情境逻辑，它既非机械的，亦不是非理性的，但不能为形式主义哲学所承认，更不能为其所激发。

若没有对形式主义的批判和最终摒弃，数学史与数学发现的逻辑，即数学思想之系统发生与个体发生〔9〕，是不能得到发展的。

可是，形式主义数学哲学有很深的根基，它是教条主义数学哲学之长链的最新的一个环节。教条主义者与怀疑主义者的争论已有两千多年。教条主义者以为——依靠我们人类的智识以及/或者感官的力量——我们能获得真理并知晓我们已获得了它。相反，怀疑主义者以为要么我们全然不能获知真理（除非经由神秘体验之助），要么我们不能知晓我们是否能获得或已经获得了真理。在这场大辩论中，双方的论点不断与时俱进，而数学一直是教条主义引以为豪的堡垒。不论何时，只要数学教条主义陷入了“危机”，一个新版本便会又一次提供货真价实的严格而终极的基础，而数学即由之恢复权威的、一贯正确的、不可驳倒的形象，俨然是“上帝迄今愿意赐予人类的唯一科学”（霍布斯（Hobbes）[1651]，第15页）。大多数怀疑主义者都听任教条主义认识论的这个根据地固若金汤〔10〕。如今对它的挑战也早该来临了。

这个案例研究的核心是要向数学形式主义挑战，但却不会直接地反对数学教条主义的根本观点。谦虚地说，它的目标是详细发挥此一论点：非形式、准经验的数学的发展，并不只靠逐步增加的毋庸置疑的定理的数目，而是靠以思辨与批评、证明与反驳之逻辑对最初猜想的持

续不断的改进。不过，因为元数学是如今正迅速发展的非形式、准经验的数学的一个范式，所以，此文亦会隐含地挑战现代数学的教条主义。目前元数学之历史的研究者将会在其自己的领域里辨认出此处描述的模式。

对话形式当可折射出故事发展的辩证性；其意在包含而体现一种合理地重建或“提炼净化”过的历史。真实的历史会插在脚注当中，故大多数脚注应该看作此文有机的组成部分。

注　释

〔1〕丘奇（Church）［1956］，第 1 卷，第 76—77 页。亦参见皮亚诺（Peano）［1894］，第 49 页，以及罗素（Russell）和怀特海（Whitehead）［1910—1913］，第 1 卷，第 12 页。此是帕斯卡（Pascal）［1659］规划的欧几里得（Euclid）纲领的一个固有组成部分，参见拉卡托斯［1962］，第 158 页。

〔2〕罗素［1901］。此文以《数学与形而上学家》（Mathematics and the Metaphysicians）为标题重印罗素［1918］的第 5 章。引语可于 1953 年企鹅版（Penguin edition）的第 74 页上找到。在罗素［1918］的前言中，他论及此文：“它所以有这样的语调，部分原因是编辑请求我行文‘尽可能罗曼蒂克’。”

〔3〕译注：Seraphim，希伯来语，本意“燃烧中之物”（burning ones），指“炽天使”（“撒拉弗”），基督教九级天使之最高者，本性为“爱”，象征“光明”、“热情”和“纯洁”，参见《旧约・以赛亚书》第 6 章第 2—6 节。

〔4〕据图开特（Turquette），哥德尔式（Gödelian）语句是无意义的（［1950］，第 129 页）。图开特持论反对柯比（Copi），后者声称，因为哥德尔式语句是先验的真理，且是非分析的，它们便驳倒了先验的分析论（［1949］与［1950］）。他们均未注意到，从这个观点来看，哥德尔式语句的独特状态在于这些定理是非形式数学的定理，并且事实上他们是在一个特例下讨论非形式数学的状况。

〔5〕波利亚［1945］，尤其是第 102 页，亦见［1954］、［1962a］；伯奈斯［1947］，尤其是第 187 页。

〔6〕波普尔［1934］，随后见于［1945］，尤其是第 90 页（或第 4 版［1962］，第 97 页）；亦见［1957］，第 147 页以下。

〔7〕可以举例论述此点，如塔斯基（Tarski）［1930a］和［1930b］。在前一篇文字中，塔斯基明确使用“演绎科学”一词，作为“形式化演绎科学”的略语。他说：“基本上是在相同的意义上，形式化演绎学科构成元数学的研究领域，而空间实体构成几何学的研究领域。”在第二篇文中却给此一合情合理的表述来了一个密谋的霸道的歪曲：“基本上是在相同的意义上，演绎学科构成演绎科学方法论的主题，空间实体构成几何学的主题，而动物构成动物学的主题。自然，并非所有演绎学科都纳入了适合作为科学研究之对象的形式。譬如，那些没有确定的逻辑基础的，没有精确的推论规则的，以及以通常模棱两可而不确切的口头语言词汇表述其定理的——一句话，那些尚未被形式化的——都不适合。因此，元数学研究只限于讨论形式化演绎学科。”有新意之处是，前一个表述声称元数学的主题是形式化演绎学科，

后一个表述声称，只是因为非形式化演绎科学根本不是科学研究的合适对象，所以元数学的主题限制在形式化演绎学科中。这意味着，形式化学科的史前史（prehistory）不能是科学研究的主题——不像一个动物物种的史前史，正可以成为十分科学的进化论的题材。没有人会怀疑，关于数学理论的某些问题只能在其形式化后才可处理，正如有关人类的某些问题（如人体解剖学）只能在人死后才可处理。但几乎没人会由此推论，人类仅仅在他们“纳入了‘死’的形式”时，“对于科学研究方是合适的”，因而生物学研究只限于讨论死者——虽然，我并不会惊奇，如果在早期解剖学的辉煌日子里，当强有力的新解剖法出现时，维萨里（Vesalius）的一些充满热情的学生曾认为生物学等同于对尸体的分析。（译注：Andreas Vesalius，1514—1564，比利时解剖学家、医师，现代人体解剖学之奠基人，首次以解剖人尸作教学演示，著有《人体结构》（De Humani Corporis Fabrica）7卷。）

塔斯基对于除形式系统之外，是否存在他种方法论持否定态度。在其［1941］的前言中，他详细论述了这种否定态度：“经验科学的方法论课程……必须主要地限于评估与批评试探性的摸索与不成功的努力。”理由是，经验科学是非科学的：因为塔斯基定义一个科学理论为“被断言的陈述按某些规则排列的系统”（同上）。

〔8〕形式主义哲学最危险的奇异行为之一是以下的习惯：（1）陈述某种情形——以正确的方式——关于形式系统的；（2）接着说这适用于“数学”——此又是正确的，如果我们接受数学与形式系统之一致性；（3）然后就偷换词义，按通常的意义使用“数学”一词。所以奎因说（［1951］，第87页），“这反映出数学上的典型情形；数学家由无法驾驭的领悟与好运偶然发现了证明，但此后其他数学家可以检验他的证明”。但通常检验一个普通（非形式）证明是一项棘手的工作，而偶然发现一个“错误”需要与偶然发现一个证明同样的领悟力与好运气：在非形式证明中发现“错误”有时也许需要几十年——如果不是几百年的话。

〔9〕H·庞加莱与G·波利亚均提议将E·海克尔（Haeckel）有关个体发生重演系统发生的“基本生物发生律”应用于思想发展，尤其是数学的思想发展中（庞加莱［1908］，第135页，及波利亚［1962b］）。在此引用庞加莱的话：“动物学家坚持说，一个动物的胚胎发育在轮廓上重演它的历代祖先通贯地质时代的整个历史。看来心智的发展也是同样道理……为此故，科学史应当是我们的第一指南”（G·B·霍尔斯特德（G. B. Halsted）授权译本，第437页）。（译注：Ernst Heinrich Haeckel，1834—1919，德国生物学家、哲学家，达尔文主义支持者，提出生物发生律，以为进化论之证据。）

〔10〕关于数学在教条主义与怀疑主义之争中扮演的角色之讨论，参见我的［1962］。

第1章

1．一个问题与一个猜想

对话发生在一间虚构的教室里。课堂上正热衷于讨论一个问题：在多面体——尤其是正多面体——的顶点数 V、棱数 E、面数 F 之间，是否有一定的关系呢？就像多边形的顶点数与边数的通常的关系，即边数与顶点数相等：V＝E？依照后一关系，我们能根据边数（或顶点数）划分不同的多边形：三角形、四边形、五边形等等。类似的关系将会有助于给多面体分类。

在多次尝试和错误之后，他们注意到，对所有正多面体有 V－E＋F＝2〔1〕。有人猜测这可能对无论什么样的多面体都成立。其他人尝试去证伪此一猜想，试着用不同的方法检验它——它始终成立。结果确证（corroborate）了这个猜想，并暗示它可以被证明（proved）。正当此时——问题与猜想的阶段之后——我们走进了教室〔2〕。老师正欲给出一个证明。

2．一个证明

老师：上一节课，我们得到了一个关于多面体的猜想，即对所有多面体有 V－E＋F＝2，此处 V 为顶点数，E 为棱数，F 为面数。我们曾用多种不同的方法检验它，但尚未证明它。有人找到证明了吗？

学生 SIGMA：“我个人得承认我尚不能构思出此定理的一个严格证明……然而，既然在如此多的例子中，它的真实性已经建立起来，便不用怀疑它对任何立体皆能成立。这样此命题看来便被圆满地说明了。”〔3〕不过，若您有一个证明，定请道来。

老师：实则我有一个，由下列思想实验组成。第一步：且想象一个多面体是空心的，其表面由薄橡胶制成。我们若切去一面，便可使余下的表面平铺拉伸于黑板上而不撕裂它。面与棱将变形，棱或将变弯，但 V 与 E 不变，故而当且仅当对于初始多面体有 V－E＋F＝2 时，对于此平面网状物就有 V－E＋F＝1——记住我们移去了一个面。（图 1 画的是立方体情形下的平面网状物。）第二步：现在我们把这地图分成三角形——它看上去确像一张地理上的图。我们在尚非（可能由曲线围成的）三角形的（可能由曲线围成的）多边形中连上（可能是曲线的）对角线。连每一对角线时我们都使 E 与 F 各增加了 1，故总数 V－E＋F 不变（图 2）。第三步：我们从这三角形化的网状物中一个一个地移走三角形。为此我们要么移去一条棱边，而减掉一个面一条棱边（图 3（a）），要么移去两条棱边与一个顶点，而减掉一个面、两条棱边与一个顶点（图 3（b））。可见，若在移动一个三角形之前有 V－E＋F＝1，移动之后亦复如是。末了便单单剩下一个三角形，对它而言 V－E＋F＝1 是成立的。于是我们便证明了我们的猜想〔4〕。

学生 DELTA：您现在该叫它定理了。它再无丝毫猜想的成分了〔5〕。

图 1

图 2

图 3

学生 ALPHA：我怀疑。我知道这实验能施于立方体或四面体之上，但我如何知道它能施于任何多面体？举例来说，先生，您确定任何多面体移去一个面之后，都能平铺拉伸在黑板上吗？我对您的第一步有些怀疑。

学生 BETA：您肯定在把地图三角形化以后，每新添一条边都能产生一个新面吗？我对您的第二步有些怀疑。

学生 GAMMA：您确定在一个个地挪去三角形时，仅有去掉一条棱边和去掉两条棱边一个顶点这两种选择吗？您甚至肯定在过程的最后一定仅剩一个三角形吗？我对您的第三步有些怀疑〔6〕。

老师：我当然没有把握。

ALPHA：但如此我们岂不比以前更糟了！不但是一个猜想，现在至少有 3 个了！而您把这叫做一个“证明”!

老师：我承认，用“证明”这个传统名字来称呼此一思想实验，也许的确会被看作是有些误导。我并不以为它确立了猜想的真实性。

DELTA：那么它又是在做什么呢？您认为一个数学证明要证明什么？

老师：这个难以捉摸的问题，我们之后会试着回答。在那之前我提议，保留“证明”这个确立已久的崇高术语来指称思想实验——或称“准实验”（quasi-experiment），它暗示了原猜想之分解为子猜想或引理。这样便可将猜想嵌入一堆可能非常不同的知识中。比如，我们的“证明”已将原猜想——关于晶体或者说立体的——嵌入橡胶膜理论中。笛卡儿和欧拉，这两位原猜想的始作俑者，是做梦亦想不到这点的〔7〕。

3．用局部而非全局的反例对证明的批评

老师：按证明的暗示把猜想分解，便为猜想的检验开拓了新的视野。分解开扩了猜想的多个

方面，我们的批评于是就有更多的目标。我们现在至少有 3 个找反例的机会，而不止从前的 1 个了！

GAMMA：我已表示了，我不喜欢您的第三引理（即由拉伸与随后的三角形化得到网状物后，要从其上移走三角形，我们仅有两种选择：不移去一条边，便移去两条边与一个顶点）。我怀疑挪走三角形时是否会出现别的花样。

老师：怀疑不算是批评。

GAMMA：那么反例算是批评吗？

老师：当然算。猜想可以忽略不喜欢与怀疑，却不能无视反例。

THETA［旁白］：猜想明显与它们的代言人不是一个鼻孔出气。

GAMMA：我要举一个普通的反例。且看在一个立方体上施行了前两个操作所得的三角形化网状物（图 2）。这时，若我自这网状物的内部移去一个三角形，正如可以从七巧板中间拿出一块一样，我便在未移走任一边或一顶点的情况下移走了一个三角形。因此，第三引理是错的——不但对立方体如此，对除四面体之外的所有多面体皆如此，因为四面体的平面网状结构的所有三角形都是边界三角形。这样，您的证明便只是在给四面体的欧拉定理作证明。但我们已经知道对四面体有 V－E＋F＝2，又何需多此一举？

老师：你说对了。但注意，立方体虽是第三引理的反例，却并非主猜想的反例，因对于立方体有 V－E＋F＝2。你已说明了论证——证明——的贫乏，但未涉及我们的猜想的错误。

ALPHA：那么您就要放弃您的证明了吗？

老师：不。批评不一定是破坏。我会改进我的证明，使其能经得起批评。

GAMMA：怎样做呢？

老师：在解释怎样做前，让我先引进以下术语。我把反驳一条引理（并不一定反驳主猜想）的例子称为“局部的反例”，而把反驳主猜想自身的例子称为“全局的反例”。这样你的反例便是局部的而非全局的。一个局部而非全局的反例只算是对证明的批评，不是对猜想的批评。

GAMMA：所以，猜想可能是真的，但您的证明尚未证明它。

老师：但我能轻易地详细阐释并改进这个证明，以略加修改的引理代替原来错误的引理，你的反例便驳不倒了。我不再争辩说，移除任何三角形都会导致以上两种模式之一种，而只说，在移除操作的每一个阶段，移除任一边界三角形均会导致以上模式之一种。回头来看我的思想实验，我所必须做的仅仅是在我的第三步中插入一个单词，即“我们从这三角形化的网状物中一个一个地移走边界三角形”。你该会同意，只需一次微不足道的观察，便使证明表述正确了〔8〕。

图 4

GAMMA：我认为您的观察并非如此微不足道；实则此举是相当精巧的。说清楚些，我要让它露出破绽。再次以立方体的平面网状物为例，以图 4 所示之顺序移去 10 个三角形之中的 8 个。轮到移去第八个时，此时它虽肯定是一边界三角形，我们却仅移走了两条棱边，却未移走顶点——这便使 V－E＋F 改变了 1。留下的是两个分离的三角形 9 和 10。

老师：唉，要是我说我所谓的边界三角形是指其移走并不分裂网状物的三角形，我便可保全面子了。但理智的诚实不允许我用“我所谓的……”式的句子起头，来对我的观点做点儿鬼鬼祟祟的修改，故我承认，现在我必须以三角形移动操作的第三个版本来替换第二个版本：我们在 V－E＋F 不变的条件下一个个地挪走三角形。

KAPPA：我慷慨一点儿，同意与此种操作对应的引理为真：即如果我们在 V－E＋F 不变的条件下一个个地挪走三角形，则 V－E＋F 不变。

老师：不对。此引理为：我们的网状物中的三角形可以如此编号：以编号后正确的顺序移动它们至最后一个三角形时，V－E＋F 将保持不变。

KAPPA：可是，就算这个正确的顺序存在，又怎样去构造它呢〔9〕？您初始的思想实验有这样的操作说明：以任意顺序移去三角形。您修改后的思想实验有这样的操作说明：以任意顺序移去边界三角形。现在您说我们应遵从一固定的顺序，却不说这顺序是哪一种，也不说它究竟是否存在。所以，这一思想实验就此破产。您改进了证明分析，即那一连串引理；但您美其名曰“证明”的思想实验破产了。

RHO：仅第三步破产了。

KAPPA：况且，您改进了引理吗？您头两种简单版本至少在驳倒前看起来是一般真实的；您的冗长、拼凑的版本甚至表面上都不像真实的。您真相信它可以逃过反驳吗？

老师：“貌似有理的”或甚至“普通真实的”命题通常几下就驳倒了：极其复杂奥妙的、似乎不真的、在批评中成熟的猜想倒可能会撞上真理。

OMEGA：那么，如果您的“极其复杂奥妙的猜想”甚至也被证伪了，并且这次您拿不出未被证伪的猜想来替代它们，那将会发生什么呢？或者，假如您进一步局部地补补缀缀也未能成功改进论证呢？您仗着把被驳倒的引理替换掉，而顺利制服了一个非全局的局部反例。假使您下次没有成功又如何呢？

老师：好问题——明日再讨论吧。

4．全局的反例对猜想的批评

ALPHA：我有个反例，可以证伪您的第一引理——而它同样是主猜想的反例，即它亦是全局的反例。

老师：真的吗！有趣。让我们见识见识。

ALPHA：设想由一对嵌套的立方体围成的立体——这对立方体中，一个在里，互相并不接触（图 5）。这个空腔立方体证伪了您的第一引理，因为从内立方体移走一个面后，此多面体便不能平铺拉伸至一平面了。另外，从外立方体移去一个面亦是无益的。除此之外，对每一个立方体有 V－E＋F＝2，所以对空腔立方体而言，有 V－E＋F＝4。

老师：精彩的演示。且称其做反例 1〔10〕。现在该怎样呢？

图 5

（a）猜想之拒斥。让步法

GAMMA：先生，您的冷静使我觉得困惑。单单一个反例便可驳倒猜想，同 10 个反例一样见效。这一猜想及其证明已全部未达目的而失败了。举起手来！您不认错也不行。还是抛弃错误的猜想，忘掉它，尝试一个彻底的新方法吧。

老师：我同意你的话，猜想已受到了 ALPHA 的反例所做出的严厉批评。但证明却也并非已“全部未达目的而失败”。倘若你暂时赞成我稍早的提议，用“证明”一词以指“把原猜想分解为子猜想的思想实验”，而不在“保证某种真理”的意义上使用，你便不一定得出这个结论。我的证明当然在前一含义上证明了欧拉猜想，但在后一含义上便不一定了。你只对那证其欲证者之证明感兴趣。但即使证明未完成其预定任务，我也感兴趣。哥伦布（Columbus）并未到达印度，但他发现了某些极其有趣的东西。

ALPHA：所以根据您的哲学——一个局部的反例（若其不同时是全局的反例）是对证明的反驳，却不针对猜想——一个全局反例是对猜想的反驳，却不必针对证明。就猜想而言，您同意认错，但您还要为证明作辩护。然而，若猜想为假，则证明究竟要证明什么呢？

GAMMA：您把哥伦布拿来类比也不管用。接受一个全局的反例必然意味着全盘皆错。

（b）反例之拒斥。怪物排除法

DELTA：但为什么接受这个反例？我们曾证明了我们的猜想——现在它就是定理。我承认它与那所谓的“反例”相对立。它们之间有一个必须放弃。但既然定理业已被证明为真，又为何该它放弃？应该放弃的，是那个“批评”。它是伪批评。那对嵌套立方体根本不是多面体。它是一个怪物、一个病态的例子，而不是个反例。

GAMMA：凭什么不是？一个多面体是表面由多边形面构成的立体。而我的反例就是被多边形面围成的立体。

老师：让我们把这定义称为定义 1〔11〕。

DELTA：你的定义是不对的。一个多面体必须为一个曲面：有一些面、棱、顶点，可以变形，平铺拉伸在黑板上，且与“立体”的概念无关。一个多面体是由一个多边形系统构成的曲面。

老师：称此为定义 2〔12〕。

DELTA：那么你便实际上给我们看了两个多面体——两个曲面，其中一个完全在另一个之内。子宫里有胎儿的妇女并不是人类只有一个脑袋这一论题的反例。

ALPHA：原来如此！我的反例已孕育出一胎新的多面体概念了。难道你敢断言，针对多面体你总是指一个曲面？

老师：现在我们暂时接受 DELTA 的定义 2。如果针对多面体，我们就是指一个曲面，你还能驳倒我们的猜想吗？

ALPHA：当然能。且看两个共有一条棱的四面体（图 6（a））。或者，看两个共顶点的四面体（图 6（b））。这两对孪生四面体都是相连的，都仅构成了一个曲面。并且，你可以检验，对它们均有 V－E＋F＝3。

老师：反例 2a 和 2b〔13〕。

图 6

DELTA：你这种颠倒错乱的想像力，我很仰慕，但我当然没有说任一多边形系统都是一个多面体。说多面体，我指的是一个以下列方式排列的多边形系统：（1）每一条棱上恰好有两个多边形相交；（2）从共顶点的一个多边形内的一点到另一多边形内的一点的连线不与任何一

条棱相交是可能的。你的第一对孪生四面体，由我定义中的第一条标准排除，第二对由第二条标准排除。

老师：定义 3〔14〕。

ALPHA：你这种颠倒错乱的想像力，我很仰慕，你可以一个接一个地发明定义，设防别人证伪你特别重视的想法。你何不干脆把多面体定义为满足 V－E＋F＝2 等式的多边形系统？如此完美的定义（Perfect Definition）……

KAPPA ：定义 P〔15〕。

ALPHA：……这样就可以一劳永逸地解决这场辩论了。以后再不需要研究这个问题。

DELTA：但这世界上并没有定理可以不被怪物证伪。

老师：很抱歉，打断一下你们。我们曾看到，反例所施予的反驳取决于问题中语词的意义。若一个反例要成为客观的批评，我们必须在我们的语词意义上达成一致。我们可以在交流中断之时通过定义语词来达成这样的一致。拿我来说，我并不曾定义“多面体”。我假定了大家都熟悉此概念，即是说有能力分辨一个物体是不是多面体——一些逻辑学家称之为了解多面体概念的外延。结果这概念的外延一点也不清楚分明：反例一出现，便不停有定义被提出、被争论。我建议，我们现在先考察所有这些相互对立的定义，后面再讨论选择不同定义得出的结论的差异。有谁能举出即便最严格的定义也承认的反例吗？

KAPPA：包括定义 P？

老师：定义 P 除外。

GAMMA：我能。请看此，反例 3：一个星状多面体——我叫它海胆〔16〕（图 7）。它由 12 个五角星组成（图 8），有 12 个顶点，30 条棱，12 个五边形面——如果诸位愿意验查，可亲自数一数。这样一来笛卡儿-欧拉论题便根本不真了，因为对此多面体，V－E＋F＝－6〔17〕。

图 7　开普勒的星状多面体。

每一面用一种不同的方式画影，以示哪些三角形属于同一五角星面

图 8

DELTA：你凭什么认为你的“海胆”是一个多面体？

GAMMA：你没看见吗？这是一个多面体，其各个面是这 12 个五角星。它满足你最后的定义：

它是“一个以下列方式安排的多边形系统：（1）每一条棱上都正好有两个多边形相交；（2）由一条不在任一顶点跨过任何棱的路线，自任一多边形的内部到任一其他多边形的内部，是可能的”。

DELTA：这样说足见你连多边形是什么都没弄明白！五角星肯定不是多边形！一个多边形是以下列方式安排的棱边系统：（1）每一顶点都正好有两条棱相交；（2）除了顶点，棱与棱之间没有在何公共点。

老师：这就叫定义 4 吧。

GAMMA：我不明白你为何包含了第二个分句。一个多边形的正确定义应当只包含第一个分句。

老师：定义 4′。

GAMMA：第二个分句与多边形的本质无关。且看：如果我将一条边稍提起来，则五角星即使在你的意义上也是多边形。你想象的多边形是用粉笔画在黑板上的，但你本应该把它想成是木架子结构：如此则清楚了，你认为的公共点实际上并非一个点，而是一上一下的两个不同的点。你所以误入歧途，是因为你把多边形嵌在一个平面里了——你应当让它的手脚在空间中伸展开来〔18〕!

DELTA：你不介意的话，请告诉我何谓一个五角星的面积？或者你会说有些多边形是没有面积可言的？

GAMMA：说多面体与立体概念无关的人不是你自己吗？为何现在又建议应该把多边形的概念和面积的概念联系起来？我们曾达成一致，认为多面体是一个带有诸棱与顶点的闭合曲面——那么，为何不同意说，一个多边形仅仅是一个带有诸顶点的闭合曲线？但如果你坚持己见，我愿意定义一个五角星的面积〔19〕。

老师：我们暂时放下这争论，进行从前的讨论。把刚才的两个定义一起考虑——定义 4 和定义 4′。有人能给我们的猜想举个反例，与两个多边形的定义都相吻合吗？

ALPHA：反例在此。考虑像这样的一个画框（图 9）。这是一个符合迄今为止提出的所有定义的多面体。然而，你数了顶点、棱和面后，会发现 V－E＋F＝0。

图 9

老师：反例 4〔20〕。

BETA：我们猜想就此结束了。真是遗憾，它本对如此多的情况都是适用的。但看起来我们仅是在浪费时间了。

ALPHA：Delta，我目瞪口呆了。你无话可说了吗？你难道不能再来一个定义，将这个新反例排除吗？我还以为，世界上没有什么假设，你不能要上一套恰到好处的花言巧语，将其从被证伪的水深火热之中拯救出来。你现在要放弃了？你最终承认非欧拉多面体存在了？真是难以置信！

DELTA：你应该为你那些非欧拉的害人精切实找个更贴切的名字，不要把它们叫做什么“多面体”，让大家误入歧途。不过，我渐渐对你的怪物们失去兴趣了。我对你拙劣可悲的“多面体”感到恶心，欧拉的漂亮定理竟对它们不适用〔21〕。我寻求数学中的秩序与和谐，你却一味宣扬无序和混乱〔22〕。你我的态度势不两立。

ALPHA：你真不愧是一个过时的保守党（Tory）！你谴责无政府主义者的恶作剧，搅和了你的“秩序”与“和谐”，而你却用改换字眼的建议来“解决”这些困难。

老师：我们听听这最新的挽救型定义。

ALPHA：您是说最新的语言花招，最新的“多面体”概念的收缩吧！Delta 消除真正的问题，而不想解决它们。

DELTA：我不收缩概念。而你，扩展了它们。譬如，这个画框根本就不是一个货真价实的多面体。

ALPHA：为什么？

DELTA：试取“隧道”——画框包围的空间——中的任意一点。穿过这点安放一个平面。你会发现任意这样的平面总与画框有两个不同的截面，造成了两个不同的、完全隔开的多边形！（图 10）

图 10

ALPHA：那又如何？

DELTA：如果是一个名副其实的多面体，通过空间中的任一点，至少有一个平面与多面体的截面仅由一个多边形组成。对于凸多面体，所有平面都满足此要求，不管我们在何处取点。对于普通凹多面体，一些平面会有更多的交点，但总有些平面只有一个（图 11（a）和（b））。对于这个画框来说，若我们在隧道中取一点，所有平面将会有两个截面。你又怎么能称它是一个多面体呢？

图 11

老师：这像是另下了一个定义，这一回是个隐定义了。就叫定义 5 吧〔23〕。

ALPHA：有一连串反例，就有一连串与之匹配的定义！这些定义号称是不包含新东西的，仅仅是对早先的概念之丰富性的重新显示，似乎那一早先的概念碰上多少反例就自有多少“隐藏”条款。对所有多面体，V－E＋F＝2 似乎是不可动摇的，是一个悠久的、“永恒的”真理。忆及它曾几何时是一个漂亮的猜想，充满着挑战与激动，倒觉得奇怪了。如今，因为你们在含义上施行奇怪的变换骗术，它已经沦为一个可怜的约定、一个可鄙的教条了。（他离开教室）

DELTA：我不能理解，为何一个能干如 Alpha 的人要在仅仅的捣乱、嘲弄上浪费时间。看起来，他聚精会神于创造畸形。但是，不论在自然界抑或思想界中，畸形从不促进发展。进化总是遵循着和谐与秩序井然的形式。

GAMMA：遗传学者轻易即可驳倒此观点。你没听说过，产生畸形的突变在宏观进化（macroevolution）中扮演了重要角色？他们把这种畸形的突变物叫做“有希望的怪物”。在我看来，Alpha 的几个反例虽是怪物，但却是“有希望的怪物”〔24〕。

DELTA：Alpha 反正已经放弃了争论。现在不再有怪物了。

GAMMA：我又有一个新怪物。它符合定义 1、2、3、4、5 中的所有限制，但 V－E＋F＝1。这个反例 5 就是一个简单的圆柱体。它有 3 个面（顶面、底面和外套面）、两条棱（两个圆圈），没有顶点。它是一个符合你们的定义的多面体：（1）每一条棱上都正好有两个多边形相交；（2）由一条不在任一顶点跨过任何棱的路线，自任一多边形的内部到任一其他多边形的内部，是可能的。你亦须承认这些面是名副其实的多边形，因为它们符合你们的要求：（1）每一顶点都正好有两条棱边相交；（2）除了顶点，棱边与棱边之间没有任何公共点。

DELTA：Alpha 扩展了那些概念，你却撕裂了它们！你的“棱”并不是棱！一条棱有两个顶点！

老师：定义 6？

GAMMA：但为什么不承认有一个或可能没有顶点的“棱”与棱的关系呢？你习惯了收缩概念，可你现在让它们支离破碎，以致所剩无几了！

DELTA：但你没瞧见这些所谓的反驳是徒劳的吗？“以前，一个新多面体发明出来，是为了某个实用的目的；如今它们被专门发明出来，使我们的先辈们的推理变得不可靠，而除了这套，就没有什么其他东西可向它们请教。我们的主题被转换成一个畸形学博物馆，正派的普通多面体若在这里能保留一块很小的角落，也就觉得满足了。”〔25〕

GAMMA：我认为，倘若我们想真正深入地了解某样东西，我们必须以批判的态度，高度兴奋地、热情地研究它，而不是在其“正常的”、固定的、通常的形式下。如果你要了解正常的健康身体，在它不正常时、害病时研究它。如果你要了解各种函数，那就研究它们的奇异性。如果你要了解普通多面体，那就研究它们的极端分子。要想让精确的分析进入该主题的核心处，就得走这条路〔26〕。不过，即便你大体上正确，你没瞧见你针对这个那个问题的特定（ad hoc）方法的无效吗？如果你要寻出反例与畸形物之间的界限，你不能做做停停。

老师：我认为，我们应该拒绝接受 Delta 处理全局反例的策略，不过也应恭维他运用策略的娴熟巧妙。我们可以给他的方法取上一个合适的名字：怪物排除法。用此方法，可以通过对多面体、对它的定义项或对它的定义项的定义项所做的间或熟练的但总是临时的重新定义来消除任何反例。不管怎么说，我们终究应更尊敬地对待反例才行，而不应顽固地予以怪物的称号，把它们驱除掉。Delta 的主要错误也许是他解释数学证明的教条主义偏见：他以为一个证明必然应证明其欲证明者。我对于证明的解释可以允许一个“错误的”猜想被“证明”，即把它分解为几个子猜想。若猜想为假，我当然可以预计至少诸子猜想之一为假。但分解仍会是有意义的！找到了一个“已证”猜想的反例，我不会感到不安；我甚至愿意开始即着手“证明”一个错误的猜想！

THETA：我不听你的。

KAPPA：他只听《新约全书》的：“但要凡事察验，善美的要持守。”（《帖撒罗尼迦前书》第 5 章，第 21 节）

（c）以例外排除法改进猜想。逐步排除。策略性撤退或稳扎稳打

BETA：我猜测，先生，您正预备就您莫名其妙的评论作一番解释。然而，我对我的没耐性感到万分抱歉，我现在不得不发泄一下我受压抑的感情。

老师：请说。

（ALPHA 又进来了。）

BETA：我虽然觉得 Delta 的论点有些方面傻乎乎的，但我已相信这些论点有一个合理的内核。现在，我认为没有普遍有效的猜想，猜想仅在某一排除了例外的有限界域中有效。我反对称这些例外为“怪物”或“病态的例子”。此举会在方法论上导致决定不由这些有趣的例子的本来意义去考虑它们，但是它们是值得单独考察一番的。可我同样反对“反例”一词；这个词虽然正确地认可了它们作为例子，与支持的例子有同等地位，但从某种意义上说，其又为它们涂上了好战的色彩，以至于如 Gamma 者，面对它们时就恐慌起来，以至于要把美丽而精巧的证明一齐抛弃了。实际不是这样的：它们不过是例外罢了。

SIGMA：深表同意。“反例”此词散发着好斗性的气味，冒犯了那些发明了证明的人。“例外”才是正确的表达。“存在 3 种数学命题：

“1．总为真者。此种命题不存在限制和例外，例如：一切平面三角形之内角和总等于两直角。

“2．依赖于某错误原理者。故无论如何决不能承认。

“3．虽立足于真原理，但仍承认某些情况下之限制或例外者……”

EPSILON：什么？

SIGMA：“……不应把错误的定理与受制于某种限定的定理混为一谈。”〔27〕俗话说：例外能反证规律。

EPSILON（向 KAPPA 说）：这头脑不清者是谁啊？他该学点逻辑了。

KAPPA（向 EPSILON 说）：还要学点非欧平面三角才是。

DELTA：不得不去预言在此次讨论中 Alpha 和我也许会站在同一边，我发觉这样挺使人难堪的。我们均在一命题之为真或为假的基础上争论，亦仅在欧拉定理是真还是假此一特殊问题上不一致。但 Sigma 盼望我们承认命题的第三种范畴，即“原理上”为真但“在某些场合容许例外”。容忍定理与例外的和平共处，不啻向数学中的混淆与无序屈服。

ALPHA: D'accord.（同意）

ETA：我一直不想打断 Delta 才华横溢的论述，但现在我想，若我简要解释我的智识发展的经历或许有些益处。在我的学生时代，按你们的称呼，我成了一个怪物排除者，作为守方反对 Sigma 一类而非 Alpha 一类的观点。我犹记得在一期刊上阅读到有关欧拉定理的话：“关于这定理的普遍有效性，杰出的数学家们已经提出过诸种证明了。然而这定理却碰到种种例外……有必要提醒大家注意这些例外，因为晚近的学者们也并不总能清楚地认识它们。”〔28〕这不是一篇孤立的圆滑文章。比如，还有“虽然几何学教科书与讲义总是指出欧拉的漂亮定理 V＋F＝E＋2 在某些情况下要受‘限制’，或谓‘似乎并不有效’，但谁也不清楚这些例外之所以例外的真正缘由。”〔29〕如今我仔细地检查这些“例外”，我得出的结论是：它们都与问题中的实体（多面体）的真实定义不相吻合。所以证明与定理便可恢复原位，而定理与例外的混乱共存便消逝了。

ALPHA：Sigma 的混乱立场可为你的怪物排除法提供一个解释，但不能作为替你开脱的借口，更别说作为正当的理由。为何不通过接受反例证明书并且拒绝接受“定理”与“证明”来消除混乱局面呢？

ETA：为何我必须拒绝证明？我没瞧见它有任何一点儿错误。你瞧得见吗？在我看来，我的怪物排除比你的证明排除似乎更为合理。

老师：这场争论说明了，怪物排除如果源自 Eta 的两难困境，便似乎能博得一位更为同情的听众。不过，我们还是回到 Beta 与 Sigma 的讨论。把反例重新命名为例外的是 Beta。Sigma 与 Beta 的论调一致……

Beta：Sigma 与我一致，我很高兴，但恐怕我不能同意他的论调。确实存在 3 种命题：真者、绝望的错误者、充满希望的错误者。此最末一种用加入声明诸例外的限制性条款可改进为真。我从不“认为公式属于一个未确定的有效界域。实际上，大部分公式仅当满足某些条件时方

成立。如果确定了这些条件，当然还要精确确定我所使用的语词之意义，我便消灭了所有的不确定性”。〔30〕因此，如你们所见，我并不主张让未改进之公式与例外有任何形式的和平共处。我改进我的公式，让它们与 Sigma 在第一堂课上提出的公式一样完美化。这就意味着，只要怪物排除法用来确定原猜想的有效界域，我便接受它；而只要它当作以受限制的概念来挽救“漂亮”定理的语言花招来用，我便拒绝接受它。Delta 方法的这两种功用应当分开来看。我愿意给我的方法命名为“例外排除法”，这一方法只能用第一个功用来描述。我要用它来精确确定欧拉猜想的有效界域。

老师：你许诺要给欧拉多面体“精确确定的界域”是什么？你的“完美的公式”又是什么？

BETA：对没有空腔（如嵌套立方体对则有）和隧道（如画框则有）的所有多面体，V－E＋F＝2。

老师：你肯定？

BETA：是的，我肯定。

老师：孪生四面体呢？

BETA：不好意思。对没有空腔、隧道、“多重结构”的所有多面体，V－E＋F＝2〔31〕。

老师：我明白了。我赞同你改进猜想的策略，而不只是要么接受，要么拒绝。相对怪物排除法和放弃法而言，我更倾向于采纳这一策略。然而，我有两点反对意见。第一，我坚决主张，你所声称的不但改进猜想，并且“完善”猜想、“使其严格地正确”、“使所有的不确定性消失”的方法是站不住脚的。

BETA：果真如此？

老师：你必须承认，你的每一版新猜想，只不过是对刚刚出现的一个反例的特定消灭。你意外发现嵌套立方体时，你排除带空腔的多面体。你偶然注意到画框时，你排除带隧道的多面体。我欣赏你那开放而敏锐的心灵；注意到所有这些例外都是很好的，但我觉得，当你盲人骑瞎马般地摸索“种种例外”时，不如直接用某种方法更好。承认“所有多面体是欧拉式的”乃一猜想，这一点很好。但为何又说“所有不带空腔、隧道以及不带这不带那的多面体是欧拉式的”是一条定理，不再含猜想的成分？你怎有把握说你可历数所有的例外？

BETA：您能给出我未曾考虑的一例吗？

ALPHA：我的海胆呢？

GAMMA：还有我的圆柱呢？

老师：就我的论点而言，我根本不需要一个具体的新的“例外”作为我的论据。我的论据支持更多例外的可能性。

BETA：说不定您是正确的。岂可一碰见新反例便朝令夕改。不应当说："如果表面上无例外产生，此结论便大体是明确的。但如果此后无论何时有例外出现，那么当例外出现时，此结论才开始因这些例外而变得明确。"〔32〕让我想想。我们最初猜想对所有多面体有 V－E＋F＝2，只因我们发现它对立方体、八面体、棱锥和棱柱皆成立。我们当然不能接受"此种不幸的由特殊至一般的推理方式"。〔33〕例外突然出现了，这不足为奇；着实令人惊讶的是，许许多多更多的例外没有更早地发现。在我看来，这是由于我们几乎总是考虑凸多面体。只要考虑其他多面体，我们的归纳便不再有效〔34〕。所以，与其逐步地排除例外，我还不如谦虚但安全地画一界线：所有凸多面体是欧拉式的〔35〕。我还希望你们承认，此中不含猜想的成分：它是一条定理了。

GAMMA：我的圆柱呢？它是凸的！

BETA：那不过是玩笑罢了！

老师：我们暂且不去理会圆柱。即使没有这圆柱，我们亦能提出批评。Beta 为回答我的批评，迅速设计出了例外排除法此一修改后的新版本，以策略性地撤退到一个有望成为猜想的堡垒的界域里代替逐步的撤退。这是稳扎稳打的谨慎做法。可是，你真如你所宣称的那般安全？你仍不能保证你的堡垒里不再会有任何例外。另外，尚有相反的危险。你会不会撤退得太激烈，把许许多多欧拉多面体置于堡垒的城墙之外？我们的原猜想或许是在夸夸其谈，但我觉得你的"完美化的"命题简直就过于保守了；可是，你仍然不能肯定它是不是同样也在夸夸其谈。

不过，我亦乐意提出我的第二点反对意见：你的论点忘记了证明；你在推测猜想的有效范围时，似乎根本不需要证明。你还不至于相信证明是多余的吧？

BETA：我何曾说过此话。

老师：是的，你没说过。但是你发现，我们的证明证明不了我们的原猜想。但它可以证明你改进后的猜想吗？告诉我。

BETA：嗯〔36〕……

ETA：先生，谢谢您这番辩论。Beta 的窘境清楚地显示出遭诽谤的怪物排除法的优越性来。因为我们说，该证明所论证的就是欲着手证明者，这样我们的答案才是明确的。我们不允许反复无常的反例任意地破坏令人满意的证明，即便它们化妆成谦恭驯服的"例外"也不允许。

Beta：因为批评的刺激，我不得不详述、改进，以及——不好意思，先生，我还是要说——完善我的方法论，我一点也不觉得这令我难堪。我的回答如下。我拒绝接受原猜想，认为它不对，原因是原猜想存在着例外。我亦拒绝接受该证明，因为例外同样是至少一个引理的例外。（用您的说法，便是：全局的反例必然亦是局部的反例。）Alpha 在此停住了，因为反驳似乎已彻底满足其智力的要求。但我继续前进。我通过适当的方法，将猜想与证明均限制在合适的论域中。于是，一来猜想完美化了，就此为真了，二来大体上还算合理的证明完美化了，就此严格了，且显然不再包含错误的引理。譬如，我们曾看见，并非所有的多面体在移去一面后皆可平铺拉伸于一平面上。但所有凸多面体办得到。猜想既已完善并得到了严格证

明，我要称它为定理便没什么不对了。我重申：“所有凸多面体都是欧拉式的。”就凸多面体来说，所有引理为真是一目了然的，而证明就其不成立的普适性来说，虽是不严格的，但就限制后的凸多面体界域来说，便是严格的了。所以，先生，您的问题我已回答。

老师：所以，在这些例外被发现以前，曾看起来是一目了然地为真的引理，现在再度看起来是一目了然地为真了……直到发现下一个例外。你承认“所有多面体是欧拉式的”乃一猜测；你刚才又承认“所有无空腔及隧道的多面体是欧拉式的”亦是猜测；何不再承认“所有凸多面体是欧拉式的”亦是一猜测！

BETA：这一次不是“猜测”了，而是洞察！

老师：我厌恶你这自命不凡的“洞察”。我尊重有意识的猜测，因为它源于人类最优秀的品质：勇敢与谦虚。

BETA：我提出了一个定理：“所有凸多面体都是欧拉式的。”您只不过做了一通反驳它的说教。您给出一个反例好吗？

老师：你怎么知道我不会呢。你改进了原猜想，但你不能自称完善了猜想，在你的证明中达到了绝对的严格性。

BETA：您能给出吗？

老师：我也不能。但我认为，我改进猜想的方法将会改进你的方法，因为我会在证明与反例间建立一种一致性和真正的相互作用。

BETA：愿闻其详。

（d）怪物校正法

RHO：先生，我可以从旁边插几句吗？

老师：当然行。

RHO：我同意大家的看法，作为一个一般的方法论手段，Delta 的怪物排除法应该拒绝接受，因为它没有真正严肃地对待“怪物”。Beta 亦未严肃地对待他的“那些例外”，因为他只是罗列出它们，接着便撤退到一个安全的界域中。因而，这两种方法均只对一个有限的特许领域有意义。我的方法并不实行歧视。我可以说明，“在更细致的检验下，那些例外仅仅是表面现象，而即使对所谓的例外而言，欧拉定理仍保持其有效性”〔37〕。

老师：真的？

ALPHA：我的反例 3，就是“海胆”（图 5），怎么可能是一个普通的欧拉多面体呢？它有 12 个五角星面咧……

RHO：我没看见有什么“五角星”。实事求是地说，这多面体的面不过是普通的三角形面，你看不出吗？有 60 个这样的面。并且它有 90 条棱、32 个顶点。它的“欧拉示性数”是 2〔38〕。所谓的 12 个“五角星”，以及它们的 30 条棱与 12 个顶点，可得出“特征数”——6，这只是你的异想天开罢了。没有什么怪物，只有种种怪解释。必须清除自己心中反常的错觉，必须学习如何发现及如何正确地定义所发现的东西。我的方法是有治疗能力的：你于随便何处——错误地——“发现”一个反例，我便教你如何——正确地——辨识一个范例。我校正你畸形的观察力〔39〕……

ALPHA：先生，请在 Rho 给我们洗脑之前，先阐述您的方法〔40〕。

老师：且让他继续说。

RHO：我已清楚表明自己的立场。

GAMMA：请问你可以详述你对于 Delta 方法的批评吗？你们俩都驱除“怪物”……

RHO：Delta 被你的幻觉欺骗了。他曾认可你的“海胆”有 12 个面、30 条棱及 12 个顶点，不是欧拉式的。他又自己说，它同样不是一个多面体。但他两边的算计都错了。你的“海胆”是一个多面体，亦是欧拉式的。不过其星状多面体的解释是个曲解。倘你不介意，我要说，那不是海胆留在一个健康、纯洁的心灵上的印象，而是留在一个病态的心灵上的歪曲印象，痛苦地扭动着〔41〕。

KAPPA：可是你怎样辨别健康的心灵与病态的心灵，以及理性解释与怪异解释〔42〕？

RHO：使我困惑的倒是你怎么能把它们混在一起的！

SIGMA：Rho，你真以为，Alpha 从不曾注意到他的“海胆”可能被解释为三角形化的多面体？当然那是可能的。但更细致地观察可知，“这些三角形总是 5 个 5 个地在同一平面上，包围着一个躲藏在立体角之后的正五边形——就像它们的心脏。现在这 5 个正三角形及其内部的心脏——正五边形——构成了所谓‘神秘五角星’。据泰奥弗拉斯托斯 • 帕拉切尔苏斯（Theophrastus Paracelsus）称，这是健康的标志……”〔43〕

RHO：迷信！

SIGMA：于是，对健康的心灵来说，海胆的秘密便昭然若揭了：它是过去梦也不曾梦见的崭新的正则立体，有正则的面和相等的立体角，它的对称美也许向我们揭示了宇宙和谐之秘密〔44〕……

ALPHA：谢谢你，Sigma，你的辩护使我再次相信，反对者令人难堪的本事还不及支持者。

当然，我的多面体图要么可以解释为三角形化的多面体，要么可以解释为星状多面体。我愿意以同等的地位承认两者皆可行……

KAPPA：你愿意吗？

DELTA：但肯定只有其中之一才是正确的解释！

ALPHA：我愿意以同等的地位承认两者皆可行，但其中的一种将肯定是欧拉猜想的一个全局反例。为何只承认按 Rho 的先入之见“校正妥帖”的解释？总之，先生，您现在总算要解释您的方法了吗？

（e）以引理并入法改进猜想。证明生成的定理 VS.素朴的猜想

老师：我们且回到画框的问题上。我自己是承认它是欧拉猜想名副其实的全局反例的，并且承认它是对我的证明中第一引理的一个名副其实的局部反例。

GAMMA：对不起，先生——这画框又是怎样驳倒第一引理的呢？

老师：首先移走一个面，然后努力将其平铺拉伸在黑板上。你不会成功的。

ALPHA：为助您的想象一臂之力，我要告诉您，有且仅有那些可吹胀成球形的多面体才有以下性质：在移走一面后，你可将余下部分平铺拉伸在一个平面上。

显然，这样的“球形”多面体在切掉一面后是可以平铺拉伸在一个平面上的；反之，同样明显的是，如果一个多面体减去一面后是可以平铺拉伸在一个平面上的，你就可以将它捏成一个圆形瓶，随后再将遗下的一面盖上去，而得到一个球形多面体。不过，您的画框永不能吹胀成球形；仅能成一圆环。

老师：妙哉。现在，我不同于 Delta，我承认这个画框是对猜想的一个批评。所以，我抛弃了原始形式的猜想，认为它不对。但我马上要提出一个加了限定的修改版，即是说：笛卡儿-欧拉猜想对“简单”多面体，即对在移去一面后，能平铺拉伸在一平面上的多面体而言，仍然适用。于是，我们便拯救了原假设的一部分。我们有：一个简单多面体的欧拉示性数为 2。这论题不会被嵌套立方体、孪生四面体、星状多面体证伪了——因为它们全都不是“简单的”。

因此，例外排除法是将主猜想与自认有错的引理的范围均限制在一个普通的安全论域中，由此而承认这些反例既是对主猜想、又是对证明的批评，我的引理并入法则是肯定了证明，而将主猜想的论域刚好缩小为自认有错的引理的论域。或者说，一个全局兼局部的反例逼使例外排除者修改引理与原猜想，而它只逼使我修改原猜想，不修改引理。你明白吗？

ALPHA：是的，我想我明白了。为表示我明白，我要反驳您。

老师：反驳我的方法还是反驳我改进后的猜想？

ALPHA：您改进后的猜想。

老师：那么你还是没有懂得我的方法。不过，且让我们见识你的反例。

图 12

ALPHA：考虑一个立方体，其顶上置有一个略小的立方体（图 12）。这吻合我们所有的定义——定义 1、2、3、4、4′、5——所以它是一个货真价实的多面体。因为它能平铺拉伸于一个平面上，它又是“简单的”。于是，根据您修改后的猜想，其欧拉示性数应为 2。然而，它有 16 个顶点、24 条棱、11 个面，它的欧拉示性数是 16－24＋11＝3。它是你改进后的猜想的全局反例，顺便说说，它亦是 Beta 的第一“例外排除”定理的全局反例。这个多面体，虽无空腔、隧道或“多重结构”，却是非欧拉式的。

DELTA：就叫这饰顶立方体为反例 6 吧〔45〕。

老师：你已证伪了我改进后的猜想，可你并未摧毁我改进的方法。我当重新检验这证明，看看它为何溃败在你的多面体面前。在这证明中，必另有一错误的引理。

BETA：当然是有的。我总是怀疑第二引理。它预设了在三角形化的过程中，每画一条新的对角棱，你便总使棱数与面数各增加一。这是错误的。若我们看我们的饰顶多面体的平面网状结构，便会发现一个环状面（图 13（a））。此情形下，只画一条对角棱不会增加面数（图 13（b））：我们要使面数增加一，需要添上两条棱（图 13（c））。

图 13

老师：恭喜你说中了。我肯定必须更进一层地限制我们的猜想了……

BETA：我知道您要做什么。您要说，“三角形化的简单多面体都是欧拉式的”。您把三角形化看成天经地义；您会把这一引理又变为一个条件。

老师：非也，你错了。在具体指出你错在何处之前，我要详述我对你的例外排除法的评论。你将你的猜想限制在一个“安全”论域时，你未彻底地检验证明，并且，就达到你的目的而言，你事实上并不需要如此做。随意地说不论是何引理，在你的有限论域中统统皆真，对你的目的来说已够用了。可对我来说，却还不够。我正是要把那条被反例驳倒的引理建到猜想之中，所以，在对证明作一番仔细分析的基础上，我必须把那条引理辨认出来并且尽可能地

表述清楚。这样，便可把被驳倒的引理并入我改进后的猜想中。你的方法并不强迫你苦心经营你的证明，因为证明并不出现在你改进后的猜想中，与我的情况相反。现在我回到你的建议上。被环状面证伪的那条引理，并不像你似乎认为的是“所有面皆三角形化的”，而是“任一面都被对角棱一分为二”。正是这个引理，我要把它变为一个条件。我称满足它的面为“单连通的”，进而能够对我的原猜想作第 2 次改进：“对一简单多面体，当其所有面单连通时，有 V－E＋F＝2。”你的陈述之所以鲁莽失言，乃因你的方法并不教给你仔细的证明分析。证明分析有时是琐碎平凡的，但有时的确有很大难度。

BETA：我明白您的意思了。我也应对您的评论加上一个补注，算是自我批评，因为我以为，这一举揭示了各种态度的例外排除的整个连续统。最坏的情况，就是只排除一些例外，而全然未看证明。所以便出现我们一面有证明，一面又有例外的迷惑。在这类原始例外排除者的心目中，证明与例外在两个完全分开的隔间里存在。其他一些人也许现在指出说，证明只在限制后的论域中有效，于是便声称驱散了疑云。但是，他们的“条件”仍同证明思想无关，是外加的〔46〕。更能干的例外排除者会迅速瞅一瞅证明，而像我刚才一样，灵机一动，就说出决定一个安全论域之范围的条件了。最优秀的例外排除者对证明作一番仔细的分析，并以此为基础，极精细地描绘出禁区的界线。实话实说，从这方面看，您的方法不过是例外排除法的一个极限情况罢了……

IOTA：……并且它展示了证明与反驳根本的辩证统一性。

老师：我希望现在你们都瞧见了，即便证明也许并不证明什么，却的确可以帮助我们改进猜想〔47〕。例外排除者固然也改进它，但改进的过程却独立于证明的过程。我们的方法就是以证明来改进。“发现的逻辑”与“证明为正当（justification）的逻辑”之间的这种内在统一性是引理并入法最重要的一面。

BETA：我现在自然理解您那些莫名其妙的评论了，就是您前面说的，您对既“已证”又遭驳倒的猜想，并不觉得忧虑而困惑，又说您甚至愿意“证明”一个错误的猜想。

KAPPA［旁白］：实质上是“只改不证”〔48〕，为何又以“证明”之名来称呼？

老师：你们听好了，少有人会有这样做的倾向。由于根深蒂固的探试法教条，大多数数学家都不能同时出发去证明与反驳一个猜想。他们要么证明它，要么反驳它。而且，如若猜想碰巧是他们自己提出的，他们便尤其不可能通过反驳来改进猜想。他们想不经反驳，就改进他们的猜想；从不借助错误之减少，而一味借助真实性之单调增加；这样他们便净化了知识的发展过程，免除了对反例的恐惧。这或许便是最优秀的一类例外排除者的方法背景：他们开始的时候，先“稳扎稳打”地为“安全”论域设计一个证明，继而让它经受彻底的批判性考察，看看他们是否已使用了每一个强加的条件。如否，他们便把他们适中的定理初版“更加完美”或“广义化”，即具体指出证明所依赖的引理，而后把它们并入猜想。譬如，在一两个反例出现后，他们或许会构想一个临时的例外排除定理：“所有凸多面体是欧拉式的”，把非凸的例子留待日后回收（cura posterior）；次而他们便设计出柯西证明，接着，又发现证明并未真正“使用了”凸性，他们便建立起引理并入定理〔49〕！这一过程将临时的例外排除与逐次证明分析、引理并入结合在一起，从探试论的角度说并没有什么不妥。

BETA：这一过程当然不是废止批评，它只不过是将批评挤入后台罢了：他们不径直批评夸夸

其谈，而去批评谦逊之辞。

老师：我欣喜万分，Beta，我说服了你。Rho 和 Delta，你们对此又作何感想呢？

RHO：我个人自然认为，“环状面”的问题是个伪问题。两个立方体焊接为一，成了您所称的“饰顶立方体”。您对它的面与棱是什么作了一种怪异的解释，这问题方才出现的。

老师：请解释之。

RHO：“饰顶立方体”是由相互焊接在一起的两个立方体组成的多面体。您同意吗？

老师：我不介意你这样说。

RHO：现在您错解了“焊接”。棱连接着小立方体的底正方形的顶点与大立方体的顶正方形的相应顶点，此之谓“焊接”。所以根本不存在什么“环状面”。

BETA：环状面就在那儿啊！你所说的剖分棱并不存在！

RHO：在你未经训练的眼睛前，它们自然隐藏起来了〔50〕。

BETA：你指望我们认真对待你的论点吗？难道我看见的只是迷信，而你的“隐藏”棱反是实在的？

图 14　环状面三说：

（a）德荣奎埃版；（b）马蒂森版；（c）“未经训练的眼睛”版

RHO：且看此盐的晶体。你要说这是个立方体？

BETA：当然。

RHO：一个立方体有 12 条棱，是不是？

BETA：是啊，有 12 条棱。

RHO：可这立方体上根本没有任何棱。它们都隐藏起来了。经过你的理性重建，它们才出现了。

BETA：我会想想这一点。有件事是明朗的。老师批评我自以为是地以为我的方法可获致确定性，也批评我丢开了证明。这些批评也丝毫不亚于适用于你的“怪物校正”，如同适用于我的“例外排除”一样。

老师：Delta，你呢？你要如何驱走环状面呢？

DELTA：我不会这样做。您说服了我，我已皈依了您的方法。我只是想知道，您何不把忽略掉的第三引理确定下来，并且也把它并入猜想？我提出第四个表述，但愿是最后一个："所有满足以下条件之多面体皆为欧拉多面体：（a）简单；（b）每一面皆单连通；（c）在平铺拉伸与三角形化得出的平面三角形化网状结构中，可以给三角形编上号，以编号后的正确顺序移走它们时，V－E＋F 之值不变，直到剩下最后一个三角形。"〔51〕我不懂您何以不立即提出此点？若您是真正严肃地对待您的方法，您已经立马把所有的引理变为条件了。何以还有这种"一步一步地操作"呢〔52〕？

ALPHA：保守党变成革命派了！我深觉你的建议过于乌托邦化。因为决不只有三条引理。为何不加上许多其他的条件，如"（4）若 1＋1＝2"，及"（5）若所有三角形皆有三个顶点与三条棱"，因为我们肯定要用上这些引理？我提议，我们只把已发现反例的引理变为条件。

GAMMA：作为一个方法论规则，我认为这太没有定准了，我难以接受。我们不如并入所有我们能预料到反例的引理，也就是那些还不是明显地、毫无疑义地为真的引理。

DELTA：哦，有人觉得我们的第三引理明显吗？把它变做第三个条件吧。

GAMMA：如若我们的证明的各条引理所表示的操作不尽相独立，会怎么样呢？如果这些操作的一部分行得通，也许余下部分便必定是必然行得通的。我自己倒是猜测，若一个多面体是简单的，就总存在删去所得平面网状结构内的三角形的一种顺序，使得 V－E＋F 之值不变。而若这种顺序存在，将第一引理并入猜想后，我们就不用麻烦把第三个并入了。

DELTA：你说第一个条件蕴含了第三个。你可以证明吗？

EPSILON：我能〔53〕。

ALPHA：不论实际的证明何等有趣，也帮不了我们解决问题：要改进我们的猜想，我们须熬到什么时候？你声称有的证明，我尽可承认你有——但那不过是把第三引理论分解为几个新的子引理罢了。我们现在要把这些子引理再变作条件吗？我们究竟应于何时罢休？

KAPPA：证明中有一种无穷回归（infinite regress）现象；故证明并不行其证明之实。你要看清楚，证明是一种游戏，你有兴致，就玩一玩，你玩腻了，停手便是。

EPSILON：不，这不是游戏，是件严肃的工作。平常的真引理可以阻止无穷回归，它们不需要转变为条件。

GAMMA：正合我意。平常的真的原理可证的引理，我们并不将它们转变为条件。之前已具体指出的引理——或许是得这些平常的真的原理之助——可证的引理，我们也不将它们并入。

ALPHA：同意！我们已将两条非平常的引理变为条件后，便可于此时停止改进我们的猜想。事实上，我确以为，这种靠引理并入的改进方法，是无瑕疵的。对我来说，它不但改进，并

且完善猜想。我从中学到的重要道理是：断言“ ‘证明题’的最后目标不是说明某个清晰表述的主张为真，便是说明其为假”〔54〕，这是不对的。“证明题”的真正目标应是去改进——实际上，是完善——原始的、“素朴的”猜想，使其成为一个名副其实的“定理”。

我们的素朴猜想是“所有的多面体皆为欧拉多面体”。

怪物排除法保卫这个素朴猜想，方法是重新解释其语词，使得我们最后有一个怪物排除定理：“所有多面体皆为欧拉多面体。”不过，虽然怪物排除定理的语言表述与素朴猜想一个样，背后却靠语词意义的鬼鬼祟祟的变换，把实质的改进隐藏起来。

例外排除法引进了一个确与论证无关的元素：凸性。例外排除定理是：“所有凸多面体都是欧拉多面体。”

引理并入法取决于论据——即证明——而不取决于其他。它实质上将证明总结在了引理并入定理中：“所有带单连通面的简单多面体都是欧拉多面体。”

这表明（现在我使用“证明”一词的传统含义），人们并不证明其欲着手证明者。所以，没有一个证明应以这样的字眼结尾：“证毕（Quod erat demonstrandum）〔55〕。”

BETA：有人说，在发现的顺序中，定理先于证明：“在证明一条数学定理前，你得先猜出它。”其他人否定之，并称，发现的进程是从一组指定前提得出结论，以及注意到有趣的结论——如果你足够幸运，能找到的话。或者，用我一个朋友的令人愉快的比喻来说，有的人说在演绎的结构中，探试法之“拉链”由下而上拉，由底——结论——而至顶——诸前提〔56〕，其他人则说其由上而下拉，由顶而至底。你站在哪一边呢？

ALPHA：你的比喻对探试法无效。发现并不朝上走或朝下走，而走的是一条蜿蜒曲折的路线：它受到反例的刺激后，便从素朴猜想移到前提处，接着再转回来删去素朴猜想，而代之以定理。素朴猜想与反例并不出现在成熟的演绎结构中：发现的蜿蜒曲折的路线在成品中岂可辨出。

老师：妙哉斯言。不过我们要加上点补充，以示提醒。定理并不总是不同于素朴猜想。我们不一定需要以证明来改进。如果证明思想发现了素朴猜想的未曾料及的方面，而这些方面接着出现在定理中，证明便起改进之功。但在成熟的理论中，情况便可能不是这样。当然，这确实是年轻的、发展中的理论的情况。发现与核正、改进与证明的相互纠缠主要是后一种理论的特征。

KAPPA［旁白］：成熟的理论可以恢复活力。发现永远要取代核正，此大势所趋也。

SIGMA：这一分类法与我的不谋而合！我的第一种命题是成熟型，第三种命题是发展型的……

GAMMA［打断他］：定理是错的！我发现它的一个反例了。

5．全局而非局部的反例对证明分析的批评。严格性的问题

（a）守御定理的怪物排除

GAMMA：我刚发现我的反例 5，也就是圆柱，既驳倒了素朴猜想，又驳倒了定理。它虽满足两条引理，却是非欧拉多面体。

ALPHA：亲爱的 Gamma，不要变成狂想而古怪的人了。圆柱不过是开个玩笑，不是什么反例。没有哪个严肃的数学家会把圆柱当成多面体。

GAMMA：为何你不抗议我的反例 3，也就是海胆？它不比我的圆柱“古怪”吗〔57〕？那时，你在批评素朴猜想，所以你当然欢迎反驳。现在你在守御定理，所以憎恶反驳了！那时，每出现一个反例，你便问：猜想出了什么问题？现在你的问题是：反例出了什么问题？

DELTA：Alpha，你业已变成怪物排除者了！你不觉得难堪吗〔58〕？

（b）隐藏引理

ALPHA：是觉得难堪。我好像有些鲁莽了。我来想一想。反例有 3 种可能型态。我们已讨论了第一种，局部而非全局的——它肯定驳不倒定理〔59〕。第二种，既为全局又为局部的反例，不需要采取任何行动：它离驳倒定理远着呢，它支持其有效性。现在或许存在第三种，全局而非局部的反例。这便要驳倒定理了。我以前倒不觉得这有什么可能。如今 Gamma 声称圆柱是其中之一。若我们不想斥其为怪物而拒绝接受，我们不得不承认，它是一个全局的反例：V－E＋F＝1。但它不属于没有妨害的第二种吗？我敢肯定它至少不满足一条引理。

GAMMA：我们来查验一下。它自然满足第一引理：如果我移去底面，我可轻易在黑板上平铺拉伸余下的部分。

ALPHA：可假使你碰巧移去了侧面，这圆柱便一分为二了！

GAMMA：那么又怎样？第一引理要求多面体是“简单的”，即是说，“在移去一面后，它可平铺拉伸在一平面上”。即使你先移去侧面，圆柱仍满足这要求。你所说的，是圆柱应当满足一条附加的引理，即所得的平面网状结构也是连通的。可谁曾表述过这条引理呢？

ALPHA：人人都把“平铺拉伸”解释为“在一个整体中平铺拉伸”，“不撕裂地平铺拉伸”……

我们曾决定不并入第三引理，因为Epsilon证明它可由第一引理推出〔60〕。可只管看一看那证明吧：它是依于这条假设而成立的：平铺拉伸的结果是连通的网状结构！否则对于三角形化的网状结构来说，V－E＋F便不会是1。

GAMMA：你那时何不坚持把它明白地说出来？

ALPHA：因为我们都当它是默认地陈述过了。

GAMMA：你，就你自己而言，绝对没有如此以为。因为你曾提议说，用“简单的”代表“可吹胀成一个球”〔61〕。圆柱能吹胀成一个球——所以照着你的解释，它便确是符合第一引理的。

ALPHA：哦……但是你必须同意它不满足第二引理，即，“任意一面被对角线分割后，皆成两部分”。你准备怎么三角形化地剖分这个圆或这个侧面呢？这些面是单连通的吗？

GAMMA：它们当然是的。

ALPHA：但在圆柱上根本画不出对角线！对角线是一条棱，连接着两个不相邻的顶点。但你的圆柱连顶点都没有！

GAMMA：不要灰心丧气。如果你想说明圆不是单连通的，便画一条造不出新面的对角线来瞧瞧。

ALPHA：开什么玩笑；你知道得很清楚，我画不出。

GAMMA：那么，你愿意承认，“圆有一条对角线，这条线不产生新面”是错误的说法吗？

ALPHA：不错，我愿意。看你现在又要搞什么名堂。

GAMMA：那么你便注定要承认它的否定式为真了，即，“圆的所有对角线都产生新面”，或者说，“圆是单连通的”。

ALPHA：对于你的引理：“圆的所有对角线都产生新面”，你却给不出例子——所以它是非真的，且无意义可言。你的真理观是错误的。

KAPPA［旁白］：开始他们争论多面体是什么，现在又争论真理是什么〔62〕！

GAMMA：可你已经承认过这条引理的否定式是错误的！难道能说命题A无意义，而命题非A是有意义且假吗？你的意义观真是谬以千里！

听清楚了，我知道你的问题出在哪儿；但我们若稍微地改一改表述，便可克服你的困难。当且仅当“对一切x，若x是一条对角线，则x将一个面一分为二”成立时，我们便称此面为单连通的。圆与侧面都不能有对角线，所以，以它们而论，不管x是什么，前件总为假。故条件句可由任意对象例证之，既有意义又为真。换言之，圆与侧面均是单连通的——圆柱满

足第二引理。

ALPHA：不对！若你画不出对角线，因而不能三角形化它的面，你便永远得不到平面三角形化网状结构，你要完成证明亦永不可能。那么，你又怎么能说圆柱满足第二引理？你没看见，引理中必有一个表示存在的分句吗？面的单连通性的正确解释必须是这样：“对一切 x，若 x 是一条对角线，则 x 将一个面一分为二；且至少存在一个 x，它是一条对角线。”我们的原表述也许不曾把它说清楚，但它一直是作为无意间做出的“隐藏假设”而存在的〔63〕。圆柱所有的面都不能满足它；因此，圆柱是一个全局兼局部的反例，它驳不倒定理。

GAMMA：你首先修改了平铺拉伸的引理，手段是引进“连通性”，现在又要对三角形化的引理做手脚了，而手段是引进你的表示存在的分句！所有这些关于“隐藏假设”的遁词只不过是掩饰了一个事实：我的圆柱迫使你发明了这些改动。

ALPHA：何尝有什么遁词？我们已同意省略或即“隐藏”平常的真引理〔64〕。为何我们接着便应该陈述及并入平常的假引理——它们之平常，丝毫不亚于它们之无聊！把它们闷在你的心里（en thyme）吧，休要说出来。隐藏引理并不是错误：它是在精明而简略地指向我们的背景知识。

KAPPA［旁白］：背景知识嘛，不过是让我们在里面假设我们无所不知，事实上却一无所知〔65〕。

GAMMA：如果当初你要做出有意识的假设，会做出这样两条：（a）移去一面后总是得到一个连通的网状结构，以及（b）任意非三角形化的面皆能用对角线分割为三角形。当它们还在你的潜意识中时，它们是列为平常为真的一类的——然而，圆柱逼它们往你的有意识的清单里翻筋斗，要成为平常为假的一类。圆柱向你挑战前，你甚至无法想象这两条引理都是错的。如果你现在说你想到过，你便是在篡改历史，洗刷其错误〔66〕。

THETA：不久前，Alpha，对于 Delta 每回遭驳后其定义中便有突然冒出的“隐藏”的分句，你还奚落不已。如今却是你于每回遭驳后便在引理中编造“隐藏”分句，却是你在转移话题，想努力掩饰你的所作所为以保全脸面了。你不觉得窘迫不安吗？

KAPPA：没有比走投无路的教条主义者更能逗我开心的了。Alpha 穿上了好战的怀疑主义者的礼袍，便去毁谤教条主义较次要的一支，而他反过来被同样的怀疑主义论点逼至绝路时，他便发狂了。他现在又反复无常：他努力地抵抗 Gamma 的反例，首先是用他自己揭发出来而禁止使用的防守机制（怪物排除），随后又把后备的“隐藏引理”偷运到证明中，把相应的“隐藏条件”偷运到定理中。这与别人又有什么区别呢？

老师：Alpha 的麻烦，自然在于他解释引理并入时转向了教条主义。他以为对证明的仔细检查可以得到完美的证明分析，可使后者包含所有的错误引理（正如 Beta 以为他能历数所有的例外）。他以为，他并入它们后，所得到的不但是改进后的定理，并且是完美化的定理〔67〕，是摆脱了反例的困扰的定理。圆柱已表明他错了，可是，他非但不认账，如若一个证明分析包含所有相关的错误引理的话，他现在还要称其为完备的。

（c）一证多驳法

GAMMA：我提议，还是接受圆柱作为定理名副其实的反例。我来发明一条可以被它驳倒的新引理（或说一些引理），然后把引理加到原来的清单里。这当然严格地讲是 Alpha 做的事。不过，我要把它们公开宣告出来，而不是把它们隐藏起来，让它们变成隐藏的。

站在老证明分析和相应的老定理的立场上说，圆柱是费解、危险的全局而非局部的反例（第三种），现在，站在新证明分析和相应的新定理的立场上说，圆柱便是无妨害的全局兼局部的反例（第二种）了。

Alpha 以为，他的反例分类法是不容置疑的——可事实上，它是相对于他的证明分析的。证明分析在发展过程中，第三种的反例便转而成为第二种的反例。

LAMBDA：言之有理。当且仅当相应的数学定理没有“第三种”反例时，证明分析才是“严格的”或“有效的”，而此定理方为真。这个标准，我称为虚假性转送原理，因为它要求全局反例同时亦是局部的：虚假性应当从素朴猜想转送到引理上，从定理的后项转送到其前项上。如果一个全局而非局部的反例违反了此一原理，我们便为证明分析加上一条适当的引理来复原它。所以对处于发生态（in statu nascendi）的证明分析来说，虚假性转送原理是一条调节性原理，全局而非局部的反例是证明分析之发展中的发酵剂。

GAMMA：要记得，即使在一个反驳都没找到之前，我们已成功挑拣了 3 条可疑引理，开始着手证明分析了！

LAMBDA：所言甚是。证明分析不但在全局反例的压力下畅行无阻，且在人们已学会警惕“令人信服”的证明时亦如此〔68〕。

前一种情况下，所有全局反例都表现为第三种反例，而所有引理都以“隐藏引理”的身份开始其进程的。这些反例指引我们逐步建立证明分析，它们也就一个一个地转化为第二种反例。

后一种情况下——此时我们已抱持着怀疑的态度，留心防备反驳了——我们可以达到不带反例的高级证明分析处。于是便有两种可能。第一种可能性是我们——通过局部反例——成功地驳倒我们的证明分析中列出的引理。我们便彻底发现这些反例亦为全局的。

ALPHA：这便是我怎样发现画框的过程：先去寻找一个多面体，它在移去一面后，不能平铺拉伸在一个平面上。

SIGMA：那么，不但反驳是证明分析的发酵剂，并且证明分析亦是反驳的发酵剂了！貌似敌对的双方之间，竟存在这样一个荒谬的联盟！

LAMBDA：言之有理。若猜想看起来十分可行或甚至是自明的，便理应将它证明：人们也许

发现其依赖于十分繁杂而可疑的引理。驳倒这些引理便可能引出对于原猜想的某个始料未及的反驳。

SIGMA：证明衍生的反驳！

GAMMA：这么说，“逻辑证明的好处便不在其强立信念，却在唤起了怀疑”〔69〕。

LAMBDA：不过，且回到第二种可能性上：我们没有发现任何反驳受怀疑的引理的局部反例。

SIGMA：等于说，反驳没有助证明分析一臂之力！此时会发生什么？

LAMBDA：我们会被烙上古怪的臭名。证明会博得彻底的尊敬，引理会摆脱怀疑。我们的证明分析不久就会遭人遗忘〔70〕。没有反驳，人们不能维持他的怀疑：证明中被忽略的方面，在“平常的真理”的昏光下是几乎不曾被注意过的；怀疑的探照灯虽可把反驳的中心光源导向这些被忽略的方面，但若没有反例的增援，探照灯的电源便立马切断。

所有这些都说明，不能把一个证明与多个反驳放入分开的隔间里。正因为如此，我提议重新命名我们的“引理并入法”，而叫它“一证多驳法”。我且以 3 条探试规则来陈述其要领：

规则 1　如你有一猜想，即着手证明和反驳它。仔细检查证明，开一份不平常的引理清单（证明分析）；找出猜想的反例（全局反例）和可疑引理的反例（局部反例）。

规则 2　如你有一全局反例，即放弃你的猜想，往你的证明分析中加入一条可被这反例驳倒的合适引理，再将引理作为一条件并入猜想，而将此改进后的猜想替代被你放弃的猜想〔71〕。切勿把反驳当作怪物而抛弃掉〔72〕。设法使所有“隐藏引理”明白公开〔73〕。

规则 3　如你有一局部的反例，即检查它是否亦为一全局的反例。若然，则你可轻易地应用规则 2。

（d）证明 VS.证明分析。定理概念与证明分析之严格性概念的相对化

ALPHA：你的规则 2 中，提到“合适”，是什么意思？

GAMMA：那个词完全多余。任何引理，被正在讨论的反例驳倒后，皆可加入进去——因为任何这样的引理皆复原了证明分析的有效性。

LAMBDA：什么！这样说，像“所有多面体都至少有 17 条棱”一样的引理也要考虑对付圆柱的责任了！并且其他任何随手抓来的随意的（ad hoc）猜想也是如此了，只要恰好被反例驳倒。

GAMMA：难道不是吗？

LAMBDA：我们已批评了怪物排除者与例外排除者，说他们忘记了证明不管〔74〕。现在你是在搞一样的名堂，在发明一个真正的怪物：没有证明的证明分析！你和怪物排除者间的唯一区别，是你会让 Delta 把他任意而武断的定义公开明白地表述出来，并将它们作为引理并入定理中。而例外排除与你的证明分析便没有任何区别了。要抵御这样的随意的（ad hoc）方法，安全措施只有一个，就是采用合适的引理，即与思想实验之精神一致的引理！莫非你愿意让数学失去其证明之美，而代之以愚蠢的形式游戏？

GAMMA：这也比你的“思想实验之精神”好！我是在守卫数学的客观性，以抵御你的心理变态。

ALPHA：谢谢你，Lambda，你重申了我的论点：人并不是突然发明一条新引理，来应付全局而非局部的反例，而是细心备至地检查证明，并就地发现引理。所以，亲爱的 Theta，我并不曾“编造”隐藏引理，亲爱的 Kappa，我亦不曾把它们“偷运”入证明中。这一切本来就包含在证明里——只是一位成熟的数学家从简略的提纲就理解了整个证明。我们不应把不可错的证明与不精确的证明分析混为一谈。驳不倒的大师级定理还是存在的：“可施行思想实验的所有多面体，或简言之，所有柯西多面体，都是欧拉多面体。”我的近似证明分析描绘出了这类柯西多面体的边界线，我用的铅笔——我得承认——削得不太尖。现在古怪的反例教我们如何把铅笔削尖了。不过第一，没有铅笔绝对的尖（且若我们过分地削，它便会断掉）；第二，削铅笔算不上创造性的数学活动。

GAMMA：我搞得云里雾里了。你是什么观点？原先你是个反驳的拥护者。

ALPHA：啊，我的成长的痛楚！成熟的直觉把论争扫除殆尽了。

GAMMA：你第一次成熟的直觉曾把你引至你的“完美的证明分析”处。你曾经还以为你的“铅笔”是绝对尖的。

ALPHA：我忘记了语言交流的困难——特别是和迂夫子以及怀疑主义者交流。但数学的心脏究竟是思想实验——证明。它的语言表述——证明分析——对交流来说是必需的，但无关大局。我对多面体感兴趣，而你对语言感兴趣。你没瞧见你的反例的贫乏吗？它们是语言性质的，不是多面体性质的。

GAMMA：于是驳倒一条定理就仅仅暴露了我们的无能，掌握不了定理中的隐藏引理？这样一来，“定理”岂非无意义的，除非我们领悟了它的证明？

ALPHA：语言的含混性既然让证明分析的严格性不可企及，又让定理之形成成为一个无穷无尽的过程，我们又何必为定理烦心？职业的数学家当然不会这样。若又有一个微不足道的“反例”产生，他们不会承认他们的定理被驳倒了，而至多说其“有效域”应适当缩小。

LAMBDA：这么说，你的兴趣不在反例上，不在证明分析上，亦不在引理并入上？

ALPHA：正是。我拒绝你的所有规则。我仅提出一个规则代替之：建立严格的（水晶般清楚的）证明。

LAMBDA：你争辩说证明分析的严格性不可企及。证明的严格性可以企及吗？“水晶般清楚的”思想实验就得不出荒谬或甚至自相矛盾的结果？

ALPHA：语言虽是含混的，思想却可达至绝对的严格性。

LAMBDA：可是，其实“在进化的每一阶段，我们的先辈们不也以为他们已达至了吗？若他们自己骗了自己，我们难道就没有同样地自己骗自己？”〔75〕

ALPHA：“今日，绝对的严格性业已获得。”〔76〕

［教室里发出吃吃的笑声〔77〕。］

GAMMA：这套“水晶般清楚的”证明之理论是彻头彻尾的心理主义〔78〕！

ALPHA：却要好过你的证明分析那套逻辑语言学的迂腐卖弄〔79〕！

LAMBDA：别夹带骂人的字眼。我也怀疑你的数学观，你以为“数学是一套本质上不用语言的心灵活动”〔80〕。活动怎么能有真假？只有表达清楚的思想才能够探求到真理。光有证明尚还不够：我们亦必须说出证明所要证的是什么。证明只是数学家工作的一个阶段，其后尚有证明分析与反驳，最终结束于严格的定理。我们只能把“证明的严格性”与“证明分析的严格性”结合在一起。

ALPHA：你仍心存希望，以为你最后会得到一套严格得无以复加的证明分析吗？若是这样，请告诉我，你何不从系统阐述你由圆柱“激发”的新定理开始？你只是空说它存在。它的冗长与笨拙一定可以让我们绝望得忍俊不禁，而这不过才是你碰上的第一个新反例！你以一系列一个比一个精确的定理，替代了我们的原猜想——但只是在理论上。这一相对化过程的具体实践又是如何？一个比一个古怪的反例会被一个比一个平常的引理所反驳——得到一个比一个冗长、笨拙的定理形成的“恶无限”〔81〕〔82〕。在批评似乎要引向真理时，它还带来令人鼓舞的感觉。但当它不分青红皂白地摧毁一切真理，驱使我们漫无目的而又无穷无尽地干下去时，它便当然是令人泄气的。我在思想中止住了这个恶无限——你在语言上却永远止不住它。

GAMMA：但我从不曾说，一定有无穷多的反例存在。于某一处，我们便可到达真理，反驳之洪流即随之而停住。不过，我们当然是不知道这具体的时候。只有反驳具有决定性意义——证明是心理上的问题〔83〕。

LAMBDA：我仍坚信，反驳渐止之时，即是绝对确定性闪光之日！

KAPPA：可是有这一天吗？若上帝创造了多面体，安排让所有关于多面体的真全称命题——以人类语言表述之——是无限长吗？想当然地说（神启的）真定理的长度有限，这难道不是渎神的神人同形同性论？

老实说吧，以如此这般的理由，你们全都厌倦了繁多的反驳和逐步而零碎的定理形成过程。何不就此罢手，停止这个游戏？你已放弃了“证毕”（Quod erat demonstrandum）。何不亦放弃“诸证均毕”（Quod erat demonstratum）？真理只属于上帝。

THETA［旁白］：一个对宗教虔诚的怀疑主义者是科学最恶劣的敌人！

SIGMA：我们不要太过夸张！毕竟，只有一小块含混的边缘区出现了危险。如我之前所说的，情况很简单，不过是并非所有的命题非真即假。还有第三类命题，我现在要称其为“或多或少严格的”。

THETA［旁白］：三值逻辑——批评理性的末日到来了！

SIGMA：……我们陈述这类命题的有效域，只要有或多或少足够的严格性就行。

ALPHA：足以做什么？

SIGMA：足以解决我们想解决的问题。

THETA［旁白］：实用主义！人人都对真理丧失兴趣了吗？

KAPPA：或是对 Zeitgeist（时代精神）来说足够了！“有一天严格性，就够用一天。”〔84〕

THETA：历史主义！［晕倒。］

ALPHA：Lambda 为“严格的证明分析”制订的规则剥夺了数学之美，呈于我们冗长又笨拙的定理的吹毛求疵的迂腐卖弄，这些定理充斥着枯燥乏味、厚如砖块的书本，最后只会搞得我们陷入恶无限之困境中。Kappa 的逃生之计是做出约定，而 Sigma 的是数学实用主义。这就是理性主义者的选择吗！

GAMMA：所以，理性主义者应该品尝 Alpha 的“严格证明”的滋味：表达不清的直觉、“隐藏引理”、对虚假性转送原理的嘲弄、对反驳的消灭，是吗？数学应该与批评和逻辑无关，是吗？

BETA：无论事实如何，我已经受够所有这些不确定的诡辩了。我想搞数学，对核正数学基础之正当性所遇到的哲学困难，我毫无兴趣。即令理性不能提供如此的正当性之核正，我的自然本能可以让我安心〔85〕。

我晓得 Omega 搜集了一些有趣的可供选择的证明——我倒愿意听听他的。

OMEGA：可我要把它们置入“哲学的”框架内啊！

BETA：我不在乎包装，如果包里还有点其他的东西。

按语：在这一节里，我试图说明数学批评的出现一直是如何作为探寻数学“基础”的主动力的。

看起来，我们对证明与证明分析及相应的证明之严格性与证明分析之严格性做出的区分是关键性的。1800 年左右，证明的严格性（水晶般清楚的思想实验或构造）与乱七八糟的论证、归纳的结论间形成巨大反差。这便是欧拉所谓“（论证的严格性）rigida demonstratio”，而康德的不可错数学之观念亦建立在此概念之上（见其［1781］第 716—717 页上数学证明的范例）。那时亦认为，人应证明其欲着手证明者。且对所有人来说，思想实验的口头表达都不存在真正的困难。亚里士多德（Aristotelian）形式逻辑与数学是两块完全独立的领域——数学家以为前者毫无用处。证明或思想实验无需任何演绎模式或“逻辑”结构，便令人心服口服。

19 世纪初，反例之洪流带来了混乱局面。因为证明是水晶般清楚的，反驳便必须是不可思议的离经叛道者，要彻底从不容怀疑的证明中隔离开。柯西的严格性之革命依靠探试法的创新，数学家不应在证明上便刹住脚了：他应继续前进，寻出他已证明了什么，方法是列举例外，或不如说是表述出证明生效的安全范围。但柯西——以及阿贝尔——均未见到两个问题的联系。他们一生都未悟及，如果他们发现一个例外，他们便应再看看证明有什么问题。（其他人施行了怪物排除、怪物校正乃至“熟视无睹”——但所有人皆同意证明是忌讳“例外”的，两者毫不相干。）

19 世纪逻辑与数学的统一有两个主要的源头：非欧几何与维尔斯特拉斯的严格性革命。它们引来了证明（思想实验）与诸反驳的整合，开始发展证明分析，逐渐把演绎模式引入来证明思想实验。我们所说的“一证多驳法”便是他们的探试发明：其首次把逻辑与数学连为一体。维尔斯特拉斯派的严格性战胜了它的两个反动的敌人：怪物排除与引理隐藏，此两者曾高举“严格性之愚钝”、“人造物与美”等等的旗号。证明分析的严格性取代了证明的严格性：不过只要证明分析以完全确定性作为保证，大多数数学家便亦容忍了它的迂腐之气。

康托尔（Cantor）的集合论——它一出生，“严格”定理的另外一些未曾料及的反驳又蹦了出来——把许多维尔斯特拉斯派的老卫士变成了教条主义者，并跃跃欲试地跟“无政府主义者”搏斗，手段是排除新的怪物，或者说他们的代表“严格性的最后定论”之定理中原就有“隐藏引理”，仍给老式的“保守派”扣上雷同罪的帽子而穷追猛打。

接着，部分数学家意识到，多证多驳法之追逐证明分析的严格性要掉到恶无限里去。一场反对“直觉主义”的变革开幕了：证明分析令人垂头丧气的那套逻辑语言上的迂腐卖弄遭到了严辞声讨，而为证明发明了严格性的新极端主义标准；数学与逻辑再度分离了。

逻辑主义者试图挽救这两者之间的结合，却被悖论绊了一跤。希尔伯特派的严格性把数学变成了一张证明分析的蜘蛛网，并号称靠着他那直觉主义元理论中水晶般清楚的连续性证明，便可制止它们的无穷回归。这“基础层”，也即具有不可批评的熟悉性的区域，被转移到了元数学的思想实验中去。（参看拉卡托斯［1962］，第 179—184 页）

通过每一次“严格性革命”，证明分析都更深地渗透在证明中，直至渗透到了“熟悉的背景知识”的基础层（亦见第 44 页脚注③），而这是个水晶般清澈的直觉和证明的严格性主宰一切的王国，批评在这儿被驱逐出境了。于是，不同级别的严格性便仅于一点处不同：它们于何处为证明分析之严格性与证明之严格性划界，即批评当于何处停止，核正当于何处开始。“确定性从未达到”；“基础”永未寻得——但在数学的领域里，“理性的狡猾”把严格性的每一回增加都变成了内容的扩增。不过，这一情节在我们现在的考察范围之外〔86〕。

6．再论局部而非全局的反例对证明的批评。内容问题

（a）以更深入的证明扩增内容

OMEGA：我喜欢 Lambda 的一证多驳法，我跟他同样深信，没准儿何时我们便最终得到了严格的证明分析，因此亦得到了肯定为真的定理。不过，即便如此，正是我们的方法产生了一个新问题：证明分析在增加确定性的，减少了内容。证明分析中每增加一条新引理，都对应地增加定理中的一个新条件，而缩小了其论域。严格性倒是增加，适用的多面体却不断减少了。那么引理并入不就重蹈 Beta 为安全起见而稳扎稳打时的覆辙了吗？我们岂不也会“撤退得太激进，把许许多多欧拉多面体置于城墙之外”吗〔87〕？在两种情况下，我们都可能把婴儿跟浴盆里的水一起倒掉。我们应有一个平衡力，来抵消减少内容的严格性之压力。

我们已在此方向上迈出几步了。我且提醒你们回想两件事例，并重新检查它们。

一个是我们首次遇到的局部而非全局的反例〔88〕。在我们开始的证明分析中（即“从平面三角形化网状结构中，只有两种移去三角形的可能：要么移走一条棱，要么移走两条棱加一个顶点”），Gamma 驳倒了第三引理。他从网状结构的中间移走了一个三角形，而棱与顶点却根本没减少。

我们接着有了两种可能性。〔89〕第一种可能是，将错误的引理并入定理中。要虑及确定性，这便是再合适不过的方法，但要大大缩小定理的论域，使其只适用于四面体。这样，除一个例子幸免外，我们便把所有例子与反例一起抛弃了。

这便是我们接受另一种选择的根本原因：我们不通过引理并入来缩小定理的论域，而以一条未被证伪的引理替代已被证伪的引理，从而扩大定理的论域。不过这一定理之形成的至关紧要的模式不久便被人遗忘，而 Lambda 也根本不费一点心思去把它表述为一条探试规则。它应为：

规则 4　如你有一局部而非全局的反例，设法以一条未被证伪的引理替代已驳倒的引理，从而改进你的证明分析。

定理之内容在第三种反例（全局而非局部）的压力下不断减少。第一种反例（局部而非全局）可提供机会扩增我们的定理之内容。

GAMMA：规则 4 再次把 Alpha 如今已放弃的“完美的证明分析之直觉”的弱点暴露无遗〔90〕。若是他的话，他会把可疑的引理一一列出，且立即如数并入，而——毫不在乎反例地——凑成一堆几乎空空如也的定理。

老师：Omega，让我们听听你方才要说的第二件事例。

OMEGA：在 Beta 的证明分析里，第二引理是“所有面皆为三角形”〔91〕。这可被许多局部而非全局的反例证伪，如立方体或者十二面体。故而，先生，您便替之以一条未被它们证伪的引理，即“任一面皆被对角棱一分为二”。不过，您并未借助规则 4 之力，而是叱责了 Beta“粗心的证明分析”。您会承认规则 4 这则建议要比仅仅说“细心一点儿”有效。

BETA：正是如此，Gamma，你亦使我更加了解“最优秀的例外排除者之方法”了〔92〕。他们以谨慎而“安全”的证明分析起头，并在系统运用规则 4 的情况下，逐渐建立起定理，这中间一句假话也不说。毕竟，是通过一个比一个假的夸夸其谈，还是通过一个比一个真的谦逊之词去通达真理，这是个性格问题。

OMEGA：或是如此。但可以有两种方式解释规则 4。迄今我们只考虑过第一种稍弱的解释：“以反例驳不倒的略微修改后的引理替代错误的引理，来制作并改进证明，是轻而易举的事”〔93〕；要能如此，所需的不过是对证明的“更细心的”检查和一次“平常的观察”〔94〕。依此种解释，规则 4 不过是在原始证明的框架内的范围补缀而已。

我还要考虑可替代第 1 种的激进解释：替换引理——或者可能是所有引理——的手段，不只是要努力把给定证明的最后一小块内容全挤出来，并且可能还要发明一个完全不同的、内容更广的更深入的证明。

老师：譬如说？

OMEGA：我早先同一位朋友讨论了笛卡儿-欧拉猜想，他立马给出了如下的证明：让我们想象一个空心多面体，其表面由任意刚性材料制成，比如硬纸板。其棱必须在其内表面清楚地画上。让其内灯火通明，并设某一面是一个普通相机的镜头——从此面我便可拍一张所有棱与顶点的快照。

SIGMA［旁白］：照相机参加了数学证明？

OMEGA：于是我得到一张平面网状结构的相片，可与你的证明中的平面网状结构做同样的处理。我亦可以相同方式说明，若面是单连通的，便有 V－E＋F＝1，再加上照片上不可见的镜头那一面，我便得到欧拉公式。这里的主要引理是：存在多面体的一个面，其换为照相机镜头后，便可照出多面体的内部景象，让所有的棱与顶点皆在胶卷显影。现在我引入下面的简略表述：不说“至少从一个面可拍遍其内部的多面体”，而说“准凸多面体”。

BETA：所以你的定理是：所有带单连通面的准凸多面体是欧拉多面体。

OMEGA：为了简洁，及表扬这个特殊证明思想的发明者，我倒愿意说：“所有日果内多面体是欧拉多面体”〔95〕。

GAMMA：可是有许多的简单多面体啊，虽然从头到脚是欧拉多面体，但却犬牙交错得厉害，使得不能由任一面照遍其内部！日果内的证明并不比柯西的深入——倒是柯西的证明比日果内的深入！

OMEGA：那还用说！我推测老师已知道了日果内的证明，他由一些局部而非全局的反例发现它不尽如人意，便把光学——照相——引理换了更为宽广的拓扑学——拉伸——引理。他由之得到了更深入的柯西证明，其方法不是作一点小改动尾随的“仔细的证明分析”，而是激进且富于想象的革新。

老师：我接受你的例子——但我并不曾了解到日果内的证明。不过，如果你以前知道，你为何不把它告诉我们呢？

OMEGA：因为我立即便用欧拉多面体非日果内多面体把它驳倒了。

GAMMA：我方才说，我也发现了这样的多面体。但是否那便是一股脑儿废弃日果内证明的理由？

OMEGA：我是这么认为的。

老师：你听说过勒让德的证明吗？你要把它也废弃了？

OMEGA：当然要。勒让德证明还更不令人满意：内容比日果内证明还贫乏。他的思想实验是先把多面体以一个中心投影映射到包含此多面体的球体上。球体的半径他设为 1。投影中心的选法，他要求经过一次且仅有一次的投影后，球面的多边形网络便盖满球体。故而他的第一引理便是如此的点存在。他的第二引理是，对球面上的多面体网状结构来说，有 V－E＋F＝2——不过，这条引理被他成功地分解成了球面三角学的平常的真引理。可是，能做到这样的中央投影的点只存在于凸的及少许正派的“几乎凸的”多面体中——这是比“准凸”多面体还狭小的类别。而“所有勒让德多面体是欧拉多面体”这个定理〔96〕，虽完全不同于柯西定理，却只是更糟。它是如此“令人遗憾的不完备”〔97〕。这简直是“白费工夫，它预设了欧拉定理并不依赖的条件。必须废弃它，而去寻找更普遍的原理”〔98〕。

BETA：Omega 之言甚是。“从某种程度上说，凸性对于欧拉性是偶然因素。一个凸多面体可转化为非凸多面体，譬如敲凹一处或者把一个或更多的顶点按进去，而最后仍有相同的构形数。欧拉关系对应着比凸性更基本的某种关系。”〔99〕你要加上你的“近乎”和“准”的虚饰，便休想捕获这种关系。

OMEGA：我过去以为老师已经捕获它了，就在柯西证明的拓扑学原理中，在这个证明里，勒让德证明的所有引理都换为了崭新的引理。这个证明肯定是过去以来最深刻的，但之后我偶然发现了一个多面体，就是这个证明也被它驳倒了。

老师：我们洗耳恭听。

OMEGA：诸位，回想一下 Gamma 的“海胆”（图 7）。它自然是非欧拉多面体。但并非所有的星状多面体都是非欧拉多面体！举个例子，比如“大星状十二面体”（图 15）。它同“小星状十二面体”一样由五角星组成，但排法不同。它有 12 个面、30 条棱、20 个顶点，故 V－E＋F＝2〔100〕。

老师：你便要拒斥我们的证明了吗？

图 15

OMEGA：正是。你们那令人满意的证明不得不也解释一下“大星状十二面体”的欧拉性。

RHO：为何不承认你的“大星状十二面体”也是三角形化的？你的困难都是虚构的。

DELTA：同意。但它们被虚构倒是出于另一个理由。我已爱上星状多面体而不能自拔了：它们让人神魂颠倒。但恐怕它们在本质上不同于普通多面体：所以，仅由一点想法，便要构思出证明来同时解释像立方体和“大星状十二面体”的欧拉性质，是不可能的。

OMEGA：有何不可？你真是寡于想象。你在日果内证明之后和柯西证明之前，定会坚决主张说，凹凸多面体是本质上不同的：所以，仅由一点想法，便要构思出证明来同时解释凹凸多面体的欧拉性质，是不可能的，是吗？我且引用伽利略的《对话集》：

沙格列陀（SAGREDO）：所以，如你们所见，所有的行星和卫星——我们且统称为“行星”——是在椭圆轨道上运动的。

萨尔维阿蒂（SALVIATI）：恐怕还有以抛物线轨道运动的行星吧。且看此石头。我把它扔出去：它沿着抛物线轨道运动。

辛普利邱（SIMPLICIO）：可这石头却不是个行星！这两种是完全不同的现象！

萨尔维阿蒂：这石头当然是个行星，只不过扔掷它的手比抛掷月球的手力气小罢了。

辛普利邱：一派胡言！你怎么敢把天上和地上的现象相提并论？两者风马牛不相及。它们当然均可由证明来解释，但我有把握预见到，这两种解释必定迥然不同！我不能想象，仅由单一的一种想法，证明便要同时解释天上的行星和地球上的抛射体的轨道！

萨尔维阿蒂：你想象不出，我却可设计出来〔101〕……

老师：别去管抛射体和行星了，Omega，你倒是找到了把普通的欧拉多面体和欧拉星状多面体都囊括在内的证明了吗？

OMEGA：还没有呢。但我想我会找到〔102〕。

LAMBDA：就算你找到了吧——柯西的证明又出了什么问题呢？你何以把证明接二连三地拒之于千里之外，你总该有个交代啊。

（b）向最终证明与相应的充分必要条件进军

OMEGA：因为第三种反例摧毁了虚假性转播，你批评了证明分析〔103〕。我现在要就第二种反例摧毁了虚假性传导（或等于是一回事的真实性之传导）来批评它们〔104〕。一个证明必须在欧拉性现象的整个范围内对之作出解释。

我不但追求确定性，还追求终极性。定理必须是确定的——其论域内，决不能有任何反例；而它也必须是终极的：其论域外必不再有任何例子。我要在例子与反例的正中间画一条分界线，而不只是把线画在一边是少许例子的安全范围与另一边是例子与反例的大杂烩之间。

LAMBDA：即是说，你要定理的条件不但是充分的，而且是必要的！

KAPPA：为了讨论的便利，我们想象你已寻着此一主要定理：“所有标准多面体是欧拉多面体”。你认识到了吗，只有当其逆定理：“所有欧拉多面体是标准多面体”确定无疑时，定理才成为“终极的”？

OMEGA：那是自然。

KAPPA：也就是说，若确定性迷失在恶无限当中，终极性也会这样？你的证明一个比一个深刻，但你会发现，在每一个证明的论域外，至少存在一个欧拉多面体。

OMEGA：我当然晓得如果我解决不了确定性问题，我便不能解决终极性问题。我确信两者我们都可解决。我们要止住无穷无尽的一大串的第一种和第三种反例。

老师：你想方设法地增加内容，这很重要。可何不把你裁决定理是否满意的第二个标准——终极性——看作令人愉快的意外收获，而非义不容辞的责任呢？为何要拒绝那些不包含充分必要条件的有趣证明？为何要认为它们已被驳倒？

OMEGA：嗯〔105〕……

LAMBDA：无论事实如何，这一点 Omega 无疑已说服了我，要想批判地改进素朴猜想，单单一个证明也许是不够的。我们的方法应该收入他的规则 4 的激进版，因而我们的方法应叫做“多证多驳”法，而不叫“一证多驳”法。

MU：不好意思，我插个嘴，我刚把你们的讨论结果翻译成了准拓扑学语言：引理并入法得到了一个收缩序列，由逐渐改进的定理之论域逐层嵌套而成；在隐藏引理一一出现的过程中，这些论域经受不起全局反例的不断攻击，缩小并收敛至一极限：我们且把这极限叫做“证明分析的范围”。如果我们应用规则 4 的弱版本，这范围便又在局部反例的持续压力下变大。正在扩大中的序列便再次趋于一极限：我且把这极限叫做“证明的范围”。讨论接着显示出，即令是此一极限域，也可能是极狭小的（甚至可能是空域）。我们也许必须构想出更深入的诸种证明，其诸论域形成一个扩充序列，包含愈来愈多的顽抗的欧拉多面体，它们对之前的证明构成局部反例。这些论域，就它们自身而言是极限范围，又会收敛至一个二重极限，叫做“素朴猜想的范围”——这个范围便是最终的探究目标。

此一探试区间的拓扑学将成为数学哲学的一个问题：这些序列是无限的吗？它们究竟收敛吗？是否达到极限？极限会是空集吗？

EPSILON：我发现了一个证明，比柯西证明更深入，还可解释 Omega 的“大星状十二面体”的欧拉性！［递给老师一张纸条。］

OMEGA：终极的证明到来了！欧拉性的真正本质此时此刻便可揭示开来！

老师：不好意思，时间不够了：只好下次讨论 Epsilon 这个十分繁复的证明了〔106〕。我确实瞧见的还不是 Omega 的意义上的终极。是吗，Beta？

（c）不同证明得出不同定理

BETA：从这场讨论中，我学到的最有意义的一点是，同一个素朴猜想的不同证明可引出极为不同的定理。一个笛卡儿-欧拉猜想，每被一个证明改进后，便成了各不相同的定理。我们的原证明得到：“所有柯西多面体是欧拉多面体。”现在我们又已知了两条迥然相异的定理：“所有日果内多面体是欧拉多面体”以及“所有勒让德多面体是欧拉多面体”。3 个证明、3 条定理，来自共同的祖先〔107〕。可见“欧拉定理的不同证明”这个常用表述是要让人犯糊涂的，因为它把定理形成中证明的关键角色隐藏起来了〔108〕。

PI：不同证明间的区别远比这深刻得多。只有素朴猜想是有关多面体的。定理是分别关于柯西式对象（objects）、日果内式对象、勒让德式对象的，却不再跟多面体有什么关系。

BETA：你想逗大家开心吗？

PI：不，我会阐述我的立场。但我会在一个更宽泛的背景下阐述——我要来一个概念之形成的一般性讨论。

ZETA：我们还是先讨论内容吧。我以为 Omega 的规则 4 极其虚弱无力——即使按其极激进解释来说〔109〕。

老师：说对了。我们就先听听 Zeta 处理内容问题的方法，接着以讨论概念形成作为我们的争论的结束吧。

7．重谈内容问题

（a）素朴猜想的素朴性

ZETA：我与 Omega 都一致悲叹，众多的怪物排除者、例外排除者、引理并入者均以牺牲内容为代价来争取确定无疑的真理。不过，他的规则 4〔110〕只要求有同一个素朴猜想的更深入的证明，却尚嫌不够。我们对内容的寻求凭什么该局限于我们偶然发现的第一个素朴猜想？我们探究的目标凭什么是“素朴猜想的范围”？

OMEGA：我不听你的。我们的问题岂不就是挖掘 V－E＋F＝2 的真实性之范围？

ZETA：才不是！我们的问题是找出一切可能出现的多面体之 V、E、F 间的关系。我们开始时对 V－E＋F＝2 的多面体较为熟悉，这纯属巧合。但若批判地探究了这些“欧拉”多面体，便会明白非欧拉多面体要比欧拉多面体多得多。何不寻找 V－E＋F＝－6、V－E＋F＝28、V－E＋F＝0 的范围？它们不也同样有意义吗？

SIGMA：不错。我们对 V－E＋F＝2 关注太多，仅因为我们原来以为它真。现在我们知道它不真——我们必须找到一个更深刻的新素朴猜想……

ZETA：……那将不那么素朴……

SIGMA：……将是任意多面体的 V、E、F 间的关系。

OMEGA：冲动什么？我们先解决我们开始即着手解决的这个稍微谦虚点儿的问题吧：解释为何一些多面体是欧拉多面体。直到现在我们也不过得到了些片面解释。比如，迄今发现的证明没有一个解释得了，为何一前一后都有一个环状面的画框是欧拉多面体（图 16）。它有 16 个顶点、24 条棱、10 个面……

THETA：它确然不是一个柯西多面体：它有隧道，有环状面……

BETA：但却是欧拉多面体！多么不合理啊！仅有一处过失的一个多面体——有隧道而无环状面（图 9）——罪行便大到要被逐出羊群，而有双倍过失的多面体——还有环状面（图 16）

——却可接纳入羊群里吗〔111〕？

OMEGA：这不，Zeta，我们关于欧拉多面体的疑问还多着呢。在我们前行至更一般性的问题前，我们先要把它们解决掉。

图 16

ZETA：非也，Omega。“多一些问题或许比只有一个问题还更好回答。一个野心更大的新问题或许比原问题更易处理。”〔112〕实在说来，我正是要给你阐明，你那些狭小、偶然的问题非得在解决更广泛、更本质的问题后方有眉目。

OMEGA：但我渴望挖掘欧拉性的秘密啊！

ZETA：我理解你的抵触情绪。你想找出上帝在何处为欧拉与非欧拉多面体划界，你深爱这个问题。但是，根本没有理由相信“欧拉多面体”一词出现在上帝的宇宙蓝图中。如果欧拉性仅仅是一些多面体的偶然性质呢？此时，要找出欧拉与非欧拉多面体间随机的蜿蜒曲折的分界线，便是没有意义的，甚至不可能的。然而如此的坦白却可予理性主义一清白之身，因为此时欧拉性便不是理性的宇宙设计的一部分了。所以，我们还是忘掉它吧。批判理性主义的要点之一，便是人总是在求解的过程中，有准备地放弃他的原始问题，而代之以另一个问题。

（b）作为多证多驳法之基础的归纳

SIGMA：Zeta 之言甚是。真是场灾难啊！

ZETA：灾难？

SIGMA：一点不差。你现在想要一个新的“素朴猜想”，关于任意多面体的 V、E、F 间的关系的，不是吗？根本不可能！看看这一大堆反例吧。带空腔的多面体、带环状面的多面体、带隧道的、在棱与顶点处相连的……V－E＋F 可取完全任意之值！你在这场混乱中理不出任何秩序！我们离开了欧拉多面体脚下的坚实土地，却去找寻沼泽烂泥地！我们已失去了一个素朴猜想，再也无法弥补，再也没有希望获取另一个猜想了！

ZETA：可是……

BETA：凭什么不能？回想起我们的顶点、棱、面之数目表，即使包含最寻常的凸多面体，也仿佛绝望似地混乱不堪〔113〕。我们失败了许多次，都不能将它们纳入一个公式〔114〕。可是，突然出现的支配着它们的这条真正的规律，一下子把我们震撼了：V－E＋F＝2。

续　表

KAPPA［旁白］：“真正的规律”？一个十足的错误的滑稽表述吧。

BETA：我们现在要做的，只是去以非欧拉多面体的数据把我们的表格补充完整，并去寻求一个新公式：通过耐心而勤奋的观察，加上些运气成分，我们总会突然发现那正确的公式；随后我们可再次应用多证多驳法来改进它！

ZETA：耐心而勤奋的观察？一个接一个地尝试公式？也许你会发明出一个猜测机，由它产生随机的公式，然后比对你的表来检验它们？这便是你对科学进步的看法？

BETA：听不懂你的挖苦话。不论我们在发现一个素朴猜想之后做了多少“多证多驳”的批判方法，但我们最初的知识、我们的素朴猜想，只能从勤奋的观察和意外的顿悟而来，对于这一点想必你该同意吧？任何演绎的方法都必须从一个归纳的基础出发！

SIGMA：你的归纳法永无成功之日。我们只不过得到了 V－E＋F＝2，因为我们的原始表中恰好没有画框和海胆。既然这一历史巧合……

KAPPA［旁白］：……或说上帝恩赐的引导……

SIGMA：……已不复有，你便永不能把秩序从混乱不堪中“归纳”出来。我们曾以长久的观察和走运的顿悟为起点——但失败了。如今你提议说要以更长久的观察、更走运的顿悟再次开始。纵使我们得到了一个新的素朴猜想——我倒怀疑能否如愿——我们也只能以同样的混乱告终。

BETA：也许我们该把研究统统放弃了？我们只可重新开始——首先有一个新的素朴猜想，然后施行同样的多证多驳法的步骤。

ZETA：不对，Beta。我与 Sigma 是一致的——所以我不会再以一个新的素朴猜想作为起点。

BETA：如若没有归纳得来的低层次的概括作为素朴猜想，你又想从何处开始？难道你另有一开始之法？

（c）演绎的猜测 VS.素朴的猜测

ZETA：开始？我为何要开始？当我发现（或发明）一个问题时，我的心里并非空空如也的。

老师：别开 Beta 的玩笑了。这便是问题："多面体的顶点数、棱数、面数之间，有一定的关系吗，就像多边形的顶点数与边数的平常的关系 V＝E 那样？"〔115〕你想如何下手？

ZETA：首先，我未获得政府授权去领导一项大规模的多面体普查，也没有研究助手的大军，来数多面体的顶点、棱和面，并用数据制成表格。纵然我有，我也没有耐心——或兴趣——去尝试一个一个的公式，看看哪个是符合的。

BETA：那要怎么样？你要高卧床头，紧闭双眼，将这些数据束之高阁？

ZETA：正是如此。我需要以一个观念开始，而非如此这般的数据。

BETA：你又从何处获得你的观念呢？

ZETA：我们系统表述问题时，想法便存于我们的心里了：说实在的，它正存于问题的系统表述当中。

BETA：什么观念？

ZETA：即对多边形来说，有 V＝E。

BETA：于是怎样？

ZETA：问题从不凭空而生，总是跟我们的背景知识相关。我们知道，对多边形有 V＝E。可以认为，一个多边形是单单一个多边形构成的多边形系统。而一个多面体是不止一个多边形构成的多边形系统。可对多面体而言，V≠E。从单多边形系统转到多多边形系统的过程中，关系 V＝E 在哪一处失效了呢？我不去收集什么数据，我要跟踪这问题是如何由我们的背景知识而生；即是说，问题的出现，究竟是因为什么样的期望落了空呢？

SIGMA：言之有理。就按你的建议办。对任一多边形，有 E－V＝0（图 17（a））。如我把另一多边形接合上去（不一定在同一平面内），会有什么情况发生？后加的多边形有 n1 条边、n1 个顶点；现在沿着条边、＋1 个顶点的链，把它接合到原多边形上，我们便将边数增加了 n1－，将顶点数增加了 n1－（＋1）；即，在新的二多边形系统中，边数便对顶点数有一个超出量：E－V＝1（图 17（b）；一个不常见却完全正当的接合法见图 17（c））。将一个新面"接合"到系统上便总是将原先的超出量增加 1，或者说，对于如此建立的 F 多边形系统，便有 E－V＝F－1。

ZETA：移项便得 V－E＋F＝1。

LAMBDA：但这对大多数多边形系统而言皆不合。比如拿立方体来说……

SIGMA：我的构造法只可得到"开"多边形系统——以边的环路为界！但不难扩展我的思想

实验，形成“闭”多边形系统而去掉这样的限制。实现这闭合性的方法，便是为一个瓶状的开多边形系统盖上多边形盖子：将这样的盖子多边形接合上去，便将 F 增加 1，而不改变 V 和 E……

图 17

ZETA：这不就是说，若闭多边形系统——或谓闭多面体——照这样的方式构造，便有 V－E＋F＝2：你未“观察”任何多面体的顶点、棱、面之数目，便得到了这个猜想！

LAMBDA：而此时你不从“归纳的起始点”出发，亦可应用多证多驳法了。

ZETA：有一点区别，就是你不需构思出一个证明——证明就在那儿！你可立马继续多次反驳、证明分析、定理形成之工作。

LAMBDA：那么，你的方法里——不是观察——是证明在素朴猜想之先了〔116〕！

ZETA：哦，对于从证明发展出来的猜想，我不会叫它“素朴的”。在我的方法里没有归纳素朴的位置。

BETA：反对！你不过是迫使“素朴的”归纳起点往后退罢了：你的起点是“对多边形有 V＝E”。这一点你难道不是以观察为基础的？

ZETA：我跟大多数数学家一样，连数数也不会。我只是使尽力气把七边形的边和顶点数了数：我先是发现有 7 条边、8 个顶点，第二次又发现有 8 条边、7 个顶点……

BETA：别闹着玩儿了，你到底如何得到 V＝E？

ZETA：当我第一次意识到对于三角形有 V－E＝0 时，我曾深深地为其震撼。我当然很清楚，对于一条边（线）有 V－E＝1（图 18（a））。我也知道把新边接合上去的结果，总是让顶点数与边数各增加一（图 18（b）及 18（c））。何以在多边形的边系统中有 V－E＝0？接着我悟及，这是由于从一个开的边系统（以两顶点为界）转到了闭的边系统（没有这样的界限）：因为我们把一条边接合上去而盖合了开系统，却没有增加新的顶点。所以，我是证明而非观察到了，对多边形有 V－E＝0。

图 18

图 19

BETA：你的巧妙构思并没有对你有所帮助。你仅迫使归纳的起点进一步往后退了：现在退到了这个命题上：对任一边皆有 V－E＝1。你是证明它的呢，抑或是观察到的呢？

ZETA：我是证明的。我自然明白，单有一个顶点则 V＝1（图 19）。我的问题便是要构造一个类似的关系……

BETA［暴怒］：对于一点有 V＝1，你难道不是观察出来的吗？

ZETA：你难道是观察出来的吗？［旁白，向 Pi 说］：我是不是要告诉他，我的“归纳的起点”是真空？我从“观察”虚无开始？

LAMBDA：不论事实怎样，有两点已水落石出了。第一，Sigma 论证了，得到素朴归纳猜想只是由于历史的巧合：面对着实际中混乱不堪的事实，谁都几乎不可能把它们纳入一个漂亮的公式中。此后 Zeta 说明了，就多证多驳的逻辑而言，我们根本不需要素朴猜想，亦根本不需要归纳主义的起点。

BETA：反对！又该怎么解释那些不曾被证明占先（甚至断后）的著名猜想，比如四色猜想：4 种颜色便足以绘制任一张地图，以及哥德巴赫（Goldbach）猜想？只是由于历史巧合，证明方可在定理之先，Zeta 的“演绎猜测”方可进行：否则素朴归纳猜想便是首当其冲的。

老师：两个探试模式我们确实都必须学学了：演绎猜测是最优秀的，但素朴猜测总比什么都不猜测好。不过素朴猜测并不是归纳：归纳的猜想这种玩意儿是不存在的！

BETA：但我们是通过归纳才发现的素朴猜想啊！“即是说，它由观察所诱发，由特殊例子所点明……而在我们已检验过的特殊例子中，我们可以分出两类来：一类是先于猜想之形成与表述的，一类是在其后方到来的。前者诱发了猜想，后者支持了其有效性。两种情况均提供了猜想与‘事实’间的某种联系……”〔117〕这一双重联系便是归纳的核心：前者产生归纳探试法；后者产生归纳核正，或称归纳逻辑。

老师：错！事实决不诱发猜想，亦不支持其有效性！

BETA：那么，如不是我那张表里列出的事实的话，又是什么诱发了我的 V－E＋F＝2 的想法？

老师：我这就告诉你。你自己曾说，你为把它们纳入一个公式，曾多次受挫〔118〕。当时的事实情况是：你先有三四个猜想，很快一个接一个都被驳倒。你的表便是在检验和反驳这些猜想的过程中逐渐制作的。这些已经完结并遭今人遗忘的猜想诱发了事实，却非事实诱发了猜想。素朴猜想不是归纳的猜想：我们所以能得到它们，是通过试试错错、多次猜想与多次反驳〔119〕。但若你——错误地——相信你是从你的表中通过归纳得到它们的，若你相信表越长，表所诱发而后支持的猜想便越多，你便会在搜集不必要的数据上浪费时间。而且，因为你被灌输了发现的途径是由事实到猜想、由猜想到证明的观念（归纳的神话），你便会把探试法的另一条路忘得一干二净：演绎猜测〔120〕。

数学探试法与科学探试法极为类似——并非因为两者皆是归纳的，而是因为两者皆是以多次的猜想、证明、反驳为特征。这中间的——重要——区别在于两者的猜想、证明（或在科学

中是解释）、反例的性质不同〔121〕。

BETA：我明白了。于是，我们的素朴猜想便不是有史以来的第一个猜想，便不是由坚实的、非猜想性的事实根据所“诱发”：它之前已有许多“前素朴”的猜想和反驳了。猜想与反驳的逻辑没有起点——但证明与反驳的逻辑却有：自第一个由思想实验断后的素朴猜想开始。

ALPHA：也许吧。但如此说，我当初便真不该叫它“素朴的”〔122〕！

KAPPA［旁白］：即使在探试法中，也没有完美的素朴性这回事！

BETA：主要是需从试试错错的阶段中摆脱出来，愈快愈好，接着迅速转到思想实验上去，别过于对“事实”抱有“归纳”的尊敬。这样的尊敬会妨碍知识的发展。设想你已通过试试错错得到了这个猜想：V－E＋F＝2，但因为观察到对画框有 V－E＋F＝0，它又马上被驳倒了。若你对事实太过尊敬，尤其是当它们驳倒你的猜想时，你便会继续进行前素朴的试试错错过程，另寻找一个猜想。但若你采取更优秀的探试法，你至少会尝试忽略掉不利的观察检验，而用思想实验尝试一次检验：如柯西证明一样。

SIGMA：真是混淆黑白！凭什么把柯西证明称为一次检验？

BETA：凭什么把柯西检验称为一个证明？那本就是检验！听好。你由一个素朴猜想开始：对所有多面体，V－E＋F＝2。接着你由它得到一些结果：“若素朴猜想为真，则移去一面后，对剩下的网状结构有 V－E＋F＝1”；“若此结果为真，则即使三角形化后亦有 V－E＋F＝1”；“而若这最后的结果为真，则当三角形一个个挪走时，V－E＋F＝1 亦一直为真”；“此若为真，则对单单一个三角形还是有 V－E＋F＝1”……

现在，这最后的结论恰好是我们已知为正确的。但如我们曾下结论说，对单单一个三角形有 V－E＋F＝0，又是如何呢？我们会立即以原猜想为误而拒绝接受。所有我们已做的，只是检验了我们的猜想：由它得出种种结论。这检验似乎是确证了猜想。但确证并非证明。

SIGMA：但这样一来，我们的证明所已证的，比我们以往认为的还要少了！于今我们不得不把过程倒过来，试着建立一个朝反方向走的思想实验了：由三角形返回多面体！

BETA：正是。只有 Zeta 指出了，解决我们的问题，可以不必先经过试试错错构思一个素朴猜想，然后检验它，然后将检验颠倒成证明，而尽可直截了当地从真正的证明开始。要是我们已知悉有演绎猜测的可能，我们便能避免所有这些伪归纳的瞎摸乱撞！

KAPPA［旁白］：多么戏剧性的三百六十度大转弯啊！批判的 Alpha 变成了教条主义者，教条主义者 Delta 变成了反驳主义者，而现在归纳主义者 Beta 变成了演绎主义者！

SIGMA：不过，请等一等。如果做完这检验性的思想实验后……

BETA：我要称它为分析……

SIGMA：……竟然也能跟上来一个证明性的思想实验……

BETA：我要称它为综合〔123〕……

SIGMA：……“分析定理”一定会与“综合定理”完全相同吗？我们在朝反方向进军时，可以使用不同的引理啊〔124〕!

BETA：如果它们不同，便优先取综合定理，而不取分析定理——毕竟分析只是检验，而综合却要证明。

老师：你发现我们的“证明”实际上是一次检验，似乎已震撼全班，把他们的注意力都转移到你的主论点上了：即，若我们的猜想已被反例驳倒，我们不妨把反驳搁在一边，先试着通过思想实验来检验猜想：如此，我们便可能会偶然碰上一个证明，离开试试错错的阶段，而转到多证多驳法上来。但正是此点，令我说出“我愿意着手‘证明’一个错误的猜想”的话〔125〕! 而且 Lambda 也在其规则 1 中要求说：“如你有一猜想，即着手证明和反驳它。”

ZETA：是这样的。但我现在要给 Lambda 的 3 条规则和 Omega 的规则 4 再补充一条：

规则 5　如你有任一种反例，设法通过演绎猜测找出更深入的定理，使反例不再成其为反例。

OMEGA：你现在拉伸了我的“深度”概念——也许你是对的。但你的新规则的实际应用又如何呢？直到现在，它只告诉了我们已知道的结果。马后炮谁都会放。你的“演绎猜测”只不过是与老师原来的分析相对应的综合而已。不过现在你要诚实点儿了——你必须用你的方法来找到这样一个猜想，你不但事先不知道，而且要有你保证过的内容的增加。

ZETA：好。我就从我的思想实验引申的这条定理开始：“所有闭正规多面体是欧拉多面体。”

OMEGA：“正规的”？

ZETA：我不想把时间浪费在一证多驳法上。我说“正规的”，就是指采取下列步骤逐步建立起的所有多面体：往一个“完美的”多边形上：（a）首先接合上 F－2 个面，保持 V－E＋F 之值不变（便会得到开正规多面体）；（b）然后接合上最后的实现闭合的面，使 V－E＋F 增加 1（于是将开多面体变成闭多面体）。

OMEGA：“完美的多边形”？

ZETA：我说“完美的”多边形，是指能以下列方法逐步建立起的多边形：首先往单个顶点上接合 n－1 条边，保持 V－E 不变，然后再接合上最后的实现闭合的边，而使 V－E 减少 1。

OMEGA：你的闭正规多面体会与我们的柯西多面体完全一样吗？

ZETA：现在我不想深入探究。

（d）以演绎猜测扩增内容

老师：预备工作已足够了。让我们见识你如何演绎吧。

ZETA：好的，先生。先取两个闭正规多面体（图 20（a）），把它们沿一条多边形环路黏在一起，于是相遇的两个面便消失了（图 20（b））。因为对两个多面体均有 V－E＋F＝4，故在结合后的多面体中，两个面的消失便修复了欧拉公式——别觉得吃惊，因为有了柯西证明，新多面体便可轻易吹胀成一个球体〔126〕。故而欧拉公式在这黏合检验中完全站得住脚。但我们现在要试一试双面黏合检验：把两个多面体沿两条多边形环路“黏”在一起（图 20（c））。于是 4 个面均消失了，而对新多面体即有 V－E＋F＝0。

图 20

GAMMA：这是 Alpha 的反例 4，那个画框！

ZETA：如果我现在再把另一正规多面体（图 21（a））“双面黏合” 到这画框（图 20（c））上，V－E＋F 便成了－2（图 21（b））……

图 21

SIGMA：对单球性多面体有 V－E＋F＝2，对双球性多面体有 V－E＋F＝0，对三球性多面体有 V－E＋F＝－2，对 n 球性多面体便有 V－E＋F＝2－2（n－1）…

ZETA：……这就是你呈给诸位的内容空前、证明完备的新猜想，一张表格都不曾编过就有了〔127〕。

SIGMA：漂亮极了。你非但制服了桀骜不驯的画框，还炮制了无穷多的新反例……

ZETA：解释完全而彻底。

RHO：我刚才以不同的方法得到了相同结果。Zeta 的方法是从两个欧拉多面体例子入手，然后把它们转换成受控实验的反例。我是从一个反例入手，然后把它转换成一个例子。我对画框做了以下的思想实验：“设多面体是由某种材料制成，像软黏土一样容易切割。现从隧道拉一根线过去，然后穿出黏土。多面体将不会散架……”〔128〕但它已变成一个熟悉、简单、球性的多面体！不错，我们将面数增加了 2，而把棱数和顶点数都各增加了 m；但是，因为我们知道简单多面体的欧拉示性数是 2，则原多面体的示性数必曾是 0。现在，如果需要做更多这样的切割，比如 n 次，一个多面体才可化为简单多面体，其示性数便是 2－2n。

SIGMA：真有趣。Zeta 已告诉我们，证明并不一定有猜想才可开始，我们可以由已知为真的相关命题直接构思出一个综合，即一个证明性的思想实验。如今 Rho 又说明我们连开始检验都可以不需要猜想了，我们可直接着手——佯装结果已得手——构思出一个分析，即一个检验性的思想实验〔129〕。

OMEGA：但不管你走哪条路，你仍然留下了一大群多面体尚未解释！根据你的新定理，所有多面体的V－E＋F都是小于2的偶数。但我们曾瞧见有不少多面体的欧拉示性数都是奇数。比如说，饰顶立方体（图 12），便有 V－E＋F＝1…

ZETA：我从不曾说过，我的定理适用于一切多面体。它仅适用于根据我的构造法建成的所有 n 球性多面体。我的构造法，按照实际情况来说，是得不出环状面的。

OMEGA：我说中了吧？

SIGMA：我明白了！这种构造法也可以推广到带环状面的多面体：可在一个合适的证明引生的多边形系统里删去一条边，建立起一个环状多边形，而不减少面数（图 22（a）与 22（b））。我倒是猜测，也许亦存在“正规”多边形系统，按与我们的证明完全一致的方式建立起来，而我们可从中删去不止一条边，面数仍不减少……

图 22

图 23

GAMMA：所言不虚。且看此“正规”多边形系统（图 23（a））。你可删去两条边，而不减少面数（图 23（b））。

SIGMA：妙哉！于是，对 n 球性——或谓 n 维连通的——多面体，在删去 ek 条棱后，面数不减少的情况下，有一般公式

。

BETA：此公式可以解释 Alpha 的饰顶立方体（图 12）。那是个单球性立方体（n＝1），有一个环状面：除 e6 为 1 外所有 ek 均为 0，即，故 V－E＋F＝3。

SIGMA：它亦能解释你惊呼“多么不合理”的欧拉畸形物：有两个环状面和一条隧道的立方体（图 16）。它是一个双球性多面体（n＝2），。故其示性数为 V－E＋F＝2－2＋2＝2。多面体世界的道德秩序终归复原了〔130〕！

OMEGA：带空腔的多面体又作何解？

SIGMA：我知道！若是它们的话只需把每一个分离表面的欧拉示性数加起来就行了：

BETA：那么孪生四面体呢？

SIGMA：我知道！……

GAMMA：做到这样精确到底有什么用呢？别滔滔不绝地卖弄这些自命不凡的雕虫小技了〔131〕!

ALPHA：为何他应该停止往下说？难道孪生四面体是怪物，不是名副其实的多面体？一个孪生四面体作为好的多面体，丝毫不亚于你的圆柱！但你不也曾喜欢语言的精确〔132〕。你现在为何又要嘲弄我们新的精确了？我们必须让定理对所有多面体适用啊——我们把它变精确，是要增加而非减少它的内容。这一回精确是个优点了！

KAPPA：无聊的优点与无聊的缺点一样恶劣！而且，你永不能达到完全的精确。到了觉得无趣不想继续的时候，我们便该停下来了。

ALPHA：我不敢苟同。我们开始于

（1）一个顶点是一个顶点。

我们由此条推出

（2）V＝E 对所有的完美多边形成立。

我们又从此条推出

（3）V－E＋F＝1 对所有正规的开多边形系统成立。

由此得出

（4）V－E＋F＝2 对所有正规的闭多边形系统，即多面体成立。

再由此条依次得到

（5）V－E＋F＝2－2（n－1）对正规 n 球性多面体成立。

（6）V－E＋F＝2－2（n－1）＋

对带多连通面的正规 n 球性多面体成立。

（7）对带多连通面及空腔的正规 n 球性多面体成立。

起点虽然平庸，但这些难道不是奇迹般地逐步展露了它隐藏的财富吗？因为（1）为真已毋庸置疑，故余下诸条亦复为真。

RHO［旁白］：隐藏的“财富”？最后两条只不过说明了概括可变得何等廉价而已〔133〕！

LAMBDA：你真以为（1）是推出余下诸条的唯一定理？你真以为演绎可以扩增内容？

ALPHA：那是当然！这岂不就是演绎的思想实验的奇迹吗？如果你一旦掌握了一小点真理，演绎便将其万无一失地扩展成一棵知识的大树〔134〕。如果演绎并不增加内容，我便不叫它演绎，而叫它“验证”了：“验证所以与真正的证明不同，正是因为它是纯分析的，且是不结果实的”〔135〕。

LAMBDA：但是演绎的确不能扩增内容！如果批评揭示出结论比前提包含更丰富的内容，我们便必须增加前提的数量，使隐藏引理呈现出来。

KAPPA：并且，正是这些隐藏引理包含了诡辩和可误性，最终戳穿了演绎不可错之神话〔136〕。

老师：关于 Zeta 的方法，还有什么问题？

（e）逻辑的反例 VS.探试的反例

ALPHA：我喜欢 Zeta 的规则 5〔137〕——就像我喜欢 Omega 的规则 4 一样〔138〕。我喜欢 Omega 的方法，是因为它物色局部而非全局的反例：也就是 Lambda 原来那 3 条规则〔139〕忽略掉的反例，它们是逻辑上无害的，所以对探试法没有意义。而 Omega 却受到了它们的激发，构思了几个新思想实验：这是我们的知识的真正进步。

现在 Zeta 由从全局兼局部的反例获得了灵感——这些反例，从逻辑的观点看，是彻头彻尾的确证，从探试的角度看则不然：它们虽然是确证，也需要人们的实际行动。Zeta 提出要扩展、复杂化我们的原思想实验，把逻辑确证变为探试确证，把逻辑上满意的例子变为从逻辑和探试的观点看都满意的例子。

Omega 和 Zeta 都在追求新思想，而 Lambda 尤其是 Gamma，总是全神贯注地玩弄语言花招，来处理他们的全局而非局部的反例，这些反例其实毫不相干——而从他们的古怪观点来看，这些反例却是仅有的相关者。

THETA：所以逻辑观点便是“古怪的”，是吗？

ALPHA：是的，是指你们的逻辑观点。但我有另外的话要说。不管演绎是否扩增内容——你们听好了，当然它是有扩增之效的——它确乎看起来为知识的持续发展提供了担保。我们从一个顶点开始，让知识迅猛而协调地发展，最后解释了一切多面体的顶点数、棱数、面数之间的关系问题：这是一场平淡无奇的没有反驳参与的发展！

THETA［向 Kappa 说］：难道 Alpha 的判断力已丧失殆尽了吗？起点是一个问题，怎么会是一个顶点〔140〕！

ALPHA：这个逐步完成而不可抗拒的胜利进军将引导我们走向这样的定理，它们“并非自明，而只能由对过程的每一步都一清二楚的心灵的连续无干扰的活动，从已知的真原理中演绎出来”〔141〕。想通过“无偏见的”观察和刹那间一闪的顿悟来得到它们，永不可能。

THETA：我十分怀疑有没有这最后的胜利。这样发展，我们永远都到不了圆柱——因为（1）的起点是一个顶点，而圆柱却没有顶点。我们也永不能到达单侧多面体和多维多面体。这一逐步的连续扩展可能会在某个点停下来，而你这时不得不去寻找革命性的新起点。况且，即令是这“和平的连续性”，也充满了反驳、批评！假使没有全局兼局部反例的连续压力，我们又为何要从（4）到（5），从（5）到（6），从（6）到（7）？Lambda 只承认那些全局而非局部的反例是名副其实的反例：它们揭示了定理的虚假性。Omega 的革新——Alpha 表扬得好——还要把局部而非全局的反例当作名副其实的反例：它们揭示了定理的真实性之贫乏。如今 Zeta 让我们甚至承认全局兼局部的反例是名副其实的反例：它们也指明了定理的真实性之贫乏。比如，几种画框便是柯西定理的全局兼局部的反例：只考虑真实性的话，它们自然是一些确证——若虑及内容，它们便是反驳了。我们把第一种（全局而非局部的）反例称为逻辑反例，其他的称为探试反例。但我们承认的反驳——逻辑的或探试的——愈多，知识的发展便愈迅速。Alpha 把逻辑的反例当作是不相关的，又坚决拒绝承认探试反例之为反例，因为他实在是太沉迷于他的观念了：数学知识的发展是连续的，批评则不起作用。

ALPHA：你人为地扩展反驳概念和批评概念，不过是要为你的批判的知识发展论找理由。语言花招也是批判哲学家的工具吗？

PI：我觉得，讨论一下概念之形成也许能帮我们把头绪理清楚。

GAMMA：我们将洗耳恭听。

8．概念的形成

（a）以概念拉伸来反驳。重估怪物排除——兼重估错误与反驳之概念

PI：我想首先回到前 Zeta 甚至前 Omega 的阶段，看看定理形成的 3 个主要方法：怪物排除、例外排除及多证多驳法。每一个方法都以相同的素朴猜想起头，而以不同的定理与不同的理论术语结尾。Alpha 已经勾勒出了这些不同之处的一些方面〔142〕，但他的叙述不能令人满意——特别是关于怪物排除与多证多驳法的情况。Alpha 以为，怪物排除定理“在语言表达式与素朴猜想完全相同的背后隐藏了”对素朴猜想的“一个本质改进”：他以为，Delta 逐渐把素朴多面体类收缩成了清除掉非欧拉怪物的类了。

GAMMA：这个叙述有什么毛病？

PI：并非怪物排除者收缩了概念——是反驳主义者扩展了概念。

DELTA：同意！同意！

PI：我们且回到我们的主题的最早的探索者的时代。他们迷上了正多面体的漂亮的对称性：他们想，5 种正则立体便保守着宇宙的秘密。而到了笛卡儿-欧拉猜想提出之日，多面体的概念就包括了所有的凸多面体，甚至还包括了一些凹多面体。但它还确未将非简单的多面体，或带环状面的多面体包括在内。对他们心中的多面体来说，猜想确为真，而证明是无瑕疵的〔143〕。

接着反驳主义者来了。他们具有批判的狂热，他们拉伸了多面体概念，把与预期解释截然不同的对象亦包含在内。按猜想的预期解释，它是真的，只有按反驳主义者偷偷夹带的非预期的解释，它才是假的。他们的“反驳”显示，原猜想并没有差错，原证明并没有过错：他们的反驳只不过揭示了一个新猜想的虚假性，这个新猜想谁也没提到过或想到过。

可怜的 Delta！他英勇地保卫了多面体的原初的解释。他对每一反例，都以一个新分句反驳之，以保护原始概念的安全……

GAMMA：可难道不是 Delta，每一次都在转换立场吗？不管我们何时造出一个新反例，他便把他的定义变得更长些，而亮出他的又一个“隐藏”分句！

PI：真是个对怪物排除的奇怪评价！他只是看起来似乎转换了立场。你们冤枉了他，说他在顽固地辩护一个观念时，在术语运用上暗中兜圈子（epicycles）。他不幸就不幸在自负而又不走运的定义 1：“多面体是其表面由多边形面组成的立体”，这把柄马上便被反驳者抓住了。但勒让德的意思只是想包括他的素朴多面体；而这个定义的容量远远过了头，其提出者却整个蒙在鼓里，完全不曾料及。数学界虽心甘情愿地忍受这个畸形的内容，它自己却从似是而非、貌似无知的定义中慢慢地摆脱出来。这便是为什么 Delta 不得不一次又一次口吃地说“我的意思是……”，且不得不总是把他没完没了的“隐含”分句一个个明白公开出来：这都因为素朴概念从未清楚地确定下来，而一个简单却畸形的不曾预期的定义取代了它。不过，请想象一个不同的情景，定义正好安置了“多面体”的预期解释。这时，就轮到反驳者去构思一个比一个长的怪物包含定义了，比如说，为“复合多面体”构思定义：“一个复合多面体是一组（真正的）多面体，每两个多面体均以全等面焊在一起。”“复合多面体的面可以是复合多边形，即一组（真正的）多边形，每两个多边形皆以等边相焊接。”此种复合多面体正对应着 Alpha 和 Gamma 的反驳引生的多面体概念——第一个定义也考虑到了非简单的多面

体，第二个定义也考虑到了非单连通的面。故构思新定义便不一定是怪物排除者或概念保护者的任务——它亦可以是怪物包含者或概念拉伸者的任务。〔144〕

SIGMA：这么说，概念和定义——即预期的概念和非预期的定义——便可以互相捉弄了！我做梦亦不曾想到，概念之形成还会落在非预期的宽泛定义之后！

PI：会的。怪物排除者只是在信守原始概念，而概念拉伸者却把它扩大；妙的是概念之拉伸是鬼鬼祟祟地进行的：没有人发觉，又因为每人的“坐标系”随着概念的扩大而扩展，他们便不免要误信怪物排除缩小了概念，而成为这一探试法错觉的牺牲品，实则怪物排除一直保持概念不变。

DELTA：如今是谁做学问不诚实了？是谁在鬼鬼祟祟地变换立场了？

GAMMA：我承认，我们是错了，我们不应指责 Delta，说他的多面体概念暗中被收缩：他所有的 6 个定义都是在指同一个他祖传的又适当又悠久的多面体概念。他在愈发丰富的理论参照系或语言中，反复定义的正是同一个贫乏的概念：怪物排除不形成概念，却只转换定义。怪物排除定理对素朴猜想毫无改进。

DELTA：你的意思是我的所有定义都是逻辑等价的？

GAMMA：那是依于你的逻辑理论而定的。依我的逻辑理论看来，它们便自然不是等价的。

DELTA：你这个回答没有什么帮助，你会承认的。不过，请告诉我你驳倒了素朴猜想吗？你驳倒它的手段只是鬼鬼祟祟地歪曲它的原有的解释！

GAMMA：哦，我们驳倒它的解释之富于想象力和有趣，你做梦也梦不到！正因为这一点，只揭露一个愚蠢错误的反驳和对知识发展起主要作用的反驳之间的区别才显露出来。如果你拙劣地把数数错了，发现“对所有多面体有 V－E＋F＝1”，我随后纠正了你的错误，我也将不会称它是“反驳”的。

BETA：Gamma 说得好。在 Pi 的揭示之后，我们也许便会犹豫是否把我们的“反例”叫做逻辑反例，因为按猜想的预期解释，它们毕竟与猜想不相吻合；但它们肯定是探试反例，因为它们激励知识的发展。若我们过去接受了 Delta 的狭义逻辑，知识便发展不了。现姑且假设拘泥于狭隘的概念框架的人发现了欧拉猜想的柯西证明。他发现这一思想实验的所有步骤都可轻易施行于任意多面体上。他遂以为，这些“事实”：所有多面体都是简单的，所有面都是单连通的，是显而易见、毫无疑问的。他从未意识到要把他“显而易见”的引理变为改进后的猜想的条件，以逐步建立一个定理——因为，这中间缺乏作为刺激物的反例，来揭露一些“平常的真”引理的虚假性。这样他便以为“证明”毫无疑义地确立了素朴猜想的真实性，其确定性便毋庸置疑了。但是，他那“确定性”离成功的征兆还远得很，而不过是想象力匮乏、概念贫乏的症状而已。其结果，便是自以为是的满足，及知识发展的受阻〔145〕。

（b）证明引生的概念 VS.素朴的概念。理论分类 VS.素朴分类

PI：我且回到证明引生的定理上："所有带单连通面的简单多面体是欧拉多面体。"这一表述是令人误解的。应该写作："所有带单连通面的简单物体（objects）是欧拉多面体。"

GAMMA：何故？

PI：前一个表述暗示，定理中的简单多面体类是素朴猜想的"多面体"类的一个子类。

SIGMA：简单多面体类当然是多面体的一个子类喽！"简单多面体"的概念收缩了多面体原来较广的类，将它们限制到了可应用我们证明的第 1 引理的那一部分。"带单连通面的简单多面体"概念表示对于原来的类的进一步收缩……

PI：不对！原来的多面体类就是只包含简单的、带单连通面的多面体。Omega 过去的错误在于他说引理并入减少了内容〔146〕。

OMEGA：可是，每并入一次引理难道不都排除了一个反例吗？

PI：当然排除了：但排除的是概念拉伸产生的反例。

OMEGA：所以引理并入使内容保存，就像怪物排除一样？

PI：非也。引理并入增加内容：怪物排除不增加。

OMEGA：什么？你真想让我相信，引理并入不但不减少内容，却还要增加内容？不但不收缩概念，却还要拉伸概念？

PI：正是如此。听好了。一个地球仪，其上绘有一张政治地图，它是否属于原多面体类？

OMEGA：当然不属于。

PI：但有了柯西证明它便属于了。因为你可在其上毫无困难地施行柯西证明——当然，上面必须没有环状的国家或大海〔147〕。

GAMMA：说得对！将多面体吹胀成球体、把棱和面扭歪丝毫不扰乱我们的证明工作——只要扭歪的过程不改变顶点、棱、面之数目。

SIGMA：我明白你的意思了。于是证明引生的"简单多面体"便不仅是收缩和明细说明，还是概括，还是对素朴"多面体"的扩展〔148〕。在柯西证明之前，人人都很难想到去概括多面体概念，使其包含弄皱的、由曲线组成的带曲面的"多面体"；即使想到了，也斥之为有毛病而拒绝承认。但现在这是个自然的概括了，因为我们的证明操作对这些多面体都解释得通，与面平棱直的普通的素朴多面体没什么两样〔149〕。

PI：妙。不过你还有不止一步的工作要做。证明引生的概念既非素朴概念的“明细说明”，亦非其“概括”。多证多驳对素朴概念的革命性影响远不止此：它们简直就是完全抹去了关键的素朴概念，而代之以证明引生的概念〔150〕。多面体这一素朴词语，即使被反驳者拉伸以后，也还是指晶体似的东西，那种面“平”棱直的立体。而各种证明思想吞食了这个素朴概念，彻底把它消化了。在各种不同的证明引生定理中，我们连个素朴概念的影子也看不见。它消失得无影无踪。倒是每一个证明得出了体现自己特征的证明引生概念，即是指可拉伸性、可吹胀性、可照相性、可投影性以及诸如此类的性质。老问题消失了，新问题出现了。在哥伦布之后，如果没有解决开始着手解决的问题，并不应觉得吃惊。

SIGMA：所以，“立体论”这个欧拉猜想原来的“素朴”王国消解了，而重建的猜想，若是被日果内证明的，便重新出现在投影几何学中，若是被柯西证明的，便重新出现在分析拓扑学中，若是被庞加莱证明的，便重新出现在代数拓扑学中……

PI：此言甚是。你现在会理解，我何以不像 Alpha 或 Beta 一样把定理表述为：“所有日果内多面体是欧拉多面体”、“所有柯西多面体是欧拉多面体”等等，却这样说：“所有日果内对象是欧拉式的”、“所有柯西对象是欧拉式的”等等〔151〕。所以，关于素朴概念的精确性的争吵我觉得索然无味，关于素朴猜想的真实性和虚假性的争吵我亦无兴趣。

BETA：保留“多面体”一词，来表示我们最喜欢用的证明引生词语，比方说，“柯西对象物体”，是肯定可以的吧？

PI：你喜欢便可，不过要记住，你的术语不再指称其开始所指称的：素朴的意义已经消逝，现在它用来指……

BETA：……指更一般的、改进后的概念！

THETA：不是！是指完全不同的、新颖的概念。

SIGMA：我以为你们的观点是自相矛盾的！

PI：若你说的自相矛盾是指“尚未得到公认的观点”〔152〕，可能与你根深蒂固的素朴见解不相容，便不要紧：你只须换下你的素朴见解，代之以自相矛盾者即可。这便是“解决”悖论的一条路。但你心里想的是我的那个具体观点呢？

SIGMA：你想一想，我们曾发现一些星状多面体为欧拉多面体，而另一些不是。我们曾经在寻找一个足够深刻的证明，来同时解释普通多面体和星状多面体的欧拉性……

EPSILON：我有这个证明〔153〕。

SIGMA：我知道。但为了方便讨论，我们设想并无如此的一个证明，并且设想除了“普通”欧拉多面体的柯西证明之外，某人又为欧拉星状多面体提出了一种相应的却全然不同的证明。Pi，因为这两个不同的证明，你便要提议将我们之前划为一类的多面体一分为二吗？两种完全不同之物，你只是因为某人给它们的一些性质找了个共同解释，便要将两者统一于同

一名义之下？

PI：我当然要。我自然是不会指鲸为鱼、指收音机为噪声盒的（土著人或许这样叫），一个物理学家要说玻璃是液体，我亦不会为之心烦意乱。在不断的进步中，素朴分类下台了，理论分类，即理论引生的（证明引生的，或者你喜欢也可叫解释引生的）分类上台。猜想与概念都必须通过多证多驳的炼狱阶段。由多证多驳法而来的改进后的猜想（定理）和概念（证明引生的或理论的概念），取代了素朴猜想与素朴概念。随着理论观念和概念取代素朴观念和概念，理论语言便取代了素朴语言〔154〕。

OMEGA：最后，我们总会由素朴的、偶然的、仅仅有名无实的分类到达最终正确的、真实的分类，到达完美的语言〔155〕！

（c）再论逻辑反驳与探试反驳

PI：我现在要重新审视演绎猜测引起的一些问题。首先我们来看看探试反例与逻辑反例的对立问题，这是 Alpha 与 Theta 的讨论提出来的。

我觉得我的立场已经说清楚了，即纵然是所谓的“逻辑”反例也是探试反例。按原来的预期解释，（a）所有多面体是欧拉多面体，及（b）画框不是欧拉多面体，这两者间并不存在不一致。

若我们遵守我们原来的语言的默认语义规则，我们的反例便不是反例。只能是通过概念拉伸改变了语言规则后，它们才转换成逻辑反例。

GAMMA：你的意思是所有有趣的反驳都是探试反驳？

PI：正是如此。一方是多次的反驳与证明，另一方是概念、分类、语言框架的变化，你总不能把两方隔离开吧。通常是这样，你遇见一个“反例”时，便面临着下面的选择：要么你拒绝跟它扯上关系，因为它在你的给定语言 L1 中根本算不上反例；要么你同意改变你的语言，方法是概念拉伸，并把反例接受到你的新语言 L2 中……

ZETA：……再在 L3 中解释它！

PI：依照传统的静态的理性，你会选择前者。科学教你选择后者。

GAMMA：即是说，我们可能有两条陈述，它们在 L1 中是一致的，但调换到 L2 中它们便不一致了。或者说，我们可能有两条陈述，它们在 L1 中原来不一致，调换到 L2 中却一致。随着知识的增长，语言也起了变化。“创造的每一阶段同时是语言变化的阶段。”〔156〕在任一给定的语言中均不能模拟知识的发展。

PI：言之有理。探试法涉及的是语言动力学，而逻辑学涉及的是语言静力学。

（d）理论的概念拉伸 VS.素朴的概念拉伸。连续发展 VS.批判发展

GAMMA：演绎猜测是否提供了连续的知识发展模式呢？你之前承诺过要回到这问题上来的。

PI：演绎猜测的探试模式可取多种历史形式，我先勾画出其中几种的轮廓。

第一个主要模式是素朴的概念拉伸到目前为止超过了理论，而产生了一大堆混乱的反例：我们的素朴概念松散了，却没有理论概念可以替代它们。此种情况下，演绎猜测便可带着积压的反例一步步地追赶上去。你如果喜欢，可以把这叫做连续的“概括”模式——但别忘记其出发点是反驳，其连续性体现在用一个发展中的理论把它的最初版本所遭到的探试反驳逐个解释掉。

GAMMA：或者说，“连续的”发展仅指出了反驳已跑在好几里路之前了！

PI：说得对。不过，也可能发生的是，每一个反驳或每一次素朴猜想的扩展之后，都紧跟着一次理论（与理论概念）的扩展，而把反例解释掉；于是“连续性”便让位于一个激动人心的交替过程，即概念拉伸的反驳与一个比一个有力的理论之交替以及素朴的概念拉伸与解释性理论的概念拉伸之交替。

SIGMA：同一探试主题的两种偶然的历史变异！

PI：哦，其实它们之间倒没什么太大差别。对它们来说，理论的效力都在于解释其于发展过程中所遭受的反驳的能力。不过，演绎猜测还有第二个主要模式……

SIGMA：又一种偶然的变异？

PI：不错，如果你喜欢这样称呼。在这个变异中，发展中的理论便不但要解释，还要产生对它的反驳了。

SIGMA：什么？

PI：此情况下，理论的发展超越了——并且实际上消灭了——素朴的概念拉伸。譬如，拿柯西定理来说，现在某人把它当作出发点，视野中一个反例都没有。于是，他便以所有可能的方式让多面体变形，来检验这定理：切成两半、切去锥体角、弄弯、弄歪、吹胀……这些检验思想中，有一部分会引出证明思想〔157〕（先得到已知为真的东西，然后反其道而行之，即依照帕普斯的分析-综合模式来做），但有一些——如 Zeta 的“双面黏合实验”——不把我

们引回已知的东西，而把我们引至全新的事物，引至对检验过的命题的某个探试反驳——其方法不是推广素朴概念，而是推广理论框架。这种反驳便是自明的……

IOTA：多么辩证啊！检验转化成证明，反例以其自身的构造法转化成例子……

PI：何辩证之有？一个命题的检验变成另一个更深刻的命题的证明，前一个命题的反例变成后一个的例子。何以把混淆不清叫做辩证？不过，我要回到我的论点上：我以为演绎猜测的第二个主要模式不可——不过如 Alpha 者便会这样看——被看做知识的连续发展。

ALPHA：当然是可以的。比较我们这种方法和 Omega 的想法，他以根本不同而更深刻的证明思想代替原证明思想。两种方法均增加内容，但在 Omega 的方法中，应用范围狭小的证明操作被应用范围更广阔的操作所代替，或者更激进地说，整个证明被应用范围更广阔的证明所代替——演绎猜测增加能扩大应用范围的操作，由之推广给定证明。这难道不是连续性吗？

SIGMA：说得对！我们从定理演绎出了一条比一条更广阔的定理链！从特殊情况演绎出了一个比一个更一般的情况！这便是经由演绎的概括〔158〕!

PI：但是却充斥着反例。一旦你明白任何一点内容的增加、任何一个更深刻的证明，都要么尾随着、要么引生出对之前较贫乏的定理的种种探试反驳……

ALPHA：Theta 已扩展了“反例”，使其可包括探试反例。你现在是在扩展它，让它包括从不曾实际存在的探试反例了。你号称你的“第二个模式”充斥着反例，而你的根据不过是把反例的概念扩展到连零寿命的反例也包括，这些反例一发现，它们的解释也就产生了！可是，在一个统一的理论框架中，为何所有的智识活动、每一次增加内容的努力都应该是“批判的”？你的教条主义“批判态度”正在模糊这场辩论的主题！

老师：你与 Pi 之间的争论的确是模糊的——因为你的“连续发展”与 Pi 的“批判发展”是完全一致的。我倒是对演绎猜测或“连续批评”的局限性更感兴趣，如果局限性竟然存在的话。

（e）内容增加的极限。理论反驳 VS.素朴反驳

PI：我以为“连续”发展注定要寿终正寝，注定要走到理论的饱和点，这是早晚的事。

GAMMA：但我肯定总是可以拉伸一些概念啊！

PI：那是自然。素朴的概念拉伸尽可继续——但理论的概念拉伸有其极限！由素朴的概念拉伸而来的反驳只不过是些牛虻，搅得我们不得安宁，还刺激我们用理论的概念拉伸来捉它们。

可见，有两种反驳。因为巧合或好运，或者随意扩展某个概念，我们偶然发现了第一种。它们就像超自然的奇迹，它们的“反常”行为尚未得到解释；我们承认它们是正宗的反例，只是因为我们习惯于接受概念拉伸的批评。我称这些为素朴的反例或畸形物。其次还有理论的反例：要么便是本来由证明拉伸产生的，要么便是些畸形物，被拉伸后的证明抓住后，又被它们解释掉，由之而提升到了理论反例的层面。我们必须以极其怀疑的态度来考察这些畸形物：它们也许不是名副其实的反例，而是一个极为不同的理论的例子——如若不是完全的错误的话。

SIGMA：但若我们受骗了，我们该怎么做？如果我们不能通过扩展我们的原证明来把我们的素朴反例变成理论反例呢？

PI：我们一而再、再而三地查究，看我们的理论是否还有发展的潜质。然而，有时我们有很充分的理由放弃这样做。比如，像 Theta 所正确指出的，如果我们的演绎猜测从一个顶点开始，我们便永不要抱很大希望，以为它能解释没有顶点的圆柱。

ALPHA：所以，圆柱最终并非怪物，而是畸形物！

THETA：但也不应小觑了畸形物！它们是真正的反驳：它们不能套入连续“概括”的模式中，且实际上迫使我们改革我们的理论框架〔159〕……

OMEGA：妙哉！虽可能到达某个演绎猜测链的一个相对饱和点——但随后便找到一个革命性的、更深刻的新证明思想，有着更大的解释效力。最后仍到达了最终证明——没有极限、没有饱和点、没有畸形物能够驳倒！

PI：什么？单靠一个统一的理论便要解释宇宙间的所有现象？绝不可能！迟早我们便要到达类似绝对饱和点之处。

GAMMA：我其实并不介意我们是否会到达绝对饱和点。如果给证明作点廉价、平常的推广便把某个反例给解释掉，我已经把这个反例认作畸形物了。我重复一遍：我却不认为概括“多面体”后，让它包括带空腔的多面体有什么好：这不是个多面体，而是一组多面体。我亦不想操心什么“多连通面”——何不画上失踪的对角线呢？至于包括孪生四面体的概括嘛，我真想一枪把它毙掉：它仅仅在无缘无故地编造复杂、狂妄的公式时还有点儿用。

RHO：你终于重新发现了我的怪物校正法〔160〕！它把你从浅薄的概括中解救出来。Omega 不应把内容叫做“深度”：并非每一次内容之增加亦是深度的增加：想想（6）和（7）吧〔161〕！

ALPHA：所以你要以我那串公式中的（5）来收场？

GAMMA：是的。（6）和（7）不是发展，是退化！与其继续（6）和（7），我倒宁愿找到某个激动人心的新反例来作解释〔162〕！

ALPHA：你也许最终还是对了。但又由谁来决定收场的地点？深度的大小仅仅是个口味问题。

GAMMA：何不让数学评论家通过公开批评提高大家的数学品味呢，就像有的文学评论家一

样？也许我们甚至可以阻止数学文献中自命不凡的雕虫小技之潮哩〔163〕。

SIGMA：若你以（5）收场，把多面体理论变成带 n 个环柄的三角形化球面理论，你怎么能在有需要时处理如（6）和（7）所解释了的那些平常的反常现象？

MU：易如儿戏！

THETA：行。接着我们暂时在（5）上停下来。但我们停得下来吗？概念拉伸要把（5）驳倒！如果概念拉伸得出的反例揭示了我们的定理是内容贫乏的，我们大可不理会此种概念拉伸。但如果拉伸得出的反例揭露了它是明显虚假的，则又该如何？我们可以拒绝应用我们的增加内容的规则 4 或规则 5 来解释畸形物，但我们必须应用我们的保持内容的规则 2 来避开畸形物的反驳。

GAMMA：正是！我们可以不承认廉价的“概括”，但我们怎么能拒绝“廉价”的反驳呢？

SIGMA：何不逐步建立一个“多面体”的怪物排除定义，加上对每一个畸形物新的分句？

THETA：在这两种情况下，我们都要重游恶无限的旧梦魇的故地了。

ALPHA：你们增加内容的时候，你们发展观念，从事数学；之后，你们又老是在澄清概念，从事语言学。何不在停止增加内容的时候把全盘都停止了？为何要陷进恶无限的圈套之中呢？

MU：别又来那一套数学与语言学的对立！知识从不会在这样的争论中获益。

GAMMA：“从不会”一词不久就要变成“很快”。我急于想翻出我们的老问题来讨论了。

MU：可我们已经走到死胡同的尽头了！难道还有什么人有新鲜玩意儿可说？

KAPPA：我认为我有。

9．批评如何可把数学真理变为逻辑真理

（a）无限制的概念拉伸摧毁意义与真理

KAPPA：Alpha 已说过，我们的“老方法”导致恶无限〔164〕。Gamma 和 Lambda 怀着反驳之洪水逐渐停止的希望作了反击〔165〕：但既然我们理解了反驳胜利的机理——概念拉伸——我们便知道他们的希望是徒劳的。对任一命题来说，总有对其术语的一些足够狭隘的解释

使其为真，以及一些足够宽广的解释使其为假。哪一个解释是已料及的，哪一个又是不曾料及的，当然取决于我们的原定意向。第一种解释可以叫做教条主义、验证主义或核正主义的解释，第二种可以叫做怀疑主义的、批判的或反驳主义的解释。Alpha 把第一种称为约定主义策略〔166〕——但如今我们明白这第二种也是。你们全部奚落 Delta 对素朴猜想〔167〕的教条主义解释，接着又奚落 Alpha 对定理的教条主义解释〔168〕。可是，概念拉伸会将一切陈述驳倒，不留任何真的陈述。

GAMMA：且慢。不错，我们拉伸了“多面体”——但接着又把它撕碎，扔到一边去了：就像 Pi 指出的，“多面体”这一素朴概念再也不算进定理中了。

KAPPA：但是，接下来你们便会开始拉伸定理中的某个术语——某个理论术语，是吗？你自己选择的是拉伸“单连通面”，把圆柱上的圆和侧面包括了进去〔169〕。你暗示说，是否伸长脖子去博得可驳倒者的尊位，也即使反驳者的解释成为可能，是关系到学术诚实的问题。但由于概念拉伸，可反驳性便总是意味着反驳。所以你便在一个无限长的斜坡上滑下，驳倒每一定理，把它们替换为更“严格”者——一个虚假性尚未“暴露”的定理！可你永远无法避免虚假性。

SIGMA：若我们在某一点刹车，采纳核正主义解释，既不偏离真理，亦不偏离表达真理的特定语言形式，那又如何呢？

KAPPA：那么，你便不得不用怪物排除定义来挡开概念拉伸式的反例。这样你便在另一个无限长的斜坡滑下：你将被迫承认，你的真定理的每一“特定语言形式”都不够精确，你还将被迫往其中并入一个比一个“严格”的定义，而表达这些定义的，是用含混性暂未被揭示的语词！但你永远无法避免含混性〔170〕。

THETA［旁白］：如果一个探试法就是要以含混性为发展的代价，又有什么错？

ALPHA：我告诉过你：精确的概念和不可动摇的真理并不存在于语言中，却只存在于思想中！

GAMMA：我来挑战你，Kappa。拿定理的实际情况来看，我们考虑了圆柱之后则有：“对所有带单连通面的简单对象物体，若各面的棱的末端交于顶点，便有 V－E＋F＝2。”你用概念拉伸法又怎样驳倒这一定理呢？

KAPPA：首先我追溯到用来定义的语词上，完整地把命题表述清楚。然而我便裁定拿哪一个概念来拉伸。例如，“简单”表示“在移去一面后可在一平面上拉伸开来”。我就拉伸“拉伸”。看看已讨论过的孪生四面体吧——有一条公共棱的那一对（图 6（a））。它是简单的，其面是单连通的，但 V－E＋F＝3。可见我们的定理是错的。

GAMMA：但这个孪生四面体可不是简单的哦！

KAPPA：它当然是简单的。移去任何一面，我便可将它在一平面上拉伸开来。我只须小心一点儿，保证我到达临界棱后，打开沿这条棱的第二个四面体时不撕破任何东西。

GAMMA：但这样岂是拉伸！你把一条棱撕破——或说撕裂——了，成了两条棱！你总不能

把一个点映射成两个点啊：拉伸是双连续一一映射！

KAPPA：定义 7？这个对拉伸的狭隘的教条主义解释，恐怕连我的常识的要求都不符合。譬如，我完全能够想象，把一个正方形（图 24（a））拉伸为两个嵌套正方形，手法是拉伸边界线（图 24（b））。你就因为这样的拉伸不是“双连续一一映射”，便称它为撕破或撕裂？顺便想说，我很惊讶你为何不把拉伸定义为保持 V、E、F 不变的变换，就此结束？

图 24

GAMMA：说得对，你又赢了。我要么必须同意你对“拉伸”的反驳主义解释，而扩展我的证明或者找到一个更深入的证明或者并入一条引理——要么便不得不引入一个新的怪物排除定义。可在以上情况的任何一种中，我都总会把我用来定义的语词表述得一个比一个清楚。何以我不应到达这样的境地，语词的意义如水晶般清澈，从而便只有一个解释？就像 2＋2＝4 这样。这样的语词意义没有任何伸缩性可言，这个命题的真实性也没有任何可反驳的，它们永远在理性的自然之光中闪耀。

KAPPA：昏暗的光！

GAMMA：拉伸它，看你能不能。

KAPPA：但这是黄毛小儿的把戏！某些情况下 2 加 2 还等于 5 呢。假设我们要求寄两件物品，每件重 2 磅；它们是装在重 1 磅的盒子里寄的；于是对这个包裹来说，两磅加两磅便得 5 磅！

GAMMA：但你的 5 磅是加了 3 次重量得到的，2 加 2 加 1 啊！

KAPPA：不错，我们的运算“2 加 2 等于 5”不算原先预期意义上的加法。但我们通过对加法之意义的一次简单拉伸，便使这结果为真了。素朴的加法是包装的一个特殊例子，包裹材料重量为零。我们必须把这条引理作为条件建入猜想中：我们改进后的猜想便是：“对‘不计重量’的相加，有 2＋2＝4。”〔171〕代数学的整个发展情节便是一系列这样的概念与证明之拉伸。

GAMMA：我以为你在“拉伸”上真是扯得有些远了。下次你就会把“加”解释成“乘”，然后当作一个反驳！要么你就在“所有多面体都是多面体”中把“所有”解释成“没有”！你拉伸了概念拉伸这一概念！我们必须把合理拉伸的反驳与不合理拉伸的反驳区分开来。我们必不能容许你随兴拉伸任何语词。

我们必须用如水晶般清澈的语词把反例概念清楚地建立起来！

DELTA：甚至 Gamma 也变成怪物排除者了：现在他想要给概念拉伸的反驳下一个怪物排除的定义了。理性，最终还是取决于无伸缩性的、精确的概念〔172〕！

KAPPA：但是就没有这样概念！何不承认我们指定我们所说的意思的能力，因此我们也没有证明的能力？若你想让数学是富有意义的，你必须放弃确定性。若你想要确定性，就摆脱意义吧。鱼与熊掌不可兼得。打诳语安然不遭反驳，有意义的命题是总可被概念拉伸驳倒的。

GAMMA：于是，你这最后的陈述也能被驳倒——你也清楚。“怀疑主义者不是心口如一的一派人，只是一派骗子。”〔173〕

KAPPA：咒骂：理性的最后倚靠！

（b）温和的概念拉伸可将数学真理变为逻辑真理

THETA：我以为 Gamma 说得对，确需要把合理的概念拉伸与不合理的概念拉伸区别开。因为概念拉伸历经了千山万水，已面目全非，已从温和的、理性的活动变成了激进的、非理性的活动。

原来，批评专集中于一个特定概念的轻微拉伸。它必须是轻微的，故而我们注意不到；若它的真正——拉伸的——本质暴露了，它便可能不被接受为合法的批评。它全神贯注于一个特定概念，就像我们较为单纯的全称命题情况：“所有 A 都是 B。”这里，批评意味着找到一个经轻微拉伸而又非 B（我们的情况中是欧拉式的）的 A（我们的情况中是多面体）。

但 Kappa 在两方面使问题尖锐起来。第一，使命题不止一个的构成成分经受概念拉伸式批评的攻击。第二，把概念拉伸从私下的并且相当谨慎的活动变成了概念的公开变形，如从“所有”到“没有”之类的变形。这样，正受攻击之语词的任何有意义的改变，只要使定理为误，便一概算作反驳。我愿意采取这样的说法，如果不能就构成成分 a、b、…把一个命题驳倒，则相对于这些构成成分而言，这命题是逻辑上为真的〔174〕。这样的命题是一个长久的批判—思辨过程的归宿，在这个过程中，一部分语词的意义的重担完全转移到了其余语词和定理形式上。

如今 Kappa 的全部意思，只是说没有命题相对于其所有构成成分而言可以逻辑上为真。但可以存在相对于部分构成成分而言逻辑上为真的命题，从而反驳之洪流的再次泛滥，便只能在加上可拉伸的新构成成分之后方可。若我们一干到底，非理性主义便是我们的结局——但我们不需要一干到底。那么，我们应于何处划界？我们完全可以允许只针对构成成分中成为批评之靶心的突出子集来进行概念拉伸。逻辑真理不取决于它们的意义。

SIGMA：所以我们最终吸取了 Kappa 的论点：我们使真理至少是独立于某些语词的意义的！

THETA：言之有理。但我们若要击溃 Kappa 的怀疑主义，逃离他的恶无限，我们一到概念拉伸停止作为发展的工具而成为破坏的手段时，便自然不得不刹车了：我们也许得查明，仅有哪些语词的意义是可拉伸的，否则便要以摧毁理性的基本原理为代价〔175〕。

KAPPA：你这套批判理性论的概念，我们能不能拉伸呢？莫非它是不言而喻得真，表述它的语词都是不可拉伸而又精确且不需要定义的吗？你的批评理论会不会吊着一个“以约定为退路”的尾巴：是否每一事皆可批评，单单除了你的批评论、你的“元理论”〔176〕？

OMEGA［向 Epsilon 说］：我不喜欢这种由真实性向合理性的转换。谁的理性？我感觉到了约定主义的渗透。

BETA：你们在谈论什么？我理解 Theta 说的概念拉伸的“温和模式”。我亦理解概念拉伸可以攻击不止一个的语词：当 Kappa 拉伸“拉伸”时，或者当 Gamma 拉伸“所有”时，我们就已经看到过了……

SIGMA：Gamma 毫无疑问是拉伸了“单连通”!

BETA：可是他没有。“单连通”是个简称——他只是拉伸了出现在定义项中的“所有”一词〔177〕。

THETA：回到这一点上来。你不满“公开”、激进的概念拉伸吗？

BETA：是。没有人要把这最后一类接受为真正的反驳！我很清楚，Pi 曾揭示的探试批评的温和的概念拉伸的趋势，是数学发展中最重要的载体。但是数学家将永远不会接受这极端的、野蛮的反驳形式！

老师：此言差矣，Beta。他们确曾接受了它，并且他们之接受是数学史上的一个转折点。这一数学批评的革命改变了数学真理的概念，改变了数学证明的标准，改变了数学发展的模式〔178〕！不过，现在我们要暂时结束我们的讨论：将在其他什么时间再讨论这一新阶段。

SIGMA：可这样便什么问题都还没解决好。我们此时此刻岂可撒手不管。

老师：我也有同感。这一最新阶段对我们的讨论会有重要的反馈〔179〕。但是，科学的探究往往“开始于问题，也结束于问题”〔180〕。［离开教室］

BETA：可开始时我哪有什么问题啊！现在我是除了问题一无所有了！

注　释

〔1〕首先由欧拉（Euler）［1758a］注意到。他的原始问题是给多面体分类，其困难在其编辑总结中指出来了：“在平面几何中，多边形（figurae rectilineae）可依照它们的边数很轻易地分类，边的数目当然是等于角的数目的，但在立体几何中，多面体（corpora hedris planis inclusa）分类的难度便大得多了，因为仅有面的数目是不够的。”

欧拉得出他的结果的关键手段就是提出了顶点与棱的概念：是他首先指出，除面数外，多面体表面上的点的个数与线的条数亦决定其（拓扑）性质。有趣的是，一方面，他渴望强调他的概念框架的新颖性，强调他不得不发明“acies”（棱）一词以替代旧的“latus”（边），因

为 latus 是个多边形概念，而他想要一个属于多面体的概念；另一方面，他仍然为他的点状的顶点保留了“angulus solidus”（立体角）一词。最近普遍承认，此结果的优先权应归于笛卡儿（Descartes）。此说的根据在于笛卡儿的一份手稿［约 1639］，由莱布尼茨（Leibniz）于 1675 年至 1676 年在巴黎抄自原稿，并由德卡莱尔（Foucher de Careil）于 1860 年重新发现并出版。不过，若没有一个小限定的话，优先权不应归于笛卡儿。不错，笛卡儿声称平面角数等于 2φ＋2α－4，此处他以φ为面数，以α为立体角数。而且，他确亦声称平面角数是棱（latera）数的两倍。此两个命题结合起来，便得到欧拉式。但并未见及笛卡儿如此做，因为他仍然以角（平面的与立体的）与面进行思考，而并无自觉的革命性转变，以零维的顶点、一维的棱与二维的面作为完全地刻画多面体拓扑性质的必要且充分的基础。

〔2〕欧拉相当彻底地对猜想就其结果进行了检验。他以棱柱、棱锥等等为例作了验算。他本还可以加上说，此一命题：仅存在 5 种正则立体，亦是猜想的一个结果。另一可疑的结论但是迄今为止才得到确证的命题是：4 种颜色便足以绘制一张地图。

在 V－E＋F＝2 之例中，猜想与检验两阶段在波利亚（［1954］，卷 1，第 3 章之前 5 节，第 35—41 页）中有所讨论。波利亚在此打住，并未处理证明阶段——虽然，他当然指出了对于解“证明题”的某种探试法的需要（［1945］，第 144 页）。我们的讨论自波利亚打住之处开始。

〔3〕欧拉（［1758a］，第 119 页与第 124 页）。但随后（［1758b］）他提出了一个证明。

〔4〕此一证明思想来自柯西［1813a］。

〔5〕19 世纪许多数学家都与 DELTA 有同样看法：这个证明确立了此“定理”，使其无任何可疑之处，譬如克赖莱（Crelle）［1826—1827］，第 2 卷，第 668—671 页；马蒂森（Matthiessen）［1863］，第 449 页；德荣奎埃（Jonquières E. de）［1890a］及［1890b］。引用一段典型的话：“有了柯西证明，这一典雅的等式 V＋F＝E＋2 便可绝对毫无疑义地应用于所有种类的多面体了，正如欧拉 1752 年所说。所有的不确定性本在 1811 年就应当消失。”德荣奎埃［1890a］，第 111—112 页。

〔6〕这个班的水平相当高。对柯西、庞索特（Poinsot）及 19 世纪其他许多优秀的数学家而言，这些问题并未出现。

〔7〕思想实验（deiknymi）是数学证明最古老的形式。其在前欧几里得希腊数学中盛极一时（参考 A•萨博（Á. Szabó）［1958］）。

对于古代数学家来说，在探试顺序中猜想（或定理）先于证明是一个常识。这可由“分析”相对于“综合”具有探试优先性推知。（一个出色的讨论，见罗宾逊（Robinson）［1936］。）根据普罗克拉斯（Proclus），“……预先知道要找的是什么，是必要的”（希思（Heath）［1925］，卷Ⅰ，第 129 页）。“他们说，一个定理就是为了求其得证才提出来的”——帕普斯（Pappus）说（同上，卷Ⅰ，第 10 页）。希腊人对于他们在演绎路线中偶然想出而之前未曾猜中的命题，是瞧不起的。他们称其为不定设题、系定理、由定理之证明或问题之解决而得到的偶然结果，这些结果并非人们径直去寻求的，但不花费额外劳动便如其所是地偶然出现了，按普罗克拉斯所说，它们可以说是一种意外收获（ermaion）或好处（kerdos）（同上，Ⅰ，第 278 页）。

我们在欧拉［1756—1757］的编辑总结中读到，算术定理“远在由严格的论证证实其真实性之前就发现了”。此一发现过程，编者与欧拉都以现代术语“归纳”相称，而不再用古语“分析”（同上）。在探试法上，结果先于论证、定理先于证明的观念，在数学的轶闻中有很深的根源。我们来引用同一个熟知的主题的几个变种：传说克里斯帕斯（Chrysippus）曾写信给克利安西斯（Cleanthes）说：“只管把定理给我，接着我就会找到证明”（参见第欧根尼・拉尔修（Diogenes Laertius）［约 200］，Ⅶ，第 179 页）。传说高斯（Gauss）曾经抱怨说：“我已经得到我的结果多时了；可我尚不知我是怎样得到它们的”（参见阿伯尔（Arber）［1954］，第 47 页），又传黎曼（Riemann）也说：“真希望我有这些定理！如此我便可轻而易举地找到证明”（参见霍尔德（Hölder）［1924］，第 487 页）。波利亚强调说：“你必须在你证明一个数学定理前猜到它”（［1954］，第 1 卷，第 vi 页）。

“准实验”此词来源于前文提到的欧拉［1753］的编者总结。根据这位编者：“因为我们认为对数的思考肯定是纯粹的抽象思维能力的事，我们便几乎很难理解在探寻数的本质时观察与准实验能起怎样的作用。但是，事实上，如我要在这里以很好的理由展示的，今天所知的数的诸性质大部分是由观察发现的……”（波利亚的翻译；他在其［1954］，Ⅰ，第 3 页上错把引语归为欧拉的了）。

〔8〕鲁易里（Lhuilier）在以类似的方法改正欧拉证明时，说他仅做了一次“微不足道的观察”（［1812—1813a］，第 179 页）。但是，欧拉自己却放弃了证明，因为他见着了麻烦，而无法做那“微不足道的观察”。

〔9〕柯西以为，此一操作说明，即在每一步去找到一个或由移去两条棱边加一个顶点或由移去一条棱边而移走的三角形，可以施行于任意多面体是显而易见的（［1813a］，第 79 页）。这与他没有能力想象与球面不同胚的多面体有关。

〔10〕此反例 1 首先由鲁易里注意到（［1812—1813a］，第 194 页）。但编者日果内（Gergonne）附言上说（第 186 页），他本人注意到此反例远在鲁易里的文章发表之前。柯西却并非如此，他刚在一年前发表了他的证明。20 年后此一反例又由赫塞尔（Hessel）发现（［1832］，第 16 页）。鲁易里与赫塞尔发现这个反例均是由矿物学采集所引起，他们于其间注意到了一些双晶体，这些双晶体的内晶是非透光的，而外晶却透光。鲁易里承认他的朋友皮克泰特（Pictet）教授的晶体采集对他有所刺激和影响（［1812—1813a］，第 188 页）。赫塞尔亦提到透光的氟化钙晶体所包住的硫化物立方晶体（［1832］，第 16 页）。

〔11〕定义 1 最先出现于 18 世纪；例如：“人们以多面立体（polyhedral solid）之名，或简单地以多面体（polyhedron）之名，称呼任何由平面（planes）或平的面（plane faces）围成的立体”（勒让德（Legendre）［1809］，第 160 页）。欧拉给出过相似的定义（［1758a］）。欧几里得在定义立方体、八面体、棱锥、棱柱时，并未定义多面体此一通名，但偶尔亦使用（如卷Ⅻ，问题二，命题 17）。

〔12〕德荣奎埃针对那些欲驳倒欧拉定理之人，于法兰西科学院（French Academy）宣读了一些文章，我们发现定义 2 隐含在其中的一篇里。这些文章堪称怪物排除技术大全。他向鲁易里那对畸形的嵌套立方体咆哮道：“如此一个系统不是真正的多面体，而只是一对彼此独立的不同多面体……一个多面体，至少从经典的观点看来，若要算名副其实的，必须具备一个点可在其整个表面上连续移动的条件，而且此条件优先于其余一切条件；此处并不符

合……所以鲁易里这第一个例外便可以弃之不管了”（[1890b]，第 170 页）。这个定义——与定义 1 相反——正合解析拓扑学的胃口，他们对多面体理论本身完全不感兴趣，而仅以其为曲面理论的陪衬物。

〔13〕反例 2a 及 2b 被鲁易里忽略了，只有赫塞尔才第 1 次发现它（[1832]，第 13 页）。

〔14〕在麦比乌斯（Möbius）（[1865]，第 32 页）中，定义 3 首次出现，是要排除孪生四面体。我们发现，他的臃肿定义以通常那种“要么接受，要么拒绝”的独裁口气在一些新式教科书中重新出现；其怪物排除之背景的来龙去脉——本来至少要解释一下——却并未谈及（如，希尔伯特与康佛森（Hilbert and Cohn-Vossen）[1956]，第 290 页）。

〔15〕定义 P 事实上是由 R·巴策尔（R. Baltzer）建议的，据此则欧拉特性将成为多面体的定义特征。巴策尔说：“普通多面体有时（效仿赫塞尔）被称为欧拉多面体。为那些并非名副其实的（uneigentliche）多面体另找一个专名也许更合适”（[1862]，第 2 卷，第 207 页）。对赫塞尔的指涉是不公平的：赫塞尔使用“欧拉式的”一词仅是作为满足欧拉关系的多面体的缩写，想突出其与非欧拉多面体的区别（[1832]，第 19 页）。关于定义 P，亦见下文脚注②所引施勒夫里（Schlöfli）的话。

〔16〕译注：海胆，约 700 种棘皮类动物（echinoderm）之通名，属海胆纲（Echinoidea）。其壳刚硬而呈球状，其表面覆有棘针，呈辐射对称状。形似开普勒之星状多面体。

〔17〕对“海胆”之讨论始于开普勒（Kepler）的宇宙理论（[1619]，第Ⅱ、ⅪⅩ及ⅩⅩⅥ册，第 72 页及第 82—83 页，与第Ⅴ册，第Ⅰ章，第 293 页，第Ⅲ章，第 299 页及第Ⅸ、ⅪⅦ章）。“海胆”之名出自开普勒的“以海胆名之”（cui nomen Echino feci）。图 7 由他的书中（第 79 页）复制而来，其书第 293 页尚有另一幅图。庞索特再次独立发现了海胆，正是他指出，欧拉公式对其不适用（[1810]，第 48 页）。现行的标准术语“小星状十二面体”是凯莱（Cayley）所取（[1859]，第 125 页）。施勒夫里承认了一般的星状多面体，但最终把我们的小星状十二面体当作怪物而拒绝接受了。据他说：“这不是货真价实的多面体，因它不能满足 V－E＋F＝2 的条件”（[1852]，§34）。

〔18〕多边形是否应被定义为包含星状多边形（按照定义 4 或者定义 4′），这场争论已有很长时间了。我们的对话里提出的论据——当星状多边形嵌入一更高维的空间时，便成为普通多边形——是现代拓扑学论据，但还有许多其他的论据可以提出。比如，庞索特为其星状多面体辩护时，便以来自解析几何学的论据作为接受星状多边形的理由：“所有这些不同之处（“普通”与“星状”多边形之间）都是表面上的，比真正的不同更突出，一旦施行解析处理它们便彻底消失，因为此种处理中不同类的多边形是简直不可分的。正多边形的棱边对应实根方程，由方程同时得出同阶的所有正多边形的棱边。比如，若未同时找出第二、第三种七边形的棱边，则不可能得出一个内接于圆的正七边形的棱边。相反，已知某正七边形的棱边，便可决定其能内接的圆之半径，但如此做时，便会发现 3 个不同的圆，分别对应于在已知边上可作的 3 种七边形；其他多边形同理。那么，我们便可正当地以‘多边形’之名称呼这些新的星状图形”（[1810]，第 26 页）。施罗德（Schröder）则采用了汉克尔式（Hankelian）的论据：“把最初仅限于整数的指数概念推广到有理分式，在代数学中硕果累累；这意味着只要机会一来，不论何时，我们在几何学中也应试试同样的做法……”（[1862]，第 56 页）。接着他说明了，我们也许可为星状多边形中 p/q 条棱边的多边形概念找到一个几何解释。

〔19〕Gamma 声称他能够定义星状多边形的面积，这并非虚张声势。一些维护更宽泛的多边形概念的人，以提出一更宽泛的多边形面积概念解决了此问题。在正星状多边形的情况下，做法尤其明显。多边形的面积可取为内切圆或外接圆的圆心与各边连成的各等腰三角形之面积和。在此情况下，当然，星状多边形的某些“部分”会计算一次以上。对非正则多边形，我们得不到任何特异点，但仍可任取一原点，并以负定向的三角形之面积为负面积（迈斯特（Meister）［1771］，第 179 页）。结果看来——亦确实可以从“面积”预料出——如此定义的面积将不依赖原点的选取（麦比乌斯［1827］，第 218 页）。自然，有些人认为这样算出的数字算不上“面积”，于是可能有一场争论；不过，迈斯特-麦比乌斯定义的捍卫者却称其做“唯一（the）正确的定义”，“仅此是科学上正当合理的”（R・豪斯纳（R. Haussner）的按语，［1906］第 114—115 页）。本质主义一直以来就是定义之争的永恒特征。

〔20〕我们在鲁易里的经典著作［1812—1813a］的第 185 页上亦发现了反例 4——日果内又加上说他之前已知道了。但格龙奈特（Grunert）14 年后还并不知道它（［1827］），庞索特 45 年后亦不知（［1858］，第 67 页）。

〔21〕此是意译自埃尔米特（Hermite）致斯蒂杰斯（Stieltjes）的一封信上的话：“这场无导数函数造成的不幸、可恶的瘟疫，所带来的厌恶与恐惧，让我痉挛着转过脸去”（［1893］）。

〔22〕“研究……违反了人们曾盼望是普遍适用的定律的函数，几乎均被视为闯入过去的先辈们寻求秩序与和谐的地盘里去宣传无序与混乱。”（萨克斯（Saks）［1933］，前言）。萨克斯此处指的是在怪物排除者（如埃尔米特！）与反驳主义者之间的那场激烈争论，其于 19 世纪后几十年（亦确在 20 世纪之初）作为特征刻画了现代实变函数论这个“专跟反例打交道的数学分支”（芒罗（Munroe）［1953］，前言）的发展。之后又发生了在现代数理逻辑和集合论的反对者与倡导者之间盛行一时的同样激烈的斗争，这是那场争论的直接延续。亦见第 19 页脚注①及脚注②。

〔23〕为让鲁易里带有隧道的多面体（画框）闪到一边去，不屈不挠的怪物排除者 E・德荣奎埃提出了定义 5：“按多面体一词的通常意义，此多面的复合体亦非一个真正的多面体，因若任取一正穿过立体的平面，其通过某个隧道中的任意一点，则得出的截面将是两个完全不连通的不同多边形；在普通多面体中，对于切割平面的某些位置，即是说在一些凹多面体中，此种情况亦会发生，但并非对所有位置均如此”（［1890b］，第 170—171 页）。人们想知道，德荣奎埃是否已注意到他的定义 5 也排除了一些凹的球性多面体。

〔24〕“我们必不能忘记，今日表现为怪物者，将是明日一条特定适应路线的发生原点……我要进一步强调虽稀有而极具意义的突变之重要性，这些突变影响着决定性胚胎发育过程的速率，其引起而产生者，人们不妨称为有希望的怪物，这些怪物若适应某个空置的合适的环境，便会引发一条新的进化路线。”（哥德施米特（Goldschmidt）［1933］，第 544 页及第 547 页）。我由卡尔・波普尔的提醒而注意此文。

〔25〕意译自庞加莱的话（［1908］，第 131—132 页）。完整的原文如下：“逻辑有时产生怪物。半个世纪来，我们已看见出现了一堆古怪的函数，它们似乎存心变得越不像那些有点用处的老实函数越好。不再有连续性，或也许有连续性，但没有导数，等等。尚不止此，从逻辑的观点看，倒是这些奇怪的函数最具普适性，不找自来的那些函数反以特例的面目出现。

它们仅保有一个非常小的角落。

“以前，一个新函数发明出来，是为了某个实用的目的；如今它们被专门发明出来，使我们的先辈们的推理变得不可靠，而除了这套，就没有什么其他东西可向它们请教。

“若逻辑成了教师的唯一导引，先讲最普适的函数便必要了，就是说要先讲最古怪的函数。初学者反不得不被迫与这畸形学博物馆搏斗……”（G·B·霍尔斯特德（G. B. Halsted）授权译本，第435—456页）。庞加莱是就实变函数论中的情形讨论的此问题——但却无关紧要。

〔26〕套用当若依（Denjoy）的话（[1919]，第21页）。

〔27〕贝哈德（Bérard）[1818—1919]，第347页和第349页。

〔28〕赫塞尔［1832]，第13页。赫塞尔在1832年再次发现了鲁易里的几个“例外”。他刚投出他的手稿，便撞见了鲁易里的［1812—1813a]。这样一来，虽然大部分结果是业已发表过的了，但他仍决定不撤回他的文章，因为他认为，应让忽视了这些例外的“晚近的学者们”接受这一论点。顺便提提，这些学者之一，恰巧是赫塞尔投稿的那家杂志的编辑：A·L·克赖莱。在其教科书［1826—1827］里他“证明了”欧拉定理对一切多面体为真（第2卷，第668—761页）。

〔29〕马蒂森（[1863]，第449页）。马蒂森此处是指海斯（Heis）和艾施外勒（Eschweiler）的《几何学教程》（Lehrbuch der Geometrie）及格龙奈特的《立体几何教程》（Lehrbuch der Stereometrie）。然而，马蒂森并未——如Eta一般——以怪物排除法解决问题，却是——如Rho一般——用怪物校正法（参见第36页脚注①）。

〔30〕摘自柯西的杰作［1821］的引论。

〔31〕鲁易里和日果内似乎已肯定鲁易里的清单已历数了所有的例外。我们在此文这一部分的引论中读到：“人不难确信，对于所有多面体，不管凸与不凸，欧拉定理普遍为真，除了我们将会指出的那些特例……”（鲁易里［1812—1813a]，第177页）。接着我们在日果内的评论中再次读到：“……这里所指出的例外似乎就是可能出现的全部……”（同前书，第188页）。但事实上，鲁易里遗漏了孪生四面体，只是在20年后才被赫塞尔注意到（[1832]）。值得注意的是，一些处于领导地位的数学家，甚至如日果内一样对方法论有浓厚兴趣的数学家，竟会相信人可依赖例外排除法。此一信念类似于归纳逻辑中的“分类法”，据此，可以完全枚举一个现象的所有可能解释，因此，若我们可通过判别实验（experimentum crucis）法排除某种解释之外的所有解释，剩下者便得到证明。

〔32〕I·牛顿［1717]，第380页。

〔33〕阿贝尔（Abel）[1826a]。他的批评看上去是直接针对欧拉式的归纳主义。

〔34〕这也是意译自所引的信中的话，信中阿贝尔谈的是如何把有关函数的一般“定理”的例外消除掉，由此而确立绝对的严格性。原文（包括前引一语）如下：“在高等分析学中，极少有命题是以确定的严格性来证明的。到处可以发现那由特殊至一般的可悲的方式，而惊

奇的是，如此之手法要导出所谓的悖论，却极其罕见。找找原因倒确实很有意义。我的看法是，其原因就在于这一事实：分析学家几乎总是考虑可表为幂级数的函数。只要他种函数出现了——当然这是极少出现的事情——便再也进行不下去了，并且只要开始得出了错误的结论，便有无限多的错误随之而来，互为依托……”（我加的斜体）。庞索特发现，归纳概括常常在多面体理论中失效，正如在数论中一样：“大多数性质是属于个体的，并不遵守任何一般规律”（［1810］，§45）。这种提防归纳法的心理的值得玩味的特征，是它将归纳的偶尔失效归因于（事实的、数的、多面体的）领域中理所当然包含着超乎想像的例外。

〔35〕这又是在很大程度上与阿贝尔的方法如出一辙。以同样的方式，阿贝尔将有关函数的可疑定理之界域限制到幂级数。在欧拉猜想的故事里，限制到凸多面体的这类做法是相当普遍的。比如说，勒让德先给多面体下了一个较普遍的定义（参见第 10 页脚注①），随后提出一证明，这证明虽一方面决不适用于他的所有一般多面体，但另一方面却不止适用于凸多面体。然而，在一个补注中，他以小号字体（在意外发现了从未表述过的例外后的马后炮？）谦虚但安全地撤退到了凸多面体（［1809］，第 161、164、228 页）。

〔36〕不少实干的数学家感到困惑，若证明并不证明出什么，其又为的是什么？一方面，他们从经验得知，证明是可错的，但另一方面，他们从他们的教条主义的灌输中得知，货真价实的证明必是不可错的。应用数学家通常以一条惭愧而坚定的信念摆脱这一两难困境，此信念即，纯粹数学家的证明是“完备的”，因而便是在真正地证明。不过，纯粹数学家们知道得更清楚——他们只对逻辑学家的“完备证明”有如此的尊敬。若问及他们的“不完备证明”之作用、功能是什么，他们中的大多数人便懵头转向了。譬如，G・H・哈代（G. H. Hardy）一百分地尊敬逻辑学家对于形式证明的要求，但当他想要以“我们从事研究的数学家所熟悉的方式”刻画数学证明之特征时，他采取了如下的方式：“严格说来，并无如数学证明者；在最后的分析中，我们仅指出些问题而已；……证明乃是李特伍德（Littlewood）与我所称为吹牛的东西，编出来打动人心的华丽辞藻，上课时黑板上的图画，激发学生想象力的手法”（［1928］，第 18 页）。R・L・威尔德（R. L. Wilder）以为，“证明只是我们用于检验我们之直觉暗示的过程”（［1944］，第 318 页）。G・波利亚指出，证明者，即便不完备，亦在诸数学事实之间建立了联系，这一点又帮助我们记住数学事实：证明最终产生了一个助忆法系统（［1945］，第 190—191 页）。

〔37〕马蒂森［1863］。

〔38〕此一论点：“海胆”“确”为一普通而平凡的欧拉多面体，有 60 个三角形面、90 条棱、32 个顶点——“无法描述的六十面体（un hexacontaèdre sans épithète）”，乃由欧拉定理之不可错之一坚定的支持者提出，此人即 E・德荣奎埃（［1890a］，第 115 页）。不过，将非欧拉星状多面体解释为三角形化欧拉多面体的想法，绝非源于德荣奎埃，而另有一戏剧性的历史（参考下页的脚注①）。

〔39〕没有什么比教条主义认识论的错误论更具有其特点了。因为，若一些真理是显然的，便须解释怎么会有人在它们之上犯错误，换言之，为何真理并非对一切人皆是显然。每一种教条主义认识论都根据各自特有的错误论，提供各自的特殊疗法，以清除思想中的错误。参见波普尔［1963a］，引论。

〔40〕庞索特肯定在 1809 年与 1858 年间的某个时候被洗脑了。正是重新发现了星状多面

体的庞索特，从欧拉理论的角度首次分析了它们，并称，它们中的一部分，如同我们的小星状十二面体一样，是不遵从欧拉公式的（［1810］）。可是，这同一个庞索特却在其［1858］中万分肯定地说，欧拉公式“不但对凸多面体为真，并且对无论什么多面体皆真，包括星状多面体”（第67页——庞索特用了特殊超常多面体（polyèdres d'espèce supérieure）一语指称星状多面体）。矛盾显而易见。怎样解释呢？星状多面体反例出了什么问题？线索就在此文看起来漫不经心的第一句话中：“可以将多面体的整个理论化为带三角形面的多面体理论。”即，庞索特-Alpha 被洗脑后变成庞索特-Rho：他在曾经看见星状多边形的地方，现在只看得见三角形了；他在曾经看见反例的地方，现在只看得见例子了。这自我批评必是鬼鬼祟祟而隐蔽的，因为，按科学的惯例，如此的大变卦要如实招供是不成体统的。亦奇怪者，是他曾否撞见环状面，若然，则他曾否心照不宣地以其三角形观点重新解释了它们？

视角之改变并不需要总是在同一方向上操作。譬如，J•C•贝克尔（J. C. Becker）在其［1869a］中——他被单连通域与多连通域的新概念框架给迷住了（黎曼［1851］）——虑及了环状多边形，却对星状多边形视若无睹（第66页）。此文发表后的5年——文中他曾声称已“确定地”解决了此问题——他扩展了视野，在之前只看见三角形与三角形化多面体处，又识别出星状多边形和星状多面体的图样了（［1874］）。

〔41〕此是斯多噶派错误论的一部分，归于克里西波（Chrysippos）的贡献（参见埃修斯（Aetius）［约公元150］，Ⅳ．12．4；亦见塞克斯都·恩披里克（Sextus Empiricus）［约公元190］，Ⅰ．249）。

据斯多噶派学者称，“海胆”为外部实在之一部分，于灵魂上留下烙印：phantasia 或 visum。一个智慧的人不会不加鉴别地赞成（synkatathesis 或 adsensus）phantasia，除非其成熟到清晰而分明的观念之程度（phantasia katalēptikē或 comprehensio），而若其为伪，便不能成熟到这样的程度。清晰而分明的观念之系统形成科学（epistēmē）。在我们的例子中，“海胆”留于 Alpha 心灵上的烙印是小星状十二面体，而在 Rho 心灵上的烙印却是三角形化六十面体。Rho 会断言，Alpha 的星状多面体视像并不可能成熟到清晰而分明的观念的地步，原因显然是它会推翻那“已证”的欧拉公式。这样，星状多面体解释便招致失败，而“唯一的”替代品，即三角形化解释，便会变为清晰而分明的。

〔42〕此为怀疑派对于斯多噶派看法的一个标准批评，后者以为，他们可以分辨 phantasia 与 phantasia katalēptikē（如塞克斯都·恩披里克［约公元190］，Ⅰ．405）。

〔43〕开普勒［1619］，册Ⅱ．命题ⅩⅩⅥ。（译注：Theophrastus Paracelsus，笔名 Philippus Aureolus Paracelsus，原名 Theophrastus Bombastus von Hohenheim，1493？—1541，瑞士医师、化学家，化学疗法奠基人，药理学之先驱，其著述虽不免巫术成分，然其于古代医学之批判，使医学走上一更科学之轨道。）

〔44〕这是在不偏不倚地陈述开普勒之观点。

〔45〕反例6是鲁易里注意到的（［1812—1813a］，第186页）；日果内此次破例承认了他的发现的新颖性！不过，几乎过了50年庞索特还没有听说过它（［1858］），而马蒂森（［1863］）乃至80年后的德荣奎埃（［1890b］）还把它当成怪物。（参见第29页脚注①及第36页脚注①）19世纪的原始例外排除者把它跟其他例外并列为古董：“作为例子，通常都举附在四面

体一个面上的三棱锥，而前者之棱全无与后者重合者。我在大学笔记本里写道：‘真是奇怪，此情况下有 V－E＋F＝3’。随后无话。”（马蒂森［1863］，第 449 页）。现代数学家渐渐忘记了环状面，它也许跟流形的分类无关，但在其他背景下便可能变为相关的。施坦豪斯（Steinhaus）在其［1960］里说：“我们把地球分成 F 个国家（海和洋都看成陆地）。于是，不论政治状况如何，总有 V＋F＝E＋2”（第 273 页）。但令人好奇的是，施坦豪斯会不会单单因为西柏林（West Berlin）或圣马力诺（San Marino）的存在驳倒了欧拉定理，就把它们一举摧毁。（不过，他当然可以防止贝加尔（Baikal）一类的海整个落在一个国家里，方法是把它们都定义成湖，因为他说过，只有海和洋才看成陆地。）

〔46〕“……鲁易里的研究报告分为两个截然不同的部分。前一部分中，作者提出了欧拉定理一个新颖的证明。后一部分中，他的目标是指出这个定理所遇到的例外。”（日果内给鲁易里文章的编辑评论，见鲁易里［1812—1813a］，第 172 页，斜体由我所加。）

M·扎哈里阿斯（M. Zacharias）在其［1914—1931］里不加批判地但忠实地描述了这种分室隔离法：“在 19 世纪，几何学家除了寻找欧拉定理的新证明外，也参与确定它在某些条件下允许的例外。这类例外曾被叙及，如庞索特。S·鲁易里和 F·Ch·赫塞尔则试图为例外分类……”（第 1052 页）。

〔47〕哈代、李特伍德、威尔德、波利亚似乎均忽略了这一点（见第 26 页脚注①）。

〔48〕译按：作者此处所用之 improof 一词，乃彼自造。彼于 proof 前加 im-之前缀，一方表否定意，一方却以 im＋proof 所得之 improof 颇似 improve 一词，而讽其不断改进者。译者求达其意，故以“只改不证”者译之。

〔49〕这一标准模式本质上是波利亚和舍戈（Szegö）的经典著作［1927］描述的模式，在其第 vii 页上：“应仔细检查每一个证明，看看是否真正利用了全部假设；应努力从较少的假设得出相同结果……在反例显示出到达各种可能性的边界线前，不可自鸣得意。”

〔50〕用隐藏棱“焊接”两个多面体，是德荣奎埃主张的（［1890b］，第 171—172 页）。他以怪物排除反对空腔和隧道，而以怪物校正反对饰顶立方体和星状多面体。以怪物校正捍卫欧拉定理的首个倡导者是马蒂森［1863］。他自始至终使用怪物校正：他成功展示出隐藏的棱和面，解释了一切非欧拉多面体，包括带隧道和空腔的多面体在内。德荣奎埃的焊接是对环状面的彻底三角化，而马蒂森的焊接倒较为经济，他只画出能把面分为单连通子面的最小数目的棱（图 14）。

马蒂森对其把实质性的反例转化为校正妥帖的重名的欧拉例子的方法，信心百倍。他声称，“任意多面体都能分析成是对欧拉定理的确证……”。他历数浅薄的观察者指出的所谓例外，然后称：“任一这类的情况下，我们都可说明多面体有隐藏的棱和面，若把它们算在内，则定理 V－E＋F＝2 毫发无损，即令是对这些看起来桀骜不驯的情况亦如此。”

然而，补画棱或面能使非欧拉多面体转变为欧拉多面体的这一想法并非出自马蒂森，而源于赫塞尔。赫塞尔以 3 例为证，并配上了精美的图形（［1832］，第 14—15 页）。不过，他并不以此方法“校正”例外，相反，他是要通过展示“能使欧拉定律生效的十分相似的多面体”，而“阐明例外”。

〔51〕这最后一条引理强得徒然无谓；若替之以引理“对拉伸及三角化过程得到的平面三角形化网状结构，有 V－E＋F＝1”，对柯西证明的目的而言亦足够了。柯西似不曾注意到两者的区别。

〔52〕学生们显然通晓新近的社会哲学。此术语为波普尔所造（[1957]，第 64 页）。

〔53〕实际上，这样一个证明首由 H·赖哈特（H. Reichardt）提出（[1941]，第 23 页）。亦参见 B·L·范德瓦尔登［1941］。希尔伯特和康佛森很满足于 Gamma 论断的真实性是“容易看出”的（[1932]，英译本，第 292 页）。

〔54〕波利亚（[1945]，第 142 页）。

〔55〕最后这句话出自艾丽丝·安布罗斯（Alice Ambrose）的趣文（[1959]，第 438 页）。

〔56〕参见第 5 页脚注①。“拉链”的比喻是 R·B·布莱思怀特发明的；然而，他只谈及“逻辑的”和“认识论的”拉链，而未谈及“探试法的”拉链（[1953]，尤其是在第 352 页）。

〔57〕海胆与圆柱均在前文讨论过了，第 13 页和第 28—29 页。

〔58〕守御定理的怪物排除是非形式数学里的重要模式：“使欧拉公式失效的例子有什么问题？为确保欧拉公式的有效性，要用哪些几何条件使 F、V、E 的意义更为精确？”（波利亚［1954］，第 1 卷，习题 29）。圆柱是习题 24 里举的例。答案是：“……棱……应终止于角上……”（第 225 页）。波利亚将这话推而广之：“数学研究中不乏此一局面：定理虽已定型，而我们却还得赋给语词更精确的意义，使定理严格正确”（第 55 页）。

〔59〕定域而非全局的反例在第 5—8 页有所讨论。

〔60〕见第 38 页。

〔61〕见第 31 页。

〔62〕Gamma 空洞的真陈述是 19 世纪一大创举。其问题背景（problem-background）至今不明。

〔63〕“欧几里得……应用了一条他全未意识到的公理”（罗素［1903］，第 407 页）。”“作［sic］隐藏假设”是数学家与科学家的通用语。亦见伽莫夫（Gamow）对柯西证明的讨论（[1953]，第 56 页）或伊夫斯（Eves）和纽森姆（Newsom）对欧几里得的讨论（[1958]，第 84 页）。

〔64〕见第 38—39 页。

〔65〕非形式数学的优秀教科书通常会具体指出它们的“简略表达”项目，也就是它们认为平常得不值一提的或真或假的引理。对此的标准表述是：“我们假定读者熟悉 x 型引理”。随

着批评使背景知识转化为知识，假定别人熟悉的分量便随之减少。比如，柯西竟未察觉他的名著［1821］预设了读者“熟悉”实数理论。任何反例，只要明白公开地表述出有关无理数性质的引理，他都会当作怪物拒绝。维尔斯特拉斯（Weierstrass）及其学派不复如此，所以，非形式数学教科书现在新辟了一章讲实数理论，其中收集了这些引理。但这些书的引言里又通常假定读者“熟悉有理数理论”。（例如，见哈代《纯数学》，第 2 版［1914］及以后各版。初版依然把实数理论归为背景知识；或见鲁丁（Rudin）［1953］。）更严格的教科书再进一步缩小了背景知识范围。朗道（Landau）在其有名的［1930］引言里假定读者只熟悉“逻辑推理和德语”。讽刺的是，正在同一时间，塔斯基表明了朗道那样略去的绝对平常的引理，可能不但为假，而且相互不一致——德语是语义封闭的语言。让人好奇的是，究竟“作者坦承自己对 x 领域无知”何时方取代一副权威气派的婉辞“作者假定人人熟悉 x 领域”：肯定只有到承认知识并无基础之时才行。

〔66〕当隐藏引理初次发现时，它被视为错误的。当贝克尔初次指出柯西证明（他引用的是巴策尔［1862］的二手证明）中的一个“隐藏”（stillschweigend）假设时，他称其为“错误”（［1869a］，第 67—68 页）。他提请大家注意，柯西认为所有多面体都是简单的：柯西的引理不但是隐藏的，而且是错误的。然而，历史学家无法想象伟大的数学家会犯这样的错误。在庞加莱［1908］里可以找到名副其实的伪造历史的手段：“不严格的证明什么也算不上。我以为没有人会对这个真理提出异议。但是，如果完全从字面理解，一字不放，我们便一定会得出这样的结论，如 1820 年前没有数学：这显然是过头了；那时代的几何学家是随意地理解我们要长篇大论才可解释的道理。这不等于说他们根本不懂；他们飞也似地就略过去了，而且，要懂透还需费饶舌之苦。”（第 374 页）贝克尔谈柯西“错误”的报告必得“1984-wise”改写：“doubleplusungood refs unerrors rewrite fullwise”（见以下译按）。E •施坦尼茨（E. Steinitz）做了改写工作，他坚持说，“欧拉定理并非普遍有效是不可能始终无人察觉的”（［1914—1931］，第 20 页）。庞加莱本人也把他的手段应用于欧拉定理：“大家知道，欧拉曾证明了，对于凸多面体有 V－E＋F＝2”（［1893］）——欧拉当然是对所有多面体陈述他的定理的。

译按：“1984-wise”与“doubleplusungood refs unerrors rewrite fullwise”是仿照英国小说家乔治•奥威尔（George Orwell, 1903—1950）之名著《1984》中的新话原则（the Principles of Newspeak）写的。其书附录即“新话的原则”，专门介绍小说中大洋国（Occeania）的规定语言。大洋国即奥威尔氏假想之国，乃一极权主义之乌托邦。其书附录写道：“新话者，大洋国之官方语言，其所以发明是为了满足英社（英国社会主义）之意识形态需要。……形容词之形成，在名词兼动词之词后加-ful 后缀；副词之形成，加-wise 后缀。……任意单词……若表否定意，则加前缀 un-；若表加强意，则加前缀 plus-；若更进一步强调，则加前缀 doubleplus-……”（《1984》，第 237 页以下，Penguin Books Ltd，1954 年版，1987 年印）。拉卡托斯此处所写之句，实是模仿《1984》第一部分第四章的这句话：“... doubleplusungood refs unperson rewrite fullwise...”（同上书，第 33 页及第 38 页），奥威尔氏以现代英语自译为：“... is extremely unsatisfactory and makes references to non-existent persons. Rewrite it in full...（……极为不妥，因其提到不存在的人。全部重写……）”（同上书，第 38 页）故拉卡托斯之“1984-wise”，即“1984 式地”之意；其“doubleplusungood refs unerrors rewrite fullwise”，即“极为不妥，因其提到不存在的错误。全部重写”之意。

〔67〕见第 27 页。

〔68〕这个班的水平相当高——全局反例尚未出现，Alpha、Beta、Gamma 就怀疑起 3 条引

理了。在实际的历史中，证明分析好几十年后才到来：很长一段时期里，反例不是被当成怪物隐瞒起来或驱赶出去，就是被列为例外。从全局反例转向证明分析的探试进程——虚假性转送原理的应用——实际上在 19 世纪早期的非形式数学里是不为人知的。

〔69〕H・G・福德尔（H. G. Forder）［1927］，第 viii 页。或者说："证明的一大优点是它们逐渐灌输对于已证结果的某种怀疑主义。"（罗素［1903］，第 360 页。他亦举了一个绝妙的例子。）

〔70〕众所周知，批评可以使人怀疑"先验真理"，甚至最后将其驳倒，从而使证明沦为仅仅只是解释。至于缺乏批评或反驳可以将似乎不合情理的猜想转化成"先验真理"，从而使试探性的解释转化为证明，这就不太为人所知了，但是同样重要。这种模式的两大事例便是欧几里得和牛顿的兴衰。衰落的故事尽人皆知，但兴起的故事通常都是误传的。

欧几里得几何像是作为一种宇宙论提出来的（参见波普尔［1952］，第 187—189 页）。他的"公设"和"公理"（或称"公见"）当初是大胆而挑衅的命题，他们向巴门尼德（Parmenides）和芝诺（Zeno）宣战——据此两者的学说，这些"公设"不但是假的，甚至是逻辑上为假，不可思议的。事过多时，"公设"才被认为毋庸置疑地真，大胆的反巴门尼德"公理"（如"整体大于部分"）才被视为平常的，以致日后的证明分析略而不提，转化成了"隐藏引理"。这个过程始于亚里士多德：他给芝诺烙上了"好辩的怪人"的臭名，称其论证为"诡辩"。萨博最近以读来激动人心的细节披露了这一历程（［1960］，第 65—84 页）。萨博说明，在欧几里得时代，"公理"一词——如"公设"——是指批判的对话（dialectic）中的一种命题，要由推断就其结果进行检验，并不是已被讨论者承认为真的。这个词的意思刚好颠倒了，真是对历史的讽刺。欧几里得的权威在启蒙时期盛极一时。克莱洛（Clairaut）敦促其同行不要陈述明显的引理，以免"模糊了证明，搞烦了读者"：欧几里得之所以如此，只是要叫"冥顽不灵的诡辩家"服气（［1741］，第 x 页和第 xi 页）。

牛顿的力学和引力论也是作为大胆的推测提出来的。莱布尼茨嘲笑之，并称其为"神秘的"（occult），连牛顿自己也颇感怀疑。但是，几十年后——没有反驳的情况下——他的公理就被奉为金科玉律了。疑点被遗忘了，批评被烙上了"古怪"之名，若还不至于"愚昧"的话；他的一些最可疑的假定被视为平常的，连教科书亦从不提起。争论——从康德到庞加莱——不再是关于牛顿理论的真实性，却是关于确实性的本质了。（对牛顿理论的评价的大转弯是最先由卡尔・波普尔指出的——见其［1963a］各处。）

政治意识形态与科学理论的类似是远比一般的理解深邃的：起初大可争论的政治意识形态（可能只是强迫接受的），仅仅在一代的时间内，便可变成不容争辩的背景知识。批评者被遗忘了（也许被处决了），直到一场革命爆发，他们的异见才重见天日。

〔71〕这条规则似乎首次由 P・L・赛德尔（P. L. Seidel）陈述过（［1847］，第 383 页）。见后文，第 147 页。

〔72〕"我有权提出满足你的论据条件的任一例子，而你所称为古怪、荒谬的例子，我很疑心它们事实上正是些令人难堪的例子，是对你的定理不利的。"（G・达布（G. Darboux）［1874b］）

〔73〕“隐藏引理的贮藏量使我觉得害怕，我不得不做大量的工作才能摆脱它们。”（G·达布［1883］）

〔74〕见第 26 页及第 33—34 页。

〔75〕庞加莱［1905］，第 214 页。

〔76〕同上书，第 216 页。“证明严格性”标准的几次改变引起了数学中的几次主要革命。毕达哥拉斯派（Pythagoreans）主张严格的证明必须是算术的。然而，他们发现了为“无理数”的一个严格证明。当这则丑闻最终传开后，标准改变了：算术“直觉”名誉扫地，几何直觉取而代之。这意味着数学知识的一场重大而复杂的改组（例如：比例论）。18 世纪，“易于误导的”图形使几何证明声名狼藉，而 19 世纪，算术直觉借棘手的实数论之助而重登王位。今天，主要的讨论阵地是，在集合论证明与元数学证明中，哪些严格而哪些不严格，譬如，众所周知的那场关于策梅罗（Zermelo）和干岑（Gentzen）的思想实验是否可被接纳的讨论。

〔77〕正如前文已指出的，这个班的水平很高。

〔78〕“心理主义”是胡塞尔（Husserl）造出来的术语（［1900］）。关于对心理主义的较早“批评”，见弗雷格（Frege）［1893］，第 xv—xvi 页。现代直觉主义（不像 Alpha）公开拥抱心理主义：“数学定理表达纯经验的事实，即某一构造成功了……数学……是对人心的某些功能的研究。”（海丁（Heyting）［1956］，第 8 页及第 10 页）至于他们如何协调心理主义与确实性，他们严守秘密。

〔79〕即便我们有完美的知识，也无法完美地表述它，这对古代怀疑派本是老生常谈（见塞克斯都·恩披里克［约 1900］，第 83—88 页），但在启蒙时期被遗忘了。直觉主义者重新发现了它：他们接受康德的数学哲学，但指出，“数学自身的真实完善性与数学语言的完善性之间看不出有什么清楚的联系”（布劳维尔（Brouwer）［1952］，第 140 页）。“经由口头语言或书写文字的表达——虽对交流必不可少——是永远不充分的……科学的任务不是研究语言，而是创造思想。”（海丁［1939］，第 74—75 页）

〔80〕布劳维尔［1952］，第 141 页。

〔81〕英语有“infinite regress”（无穷回归）一词，但这只是“恶无限”（schlechte Unendlichkeit）的一个特例，此处用不上。Alpha 造这个短语显然是想到了“vicious circle”（恶性循环）。

〔82〕通常，数学家避免长定理的方法是通过选择加长定义的方式，使定理中只有被定义项（例如“普通多面体”）出现——这更加经济，因为一个定义缩写了许多定理。即使如此，按“严格的”解释，引出定义的怪物虽然极少提及，定义也占了极大篇幅。在福德尔［1927］中（第 67 页及第 29 页），“欧拉多面体”的定义（连同一部分定义项的定义）约占 25 行；在 1962 年版的大英百科全书中，“普通多面体”的定义填满了 45 行。

〔83〕“逻辑使我们拒绝某些论据，却不能使我们相信任何论据”（勒贝格（Lebesgue）［1928］，第 328 页）。*编者按：应当指出，按字面理解，勒贝格的陈述是错误的。现代逻辑为我们提

供了有效性的一种精确描述，可以表明某些论据是满足这种描述的。可见，逻辑确实能让我们相信一个论证，尽管它也许不能让我们相信一个有效论证的结论——因为我们也许不相信某一个或更多的前提。

〔84〕E・H・摩尔（E. H. Moore）［1902］，第 411 页。

〔85〕“自然驳倒了怀疑主义者，理性驳倒了教条主义者”（帕斯卡［1659］，第 1206—1207 页）。少有数学家会像 Beta 那样坦承，理性太虚弱了，自身的正当性都提供不了。他们大多采纳某一类的教条主义、历史主义或混乱的实用主义，仍然古怪地无视这些是站不住脚的。例如：“数学真理事实上是全然不容争辩的知识的原型……但数学的严格性也不是绝对的；数学处在连续发展的过程中；数学原理不是一次就牢靠地凝成了，它们有自己的生活，甚至可以成为科学论争的主题。”（A・D・亚历山大罗夫（A. D. Aleksandrov）［1956］，第 7 页）（这段引文可以提醒我们，辩证法试图不用批评来说明变化：真理“在连续发展之中”，但永远是“全然不容争辩的”。）

〔86〕编者按：我们相信，这条历史按语有些低估了数学“严格主义者”的成就。数学中向“严格性”的进军，最终暴露出来的，是向两个分隔的目标进军，其中只有一个可达。这两个目标，第一个是严格正确的论据或证明（其间真实性不可错地从前提传送到了结论上），第二个是严格为真的公理或第一原理（为的是从这个原点把真实性注入系统，然后经严格证明传遍整个数学）。第一个目标已知可达（当然要给定某些假设），而第二个已证不可达。

弗雷格和罗素设置了一些系统，数学能够（可错地）被翻译成这些系统（见后文，第 122 页），内中证明规则是有穷的，且已提前列为条件。结果证实，可以说明（刚才提到的假定于此处便可用）凡是用这些规则可证的命题都是该系统之公理的有效推论（即若公理为真，所证命题必亦为真）。在这些系统中，证明不得有“缺漏”，因而一串命题是否一个证明能够在有穷多步内检查清楚。（当然，若按检查结果，该公式序列不是我们考虑的系统中的证明，这并不足以确定结尾公式在该系统中没有货真价实的证明。所以，在证明检查过程中，有一种利于证实而不利于证伪的不对称性。）不论在哪一种严肃的意义上，都不能说这样的证明是可错的。（不错，也许凡是检查过某个这样的证明的人都犯了某种难以解释的错误，但这不算是严肃的怀疑。不错，这样的有效证明传送真实性此一非形式（元）定理也许是错误的——但这样想也没有什么严肃的理由。）可是，在非平常的意义上，这类系统的公理便确是可错的。从“自明的”、“逻辑的”真理推演出全部数学的企图业已破产，这是众所周知的。

〔87〕前文，第 25 页。

〔88〕关于第一件事例的讨论，见前文，第 5—8 页。

〔89〕Omega 似乎漏了第三种可能性：Gamma 完全可以说，既然局部而非全局的反例没有显示出任何对虚假性转送原理的破坏，便不需采取什么行动。

〔90〕参见前文，第 46—47 页。

〔91〕关于此处第二件事例的讨论，参见前文，第 33—34 页。

〔92〕见前文，第 35—39 页。

〔93〕见前文，第 7 页。

〔94〕同上。

〔95〕日果内证明在鲁易里［1812—1813a］第 177—179 页上。按原貌，它自然不会包含照相这一招。他说：“取一多面体，某一面是透明的；想象从外部把眼睛靠近这一面，近到能够感觉其他所有面的内部……”日果内谦虚地指出，柯西证明更加深入，它“有一个可贵的优点，就是根本不预先假定凸性”。（然而，他不曾想到要追问它的确预先假定了什么。）之后，雅各布·施坦纳（Jacob Steiner）重新发现了本质上相同的证明［1826］。那时有人提醒他将优先权归于日果内，他便读了鲁易里那篇附有例外清单的文章，但这并不妨碍他以此一定理为证明作结：“所有多面体都是欧拉多面体”。（正是施坦纳的文章激怒了赫塞尔——德国人的鲁易里——去写他的［1832］。）

〔96〕勒让德证明可在其［1803］中找到，证明引生的定理却找不到，因为在 18 世纪，证明分析和定理形成实际上是不为人知的。勒让德首先把多面体定义为表面由多边形面组成的立体（第 161 页）。接着他一般地证明了 V－E＋F＝2（第 228 页）。不过，在第 164 页上以小号字体印刷的一条注里，又来了个例外除外式的修正，说是将只考虑凸多面体。至于近乎凸的极端分子，他不予理会。庞索特在其［1809］里评勒让德证明时，最先注意到欧拉公式“并不仅仅对寻常的凸立体有效，即至多取两点便可用一直线切断其表面的立体：它对带凹角的多面体也成立，只要能在该立体内部找到一点作为球心，从此点引直线可将多面体的面投影到球面上，而投影各面不相重叠。这适用于无穷多的带凹角的多面体。事实上，就其本身情况而言，勒让德证明对所有这些另外的多面体也是适用的”（第 46 页）。

〔97〕E·德荣奎埃继续往下说，又是从庞索特［1858］剽取的一个论据：“祈求勒让德或相似的高级权威的保佑，只会助长一个广为散布的偏见，即欧拉定理的有效域只由凸多面体组成。这个偏见甚至把一些聪明绝顶的人都俘虏了。”（［1890a］，第 111 页）

〔98〕引自庞索特（［1858］，第 70 页）。

〔99〕D·M·Y·索末菲（D. M. Y. Sommerville）（［1929］，第 143—144 页）。

〔100〕开普勒曾设计了这个“大星状十二面体”（［1619］，第 53 页），庞索特又独立设计出来，且最先检验它是否是欧拉多面体。图 15 由开普勒的书中复制。

〔101〕我未能查到这段引文的出处。译按：伽利略《对话集》中，辛普利邱代表托勒密，萨尔维阿蒂代表哥白尼，沙格列陀代表伽利略本人对前两人谈话作出的判断。

〔102〕参见第 66 页脚注①。

〔103〕全局而非局部的反例。

〔104〕全局兼局部的反例。

〔105〕答案就在著名的帕普斯古代探试法中，此种探试法只适合于发现“终极的”、“最终的”真理，即发现包含充分必要条件的定理。对“证明题”而言，此一探试法的主要规则是：“如你有一猜想，由它引出推论。如你得到已知为假的推论，猜想便为假。如你得到已知为真的推论，倒转次序重推，若猜想能从此一真推论中引出，则其为真。”（参见希斯［1925］，第 1 卷，第 138—139 页。）“原因等于结果”（causa aequat effectu）的原理和对于包含充分必要条件的定理的追求，均由这种传统而来。只是到了 17 世纪——将帕普斯探试法应用于现代（modern）科学的种种努力悉数付诸东流——追求确定性才压倒了追求终极性。

〔106〕*编者按：Epsilon 纸条里的内容于后面的第 2 章揭晓。

〔107〕欧拉猜想尚有许多其他证明。关于欧拉、约当（Jordan）、庞加莱证明的详尽的探试法讨论，见拉卡托斯［1961］。

〔108〕庞索特、鲁易里、柯西、施坦纳、克赖莱都以为不同证明是在证明同一定理：“欧拉定理。”引一部标准教科书的典型语言：“这个定理来自欧拉，第一个证明出自勒让德，第二个出自柯西。”（克赖莱［1827］，第 2 卷，第 671 页）

当庞索特觉察出勒让德证明不仅仅可用于普通凸多面体时，他差不多就注意到区别了。（见第 62 页脚注①。）但当他随后对比勒让德证明和欧拉证明（基本点是切去多面体的棱锥角，最后得出一个四面体而不改变欧拉示性数）时，他却说勒让德证明较为可取，其理由是“简单性”［1858］。“简单性”代表 18 世纪的严格性观念：思想实验的清晰性。他不曾想到从内容上对比两种证明：这时会发觉欧拉证明更优越。（事实上，欧拉证明没什么错。勒让德应用了主观的那时代的严格性标准，忽略了客观的内容标准。）

鲁易里——暗中批评这段话（没提庞索特）时——指出勒让德的简单性只是“虚有其表”，因为它预设了大量的球面三角学背景知识（［1812—1813a］，第 171 页）。但鲁易里也相信勒让德与欧拉“证明的是同一定理”（同上书，第 170 页）。

雅各布·施坦纳跟他同样地评价勒让德证明，并同样地认定一切证明都在证明同一定理［1826］。唯一区别是，据施坦纳，不同证明证的是“所有多面体都是欧拉多面体”，而据鲁易里，不同证明证的是“所有无隧道、空腔、环状面的多面体都是欧拉多面体”。

柯西 20 岁出头就写了他论多面体的［1813a］，远在他的严格性革命之前。在其论文第二部分的引论里，他重复了庞索特对于欧拉证明和勒让德证明的对比，这不能看做是错误的。他——跟大多数同时代人一样——没有抓住不同证明在深度上的区别，因而不能认识到他自己的证明的真正威力。他以为，他还是只给出了同一定理的另一种证明——不过，他曾十分急切地强调，他得到了一个相当平常的概括，将欧拉公式又推广到某些多面体类。

日果内是认识到柯西证明举世无双的深刻性的第一人（鲁易里［1812—1813a］，第 179 页）。

〔109〕见第 59 页。

〔110〕同上。

〔111〕这个问题，鲁易里注意到了（[1812—1813a]，第 189 页），赫塞尔［1832］也独立地注意到了。在赫塞尔的文章中，两种画框的图是相互毗连的。亦参见第 84 页脚注①。

〔112〕波利亚称此为“发明者的悖论”（[1945]，第 110 页）。

〔113〕*编者按：我们进教室之前，课堂上便讨论过这张表。

〔114〕见第 76 页脚注③。这张表借自波利亚［1954]，第 1 卷，第 36 页。

〔115〕见前文，第 1 页。

〔116〕这给第 5 页脚注①加了一层重要限制。

〔117〕波利亚［1954]，第 1 卷，第 5 页和第 7 页（我加的斜体）。

〔118〕见前文，第 70—71 页。

〔119〕这种试试错错的情景由波利亚漂亮地重建起来。第一个猜想是 F 随 V 增加。此被驳倒后，又有另两个猜想跟来：E 随 F 增加；E 随 V 增加。第四个是获胜的猜想：F＋V 随 E 增加（[1954]，第 1 卷，第 35—37 页）。

〔120〕另一方面，因为数学通常用演绎的表述法，有些人又相信发现之路径是从公理和（或）定义到证明和定理。他们也许会完全忘掉素朴推测的可能性和重要性。实际上，在数学探试法里，演绎主义的危险性更大，而在科学探试法里则归纳主义的危险性更大。

〔121〕我们把数学探试法在本世纪的复兴归于波利亚的贡献。他那令人欣羡的工作的主要特色之一，是强调科学探试法与数学探试法之间的种种相似之处。唯一可能是他的弱点的地方也与此一强项联系在一起：他从不怀疑科学是归纳的，而由于他正确认识了科学探试法与数学探试法之间深刻的类似，他便不由自主地以为数学也是归纳的。同样的情况早先也在庞加莱身上发生过（见其［1902]，引言），亦曾发生在弗雷歇（Fréchet）身上（见其［1938]）。

〔122〕见前文，第 39—40 页。

〔123〕据帕普斯探试法，数学发现始于猜想，接着是分析，然后，在假定分析没有证伪猜想的情况，接着是综合（亦参见前文，第 5 页脚注①和第 65 页脚注①）。不过，我们这种版本的分析-综合是在改进猜想，而帕普斯版只是在证明或证伪它。

〔124〕参见罗宾逊（Robinson）[1936]，第 471 页。

〔125〕见前文，第 20 页。

〔126〕*编者按：此一推理是错误的，虽然结论正确。黏合事实上造成了 8 个顶点、12 条棱、6 个面的消失。欧拉示性数便确因此减少了 2。（图 20（b）中，要假定两块阴影面完全

重合，需颠倒其中一个半画框的倾斜方向，从而使宽棱与窄棱相交换。因为在此一操作下 V、E、F 都不改变，则论证实际上仍可通过。）

〔127〕此由拉什希（Raschig）［1891］做出。

〔128〕霍珀（Hoppe）［1879］，第 102 页。

〔129〕这又是帕普斯探试法的一部分。他把以猜想为起点的分析叫做“理论的”，把不以猜想为起点的分析叫做“悬疑的”（希斯（Heath）［1925］，第 1 卷，第 138 页）。前者涉及证明题，后者涉及求解题（或寻找题）。亦参见波利亚［1945］，第 129—136 页（“帕普斯”）及第 197—204 页（“倒着做”）。

〔130〕“秩序”复原得力于鲁易里，他用了几乎同样的公式（[1812—1813a]，第 189 页）；亦得力于赫塞尔，他用笨拙的专门公式来解释欧拉多面体的不同接合法（[1832]，第 19—20 页）。参见第 69 页脚注①。

从历史上说，鲁易里——在其［1812—1813a］中——曾经设法用素朴猜测来概括欧拉公式，并得到以下公式：V－E＋F＝2［（C－T＋1）＋（p1＋p2＋K）］，此处，C 为空腔数，T 为隧道数，pi 为第 i 面上的内隐多边形数。只考虑“内隐多边形”时，他证明了它，但隧道似乎就把他打败了。他构造这个公式是为了解释他的 3 种“例外”；但他的例外清单是不完整的（参见第 23 页脚注②）。而且，此一不完整性还不是他的素朴猜想为假的唯一理由：因他失察的可能性甚多，空腔也许是多连通的；在有分岔隧道的体系中，多面体的隧道数便也许无法单值地确定；有关的不是“内隐多边形数”而是环状面数（对共有一棱的两个相邻内隐多边形来说，他的公式便会破产）。关于对鲁易里的“归纳概括”的一个批评，见李斯丁（Listing）［1861］，第 98—99 页。亦参见第 97 页脚注①。

〔131〕19 世纪有相当多的数学家被这类内容上的平庸增加手段弄糊涂了，确实不知道如何应对才好。有些人——如麦比乌斯——运用怪物排除定义（见前文，第 12 页）；还有些人——如霍珀——运用怪物校正。霍珀的［1879］尤其透露内情。一方面，他急切地——跟许多同代人一样——想要一个完备得无以复加的“广义欧拉公式”，它包罗万象。另一方面，一碰上平庸的复合物，他就畏缩不前了。所以，他尽管声称自己的公式是“完备的、一览无余的”，却又慌乱地加上说，“特殊情况会使（构成成分的）点查成为不确定的”（第 103 页）。这就是说，如果哪个棘手的多面体还能打败他的公式，便是数错了它的构成成分，应该按正确的眼光来校正这个怪物：例如，孪生四面体的公共顶点和公共棱就一定要看两遍、数两次，每一个孪生子多面体亦应自成一个多面体（同上）。关于更多的例子，参见第 103 页脚注②。

〔132〕见前文第 49—53 页。

〔133〕见第 103—104 页。

〔134〕古代哲学家们毫不犹豫地把猜想从它的很平常的推论中演绎出来（例子可见我们从三角形到多面体的综合性证明）。柏拉图（Plato）以为“仅由一条公理也许就足以引生整个系统”。“通常来说，他以为单个假说就其自身而言便是可以结出果实的，他在他的方法论中忽略了其他并用的前提。”（罗宾逊［1953］，第 168 页）这便是古代非形式逻辑的特点，即

证明的或思想实验的或构造的逻辑的特点；我们看出它是省略式，只是事后诸葛亮：内容的增加只是后来才变成推论脆弱的标志，而不再是推论强有力的标志。笛卡儿、康德、庞加莱都全力鼓吹这种古代非形式逻辑；他们全部蔑视亚里士多德形式逻辑，说它贫瘠无果、无关紧要，然后把它们打发掉——同时又高歌多产的非形式逻辑之不可错性。

〔135〕庞加莱［1902]，第 33 页。

〔136〕19 世纪中叶的数学批评才开始搜捕隐藏引理，这与稍后的证明分析取代证明、语言规律取代思维规律的过程有密切关系。逻辑理论最重要的发展通常是以数学批评的发展为先导的。不幸的是，即便那最优秀的逻辑史家也不免聚精会神于逻辑理论的变化，而不注意它们的根源是在逻辑实践的变化中。亦参见第 110 页脚注②。

〔137〕见第 80 页。

〔138〕见第 59 页。

〔139〕见第 49 页。

〔140〕Alpha 看来确实陷入了演绎探试法的谬论。参见第 77 页脚注①。

〔141〕笛卡儿［1628]，规则Ⅲ。

〔142〕见第 39 页。

〔143〕欧拉［1758a］的图 6 是几何教科书上出现的第一个凹多面体。勒让德在其［1809］里谈及了凸凹多面体。但在鲁易里之前谁也不曾提起过非简单的凹多面体。

然而，也许可以再加一层有趣的限制。最先被人研究的一类多面体有一部分是 5 种普通正多面体和棱锥、棱柱这样的准正则多面体（参见欧几里得）。文艺复兴以后，此一类多面体沿两个方向扩展了。一是正文指出的：把所有凸多面体和某些轻微凹陷的简单多面体包括进来。二是开普勒的方向：他发明了正星状多面体，由此扩展了正多面体类。可是，开普勒的创举被遗忘了，只有等庞索特重来一次（参见前文，第 12—14 页）。欧拉肯定是梦里亦不曾与星状多面体相会过的。柯西知道它们，但他的心奇怪地隔离成两半了：当他对星状多面体有了一个有趣的想法时，他便发表出来；但当他就自己的一般多面体定理考虑有哪些反例时，又忽略了星状多面体了。庞索特年轻时并非如此［1810］——但后来他改变了想法（参见前文，第 29 页）。

可见，Pi 的说法虽然在探试法上是对的（即在理性的数学史中是正确的），但从历史上说却是错的。（我们不必为此担忧：实际历史往往是其理性重建的漫画化。）

〔144〕怪物包含定义的一个有趣的例子是庞索特为凸性重下的定义，此定义将星状多面体也收入了令人满意的凸正则立体类之中［1810]。

〔145〕这其实就是柯西的情况。倘使柯西那时已发现了他的革命性的例外排除法（见前文，

第 55—57 页），他便有可能会去搜索例外，也会找到一些。但可能只是稍后，当他决心清除分析中的混乱时，他撞见了例外问题。（似是鲁易里最先注意到和正视了，这样的“混乱”并不限于分析。）

历史学家们，如施坦尼茨在其［1914—1931］中，通常说柯西注意到他的定理不是普遍有效的，故而只就凸多面体加以陈述。不错，柯西在其证明中使用了“多面体的凸表面”一语（［1813a］，第 81 页），在其［1813b］中于“立体角与凸多面体的若干定理”的总标题下重述了欧拉定理。不过，大概是想抵消这个标题，他尤其强调了欧拉定理对任何多面体的普遍有效性（第 94 页，定理Ⅺ），而把另外 3 个定理（定理ⅩⅢ及其两个推论）明确针对凸多面体来表述（第 96 页及第 98 页）。

何以柯西用语这样马虎？柯西的多面体概念几乎与凸多面体概念重合。但又不完全重合：柯西知道凹多面体，它是可以在凸多面体一侧轻按一下便得到的，但是，他并不曾讨论何者看起来是对其定理不相干的进一步证实——而非反驳。（作为概念发展的催化剂，证实永远不能跟反例甚至“例外”相比。）柯西漫不经心地用了“凸”字的缘由正在于此：意识到凹多面体可能有反例是一个失败，而消除这些反例并非有意识的努力。就在这同一段话里，他论证了欧拉定理是“对于平的多边形网状结构有 V－E＋F＝1”这条引理的“直接推论”，并说“就 V－E＋F＝1 的有效性而言，各多边形是在同一平面上还是在不同平面上，这是无关紧要的，因为定理只涉及多边形数及其构成成分数”（第 81 页）。这个论证，在柯西狭隘的概念框架内完全正确，而在更宽的概念框架内却不正确，因其间“多面体”亦可指其他的，譬如种种画框。19 世纪前半期，这个论据屡有重复（例如奥利维尔 Olivier［1826］，第 230 页，或格龙奈特［1827］，第 367 页，或 R • 巴策尔［1860—1862］，第 2 卷，第 207 页）。J • C •贝克尔对其提出过批评（［1869a］，第 68 页）。

经常是这样，只要概念拉伸驳倒了一个命题，被驳倒的命题似乎就立刻成了低级错误，而就简直无法想象伟大的数学家会犯这种错。概念拉伸式反驳的这个重要特征，解释了谦恭的历史学家们为什么给他们自己造出一大堆问题的混乱，因为他们不理解概念在发展。为了拯救柯西，谦恭的历史学家们声称他“绝不可能遗漏”非简单多面体，所以他“绝对地”（！）将定理限制到凸多面体的范围。但拯救之后，他们又不得不解释何以柯西的边界线窄得“徒然无谓”。何以他没有理会非凸欧拉多面体呢？施坦尼茨的解释是这样：欧拉公式的正确表述是要采用表面连通性的术语的。既然柯西时代尚未“清楚掌握”这个概念，那么“最简单的出路”就是假定凸性（第 20 页）。就这样，施坦尼茨把柯西从来没犯的一个过错给辩解掉了。

其他历史学家以另一种方式来拯救柯西。他们说，到达正确的概念框架（即他们知道的概念框架）的那一刻之前，只有一个“黑暗时代”，“即使不是没有，也是几乎没有可靠的”结果。多面体理论的这一刻，据勒贝格说（［1923］，第 59—60 页）是约当的证明［1866a］，而据贝尔（Bell）说（［1945］，第 460 页）是庞加莱的证明［1895］。

〔146〕见前文，第 58 页。

〔147〕参见第 32 页脚注①。

〔148〕达布在其［1874a］里差不多有了这个想法。后来庞加莱把它清楚地表述了出来：“……数学是以同名命名不同事物的艺术……如果语言选得合适，我们会惊奇地发现，给特定对象

物体作的一切证明可立即用于许多新的对象物体；一切都不用改，甚至词语也不用改，因为名称已变成一样的了。”（[1908]，第 375 页）弗雷歇称此做法为“极其有用的概括原则”，并将它表述如下：“在证明有关某数学对象的某命题时，当证明使用的该对象的一组性质未确定该对象，这个命题便可扩展来应用于更一般的对象。”（[1928]，第 18 页）他指出，这样的概括不是平常的，“也许要花很大的力气”（同上）。

〔149〕柯西并未注意到这一点。他的证明与本书教师所给的证明在一个重要方面是不同的：柯西在其［1813a］和［1813b］里并未把多面体想象成由橡胶制成。他的证明思想的新意之处在于把多面体想象为一个面，而不再像欧几里得、欧拉、勒让德一样想象成一个立体。但他仍把它想象成一个立体的面。当他移去一面，把剩下的空间多边形网状结构映射为平面多边形网状结构时，他并没有把他的映射想象成拉伸，也许要把面和棱弄弯。最先察觉到柯西证明可以施于带弯面的多面体上的数学家是克赖莱（[1826—1827]，第 671—672 页），但他仍然小心翼翼地跟着直棱走。然而，对于凯莱来说，似乎“第一眼”就能识破，“就算允许棱是曲线，这一理论也不会有本质的改变”（[1861]，第 425 页）。同样独立地觉察到的，有德国的李斯丁（[1861]，第 99 页），法国的约当（[1866a]，第 39 页）。

〔150〕这种概念形成论是把概念形成嫁给证明与反驳。波利亚则是把它嫁给了观察：“当物理学家开始谈‘电’，或者医生们开始谈‘传染病’时，这些术语是含糊的、晦涩的、混乱的。科学家今天所用的术语，如‘电荷’、‘电流’、‘真菌传染’、‘病毒传染’，就较为清晰、较为确切，不可同日而语了。不过，两套术语之间，及一些重大发现之间，都经过了大量的观察、多少精巧的实验啊。归纳改变了术语，澄清了概念。整个过程的这一方面，对概念的归纳澄清，我们也能在数学中的示例说明之。”（[1954]，第 1 卷，第 55 页）但即便是这种错误的归纳主义概念形成论，也比把概念形成说成是自律的，把概念的“澄清”或“说明”说成任何科学讨论的预备阶段要更可取。

〔151〕见前文，第 68 页。

〔152〕霍布斯［1656]，对主教第 xxi 条答复的批驳。

〔153〕见前文，第 66 页脚注①。

〔154〕跟着从相当素朴的多面体分类到高度理论的分类的逐渐变化，亲身体验一下是有趣的。第一个不再仅仅容纳简单多面体的素朴分类，出自鲁易里：一个根据空腔、隧道和“内隐多边形”的数目作的分类（见第 84 页脚注①）。

（a）空腔。欧拉的第一个证明，顺便说说，还有鲁易里自己的证明（[1812—1813a]，第 174—177 页），都立足于对立体的分解，方法要么是把它的角一个个切掉，要么是从内部的一点或几点把它分解成棱锥。然而，柯西证明——鲁易里并不知道它——立足于对多面形曲面的分解。等到多面形曲面论最终取代多面立体论之后，空腔便让人厌倦了：一个“带空腔的多面体”变成了整个多面体类。于是，我们的老怪物排除定义 2（第 11 页）变成证明引生的理论定义了，“空腔”这个分类学概念从发展的主流中消失了。

（b）隧道。李斯丁已指出此一概念不尽如人意（见第 84 页脚注①）。它之被取代，并非如卡尔纳普派学者所期望的，是由于对“隧道”这个“含混”概念的任何“说明”，而是由于

试图证明和反驳鲁易里对带隧道的多面体的欧拉示性数提出的素朴猜想。在这个过程中，带n条隧道的多面体概念消失了，证明引生的“多连通性”（我们所称的“n球性”）取而代之。我们发现，某些文章还在沿用这个素朴术语来指称证明引生的新概念：霍珀把“隧道”数定义为使多面体成为连通的所需切割的数目（[1879]，第102页）。在恩斯特·施坦尼茨看来，隧道概念在理论上已如此饱和，以致他无法查明，鲁易里按隧道数作的素朴分类与证明引生的按多连通性作的分类有什么“本质”区别；所以，他以为李斯丁对鲁易里分类法的批评“非常不公正”（[1914—1931]，第22页）。

（c）“内隐多边形”。这个素朴概念也是不久即被环状面取代，随后又被多连通面取代（亦参见第84页脚注①），（是取代而非“说明”，因为“环状面”肯定不是对“内隐多边形”的说明）。然而，当多面曲面论一面被拓扑曲面论所取代，一面又被图论所取代时，多连通面如何影响多面体的欧拉示性数的问题也就失去其所有意义了。

可见，第一个素朴分类的3个关键概念当中，只有一个“留下来”，而即使这一个也难以识别了——广义欧拉公式暂时被简化为V－E＋F＝2－2n了。（关于进一步的发展，参见第94页脚注③。）

〔155〕只就素朴分类而言，唯名论者接近真理，因他们以为各种多面体的唯一共同点便是它们的名字。但是在几个世纪的证明与反驳之后，随着多面体理论的发展，理论分类取代了素朴分类，天平就倾向于实在论者了。带有普遍性的问题应当基于这一种事实重新考虑：随着知识的发展，语言亦在变化。

〔156〕菲利克斯（Félix）[1957]，第10页。按照逻辑实证主义者的观点，哲学的专一任务便是构造“形式化”语言，来表达科学的人工凝固状态（见我们前面所引用的卡尔纳普的话，第1页）。但是，在科学的快速生长抛弃了旧的“语言系统”之前，这样的研究是几乎不可能进行的。科学教我们不要遵奉任何给定的概念—语言框架，以免它变成概念囚笼——对这个过程，语言分析学家有一种至少想延缓它的既定兴趣，以说明他们那套语言疗法的正当性，即是说，想显示出他们对科学有至关重要的反馈和价值，以及他们并没有正在堕落为“相当干瘪的委琐老顽固”（爱因斯坦 Einstein [1953]）。波普尔曾对逻辑实证主义提出过与此相似的批评：例如，见其[1959]，第128页，脚注*③。

〔157〕波利亚区分“简单的”和“苛刻的”检验。“苛刻的”检验也许会给出“证明的初步线索”（[1954]，第1卷，第34—40页）。

〔158〕“一般的情况可以在逻辑上等价于特殊情况，这在数学里简直是司空见惯的事情，但在初学者看来，或者在自命高深的哲学家看来，却仍然是令人惊讶的”（波利亚[1954]，第1卷，第17页），这话在非形式逻辑里一点不错。亦参见庞加莱[1902]，第31—33页。

〔159〕凯莱[1961]和李斯丁[1861]严肃地对待多面体理论基本概念的拉伸。凯莱把棱定义为“从一顶点到它自身或任何其他顶点的路径”，但又允许棱退化成无顶点的闭曲线，他称为“围线”（第426页）。李斯丁有一个术语“线”（第104页）指各种棱，不论其顶点是两个、一个还是没有。他们两人都知道，他们慷慨大方的概念框架里接纳的“畸形物”，需要全新的理论才可解释——凯莱首创了“闭图形划分理论”，现代拓扑学伟大先驱之一的李斯丁发明了“空间复形普查”。

〔160〕见前文，第 27—31 页与第 36—38 页。

〔161〕不少数学家不能区别平常与不平常。不但缺乏寻觅有效信息的感觉，而且还幻想能构造一个非常完备的公式将所有可想到的情况都包括在内，这就特别狼狈（参见第 84 页脚注②）。这样的数学家可以为一个公式的“最终”概括而努力多年，末了也就不过作了几处平常的修改来做推广。优秀的数学家 J·C·贝克尔就提供了一个逗人的例子：他努力多年之后，提出了 V－E＋F＝2－2n＋q 这个公式，此处 n 是把多面体表面分成满足 V－E＋F＝1 的单连通面所需的切割数，q 是把所有面化为单连通面所要添上的对角线数（［1869a］，第 72 页）。他很为其成就自豪，声称它发出“全新的光彩”，甚至“终结了”“像笛卡儿、欧拉、柯西、日果内、勒让德、格龙奈特、冯·施陶特（von Staudt）这类人物都热心研究过的课题”（第 65 页）。可是，他的阅读书目里漏了 3 个名字：鲁易里、约当、李斯丁。当他被告知了鲁易里的情况后，他加上了一条沮丧的注释，承认鲁易里 50 多年前就知道这一切了。至于约当，他对环状面是没什么兴趣的，但碰巧对带边界的开多面体感兴趣，所以，他的公式里除了 n，还有边界数 m（［1866b］，第 86 页）。于是，贝克尔——在一篇新文章［1869b］里——就把鲁易里和约当的公式综合成 V－E＋F＝2－2n＋q＋m（第 343 页）。但贝克尔在困窘中太过草率，未能消化李斯丁的长文。所以，他在［1869b］中沮丧地得出结论：“李斯丁的概括范围还更广。”（顺便提一下，他后来又试图把他的公式也推广到星状多面体［1874］；参见前文，第 29 页脚注①。）

〔162〕有人也许持俗人之见，以为有一条反驳收益递减律。Gamma 自己确无此念。我们现在将不讨论单侧多面体（麦比乌斯［1865］）或 n 维多面体（施勒夫里［1852］）。这些例子会证实 Gamma 的期待，就是完全出乎意料的概念拉伸的反驳总是可以给整个理论一种新的——可能是革命性的——推动。

〔163〕波利亚指出，浅薄而廉价的概括“在今天比过去更时髦了。一点小想法，就拿一个大术语来稀释。就连这点小想法，作者通常也宁愿从别人那里拿过来，忍住不补充任何原创性的观察，避免解决任何问题，除了他自己的术语困难产生出了问题。这很容易举出例子，但我不想与人有忤”（［1954］，第 1 卷，第 30 页）。当代另一个最伟大的数学家约翰·冯·诺伊曼（John von Neumann）也警告大家提防这种“退化的危险”，但是他认为，“只要这门学科处在有超常素质有品位的人的影响下”，情况就不至于太坏（［1947］，第 196 页）。不过，人们想知道的是，若是在我们这个“要么发表，要么消失”的时代，“有超常素质的高品位者的影响”是否就足以拯救数学了。

〔164〕见前文，第 53 页。

〔165〕同上。

〔166〕实则 Alpha 不曾公开使用过这个波普尔派术语；见前文，第 17—18 页。

〔167〕见前文，§4（b）。

〔168〕见前文，§5。

〔169〕见前文，第 41—45 页。

〔170〕*编者按：Kappa 声称含混性不可避免是对的（某些术语一定要是基本的）。但他却误认为这意味着总是可以通过“概念拉伸”来制造反例。按定义，一个有效的证明就是无论如何解释其描述性术语，亦永远造不出反例——即证明的有效性并不依赖于描述性术语的意义，故而可以随意地拉伸它们。此是由拉卡托斯本人指出的，见下文，第 110 页，又见（更有条理的）第 2 章，第 134 页。

〔171〕参见菲利克斯［1957］，第 9 页。

〔172〕Gamma 要求给“反例”下个如水晶般清澈的定义，这不啻要求元语言中有如水晶般清澈的无伸缩性概念作为理性讨论的条件。

〔173〕阿诺德（Arnauld）和尼科勒（Nicole）［1724］，第 xx—xxi 页。

〔174〕这是对波尔察诺（Bolzano）的逻辑真理定义稍加改写的版本（［1837］，§147）。何以波尔察诺在 19 世纪 30 年代提出了他的定义，是个费解的问题，尤其是他的工作竟预期了模型概念，而后者是 19 世纪数理哲学的最伟大创举之一，这就更费解了。

〔175〕19 世纪的数学批评拉伸了越来越多的概念，把越来越多的语词的意义重担转移到了命题的逻辑形式和少数（当时还）未拉伸的语词之意义上。20 世纪 30 年代，这个过程似乎慢了下来，不可拉伸语词（“逻辑”语词）与可拉伸语词（“描述”语词）之间的分界线似乎变得稳定了。一份只包含少量逻辑语词的清单达成了广泛的认同，于是便可能为逻辑真理下一个一般的定义；逻辑真理不再是“相对于”专门的构成成分的清单了。（参见塔斯基［1935］）然而，塔斯基为这种分界线感到迷惑，想弄清它是否最终不得不回到一个相对化的反例概念，从而回到一个相对化的逻辑真理概念（第 420 页）——像波尔察诺的一样，顺便提一句，塔斯基并不知道有这回事。这个方向上最有趣的结果是波普尔的［1947—1948］，由此可知，若不放弃理性讨论的某些基本原则，便不能放弃更进一步的逻辑常项。

〔176〕“以约定为退路”是巴特利（Bartley）的用语［1962］。他主要是从宗教知识的角度，研究是否可能为批判理性主义作合理辩护的问题——但是从数学知识的角度，问题模式几乎相同。

〔177〕见前文，第 41—45 页。Gamma 事实上却想从“所有”上移除一些意义的负担，使其不再只适用于非空的类。通过从“所有”的意义中移除“存在的意义输入”这种谨慎适度的拉伸，使空集从怪物转化为寻常的平庸集合，这是一个重要事件——不仅关涉到对亚里士多德逻辑进行布尔逻辑的集合论的重新解释，亦关涉到数学讨论中空洞的满足这一概念的出现。

〔178〕批评、反例、推论、真理、证明的概念是不可分开的；它们起变化时，最先变的是批评概念，然后其他概念随之而变。

〔179〕参见拉卡托斯［1962］。

〔180〕波普尔［1963b］，第968页。

第2章

编者引言

我们在前面提到过关于笛卡儿-欧拉猜想的庞加莱证明〔1〕。拉卡托斯在他的博士论文里曾以讨论“欧几里得”数学方法的正反两方面的论证，详细地介绍了对这一证明的思考。其中，拉卡托斯把部分讨论内容合并编入第1章（例如，参见第49—57页），而其他部分则经过修改作为“无穷回归和数学基础”的某些内容了（拉卡托斯［1962］）。因此，我们在这里省略了这一介绍性的讨论。

Epsilon一直鼓吹欧几里得纲领——企图给数学提供以完美的语词来表达完全正确的公理。Epsilon的哲学受到了挑战，但是老师注意到，最明显并且直接地挑战Epsilon的方法就是让他提供满足欧几里得标准的笛卡儿-欧拉猜想的证明。Epsilon接受了挑战。

1．把猜想翻译成矢量代数“完全被认可的”术语。翻译的问题

EPSILON：我接受挑战。我将证明所有带有单连通面的单连通多面体都是欧拉多面体。

老师：是的，我过去曾在课上叙述过这一定理〔2〕。

EPSILON：正像我所指出的，为了证明真理，首先必须发现真理。眼下我根本不反对使用你们的多证多驳法作为发现真理的方法，但是，你们停止的地方正是我的起点。你们在哪儿停止改进，我就从哪儿开始证明〔3〕。

ALPHA：但是这一冗长的定理满是可以被拉伸的概念。我并不认为它难以被反驳。

EPSILON：你们将发现反驳它是不可能的。我将把每一个单项词语的意义准确地固定下来。

老师：继续下去。

EPSILON：首先，我将只使用尽可能是最清晰的概念。也许将来某一天我们可以扩展我们完

美的知识来涵盖光学照相机、纸张、剪刀、橡皮球和打气筒，但是现在还是让我们忘记这些事物吧。使用这些各种各样的工具肯定是不能够达至终极性的。我们以往的错误，依我看来，是基于这样的事实，就是我们使用了与多面体简单明了的性质背道而驰的方法。丰富的想象力赋予这些工具的是完全错误的使用方向。它引证的外在的、背道而驰的、偶然的成分并不适合于多面体的本质，所以就毫不奇怪的在某些多面体上失败了。为了得到完美的证明，就必须严格限制工具使用的范围〔4〕。这是因为丰富的想象使确定性很难获得。引理的真理性如果要依赖橡皮、镜头等等的性质，那就难以保证了。我们应该放弃剪刀、打气筒、相机这一类工具，因为“要理解一个问题，我们必须把它从所有多余的元素中抽象出来，并使其尽可能的简单”〔5〕。我来清除我的定理〔6〕和我的证明中的这些元素，以最简单最容易的东西〔7〕来限定它们：即顶点、棱和面。我将不定义这些术语，因为关于它们的意义不可能有分歧。我将使用完全被认可的“基本的”词语来定义哪怕是只有一点点最少的模糊的术语〔8〕。

现在很清楚，在任何的证明中，并没有什么专有引理是明显真的；它们只是一些猜想，正如“所有多面体都可以吹胀成球状物”等等这一类猜想一样。但是现在，“我们要求任何类型的猜想都不允许进入我们传达事物之真理的判断之中”〔9〕。我将把猜想分解为一些引理，这些引理不再是猜想而是“直觉”，也就是说，“一颗产生自唯一理性之光、纯粹而又专注之心灵的确定无疑的理解”〔10〕。这些“直觉”的例子有：所有多面体都有面；所有面都有棱；所有棱都有顶点。我将不再提出像多面体是否是立体或是曲面这样一类问题。这些都是含糊不清的观念，对于我们的目标无论如何都是多余的。对我来说，一个多面体是由 3 个集合组成：V 个顶点（我称呼它们，，…，）的集合，E 条棱（我称呼它们，，…，）的集合，F 个面（我称呼它们，，…，）的集合。为了刻画一个多面体，我们也需要某种表格告知我们哪些顶点属于哪些棱，哪些棱属于哪些面。我把这些表格叫做“关联矩阵”（incidence matrices）。

GAMMA：我被你的多面体的定义搞得有点迷惑了。首先，因为无论如何你费心地去定义多面体的概念了，我得出的结论你并不认为它是完全被认可的。但是另一方面，你又是从哪里得到你的定义的呢？你使用面、棱以及顶点这些“完全被认可的”概念来定义尚不清楚的多面体的概念。但是你的定义——也即多面体是顶点的集合，加上棱的集合，加上面的集合，再加上关联矩阵——显然没有能抓住多面体的直觉的观念。例如，定义中暗示任何多边形都是多面体，比方照你说的，一个多边形与一条处于其外部不受约束的棱一起也组成了多面体。现在你必须在两条路线中做出选择。你可以说“数学家并不关心他的专业术语流行的意义……数学中的定义创造数学中的意义”〔11〕。在这种情形下，给多面体下定义就是完全放弃旧的观念而以新概念代替之。但是这样，你的“多面体”与任意真正的多面体之间的所有相似性都完全是偶然的了，那么，通过研究你的模拟多面体，你将得不到任何关于真正的多面体的确定性的知识。另一条路线是坚持定义是一种澄清的思想，它使本质特征显现出来，它是一种翻译或者说是一种把术语转变为更清晰的语言的保持意义不变的转换。在这种情形下，你的定义是猜想，它们可能是正确的，也可能是错误的。你怎样才能拥有一个由模糊的语词到精确的语词的绝对正确的翻译呢？

EPSILON：我承认你的批评让我大吃一惊。我曾以为你也许会怀疑我的公理的绝对真理性，你也许会问这样的先天综合判断是如何可能的，于是我准备了一些应对的论证，但是，我没有料想到你攻击我下定义的路线。不过，我设想了这样的回应：我得到我的定义，正如我得到我的公理一样，是通过直觉的。它们的地位的确是等同的：你可以把我的定义当作是附加公理〔12〕，或者你可以把我的公理当作是隐含定义〔13〕。它们给出了被讨论的术语的本质。

老师：哲学说得够多的了！让我们来看看证明吧。我不喜欢你的哲学，但是我仍然可能喜欢你的证明。

EPSILON：好吧。我将首先把要证明的定理翻译为我的完全简单并且清晰的概念结构。我的专门的不加定义的术语将是：顶点、棱、面和多面体。有时我谈及它们是作为零、一、二以及三维的多胞形（polytopes）〔14〕，或者简单地说，就是 0-胞形、1-胞形、2-胞形和 3-胞形。

ALPHA：但是，就在 10 分钟之前你还用顶点、棱和面这些术语来定义多面体呢！

EPSILON：那时，我错了。那个“定义”是一个愚蠢的期望。我糊里糊涂地往前冲，结果跳进了妄断之中。真正的直觉、正确的解释是慢慢成熟的，净化一个人猜想的心灵是要花时间的〔15〕。

BETA：你刚才提到的你的公理，比如：面都有棱，或者每个面都有属于它的棱，“属于”在这里是不是又一个原始术语？

EPSILON：非也。我只记录针对正在被讨论的理论的专门术语，当前情形就是指多面体理论，而不是逻辑的、集合论的、算术的等基础理论的术语，我假定这些术语都是完全熟悉的。现在让我继续讨论“单连通”这一术语，它还的确不是绝对清晰的。我将首先定义多面体的单连通性，接下来定义面的单连通性。首先，拿多面体的单连通性来说，它实际上是下面一个冗长的表述的缩写：一个多面体被称作是单连通的，（1）如果所有封闭无回路的棱的系统有一个内部和外部，并且（2）如果只有一个封闭无回路的面的系统——它把多面体的内部和外部分隔开。目前，这一表述充满了相当含糊的词语，比如“封闭的”、“内部”、“外部”等等。但是我将使用完全被认可的术语来定义它们。

GAMMA：你已经驱赶走一些机械的术语——比如吹胀、切割——作为不可靠的；现在，你又抛弃了几何学的术语——比如封闭性。我认为你清除的热情过了头。“封闭的棱的系统”是完全清晰的概念，它不需要定义。

EPLISON：不，你错了。你愿意把星状多边形称作棱的封闭系统吗？也许你会的，因为它没有松散自由的端点。但是，它并没有“围住”任何界限明确的区域，而某些人也许是以“封闭的棱的系统”来指谓这样的棱的系统。所以，你必须下定决心要么这样要么那样，并且说出你是以什么方式来决定的。

GAMMA：一个星状多边形或许不是有界的，但是它显然是封闭的。

EPSILON：我认为它是封闭的并且也是有界的。分歧已经揭示出来了，但我将提供进一步的证据。我想知道你是否会说七面体是面的封闭系统并且是有界的？

GAMMA：我从未听说你的七面体。

EPSILON：那是相当有趣的一种多面体，因为它是单侧的。它没有围出任何几何立体来，它也没有把空间分隔成两个部分，即分隔成一个内部的和一个外部的。例如，Alpha 是被他的

“清晰的”几何学直觉所指导，他早先说过，一个封闭的面的系统在划定界限“如果它是多面体内部与多面体外部之间的边界”。我想知道，它是否会说七面体的表面并没有划界？或者将去认知七面体而改变他的“划界”系统的概念？既然这样，我将万分谦卑地向你请教：完全被认可的概念可以被经验改变吗？它们不能。因此“封闭的”、“有界的”概念并不是完全被认可的。所以，我们打算给它们下定义。

DELTA：画出那个七面体来。我想知道它是什么样子？

EPSILON：好吧。我首先从一个平常熟悉的八面体开始（见图 25）。现在，我在被对角线连接的平面上增加 3 个正方形，例如 ABCD（图 26）。

DELTA：我料想一个正当的多面体只会有两个面在棱上相交。这儿却有 3 个面。

图 25

图 26

图 27

EPSILON：稍安毋躁。为了照你的要求作，我现在就移走 4 个三角形：从图形的前一半，我移走左侧上边的三角形和右侧下面的三角形。从图形的后部，我移走左侧下面的三角形和右侧上面的三角形。那么，只有 4 个三角形在图示中以阴影标注保留下来（图 27）〔16〕。于是我们得到了由 4 个三角形和 3 个正方形组成的图形。这就是七面体〔17〕。它的棱和顶点是八面体原先的棱和顶点。八面体的对角线不是我们的图形的棱，而是与其自身相交的线。我并不太重视几何直觉，我对我的多面体碰巧是如此不合适地嵌入三维空间的事实也不大感兴趣。这一事实并不由我的七面体的关联矩阵来呈现。（顺便一说，七面体能够精妙地嵌入五维空间而不自交。）〔18〕

那么现在七面体的表面划定界限了吗？如果你定义一个表面是在“划定界限”，当且仅当它在分隔开我们正在讨论的多面体的内部和外部这一意义上是多面体的边界，那么答案就是“没有划定界限”。另一方面，如果你定义一个表面是在“划定界限”，当且仅当在它包含多面体所有的面的意义上它是多面体的边界，那么答案就是“划定界限了”。你看，你不得不定义“划定界限”，你不得不定义“边界”。这些概念在人们着手考察多面体形式的丰富性之前，看起来是有一点熟悉，但是，经过如此这般的考察，原先的粗糙的概念分裂了并且显现出精细的结构，于是，你必须小心地定义你的概念，使其在你所使用这些概念的意义上都是清晰的。

KAPPA：那么，为了避免更大程度的分裂，你必须否决进一步的考察。

老师：Episilon，你不要听 Kappa 的。一般来说，反驳、前后矛盾、批评都是非常重要的，但是，前提是它们导致了改进。单纯的反驳并不是成功。单纯的批评，即使是正确的，如果拥有了权威性，那样的话，贝克莱（Berkeley）就已经阻止了数学的发展，狄拉克也找不到他的论文的编辑了。

EPSILON：不要担心，我立刻就把 Kappa 的无意义的诘难抛弃了。我现在打算继续定义我的用语，把所有的用语都翻译为我那为数很少的专门的原始术语——多胞形（polytope）和关联矩阵。我将由定义“界限”开始。k-胞形的界限就是依照关联矩阵属于它的（k—1）胞形之和。我将 k-胞形之和称为 k-链。例如，多面体的“表面”（或者它的任一部分）本质上是 2-链。我定义 k-链的界限为属于 k-链的（k—1）胞形之和，但是我取的是模数（modulo）2 的和来代替普通的和。这意味如下算式有效：

0＋0＝0，1＋0＝1，0＋1＝1，1＋1＝0。

你们必须明白，这就是 k-链的边界的正确的定义。

BETA：等一下。我无法轻易地领会你的 k-维的定义（k-dimensionel definitions）。让我们清楚地思考（think loudly about）一个例子〔19〕。例如，一个面的边界，依照你的定义，是属于面的棱的集合。现在，当我连接两个面，公共的边界将不再包括它们两者都包括的棱。所以，当我把棱加在一起时，就会略去那些成对地出现的棱。例如，我取两个三角形（图 28）。第一个的边界是 c＋d＋e，第二个的边界是 a＋b＋e，它们连接之后的边界是 a＋b＋e＋c＋d＋e＝a＋b＋c＋d。我现在明白了为什么你在你的定义中引入模数 2 的和。请继续下去吧。

图 28

EPSILON：在我使用完全被认可的语词定义了“边界”之后，我现在来定义“封闭性”。到目前为止，你或者是不得不依靠含糊的领悟力，或者不得不以分隔开来的情形来定义“封闭性”：先是棱的系统的封闭性，然后是面的系统的封闭性。现在，我来向你们展示，有一个普遍的封闭性概念，适用于任何 k-链，并独立于 k。我将把 k-链称作闭 k-链，或者，简单地说，称作 k-回路（k-circuit），当且仅当它的边界是零。

BETA：请稍等。让我想想：直觉上，普通的多面体是封闭的，并且因为其边界是零，按照你的定义事实上也是封闭的，同样因为每一个顶点在边界中出现两次，那么，在你的模数 2 代数中也得零。一个普通的简单的多面体是封闭的，再有其边界是零，因为在其边界中每条棱出现两次。

KAPPA［旁白］：Beta 的确必须努力去验证 Epsilon 的“明显和直接的领悟”！

EPSILON：下一个要阐明的术语是“划界”。如果一个 k-回路是一条（k＋1）-链的边界，我就说 k-回路划界。例如，球状多面体的“赤道（equator）”划界，但是超环面多面体的“赤道”并不划界。这后一种情况中有另一种观点，即赤道给“整个”多面体划界，现在被排除

了，因为整个多面体的边界为空。如今，例如七面体的划界问题，是绝对清晰的了。

BETA：你有点儿快了，但是你好像是对的。

GAMMA：你能证明任何划界之 k-链都是回路吗？你只为回路定义了“划界”——你原本能够为链下一个这样的普遍的定义。我猜想你只给出限制性的定义的原因是这隐藏的定理。

EPSILON：对。我能够证明它。

GAMMA：另有一个质疑。一些链是回路，一些链是回路划界。这看起来是合适的。但是，我认为一个正宗的 k-链的边界应该是封闭的。例如，我无法接受一个多面体是一个立方体却没有顶部；并且我也无法接受一个多边形是正方形却没有了一条边。你能证明任何 k-链的边界都是封闭的吗？

EPSILON：我能够证明任何 k-链的边界的界都是零吗？

GAMMA：就是嘛。

EPSILON：是的，我不能证明。但这毫无疑问是真的。它是一条公理，并不需要证明。

老师：继续下去，继续下去！我猜想现在你可以把我们的定理翻译成你那完全被认可的术语了。

EPSILON：是的。简要地说，翻译后的定理是：“所有多面体，所有其回路划界的多面体，都是欧拉多面体。”专门的术语“多面体”是未下定义的；我已经用完全被认可的术语定义了“回路”和“划界”。

GAMMA：你已经忘记了面的单连通性的问题了。你仅仅翻译了多面体的单连通性。

EPSILON：你错了。我要求所有的回路都应该划界，甚至是 0-回路。我已经把“多面体的单连通性”翻译为“所有 1-回路和 2-回路都划界”；并且把“面的单连通性”翻译为“所有 0-回路划定界限”。

GAMMA：我不理解你的意思。什么是 0-回路？

EPSILON：0-链是任意顶点之和。0-回路是任意其边界是零的顶点之和。

GAMMA：但是什么是顶点的边界？并没有负一维的多胞体。

EPSILON：当然有。或者，可以说，有一个：空集。

GAMMA：你疯了！

ALPHA：他也许没有疯。他是在引入一个约定。我不介意他采纳什么样的概念上的工具。让

我们看他的结果。

EPSILON：我没有使用约定，而且我的概念不是“工具”。空集是负一维多胞体。对我来说，它的存在是确定的，就是说，比你的狗的存在还要更加明显。

老师：不要柏拉图式的宣传！说明一下你的“划界的 0-回路”是怎样翻译为“单连通面”的。

EPSILON：如果你一旦认识到任意顶点的边界是一个空集，其余的就无关紧要了。按照我先前的定义，一个顶点的边界是空集，但是两个顶点的边界是零，依靠模数 2 代数可以得出这一点。3 个顶点边界又是空集，以此类推。所以，顶点是偶数的是回路，顶点是奇数的就不是回路。

GAMMA：所以，你要求 0-回路应该划界这一点，也就是要求任意两个顶点必须为 1-链划界，或者用日常语言来表述，就是要求任意两个顶点必须由某一棱的系统来连接。这当然就排除了环状面。这实际上就是我们过去常常称之为“分隔开的面的单连通性”的要求。

EPSILON：你几乎无法否认我的语言，它是反映了多面体本质的自然语言，它第一次显示了以前互不关联的、孤立的、特定的（ad hoc）判据的根深蒂固的本质上的一致性。

GAMMA［旁白］：我几乎不能否认我的迷惑不解！通向这条“自然的简单性”之路上难道应该杂乱地堆满了如此的复杂性，这真是相当的奇怪。

ALPHA：让我来检查一下我的理解。你说所有的顶点都有相同的边界：空集，是吗？

EPSILON：对。

ALPHA：于是，我假设，对于你来说“所有顶点都有空集”是一个公理；正如“所有面都有棱”或者“所有棱都有顶点”。

EPSILON：是这样的。

ALPHA：但是这些公理不可能有同样的地位！前面的公理是一个约定，后面两个公理则必然为真。

老师：定理已经翻译了。我想看证明。

EPSILON：马上就证明，先生。先让我稍微修改一下定理为：“所有其中回路与划界的回路重合的多面体都是欧拉多面体”。

老师：那就证明这一点。

EPSILON：马上就证明，先生。我将重新叙述这一定理〔20〕。

BETA：但是，为什么？你已经把所有有一点儿含糊的术语翻译为完全被认可的术语了！

EPSILON：这是真的。但是，我打算进行的翻译是非常不同的。我将把我的一套原始术语翻译为另一套还要更加基本的原始术语。

BETA：这样，你的一些完全被认可的术语要比其他一些更加被认可。

老师：Beta，不要不断地质问 Epsilon 了！把你的注意力放在他正在做的而不是他怎样解释他正在做的上面。继续，Epsilon。

EPSILON：如果我们更加仔细地注意我的定理的最后的表述，我们将看到，它正是关于确定的矢量空间的维数是由关联矩阵所决定的定理。

BETA：什么？

EPSILON：看看我们的链的概念，比如 1-链，它就是：

这里是 E 条棱，而 x1，x2，…，xE 是 0 或 1。

容易看出，1-链形成在模 2 剩余类域上的 E 维矢量空间。一般来说，k-链形成模 2 剩余类域上的 Nk 维矢量空间（这里 Nk 代表 k-胞形的数）。回路形成链空间的子空间（subspaces），划界的回路又形成回路空间的子空间。

所以，事实上，我的定理是“如果回路空间和划界回路空间合，0-链空间的维数减去 1-链空间的维数再加上 2-链空间等于 2”。这是欧拉定理的本质。

老师：我喜欢这种真正地显示了你的简单工具特性的重新表述——真如你所承诺的。你如今毫无疑问将要通过矢量代数的简单方法来证明欧拉定理了。让我们看看你的证明。

2．猜想的另一个证明

EPSILON：我把我的定理分解为两个部分。第一部分规定，回路空间和划界回路空间重合，当且仅当它们的维数一致。第二部分规定，如果回路空间和划界回路空间有相同的维数，则 0-链空间的维数减去 1-链空间的维数再加上 2-链空间的维数等于 2。

老师：第一部分是矢量代数一般的真定理。请证明第二部分。

EPSILON：没有比这再容易的了。我只需要回到有关的概念的定义就行了〔21〕。首先，让我们写出关联矩阵。例如，让我们把四面体 ABCD 的关联矩阵的棱设为 AD、BD、CD、BC、AC、AB，面设为 BCD、ACD、ABD、ABC。矩阵值或 0，依照属于或者不属于而定。所以我们的矩阵如下：

现在，在这些矩阵的帮助下，回路空间和划界的回路空间能够被轻易地刻画了。我们已经看到 k-链是真正的矢量

现在我们把胞形的边界定义为

（这个——像下面所有公式一样——只是用符号对我们旧的定义重写。）

k-链的边界是

那么，一个 k-链是一个 k-回路，当且仅当

（1）对于每一个 i，有

一个 k-链是划界的 k-回路，当且仅当它是某（k＋1）-链的边界，即，当且仅当存在系数γm（m＝1，…，Nk＋1)，使

（2）

那么，显然回路空间和划界的回路空间是等同的，当且仅当它们的维数是等同的，即，当且仅当 Nk－1 个齐次线性方程（1）的独立解数等于非齐次线性方程组（2）的独立解数。根据已知的线性代数的定理，第一个数是 Nk－ρk，这里ρk 是的秩；第二个数是ρk＋1。

所以，我只需要证明，如果 Nk－ρk＝ρk＋1，那么 V－E＋F＝2。

LAMBDA：或者，“如果 Nk＝ρk＋ρk＋1，那么，N0－N1＋N2＝2”。Nk 是某些矢量空间的维数，ρk 是某些矩阵的秩。这就不再是关于多面体的，而是关于某多维矢量空间的集的定理了。

EPSILON：我知道你刚刚睡醒。当你睡着的时候，我分析了我们关于多面体的一些概念，并且表明它们实际上都是矢量代数概念。我把属于欧拉现象里原来的观念都翻译为矢量代数，以此来呈现它们的本质。当下我无疑是在证明矢量代数的一个定理，它是以完全被认可的术

语表述的清晰明白的理论，拥有简洁且毋庸置疑的公理，以及简洁且毋庸置疑的证明。比如，看看我们过去多次讨论的定理的新的普通的证明：如果 Nk＝ρk＋ρk＋1，那么，N0－N1＋N2＝ρ0＋ρ1－ρ1－ρ2＋ρ2＋ρ3＝ρ0＋ρ3＝1＋1＝2。现在谁还敢怀疑这一定理的确定性？如此，我就以毋庸置疑的确定性证明了欧拉的有争议的定理〔22〕。

ALPHA：但是，看看这儿，Epsilon，如果我们已经接受了一个与之抗衡的约定顶点没有边界，以四面体的情况为例，矩阵η0 将是

其秩ρ0 将会是 0，并且因此 V－E＋F＝ρ0＋ρ3＝1。你不认为你的“证明”太多依靠约定了吗？你选择你的约定难道不就是为了挽救定理吗？

EPSILON：我的关于ρ0 的公理不是一个“约定”。在我的语言中，ρ0＝1 有非常真实的意义，它指每一对顶点都划界，也就是棱的网状结构是连通的（环形面因此被排除）。“约定”这一表述全然是误导。对于带有单连通面的多面体，ρ0＝1 为真，ρ0＝0 为假。

ALPHA：哼。你好像是说ρ0＝1 和ρ0＝0 都描述了矢量空间中的某一结构。差别是，ρ0＝1 在带有单连通面的多面体中有真实的模型，而另一个却没有。

3．关于证明之终极性的一些疑问。翻译的程序以及实在论者的定义方法 VS.唯名论者的定义方法

老师：不管怎样，我们已经得到了新的证明。尽管这样，可它是最终的吗？

ALPHA：非也。看这个多面体（图 29）。它有两个环形面，前面的与后面的，它可以被吹胀成一个环面。它有 16 个顶点，24 条棱和 10 个面。于是有 V－E＋F＝16－24＋10＝2。它是欧拉式的，但是根本不是单连通的。

图 29

BETA：我不认为这是笛卡儿-欧拉现象的例子。这是鲁易里现象的例子；就是：对于一个有 k 条隧道和 m 个环形面的多面体，有 V－E＋F＝2－2k＋m〔23〕。对于任意像这种环形面的个数是隧道的两倍的多面体，都有 V－E＋F＝2，但是那并不意味着它是欧拉多面体。这种鲁易里现象可以立马解释我们为什么不能轻易地得到充分必要的条件——或者主定理——关于笛卡儿-欧拉猜想的，因为这些鲁易里的例子已经不合适地强行进入到欧拉式的例子之中〔24〕。

老师：但是 Epsilon 从没有许诺终极性，仅仅说比我们早前所达到的要更有深度。他现在已经履行了他的诺言，一下子给我们提供了既能解释普通多面体的欧拉特征又能解释星状多面体的欧拉特征的证明。

LAMBDA：这倒是真的。他翻译了这一要求，就是面都是单连通的——即在三角剖分过程中每一条新的对角线都产生一个新的面——以这种方式三角剖分的观念从中完全消失了。在这一新的翻译中，如果一个面以所有顶点回路划界，这个面就是单连通的——并且这一要求对欧拉式星状多面体也有效！同时，当我们在运用约当的多面体的单连通性直觉（即非星状的直觉）概念到星状多面体遇到的困难，在庞加莱的翻译中，这些困难消失了。星状多面体，正如普通多面体，是顶点、棱、面的集合加上关联矩阵；我们并不关心碰巧在我们的物质的、三维的、大致是欧几里得的空间中的多面体的实现问题。例如，小的星芒状十二面体不是欧拉式的：在其中描画出非划界的 1-回路并不太难。

BETA：我从另一方面也发现它的趣味。Epsilon 的证明同时更加严格、更加包容了。在这两者之间有必然的联系吗？

EPSILON：我不知道。但是，我们的老师只要求让我的证明更有深度，而我现在正要求得到绝对的确定性。

KAPPA：你的定理和先前的猜想一样易于被一些想象的概念拉伸所反驳。

EPSILON：你错了，Kappa，下面我来解释〔25〕。

ALPHA：在你解释之前，让我对你的证明先提第二个问题，或者更确切地说关于你对证明所要求的终极性和确定性的问题。多面体事实上是你的矢量代数结构的模型吗？你确信你把“多面体”翻译为矢量理论是一个正确的翻译吗？

EPSILON：我已经说了是正确的。如果某些事情让你吃惊，也不是怀疑它的理由。“我正在追随伟大的数学家，他们借助于一系列令人吃惊的定义，把数学从怀疑论者那里解救出来，并且提供了其命题的严格证明。”〔26〕

老师：我的确认为这种翻译的方法是 Epsilon 证明确定性与终极性问题的核心。我认为，我们应该称其为翻译程序（translation-procedure）。但是让我们看看，还有其他疑问吗？

GAMMA：还有一个。假如我接受了你的推论是毋庸置疑的。你确信你不能从你的前提同样毋庸置疑地推导出你的定理的否定吗？

EPSILON：我所有的前提都是真的。它们怎么可能不一致呢？

老师：我很欣赏你的怀疑。但是，我更欢迎一个反例而不是诸多的怀疑。

GAMMA：我想知道，我的圆柱难道没有驳倒这一新定理？

EPLISON：它当然没有驳倒。在圆柱体中，空集没有划界，于是有ρ0≠1。

GAMMA：我明白。你是对的。把这一论据放进你那非常熟悉、清晰、明确的术语中，立刻就说服了我。

EPSILON：我知道，你是在讥讽！你在前面就质疑过我的定义。那时我说过它们的确是毋庸置疑的真的公理，其借助于绝对无误的清晰、明确的直觉来表述我们所讨论的概念的本质。我一直在考虑这一问题，最终我认为必须放弃我那亚里士多德式的定义观。当我定义一个含糊的术语时，事实上，我是以一个新的来替换它，老的术语只不过作为我的新术语的缩写词罢了。

ALPHA：让我们来澄清这一点。你用“定义”来指谓什么：是指从左边到右边进行一次替换，还是从右边到左边进行一次缩写？

EPSILON：我是指缩写。我已经忘记了老的术语的含义。我径直地提出了我的术语的新的含义而抛弃了老的含糊的术语。我也径直地提出我的问题而抛弃了老的晦涩的问题。

ALPHA：你不禁成为一个极端主义者。但是请继续下去。

EPSILON：然而，我通过我的纲领中的这样一个变化的确收获一点：你的一个疑问因此而消除了。如果定义是缩写，它们就不可能是假的。

ALPHA：但是你也失去了更加重要的东西。你不得不把你的欧几里得纲领限制为以完全被认可的概念表达的那些理论了，并且当你想把有模糊的概念的理论拉进这一纲领的范围时，你就无法使用你的翻译的技巧做到这一点：正如你所说，你不是翻译，而是在提出新的含义。但是，即使你尝试翻译老的含义，一些原先含糊的概念的本质的方面也可能会在翻译中丧失。新的清晰的概念也许并不适合用来解决一些老的概念可以解决的问题〔27〕。如果你把你的翻译当作是不会错的，或者，如果你有意识地抛弃老的含义，这两种极端情况将会产生同样的结果：你也许会把原先的问题推入思想史被忽视的地域，事实上你并不想这样做〔28〕。所以，如果你冷静下来，你不得不认可定义总须有那么一点修改的实在论：它必须保留老的含义的一些相关的方面，它必须从左边到右边转移含义的一些相关要素〔29〕。

BETA：不过，即使 Epsilon 在定义中接受这种有一些修改的实在论，那么，对实在论者的方法的放弃将仍然是对其先前的欧几里得纲领的大撤退。我猜想，Epsilon 现在会说，存在着用完全被认可的术语和确实可靠的推论表述的欧几里得理论——比如算术、几何、逻辑、集合论，而如今，他通过把包含含糊的、晦涩的术语和不确定的推论的非欧理论——比如微积分和概率论——翻译成已定的欧几里得理论来组成欧几里得纲领，从而既为基础理论也为早先的非欧理论开辟了新的发展道路。

EPSILON：我将把这种“已定的欧几里得理论（already Euclidean）”或确定的理论称之为主导理论（a dominant theory）

GAMMA：我想知道这种退缩的纲领应用范围是什么？它肯定无法涵盖物理学。你永远不可能把波动力学翻译成几何学。Epsilon 想“依靠一系列的令人吃惊的定义把数学从怀疑者手

里解救出来”〔30〕，但是他所解救的至多是些碎屑。

BETA：我对这些翻译定义还有一个问题。它们在主导理论中看起来似乎只是一些缩写，因此“依照定义”它们是正确的。但是，如果我们把它们归之于非欧几里得范畴，那就是证伪的了〔31〕。

EPSILON：你说得对。

BETA：看一个人是怎样证伪这样的定义是一件有趣的事儿。

THETA：现在，我想把讨论转移到 Epsilon 的推导是否绝对可靠的问题上来。Epsilon，你还声称你的定理的确定性吗？

EPSILON：那当然。

THETA：所以你无法想象你的定理的一个反例了？

EPSILON：正如我告诉 Kappa 的那样，我的证明是确实可靠的。对于它没有任何反例。

THETA：你是不是想要把作为怪物的反例排除掉？

EPSILON：就连怪物也不能反驳它。

THATA：所以，你声称，不管我用什么来替代你的完全被认可的术语，定理依然是正确的了？

EPSILON：你可以用任何语词来替代完全被认可的矢量代数的专门术语。

THETA：我无法替换你的非专门的原始术语，诸如“所有”、“和”、“2”等等，是吗？

EPSILON：不。但是你可以用任何语词来替换我的专门的被完全认可的术语，诸如“顶点”、“棱”、“面”等等。由此，我认为我已阐明了反驳意味着什么。

THETA：不错。但是另一方面，事实上，你既可以被反驳，实际上也没有做到你自认为自己已经做到的。

EPSILON：我不明白你晦涩的暗示。

THETA：如果你真想弄懂，你就会明白。你的反例的观念的特征看起来是合理的。但是，如果反例是那样的话，那么你的“完全被认可的术语”的含义就是无关紧要的了。如果你的主张是正当的，这就恰好是你证明的价值所在。一个证明，如果是不可反驳的，就不会依赖于——正是按照不可反驳的证明的概念——专门的“完全被认可的术语”的含义。所以，你的证明的重任——如果你是正确的——全部要由非专门、基础的术语的含义来承担——例如在算术、集合论、逻辑中——而丝毫不是由你的专门术语的含义来承担。

我将把这样的证明叫做形式证明，因为它们根本不依赖专门术语的含义。形式性的程度的确是依赖非专门术语。这些术语完全被认可的特征——我称之为构成术语（formative terms）的特征——的确非常重要。通过限制它们的含义，我们说明哪些能够被接受为反例，哪些不能够。由此，我们就控制了反例的洪水泛滥。如果一个定理没有反例，我们就称呼这一定理为重言式：例如一个算术-集合论的重言式。

ALPHA：按照我们对准逻辑常项的选择，我们似乎能得到所有区域的重言式。但是我知道这里问题多多。首先：我们是怎样知道一个重言式就是重言式的？

KAPPA：除了可能的怀疑之外，你将永远也不理解。但是，如果你对主导理论产生了严重的怀疑，那就抛弃它，代之以另一个主导理论〔32〕。

* 编者按：这一部分对话在拉卡托斯的论文里就到此为止了。我们应该尝试说服拉卡托斯把对话沿着下面的路径继续下去：

THETA：但是从我们刚才所谈的来看，似乎可以知晓，如果我们可以在其主导理论是逻辑的系统中重新认识我们的证明，那么只要我们对我们的逻辑没有严重的怀疑，我们将能够保证我们的演绎推理的绝对可靠性，并且把所有的怀疑不是投到实际的证明上，而是投到引理上，投到定理的前提上。

EPSILON：我很高兴，至少 Theta 最终理解了。事实上，我的证明是可以在其主导理论是逻辑的系统中重新认识的。随着所有的引理并入为前提条件，条件陈述就能在这一系统中被证明，而且我们知道（相对于给定的一批构成的“逻辑的”术语），并没有任何能够以这种方式证明的陈述的反例存在。不管描述的术语怎样被重新解释，这一条件陈述将始终保持为真。

LAMBDA：怎样得出“我们知道”的呢？

EPSILON：我们并不确切知道——这是一条关于逻辑的非形式的定理。但是，除此以外，我们知道，当其在这样的系统中以任意所谓的证明出现时，我们可以使用一种保证在有限的步骤内得出答案的程序完全机械地检查它是否的确是一个证明。那么，在这样的系统中，你的“证明分析”就降低成为平凡的手段了。

ALPHA：但是，Epsilon，你会赞同“证明分析”在非形式数学中还维持其重要性的；而且，形式证明也总是非形式证明的翻译，关于翻译所提出的问题也还的确是真实的。

LAMBDA：但是无论如何，Epsilon，我们又是怎样知道证明的检查总是正确的呢？

EPSILON：实际上，Lambda，你难以遏止的对确定性的渴求正在变得令人厌烦了！我已经有多少回只好告诉你我们对确定性是一无所知的了？但是你对确定性的渴望正在使你提出一些非常无聊的问题——而你对有趣的问题却熟视无睹。

注　释

〔1〕见第 66 页和第 95 页。

〔2〕见前文，第 34 页。

〔3〕Epsilon 可能是欧几里得派中第一个重视证明程序的探试法的价值的。直到 17 世纪，欧几里得派才认可柏拉图的分析方法是探试法；但后来他们又用碰运气以及/或者天赋替代了它。

〔4〕在证明分析中，并没有对“工具”的限制。我们可以使用任何引理、任何概念。在任何发展着的、非形式化的理论中这是对的，解题本来就是利用任何可以利用的方法。在形式化的理论之中，工具则是完全依据理论的句法来规定的。在理想的情况下（有一个判定步骤）解题就是例行程序。

〔5〕这是笛卡儿的用语，在他的［1628］中，规则ⅩⅢ。

〔6〕我们应该不要忘记，证明分析是以定理结束，而欧几里得的证明却是从定理开始。在欧几里得的方法论中没有猜想，只有定理。

〔7〕笛卡儿［1628］，规则Ⅸ

〔8〕帕斯卡的定义的规则（［1659］，第 596—597 页）：“不要对完全被认可的特定的术语下定义。不允许对任何哪怕是有一点点模糊和歧义的术语不下定义。在对术语的定义中只使用完全被认可或是已经解释过的词汇。”

〔9〕笛卡儿［1628］，规则Ⅲ的注释。

〔10〕同上。

〔11〕波利亚［1945］，第 81—82 页。

〔12〕“定义是作为本质特征的不可证明的陈述”（亚里士多德，《后分析篇》，94a）。

〔13〕日果内［1818］。

〔14〕施勒夫里［1852］发现，这些术语可以归类在一个单一的一般抽象的术语之下。他称它们为“多系统（polyschemes）”。李斯丁［1861］称它们为“Curian”（译注：这是一个生

造的词语）。但是，正是施勒夫里把这一普遍性扩展到了三维以上。

〔15〕“作为平常的人类理性应用到与自然界有关的问题上而得出的结论，为区别起见，我把它们叫做对自然的预判（anticipations of nature）（它们往往是轻率的或未成熟的）。理性通过正确和系统的步骤从事实中得出的结论，我称其为对自然的解释（interpretation of nature）。”（培根（Bacon）［1620］，ⅩⅩⅥ）

〔16〕图 27 是根据希尔伯特和康佛森［1932］重新画的。

〔17〕这是由赖因哈特（C. Reinhardt）发现的（见其［1885］，第 114 页）。

〔18〕单侧性或者双侧性依赖于空间的维数，这最先是由 W・迪克（Dyck）注意到的。见其［1888］，第 474 页。

〔19〕*编者按：“清楚地思考”（Thinking loudly）曾是拉卡托斯英语技巧上的用语。

〔20〕“你能够重新叙述这一问题吗？你能够以不同的方式来重新叙述吗？”（波利亚［1945］，封里）。

〔21〕“在内心用定义替代要定义的事物。”（帕斯卡［1659］）“回到定义”（波利亚［1945］，封里以及第 84 页）。

〔22〕这一证明应归于庞加莱（见其［1899］）。

〔23〕见鲁易里［1812—1813a］。这一关联性在 1812 年至 1890 年间曾被多次重新发现。

〔24〕见前文，第 64 页以下。

〔25〕见第 134—136 页。

〔26〕这句话引自兰姆塞（Ramsey）［1931］，第 56 页。只改变了一个词，他是以“数理逻辑学家”代替“数学家”，但是，这仅仅是因为他不理解他所描述的程序不是数理逻辑的独特的特征，而是柯西以来“严格的”数学的特征，并且，如极限、连续性等等这些由柯西提出并由维尔斯特拉斯改进的著名定义也都归于这一行列。我注意到，罗素也曾引用过兰姆塞这句话（罗素［1959］，第 125 页）。

〔27〕一个经典的翻译不能满足（通常是隐含的）充分性判据的例子是 19 世纪曲面面积的定义，它是被 H・A・施瓦兹（H. A. Schwartz）的“反例”击倒的。

麻烦的是充分性判据可能随着新问题的出现而改变，这也许会引起概念的工具箱的变化。这种变化的一个范例是积分的概念的经历。这是现代数学教育的耻辱，学生们能够精确地引用柯西、黎曼、勒贝格等人的关于积分的不同的定义，却不知道发明这些定义是用来解决哪些问题的，或者它们是在解决哪些问题的过程中被发现的。随着充分性判据的变化，定义也常常以如此方式发展，就是符合所有判据的定义成为支配性的。积分定义却没有出现这种情况，

是因为其判据的非一致性——这也就是概念不得不分裂的原因。证明产生的定义甚至在依欧几里得纲领建立起来的平移定义中也起到决定性的作用。

〔28〕这一过程正是20世纪形式主义的特征。

〔29〕非常奇怪，这一平常的观点被像帕斯卡和波普尔这样的唯名论者错过。帕斯卡写道（在上述引文中）："……几何学家和所有那些按方法有序操作的人，只是为精简表达才给事物加上名称。"波普尔写道（[1945]，第2卷，第14页）："在现代科学中只有唯名论者的定义出现，那就是说，简略的符号或标签被引入是为了简略的表述。"让人好奇的是，唯名论者和实在论者怎么能够彼此无视对方论证中的合理内核。

〔30〕见前文，第130页。

〔31〕这一差别的方法论上的重要性还没有彻底弄明白。帕斯卡，这位缩写定义的伟大的鼓吹者、亚里士多德实在论定义理论的伟大的反对者，他并没有注意到抛弃实在论实际上就是抛弃大的适用范围的欧几里得纲领。在欧几里得纲领中，人们必须定义所有的术语，哪怕是"只有一点儿含糊"。如果这只是由为替换含糊的术语而任意选择的精确的术语所组成的，那么人们事实上放弃了原先的研究领域而转向其他了。但是帕斯卡的确不想这样。柯西和维尔斯特拉斯，当他们进行数学的算术化的时候，就是实在论者；罗素，当他进行数学逻辑化的时候，就是实在论者。所有这些人都认为他们的连续性、实数、整数等定义抓住了有关概念的本质。当罗素表述日常语言中的陈述的逻辑形式时，即把日常语言翻译为人工语言时，他认为——至少在其"蜜月期（[1959]，第73页）"——他是被确实可靠的直觉所引导。波普尔，在他合理地攻击实在论者的定义时，对于翻译定义的重要问题没有充分关注，我猜想，这可以说明为什么在我看来，其[1947]第273页中对逻辑形式的处理不能令人满意。依照波普尔所说（这里他是追随塔斯基），有效推论的定义仅仅与形式化的记号清单相关联。但是，一个直觉推论的有效性也依靠这一推论的从日常（或者算术的、几何的，等等）语言到逻辑语言的翻译：它依靠我们采纳的翻译方式。

〔32〕主导理论的这般改变意味着我们所有知识的重组。在古代，算术的悖论，实际上只是算术表面的矛盾，导致希腊人放弃算术作为主导理论而代之以几何学。他们的比例理论就是为把算术翻译为几何学的目的服务的。他们确信全部天文学以及全部物理学都可以翻译为几何学。

笛卡儿的伟大革新是以代数学替代几何学；也许是因为他认为在主导理论中分析其自身就应该导向真理。

现代数学发生的"严格性的革命"事实上是由重新确立算术作为主导理论来完成，这一主导理论的重新确立是通过从柯西到维尔斯特拉斯所持续进行的庞大的数学算术化的纲领来实现。实数理论——相当多的实干的数学家感觉它是人工的——却是至关重要的一步；这类似于希腊人的"人工的"比例理论。

接下来又轮到罗素，他使逻辑成为全部数学的主导理论。把元数学的历史解释为对主导理论的探求，也许可以为这一学科的历史投入新的光亮，人们或许能够表明，正是哥德尔（K. Gödel）关于算术是元数学天然的主导理论的"发现"直接导向目前的研究阶段，并且既在

算术又在元数学领域展现了新的前景。

另一个值得注意的欧几里得式的翻译的例子是把概率论嵌入测度论的现代时髦做法。

主导理论以及主导理论的改变一般在很大程度上也决定了科学的发展。理性力学作为物理学的主导理论，其产生和随后的衰落在现代科学史中扮演了核心的角色。生物学反抗被“翻译”为化学的斗争，心理学反抗被翻译为生理学的斗争，都是现今科学史引人关注的特征。翻译的进程是巨大的储存各种问题的蓄水池，也包含了历史的趋势，这些趋势所代表的宏大思想模式至少与黑格尔三段式（译注：指命题的正、反、合）有同等的重要性。这样的翻译通常加快了主导理论以及被吸收的理论的发展，但是后来，随着翻译的弱点日益显著，它将成为进一步发展的障碍。

附录 1

多证多驳法中的另一个案例研究

1．柯西为“连续性原理”所作的辩护

多证多驳法是数学发现中的一种非常普遍的探试模式。然而，这种方法似乎只不过在 19 世纪 40 年代才被发现，甚至在今天对于许多人来说它好像仍是荒谬的，并且的确没有被真正地理解。在这个附录中，我将尝试大致描绘出数学分析中证明分析的情节，并且勾勒出阻止对其理解、认可的根源。前面，我已经通过对笛卡儿-欧拉猜想的柯西证明的案例研究说明了多证多驳法，这里，我将首先重复对这一方法的概述。

有一种数学发现的——或者是非形式化的数学理论的发展的简单模式。这种模式由下面几个阶段组成〔1〕：

（1）原始猜想。

（2）证明（一个粗略的思想实验或者论证，把原始猜想分解成一些子猜想或者引理）。

（3）“全局的（global）”反例（针对原始猜想的反例）出现。

（4）证明之复查：发现了针对全局反例的是一个“局部”反例的“过错引理”。这一过错引理也许先前一直是“隐藏的”或者可能是被错误地混淆了。现在它被揭示出来，并且作为一个条件进入原始猜想。定理——经过改进的猜想——以新的证明产生的概念作为其最主要的新的特征取代原始猜想〔2〕。

这 4 个阶段组成了证明分析的本质内核。但是，还有一些进一步的标准阶段常常会出现：

（5）检查其他定理的一些证明来看看其中是否会有新发现的引理或者新的证明生成的概念产生：这一概念也许会被发现正处在不同证明的十字路口，从而显示出其基本的价值。

（6）检查先前接受的但是现在又被驳倒的猜想中的推论。

（7）反例转变为新的例子——新的探求的领域展开了。

我现在希望考虑另一个案例研究。这里的原始猜想就是，任一连续函数收敛系列的极限其自身是连续的。正是柯西，他给出了这一猜想的首次证明，这一猜想在整个 18 世纪都被想当然地当作是真的，因此被认为毋须任何证明。它被当作是“直到极限为止为真，在极限上就为真”这一“公理”的特殊情况〔3〕。我们在柯西的著名的［1821］（第 132 页）中发现了这一猜想及其证明。

假如这一“猜想”迄今为止一直被看作不证自明是真的，为什么柯西觉得有必要去证明它呢？难道是某些人批评了这一猜想？

下面我们将看到，情况不是这么简单。凭借事后的明见，我们现在可以看到柯西猜想的反例已经由傅里叶（Fourier）的工作提供了。傅里叶的《热传导研究报告》〔4〕实际上就包含一个例子，按照当时的观念，它是一个趋近于柯西非连续函数的连续函数的收敛级数，即：

不管怎样，傅里叶自己对这一级数的态度是相当清楚的（并且截然不同于现代的态度）：

（a）他声称，它处处收敛。

（b）他声称，它的极限函数是由分开的直线组成，其中每一条都平行于 x 轴，并且等于圆周［那就是π］。这些平行线交替地位于 x 轴的上方和下方，距离是π/4，并且由垂线连起来，垂线其本身也成为直线的一部分〔5〕。

傅里叶关于函数图中垂线的措词表露出了自己的看法。他认为这些极限函数（在某种意义上）是连续的。实际上，傅里叶的确把某一函数看作是连续的，只要它的图示能够用一枝不离开纸的铅笔画出来。由此，傅里叶不会认为他自己已经构造了柯西连续性公理的反例〔6〕。它只是按照柯西后来对连续性的刻画，极限函数在某些傅里叶级数中才被当作是非连续的，于是，级数其自身才会被看作是柯西猜想的反例。有了这一新的、违反直觉的连续性定义，傅里叶无辜的连续性的图画似乎变成了老的、长期建立起来的连续性原理的险恶的反例了。

柯西的定义的确是以“常识”可能受到冲击的方式，把通常的连续性概念翻译为数学语言了〔7〕。某种连续性暗示，如果我们把连续函数的图示旋转一点，它就变成非连续性的了，那这是什么样的连续性呢〔8〕？

所以，如果我们用柯西概念替换直觉的连续性概念，那时（并且仅仅在那时！）连续性公理好像就与傅里叶的结果相矛盾了。这看起来像是一个有力的、也许是决定性的反对柯西的新的定义（不仅是连续性的定义，而且还有其他像极限之类的定义）的证据。那么，柯西想表明他的确能够以其对连续性的新的解释来证明连续性公理，从而提供其定义满足这一最严格的充分性要求的证据，他这样做就毫不奇怪了。他成功地给出了证明——并且以为自己因此已经给了那个有才干的、但是却是混乱不清、不够严格和浅薄的傅里叶致命的一击，傅里叶曾经无意地挑战了他的定义。

当然，如果柯西的证明是正确的，那么傅里叶的例子，不管外表怎样，都不能成为真正的反例。表明这些例子不是真正的反例的一种方法，就是指出那些看似收敛于柯西的意义上的非连续函数根本不是收敛的！

这是一个貌似真实的猜测。傅里叶自己就怀疑他的级数在这些临界情况下的收敛性。他注意到收敛是缓慢的："收敛不够快以致不能得出一个轻易的近似值，但是它可以满足一个等式的真值。"〔9〕

凭着事后的认识，我们可以知道，柯西希望在这些临界情形中，傅里叶级数不收敛（并且因此并不表示函数），这一希望在某种程度上也可以由以下事实来证明其合理性。在极限函数是非连续的地方，级数趋向于，而不是简单地趋向于 f（x）。它趋向于 f（x），当且仅当。但是，在 1829 年之前，人们还不知道这一点，事实上，普遍的观点最初是支持傅里叶的，而不是柯西。傅里叶级数看起来是有效的，1826 年，在柯西的证明发表 5 年之后，阿贝尔在其［1826b］〔10〕的脚注中提到，柯西的定理有"例外"，这构成了一种相当令人感兴趣的双重胜利：傅里叶级数被接受了，但是，柯西的让人吃惊的连续性定义以及他使用这一定义证明的定理也被接受了。

正是基于这种双重的胜利，现在看起来，一定有我们正在考虑的那种连续性原理的特殊形式的例外情况存在，即使柯西已经毫无瑕疵地证明了它。

柯西一定得到了和阿贝尔一样的结论，因为就在同一年，他给出了傅里叶级数收敛的证明〔11〕，当然也没有放弃他自己所刻画的连续性的特征。然而，对于这一状况，他一定非常心神不安。《分析教程》的第二卷就根本没有出版。而且，更可疑的是，他没有再创作第一卷另外的版本，当教科书的需求压力已经很大的时候，他让其学生莫格诺（Moiguo）出版他的讲稿〔12〕。

假定傅里叶的例子现在被解释为反例，迷惑之处是明显的：一个已经被证明的定理怎么能是错误的，或者"受损伤例外"呢？我们已经讨论过了，人们是怎样在同一时期被欧拉定理的"例外"所迷惑的，尽管事实上它已经被证明了。

2．赛德尔的证明以及证明生成的一致收敛概念

每个人都觉得柯西-傅里叶事例并非只是一个无害的谜，而是整个新的“严格的”数学的一个致命的缺点。狄利克雷在其关于傅里叶级数的著名论文中〔13〕，当其全神贯注于表明连续函数的收敛级数是怎样代表非连续函数时，非常明显是知道柯西的连续性原理的样式，却根本没有提到这一明显的矛盾。

这最终是留待赛德尔通过发现柯西证明中过错隐藏引理来解开这一谜团的〔14〕。但这已经是 1847 年的事了。为什么要这么长的时间？要回答这一问题，我们必须更仔细地来看一看赛德尔的著名发现。

设是连续函数的一个收敛级数，并且，对于任意 n，定义和。那么，柯西证明的要点就是这一前提的推论：

给定任意ε＞0：

（1）存在δ，对于任意 b，如果｜b｜＜δ，那么｜Sn（x＋b）－Sn（x）｜＜ε（之所以存在这样一个δ，是因为 Sn（x）的连续性）；

（2）存在一个 N，对于所有 n≥N，有｜rn（x）｜＜ε（之所以存在这样一个 N，是因为的收敛性）；

（3）存在一个 N′，对于所有 n≥N′，有｜rn（x＋b）｜＜ε（之所以存在这样一个 N′，是因为的收敛性）；

得出的结论是：

对于所有 b＜δ，有

现在由收敛于柯西非连续函数的连续函数的级数提供了全局反例，这表明这一论证（粗略地说）中有的地方错了。但是，过错引理又在哪里呢？

稍微细心一些的证明分析（使用和前面一样的符号，但是澄清了一些量的函数从属关系）可以得出如下推论：

（1′）如果 b＜δ（ε，x，n），有｜Sn（x＋b）－Sn（x）｜＜ε；

（2′）如果 n＞N（ε，x），有｜rn（x）｜＜ε；

（3′）如果 n＞N（ε，x＋b），有｜rn（x＋b）｜＜ε

那么，如果 n＞maxzN（ε，z）且 b＜δ（ε，x，n），则有

隐藏引理是，对于任意确定的 ε ，这一最大值 maxzN（ ε ，z）应当存在。这就是所谓的一致收敛的要求。

关于这一发现，大致有 3 种主要的障碍。

第一个障碍是柯西未加限制地使用“无限小”量。〔15〕第二个障碍是即使一些数学家已经注意到一个无限集合 N 最大值的存在的假设与这一证明相关，他们还是没有再作考虑就做出了这一假定。在最大值问题上的存在证明首先是出现在维尔斯特拉斯学派之中。然而，第三个障碍也是主要的障碍是欧几里得方法论——这种 19 世纪早期数学之中既有益也有害的精神——之流行。

在我们全面探讨这一问题之前，让我们先看看阿贝尔是怎样解决由傅里叶反例给柯西定理所带来的问题。我将表明他是通过原始的“例外排除”法来解决（或者不如说“解决”［译注：不是真的解决］）这一问题的〔16〕。

3．阿贝尔的例外排除法

阿贝尔只是在论文脚注中叙述了这一问题，我主张这一问题是阿贝尔在其著名的论文中论述二项式级数的基本背景问题〔17〕。他写道：“在我看来，柯西定理有一些例外”，并且立即就给出了一个级数的例子

〔40〕

阿贝尔补充道，“正如大家所知道的，还有更多像这样的例子”。他对这些反例的回应是着手推测：“柯西定理的安全的范围是什么呢？”

他对于这一问题的回答是：一般来说，分析定理的有效定义域，以及特殊情况下，关于极限函数的连续性定理的有效定义域，是限制在幂级数上。所有已知的针对这一基本连续性原理的例外情况都是三角级数，所以，他建议把分析撤回到幂级数的安全界限以内，从而丢下傅里叶所珍爱的三角级数，把它当作是无法控制的混乱丛林——在那里例外却成了标准和成功的范例。

在阿贝尔 1826 年 3 月 29 日给汉斯丁（Hansteen）的一封信中，他把“可悲的欧拉式归纳法”描述为导致错误和无根据的普遍概括的方法，并且追问是什么原因致使这一程序事实上并没有造成什么严重后果。他的答案是：

按我的想法，原因是，在分析中往往很大程度上与能够表示为幂级数的函数有关。一旦其他

的函数进入——这碰巧会发生但相当少——那么［归纳］就不再起作用了，而且无穷多的不正确的定理将起因于这些错误的结论，一个就会导致所有其他的。我已经考察了其中的几个，很幸运地解决了这一问题〔18〕……

在阿贝尔的论文中，我们找到了他的著名的定理——我断言这是源于他紧紧抓住莱布尼茨的古典的形而上学原则不放所造成的——表现为如下的受限制的形式：

如果级数

对于 α 给定的值 δ 是收敛的，那么，对于每一个小于 δ 的值，它也将是收敛的，并且对于 β 有规则的稳定递减的值，在 α 小于或者等于 δ 的条件下，函数 $f(\alpha-\beta)$ 将无限地逼近极限 $f\alpha$〔19〕

现代理性主义数学史家把数学史看作是在不变的方法论的基础上知识均匀增长的历史，他们设想，不管是谁发现一个全局反例并提出了一个没有遭受到所考虑的反例反驳的猜想，他就已经自动地发现了相应的隐藏引理和证明所生成的概念。这样一来，这些历史的研究者就把一致收敛的发现归功于阿贝尔了。所以在权威的《数学百科全书》中，普林斯汉姆（Pringsheim）说，阿贝尔“证明了今天被称之为一致收敛的属性的存在”〔20〕。哈代与普林斯汉姆持同样的观点。在其［1918］论文中，他说“一致收敛的观念隐含在阿贝尔著名的定理的证明中”〔21〕。布尔巴基（Bourbaki）的错误甚至更明显：依照他的观点，柯西

起先并没有察觉到简单收敛和一致收敛之间的区别，并且自认为能够证明每一个连续函数的收敛级数都有一个连续函数作为它的和。这一错误差不多立即就被阿贝尔揭示了，他同时证明了每一个完全（complete）［？］级数在其收敛区间内部是连续的，他的证明是基于已经成为标准的推理，在这一特殊情况中，本质上就是使用了一致收敛的观念。剩下的就是以一般的方式澄清一致收敛的概念，斯托克斯（Stokes）和赛德尔在1847—1848年以及柯西自己在1853年都独立地完成了这一工作〔22〕。

如此多的文句，如此多的错误。阿贝尔没有揭示柯西把两种收敛看作是一样的这一错误。他的证明并不比柯西更多地利用了一致收敛的概念。阿贝尔和赛德尔的结果不是“特殊”和“一般”的关系——他们是完全不同的水平。阿贝尔甚至没有注意到，并不是合适的函数的范围而是它们的收敛方式必须加以限定！事实上，对于阿贝尔来说只有一种收敛，就是简单收敛；他的证明虚假的确定性的秘密就藏在他的谨慎（和幸运）的零定义（zero-definition 译注：指不下定义）中〔23〕：正如我们现在所知，在幂级数的情况下，简单收敛和一致收敛是同一的〔24〕！

在我批评历史学家的同时，我应该公正地提到柯西定理的第一个反例一般来说应归功于阿贝尔。只是朱迪安（Jourdain）注意到它在傅里叶那里出现过。但是朱迪安，以早已有名的非历史的态度，从这一事实推断出，他非常景仰的傅里叶差不多发现了一致收敛的概念了〔25〕。一个反例也许不得不为其被认可而战斗，即使被认可也还不会自动地导向隐藏引理从而导向所讨论的证明生成的概念，上述这一点迄今为止，已经被所有历史学家忽视了。

4．有关证明分析法之发现的障碍

现在让我们回到主要问题上来。为何从 1821 年到 1847 年，主要的数学家都没有发现柯西证明的简单的缺陷并改进证明分析和定理呢？

首先想到的回答是，他们不了解多证多驳法。他们不知道在发现一个反例之后必须仔细分析其证明并尝试找到过错引理。他们处理全局反例是借助于探试性的且没有创造力的例外排除法。

实际上，赛德尔一下子就发现了证明生成的一致收敛概念和多证多驳法。他完全意识到了他的方法论上的发现〔26〕，他在其论文中非常清晰地叙述道：

从刚才达到的确定性可知，定理不是普遍有效的，因此其证明必然要依赖一些附加的隐含假设，那么，主题的证明则有赖于更详细地分析。发现隐藏的假设并不是非常困难。于是，人们可以逆推这一由假设所表达的条件不能被表示非连续函数的级数所满足，因为只有如此，在其他正确的证明序列与另一方面已经确证的证明序列之间的一致性才能重新恢复〔27〕。

是什么阻碍了赛德尔之前的一代人发现这一点呢？主要原因（我们已经提到过）是欧几里得方法论的流行。柯西的严格性的革命是由于有意识地试图把欧几里得方法论应用到微积分学中而引发的〔28〕。他以及他的追随者认为，正是由于这一点，他们可以带来光亮以消除“分析的巨大黑暗”〔29〕。柯西是在帕斯卡准则精神之下前行的：他首先依照算术中非常熟悉的术语，着手定义分析中含糊不清的术语，像极限、收敛、连续性等等，然后，他继续证明以往没有被证明或不是非常明显的所有东西。既然在欧几里得的框架下，并没有尝试证明什么是错误的东西的先例，所以柯西首先必须通过丢弃错误的垃圾来改进数学猜想的主体。为了改进猜想，他运用了留心例外、把先前轻率表述的猜想限制在有效的范围之内而使之处于安全地带的方法，即，他运用了例外排除法〔30〕。

一位作者（可能是卡塔兰（Catalan））在《拉罗斯大百科全书》1865 年的版本中相当具有讽刺意味地刻画了柯西对反例的寻找。他写道：

他带入到科学之中的只是些消极的学说……事实上，他所发现并小心使其清楚明白的几乎总是真理消极的一面：如果他在白粉中发现了一些金子，他将向世界宣称，粉笔并非单独地由石灰做成。

阿贝尔写给霍尔姆博的信中有一段内容是这种柯西学派新的内心反省倾向的进一步例证：

我已经开始从这一方面检查（目前）我们通常会认可的那些最重要的规则，并且说明它们在何种情况下是不适当的。这一工作进展顺利，给我带来了无限的乐趣〔31〕。

被要求严格性的人（rigourist）当作是无用的垃圾的东西，比如关于发散级数和的猜想，当然都会被付之一炬〔32〕。“发散级数是”，阿贝尔写道，“恶魔的作品”。它们只会引起“灾难和悖论”〔33〕。

但是，当坚持不懈地努力用例外排除法改进其猜想时，他们却从没想到用证明来改进猜想。在欧几里得的传统中，猜测和证明两种活动是被严格分开的。名副其实的且依然不是最终确定的证明的观念与要求严格性的人是背道而驰的。反例往往被看作是错误的和灾难性的缺陷：它们表明一个猜想是错误的，并且就不得不再次从头开始证明。

鉴于这一事实，就可以理解，为什么在 18 世纪一些乱七八糟的归纳推理都被叫做证明了〔34〕。但是，也没有办法来改进这些“证明”。他们被正当地抛弃，因为“不严格的证明——那就意味着，根本就不是证明”〔35〕。归纳论证是容易出错的——因此要付之一炬。演绎论证取而代之——因为它始终不会出错。“我让所有不确定性消失了”，柯西这样宣称〔36〕。正是基于这样的背景，对柯西的“严格地”证明了的定理的反驳必须被重视。这一反驳不是孤立的事件。柯西关于欧拉公式的严格证明，正如我们所看到的，随后照样有一些论文陈述了大家熟知的“例外情况”。

只有两条出路：或是修正欧拉方法所基于的全部绝无谬误论者（infallibilist）的数学哲学的基础，或是以某种方式隐瞒问题。首先，让我们来看看，修正绝无谬误主义者的方法包括哪些内容。毫无疑问，必须放弃全部数学可以还原为毋庸置疑的真实细节以及存在对某些表述的真实性直觉不可能犯错误的想法，也必须放弃我们的演绎、推理的直觉是不可能错误的想法。只有承认这两点，才能打开多证多驳法自由发展的路径，使其应用到演绎论证的关键性评价中去，并用来处理反例问题〔37〕。

只要反例依然不但是定理的缺陷，而且也是鼓吹它的数学家的缺陷；只要还认为要么是证明要么是非证明，不存在带有缺点的合理的证明；那么，数学中的批评就还是被禁止的。正是绝无谬误主义者的欧几里得方法的哲学背景滋养了数学中权威性的传统模式，阻碍了猜想的公布和讨论，使数学批评不可能兴起。文学批评可以存在，是因为我们可以欣赏一首诗而不认为它是完美的；只要我们仅仅只欣赏产生完美真理的数学和科学的结论，数学或者科学的批评就不可能存在。一个证明之所以是一个证明只要它是在证明；它或者证明出或者没有证明出。这一观念——被赛德尔表述得如此清晰——就是一个证明之受到尊敬并非是没有缺陷，这在 1847 年是革命性的，并且，不幸的是，今天听起来依然是革命性的。

并非是巧合，多证多驳法出现于 19 世纪 40 年代，此时正当牛顿光学崩溃（通过菲涅耳（Fresnel）18 世纪 10 年代至 20 年代的工作）以及非欧几何的发现（由罗巴契夫斯基（Lobatschewsky）在 1829 年和波尔约（Bolyai）在 1832 年）粉碎了绝无谬误论者的狂妄幻想的时期〔38〕。

在多证多驳法发现之前，“严格证明了的”定理由于连续不断的反例而引起的问题仅能够通过例外排除法来解决。证明证明了定理，但是却留下了何为定理的有效范围的问题。我们可以通过规定和小心地排除“例外”（这一委婉的说法是那个时期的特征）来决定这一范围。这些例外于是就写入定理的表达之中。

例外排除法的支配地位表明欧几里得方法，在某些至关紧要的困难情境中，对数学的发展起

到了有害的效果。这些困难情景绝大部分出现在正在发展的数学理论之中，在那里，正在形成的概念是进步的运载工具，诸多激动人心的发展来源于通过拉伸概念、区分先前没有被区分的概念所进行的对概念范围的边界的探索。在这些发展的理论中，直觉是没有经验的，它跌跌撞撞还会出错。没有理论不经过这样一个发展阶段；而且，这一阶段从历史学家的眼光来看是最激动人心的，从教学的角度来看也应该是最重要的。如果不理解多证多驳法，如果不接纳难免有错误论者（fallibilist）的方法，就不能真正地理解这些阶段。

这就是为什么欧几里得，特别是对于数学史和数学教学来说，不管是在初级还是在创新层面，一直都是邪恶的天才的原因〔39〕。

按语：在这一附录中，多证多驳法的 5、6、7 这些补充的阶段并没有被讨论。我在这里只是提一下，有条不紊地搜寻其他的证明中（阶段 5）的一致收敛很快就会产生对柯西所证明的另一个定理的反驳和改进：这一定理就是，任意连续函数的收敛级数的极限的积分是各项积分序列的极限，或者简言之，就是在连续函数的级数的情况下，极限运算和积分运算可以相互交换。这在整个 18 世纪都是毫无争议的，甚至高斯都不假思索地加以运用了。（见高斯［1813］，克诺普（Knopp）［1928］和贝尔［1945］。）

赛德尔，他在 1847 年发现了一致收敛，现在却没有去看看在别的证明那里是否暗中假定了这一概念。斯托克斯，他在同一年发现了一致收敛——虽然不是借助于多证多驳法——却在同一篇论文中使用了关于级数积分的错误的定理，参阅莫格诺（斯托克斯［1848］）。（斯托克斯还犯了另一个错误：他认为他已经证明了一致收敛对于极限函数的连续性不仅是充分的而且是必要的。）

关于级数的积分也依赖于一致收敛的假设的证明之推迟，也许是因为这一原始猜想只是在 1875 年才被一个具体的反例所驳倒这一事实（达布［1875］），那时，已经通过证明分析在证明中追踪一致收敛了，但却没有反例来促成这种分析。对一致收敛的搜寻一旦完全由维尔斯特拉斯来领导，很快就在有关逐项微分、二重极限等的证明中发现了这一概念。

第 6 阶段是检查到目前为止已经接受的被反驳的原始猜想的推论。我们能够挽救这些推论吗？或者说引理被反驳将导致巨大的灾难吗？例如，逐项积分是傅里叶猜想的狄利克雷证明的基石。杜布瓦斯-雷蒙德用戏剧化的语言描述了这一情形：三角级数理论被“刺伤了心灵”，它的两个关键定理其“基础已经被从下面截断”，那么

在这一打击之下，整个理论又被推回到狄利克雷甚至是傅里叶之前的状态。

（杜布瓦斯-雷蒙德［1875］，第 120 页。）这一状况使我们察看“失去的基础”是怎样重新获得的，成为一项激发兴趣的研究。

在这一过程中，大量的反例被发掘出来。但是对它们的研究——方法的第 7 阶段——只是在 19 世纪最后几年才开始。（例如，杨（Young）的关于非一致收敛点的分类和分布的工作，杨［1903—1904］。）

注　释

〔1〕正如我所强调的，历史的实际模式也许可以稍微偏离这一探试的模式。第 4 阶段有时也可以在第 3 阶段之前（甚至在探试法的顺序中）——一个精巧的证明分析也许可以引发出反例。

〔2〕*编者按：换句话来说，这种方法（某种程度上）是由其产生的一系列陈述 P1，…，Pn 组成，以至于 P1＆…＆Pn 对于某些引人关注的对象域被认为应该是真的，并且似乎蕴含了原始猜想 C。结果可能发现这不是事实——换句话说，我们发现的情况是，其中 C 为假（“全局的反例”），但是 P1 到 Pn 却成立。这就导致我们要清楚地说明也被这一反例（“局部反例”）所驳倒的一条新的引理 Pn＋1。因此，先前的证明就被一个新的证明所替换，新的证明能够被概括为如下的条件陈述：

这一条件陈述的（逻辑的）真不再被反例所驳斥（因为既然现在前件为假，那么条件陈述则为真）。

〔3〕休厄尔（Whewell）［1858］，1，第 152 页。在 1858 年时，休厄尔至少已落后 10 年了。这一原理是源于莱布尼茨的连续性原理（［1687］，第 744 页）。博耶（Boyer）在其［1939］第 256 页引用了出自鲁易里［1786］第 167 页的对这一原理特征的重新表述。

〔4〕这一《热传导研究报告》获得了 1812 年的数学大奖，它曾受到拉普拉斯（Laplace）、勒让德和拉格朗日（Lagrange）的评判。（译注：1811 年底，傅里叶把他关于热传导的研究报告提交给巴黎科学院，裁决者拉普拉斯、拉格朗日和勒让德严厉地批判了这份报告，以致没能在科学院得到发表，如今它已是一篇这一领域的经典文献了。）这一报告在傅里叶经典的《热理论》1822 年出现之后才得以出版，比柯西的教材晚了一年，但是《热理论》的内容那时已经众所周知了。

〔5〕傅里叶，见前面所引用的书，第 177 页和第 178 页。

〔6〕写下这一句之后，我发现“非连续的”这一术语大致上以柯西的意义出现在一些迄今未出版的泊松（Poisson）［1807］和傅里叶［1809］的手稿中，J • 拉维茨（J. Ravetz）博士正在研究这些手稿，他好意地允许我看他的影印照片。这的确给我带来了麻烦，虽然它并没有驳倒我的证据。傅里叶在不同的时候心中显然有两种不同的连续性的观念，而且，这两种不同的观念相当自然地产生于两个不同的领域。如果我们如此解释一个函数：

把它当作一条弦的初始位置，它肯定会被认为是连续的，截断垂线——像柯西的定义所要求的那样——看起来是不自然的。但是，如果我们把这一函数解释为，就是说，代表一条金属线上的温度，这一函数显然是非连续性的。这些考虑因素暗示了两个猜想。首先，柯西的著名的连续性定义，它与函数的“弦的解释”相冲突，它也许是受到了傅里叶对热现象的观察的激发。其次，傅里叶对这些非连续函数图中存在的垂线的坚持根据热解释，也许是源于不与莱布尼茨的原则发生冲突的一种努力。*编者按：关于傅里叶数学的进一步的信息，见 I •格拉坦-吉尼斯（I. Grattan-Guinness）（与 J •R •拉维茨合著）的《约瑟夫 •傅里叶，1768—1830》

（麻省理工学院出版社，1972 年版）。

〔7〕那就是上面说的弦的常识或者图示的常识。

〔8〕编者按：这里什么被侵害了呢，也许不是我们直觉的连续性的观念，而是我们关于任何代表函数的图示轻微旋转后仍然代表某一函数的信念。从直觉的观点看，傅里叶曲线是连续的，这种直觉还可以通过连续性的 ε 、δ 定义（这通常被记在柯西头上）来说明；因为傅里叶曲线，包括垂线在内，可以用两个连续的函数来进行参数的表示。

〔9〕见前面引用的书（指《热传导研究报告》），第 177 节。当然，这一评论距发现收敛在这些地方是无限缓慢的还很远，只是在计算傅里叶级数有了 40 年的经验之后，这一点才被发现。在狄利克雷对傅里叶猜想所做的决定性改进，表明只有那些其值在非连续点上是的函数才能够被傅里叶级数来表示之前，这一发现是不可能做出来的。

〔10〕阿贝尔［1826b］，第 316 页。

〔11〕柯西［1826］。这一证明是基于不可矫正的错误假设（参见例如黎曼［1868］）。

〔12〕莫格诺［1840—1841］。

〔13〕狄利克雷［1829］。

〔14〕赛德尔［1847］。

〔15〕这妨碍了柯西给他的老的证明作出一个清晰的批判性评价，并且甚至妨碍他在其［1853］第 454—459 页中清晰地用公式表述他的定理。

〔16〕见前文，第 20—27 页。

〔17〕阿贝尔［1826］，第 316 页。

〔18〕给汉斯丁的信（[1826a]）。信的其余部分也很有趣，反映了阿贝尔的例外排除法："一个人按照一般的方法行进，这不太难；但是我不得不非常审慎，因为命题一旦没有经过严格的证明（即没有任何证明）而被接受，就会在我心中扎根，以至于我每次都会不加进一步的检查而冒险使用之。"由此，阿贝尔挨个检查了这些普遍的猜想，并试图推测它们的有效性的范围。

这种笛卡儿式的对于绝对清晰的幂级数的自我强加的限制，可以解释阿贝尔为什么特别关心要严格地对待泰勒（Taylor）展开式："泰勒定理，所有无限小演算的基础并没有很好地确立起来。我仅仅发现了一个严格的证明范例，那就在 M·柯西的《无限小演算讲义提纲》中，他在那里证明了，只要级数是收敛的，就会有：

但是，人们却在不加考虑地在所有情况下使用它。”（给霍尔姆博（Holmboë）的信［1825］。）

〔19〕阿贝尔［1826b］，卷 1，第 314 页。这一版本是从德文本转译的（原法文本是由克赖莱译为德文的）。*编者按：看起来阿贝尔好像忘记了 α 左右两边的模符号（the modulus sign）了。

〔20〕普林斯汉姆［1916］，第 34 页。

〔21〕哈代［1918］，第 148 页。

〔22〕布尔巴基［1949］，第 65 页以及［1960］第 228 页。

〔23〕参见前文，第 20—27 页。

〔24〕有两位数学家注意到阿贝尔的证明并不是毫无缺陷的。一位就是阿贝尔自己，他再次认真地探讨了这一问题——不过没有成功——在其死后出版的论文“论级数”之中（[1881]，第 202 页）。另外一位是希洛（Sylow），他是阿贝尔选集第二版的编者之一。他为定理加了一个关键的脚注，他在其中指出我们必须在证明中要求一致收敛而不是像阿贝那样的简单收敛。但是他没有使用术语“一致收敛”，对此他好像还不知道（约当的《分析教程》第二版还没有出版），代替这一术语，他引用了杜布瓦斯-雷蒙德（du Bois-Reymond）后来的概括，这只是表明即使他也没有看清缺陷的性质。赖夫（Reiff）在其［1889］中以阿贝尔定理是有效的这一幼稚的主张拒斥了希洛的批评。赖夫说如果柯西是收敛理论的创立者，那么阿贝尔则是级数连续性理论的奠基人：

简要总结柯西和阿贝尔的成就，我们可以说：柯西在其《代数分析》中发现了收敛理论和无限级数的发散性，而阿贝尔在其《论二项式级数》中发现了级数连续性的理论。（[1889]，第 178—179 页。）

在 1889 年这样说，的确是一件夸大其词和无知的事了。

不过，阿贝尔定理的有效性当然是由于非常狭隘的零定义，而不是因为证明。阿贝尔的论文后来出版于莱比锡 1895 年的《奥斯特瓦尔德经典》（第 71 卷）中。在注释中，希洛的评论未加任何评语地复制在上面。

〔25〕朱迪安［1912］，2，第 527 页。

〔26〕理性主义者怀疑根本没有什么方法论上的发现。他们认为方法是不变的、永恒的。的确，方法论的发现者往往会被恶劣地对待。在他们的方法被接受之前，它会被像不正常的理论一样看待；被接受之后，又会被视作平庸的老生常谈。

〔27〕赛德尔［1847］，第 383 页。

〔28〕“对于方法而言，我已经不得不赋予它们几何学中所要求的全部的严格性，以便永远不依靠从代数学的一般原则中来汲取动力。”（柯西［1821］，导论。）

〔29〕阿贝尔［1825］，第 263 页。

〔30〕“给过于扩大的论断带来有用的限制。”（柯西，［1821］。）

〔31〕阿贝尔［1825］，第 258 页。

〔32〕同时代的人一定认为这一清肃有“一点严厉”。（柯西，［1821］，导论。）

〔33〕阿贝尔［1825］，第 257 页。

〔34〕18 世纪的“形式主义”是彻头彻尾的归纳主义。参见第 133 页，柯西在其［1821］前言中拒绝归纳，认为归纳只是“有时适合于展现真理”。

〔35〕阿贝尔，［1826a］，第 263 页。对柯西和阿贝尔来说，“严格的”就意味是演绎的，与归纳相对立。

〔36〕柯西［1821］，导论。

〔37〕*编者按：这一段话似乎是错误的，我们毫不怀疑拉卡托斯——他最终还是恢复了对形式演绎逻辑的崇高敬意——他自己也将修改这一段话。一阶逻辑已经达到了推理的有效性的特点描述，（相对于语言的“逻辑”术语的特性来说）它的确使有效的推理本质上是不会出错的。因此，需要被认可的只是拉卡托斯提到的两点中的第一点。通过充分正当的“证明分析”，所有的疑惑可以扔到公理（或者定理的前件）的头上，而不留下任何疑问给证明自身。多证多驳法无论如何不会因为拒绝承认第二点就无效了（如文中所示）：实际上，也许通过这一方法，证明被改进了，以至于所有为了使证明有效不得不做的假设都变得明确了。

〔38〕就在这 10 年期间，黑格尔哲学与其绝无谬误论的先辈彻底绝交，并为完全新颖的获得知识的路径提供了一个强有力的出发点。（黑格尔和波普尔代表了近代哲学中独特的难免有错误论者（fallibilist）的传统，但是即使是他们俩也都犯了为数学保留绝对无误的特权的错误。）选自于德·摩尔根（de Morgan）的一段话就表现出 20 世纪 40 年代新的难免有错误论者的倾向：

“一种新的倾向时而出现，就是拒绝接受任何有困难的东西，或是如果在检查明显的矛盾方面还有难度，就不对其下结论。如果这一倾向意味着没有什么东西可以被永久地使用和盲目地信任，如果它不是对于所下论断的全部范围都为真的话，那么，至少我不应该对如此理性的方法提出任何反对的。但是，如果其暗示的是凡是不能被全面理解的，就不可以传授给学生，不管有没有加以提醒。要是这样的话，我将反对这种限制，在我看来，这不仅会导致错误地看待我们已确知的东西，而且会阻止发现的进程。在几何学之外，下面这一点并不真实，就是许多人认为数学科学在其所有部分其模型是完全精确的。分析的最远的边界还始终没有被完全理解，因为超出边界的区域还是绝对未知的。但是，扩大已定疆土的方法不是留在疆土之内，［这一评论是针对例外排除法而言的］而是要进行航海发现，我非常赞同学生应该接受这样的训练；也就是，既要教他怎样勘察边界，又要教他怎样开垦内陆。因此，在书的后面的部分，我毫不犹豫地使用这些方法，我并不认为它们是令人怀疑的，只是因为这些方

法表现为未完成的形式，并且也因为怀疑只是有期望的初学者的怀疑，并非未得到满足的批评家的怀疑。经验时常表明，有缺陷的结论会被坚持不懈的思考修正为可理解和具严格性的，但是，谁可以思考那些从不允许在他面前出现的结论呢？把注意力唯一地放在数学中那些不需要对疑点进行讨论的部分，结果会造成对那些绝对需要通过分析的扩展而前进的模式的厌恶。如果把对数学的较高级的部分的开垦留给专门为此目的而训练的人去做，也许会有些理由不让普通的学生来涉及这些不仅是未确定的部分，而且甚至是抽象科学纯粹推理的部分；把这些部分保留给那些其职业就是使前者清晰、使后者有效用的人。然而，事实上，在这一疆土之上那些注意到数学的困难的人，没有多少为了实现他们的追求而经受住趣味和环境的变故；而且这样的变故的数量还会上升，因为允许所有有能力学习应用数学的高级部分的学生都有机会进入那些分析的部分开垦，关于分析的部分与其说关键在于其目前在科学事务中的运用，不如说关键在于其将来的发展。”（德・摩尔根［1842］，第 vii 页。）

〔39〕依照 R・B・布雷思韦特（R. B. Braithwaite）的说法，“数学和自然的（unselfconscious，指不是建立在自我意识之上的、绝对客观的——译注）科学方面的善良的天才欧几里得却是科学哲学的——并且实际上也是形而上学的邪恶天才。”（布雷思韦特［1953］，第 353 页。）然而，这一评论是源于一种静态的逻辑学家的数学观念。

〔40〕阿贝尔未能提及，正是这一例子已经被傅里叶在这样的情境中提到过了。

附录 2

演绎主义方法 VS.探试法

1．演绎主义方法

欧几里得方法论已经逐步形成了某种强制性的表述风格。我把此称作“演绎主义风格”。这一风格是从缜密地制定一个公理、引理和/或定义的清单开始。公理和定义常常看起来像是人为的和神秘复杂的。人们从未被告知这些复杂的东西是怎样出现的。公理和定义的清单之后跟着就是小心措词的定理。这其中装载着艰难进展的条件；看起来任何人都不可能猜测出它们。定理后面跟着的就是证明。

学习数学的学生被强迫，按照欧几里得式的程序，加入到这一变魔术的行动中，而并不追问有关背景或是这一魔术是怎样表演的问题。如果学生偶然发现一些不适当的定义是证明产生的，如果他只是想知道这些定义、引理以及那个定理是怎么可能跑到证明的前边，魔术师将会因为这样会显露出数学的不成熟而把他驱逐出去〔1〕。

在演绎主义的风格之中，所有的命题都是真的，并且所有的推演皆是有效的。数学表现为一

个不断增长的永恒不变的真理集合。反例、反驳、批评都不可能进入。一种专横的气氛之被诱入到这一学科，是由于一开始就是伪装的怪物排除、证明生成的定义和羽翼丰满的定理，以及压制原始猜想、反驳和对证明的批评。演绎主义风格遮蔽了斗争，也遮蔽了冒险活动。全部的经过消失不见了，定理在证明过程中不断的试探性的表述注定被埋没了，而最终的结果被提升到神圣的绝无谬误性的高度〔2〕。

一些捍卫演绎主义风格的人声称，演绎是数学中独一无二的探试模式，发现的逻辑就是演绎〔3〕。其他一些人意识到这不是真实的情况，但是从这种认识当中他们又得出数学发现是完全非理性的事情的结论。于是，他们声称虽然数学的发现不是以演绎的方式行进，但如果我们想使数学的发现以理性的行进方式呈现，它就必须以演绎主义风格进行下去〔4〕。

所以我们现在对演绎主义风格有两个论证：一是基于探试法是理性的和演绎主义的观念；二是基于探试法不是演绎主义的，也不是理性的观念。

也还有第三个论证。一些实际的数学家，他们不喜欢逻辑学家、哲学家和其他一些思想古怪的人干扰他们的工作，他们通常会说探试风格的引入就会要求重写教科书，并且会使教科书变得如此之长以致人们无法卒读。论文也将变得非常之长〔5〕。对于这一通俗无趣的论证的回答就是：那就让我们试一试吧。

2．探试法。证明产生的概念

这一节内容包括对一些数学中重要的证明产生的概念作简要的探试性分析。希望这些分析可以表明把探试的成分引入数学的风格之中所带来的好处。

正如已经提到过的，演绎主义风格以一种人为的专横的方式把证明产生的定义从其“证明原型（proof-ancestors）”那里给扯开了，好像它们是突然出现的。这就遮蔽了导致这些概念被发现的反例。相反，探试风格却使这些因素突现出来。它强调了问题情形：即它强调了产生新概念的“逻辑”。

首先，让我们看看人们是怎样以探试风格来引入证明产生的一致收敛的概念，我们在前面曾讨论过这一点（附录 1）。在这一个和其他的例子中，我们确实会假设具有对多证多驳法的专门术语的熟悉性。但是，这一要求并不比通常的对欧几里得纲领像公理、原始术语等等熟悉的要求要多。

（a）一致收敛

正题　莱布尼茨的连续性原理的特殊版本；它规定任意连续函数收敛序列的极限函数是连续的。（原始猜想）

反题　柯西的连续性定义把正题提高到一个更高的层面。他的定义的决定（definitional decision）使傅里叶的反例合法化。这一定义同时排除了连续性要依靠垂线来恢复的可能的妥协，所以它——与一些三角级数一起——引发了反题的负面作用。“正面作用”已经由柯西证明得到加强，它将是一致收敛的证明原型。“负面作用”则通过越来越多的原始猜想的全局反例而得以加强。

合题　全局反例也是局部反例所针对的过错引理被发现，证明被改进，猜想也被改进。合题的特征要素出现了：即定理以及和它一起的证明产生的一致收敛概念〔6〕。

我认为，我在这里所使用的黑格尔式的语言能够普遍地描述数学之中各种不同的发展方式。（然而，它既有其魅力也有其危险。）这种语言背后的黑格尔式的探试概念大致就是这样。数学的活动是人的活动。这一活动的某些方面——正如任何人的活动——可以用心理学来研究，其他方面可以通过历史学来研究。探试法并不是最先对这些方面感兴趣的。但是，数学的活动产生出数学。数学，这种人的活动的产物，从其产生的人的活动中“异化出其自身（alienates itself）”。它变成了活的、生长的有机体，从其所产生的活动中获得了某种自主性；它发展了它自己的自主的生长规律、自己的辩证法。真正有创造性的数学家就是这些规律的人格化、具体化，这些规律只有在人的活动中才能实现其自身。然而，它们的具体化很少是完美的。数学家的活动，正如它在历史中所表现的那样，只是数学理念的奇妙的辩证法的笨拙的实现。但是，任何数学家，如果他是有才华、有活力、有天赋的，就会与这种理念的辩证法相通，感觉到它席卷一切的气势，并且服从它的命令〔7〕。

那么，试探法涉及的是数学的自主的辩证法而并不关心其历史，虽然它只能通过历史的研究和历史的理性重建来研究其主题〔8〕。

（b）有界变分

有界变差的概念被普遍地引入分析教科书的方法是专横的演绎主义风格的一个漂亮的例证。让我们再回到鲁丁的书中。在他关于黎曼-斯蒂杰斯（Stieltjes）积分的一章中，他突然引入了有界变差函数的定义。

6.20．定义．令 f 定义在［a，b］上。我们规定

（37）

这里，最小上界（lub）所取的是在［a，b］中的所有分割。如果 V（f）是有限的，我们说 f 是［a，b］上的有界变差，并且我们把 V（f）叫做［a，b］上的 f 的全变差〔9〕。

我们为什么恰好应该对这一函数集合感兴趣呢？演绎主义者的回答是："等等看。"那么就让我们等吧，注意其讲解，并设法搞明白。在定义之后跟着的是例子，这是计划让读者对概念的适用范围有一些意识（这一做法，以及与此类似的一些做法，使鲁丁的著作在演绎主义传统之内显得优点突出）。然后是一系列的定理（6.22、6.24、6.25）跟在后面；接着突然给出下面的命题：

推论 2．如果 f 是有界变差函数，并且 g 在［a，b］上是连续的，那么〔24〕。

（是关于 g 的黎曼-斯蒂杰斯可积函数类。）

如果我们真的理解了黎曼-斯蒂杰斯可积函数为什么如此重要，我们也许会对这一命题更加感兴趣。鲁丁甚至没有提到直觉上最明显的可积概念，即柯西可积性，对此概念的批评导致了黎曼可积性。所以，现在我们得到一个定理，在其中出现了两个神秘的概念，有界变差和黎曼可积性。但是，有了两个神秘的概念并不就等于对其理解了。或者，它们也许是为那些有"能力和倾向追求思维的抽象训练"的人来做的〔10〕？

探试法表述将表明两个概念——黎曼-斯蒂杰斯可积性和有界变差——都是证明产生的概念，都源于一个同样的证明：傅里叶猜想的狄利克雷证明。这一证明给出了两个概念的问题背景〔11〕。

现在，傅里叶的原始猜想〔12〕不包含任何神秘的术语了。这一有界变差的"猜想的原型"表明任意函数都是傅里叶可展开的〔13〕——它是一个简单的而又令人激动的猜想。这一猜想被狄利克雷证明了〔14〕。狄利克雷仔细地检查了他的证明，并通过在其中建立引理作为条件改进了傅里叶猜想。这些条件就是著名的狄利克雷条件。作为结果的定理是这样的：所有函数都是傅里叶可展开的（1）在一个跳跃点上的值是（2）它只有有限个不连续点，以及（3）它只有有限个最大值和最小值〔15〕。

所有这些条件都是从这一证明产生的。狄利克雷的证明分析是不完善的，这只是针对其第三个条件：其证明事实上只是依赖于函数的有界变差。C·约当在 1881 年批评了狄利克雷的证明分析，并且改正了他的错误，于是，约当变成了有界变差概念的发现者。但是，他的确没有发明这一概念，也的确没有"引入"这一概念〔16〕——毋宁说他在进行批判性的复查时，在狄利克雷的证明中发现了这一概念〔17〕。

狄利克雷证明中的另一个弱点是对柯西积分定义的使用，这一定义只是针对于连续函数的适当的工具。按照柯西的定义，非连续函数根本是不可积的，因此（ipso facto）它们不是傅里叶可展开的。狄利克雷是通过把非连续函数的积分看作是在函数连续的那些区间上的积分的和来避免这一困难。如果非连续点的数目是有限的，这很容易做到，但是，如果它是无限的，就会导致困难。这就是为什么黎曼批评柯西的积分概念并发明了一个新概念的原因。

如此一来，有界变差和黎曼积分这两个神秘的概念便失去了魅力（entzaubert），被剥夺了权威性的魔力；它们的起源可以追溯到某种清晰明确的问题情形中，可以追溯到以前为解决这些问题所做的批评中。第一个定义是证明产生的定义，先由狄利克雷作了尝试性地表述，最终由狄利克雷证明分析的批评者 C •约当发现。第二个定义是来自对先前的积分定义的批评，先前的积分定义被证明对于更复杂一些的问题是不适用的。

在说明探试法的第二个例证中，我们遵循了波普尔式的猜想与反驳的逻辑模式。这一模式比黑格尔的模式与历史的关系更加密切，黑格尔的模式根本不理会“尝试和过错”，把它当作客观理念的必然发展在人类身上的全然盲目的一种实现。然而，甚至在打上波普尔烙印的理性的探试法中，人们必须区分为解决问题而设置的问题与实际要解决的问题；必须区分“偶然的”错误（一方面来说它随之就消失了，对它的批评在进一步的发展中不起什么作用）和“本质的”错误（在某种意义上，它在被反驳之后也还会保留下来，对它的批评是进一步发展的基础）。在介绍探试法时，偶然的错误可以毫无损失地省略之，处理这些错误只是历史学的事务。

我们只是略述了导致有界变差概念的证明程序开头的 4 个阶段。在这里，我们只提示一下这一令人感兴趣的故事的其余的部分。第 5 阶段〔18〕，搜寻在其他证明中新发现的证明产生的概念，立刻会导致在原始猜想“所有的曲线都是可求长的”证明中发现有界变差〔19〕。第 7 阶段引导我们到了勒贝格积分和现代测度论。

历史的按语：一些探试法的有趣细节也许可以补充到文本所述说的故事中。狄利克雷确信他的第二和第三引理的局部反例不是全局的反例。例如，他相信所有连续函数，不管它们的最大值和最小值的数目，都是傅里叶可展开的。他也希望这一更普遍的结果能够通过在他的证明中作一些简单的局部修正而得到证明。这一观念在 1829 年至 1876 年间被广泛接受，即（1）狄利克雷的证明只是部分的证明；（2）最终的证明能够通过一些微小的修正而得到，但是 1876 年，当杜布瓦斯-雷蒙德给出了针对傅里叶的老猜想的第一个真正的反例时，从而也就打破了这种修正的希望。约当关于有界变差的发现似乎是受到这一反例的启发。

有趣的是，我们注意到，高斯也曾鼓励狄利克雷改进其证明，使它能够应用到带有任意数目的最大值和最小值的函数中。令人好奇的是，虽然不管是在 1829 年还是 1837 年，狄利克雷都没有解决这一问题，但是在 1853 年，他依然认为答案是如此明显，以至在他回复高斯的请求的信中修改了解答（狄利克雷［1853］）。他的解答的要点是这样的；最大值和最小值的集在所考虑的区间不应该有任何汇聚点这一条件，事实上就是他的证明的充分条件。他的第二个条件是关于有限多的非连续点可以被修正的问题，已经在其 1829 年的第一篇论文中叙

述了。他在那里声称只要非连续点的集合是无处稠密的，他的证明实际上就适用。这些修正表明，狄利克雷非常关心他的证明分析的问题，并确信它可以适用于比那些满足于他的谨慎的、后来被称作“狄利克雷条件”的函数更多的函数。典型的例子是，他在其［1837］中根本没有谈到这一定理。他总是确信他的定理对所有连续函数都成立，正如他在给高斯的信中所表达的以及他亲自告诉可能持怀疑观点的维尔斯特拉斯的那样。（参见《奥斯特瓦尔德精确科学经典》，第 186 卷，1913 年，第 125 页。）

既然现在他的定理正如他在其［1929］中表述的实际上包括“实际出现的”所有类型的函数。那么，再进一步，更加精细的分析已经可以通向非常“纯粹的”分析领域了。我主张对狄利克雷的证明的分析——最先是由黎曼所做——是现代抽象分析的起点，并且我发现近来被广泛接受的朱迪安关于傅里叶扮演了决定性的角色的观点是言过其实了。傅里叶对超出了直接可应用性的数学论证并不感兴趣。狄利克雷的想法是的确不同的。他隐约感觉到他的证明的分析要求一个新的概念框架。他的［1829］论文的最后一句话是名副其实的预言：

但是，要把事情做得如人所希望的那样完全清楚明白，就需要一些细节来约束无限小演算的基本原理，这将在另外的笔记中提到……

但是他从没有发表这一承诺的笔记。正是黎曼，通过批评柯西的积分概念，澄清了“约束无限小演算的基本原理的细节”，又是黎曼，通过清楚地表述出狄利克雷的隐约的感觉，并通过引入革命性的技术，把数学分析，实际上还把理性带进那些非实际出现的因而被当作怪物的，或者至多是被当作无趣的例外或“奇点”的函数中。（这是狄利克雷的态度，表达在其［1829］论文以及在其给高斯的信［1853］中。）

一些持绝无谬误论的数学史家在这里使用了忽略历史的手法，把一个长期的充满斗争和批评的发展过程压缩成单一的不会出错的洞察行为，并且把后来的分析者的成熟赋予了狄利克雷。这些反历史的历史学家把我们现代的实函数的一般概念归到狄利克雷头上，并因此把这一概念命名为狄利克雷函数概念。E·T·贝尔在其［1945］第 293 页中断言“狄利克雷关于一个（实数的、赋值）变元的（赋值）函数定义，作为一个表，或者作为两个数的集合之间的一致性和相关性，暗示了点集的等值理论”。贝尔给出的参考书目是：“狄利克雷：《文集》，第 1 卷，第 135 页”。但是那里并没有像这里所说的内容。布尔巴基说道：“众所周知，正是在使傅里叶的观念精确化这一场合下，狄利克雷定义了正如我们今天所理解的那个普遍的函数概念”。（布尔巴基［1960］，第 274 页。）布尔巴基说“众所周知”，但是却没有给出任何参考文献。我们在大部分正统的教科书中发现实函数这一概念“是归之于狄利克雷”的（例如，皮尔庞特（Pierpont）［1905］，第 120 页）。然而，狄利克雷的著作中根本没有这样的定义。不过倒有充分的证据表明他完全不知道这个概念。例如在他的［1837］论文中，当他在讨论分段连续函数时，他说，在不连续点上函数有两个值：

这一曲线，它的 x 和 y 坐标分别被标记为 β 和 φ（β），是由一些分段组成。在 x 轴上方与 β 的某些特殊值相对应的点上，曲线部分是逐次断开的；并且对于每一个这样的 x 坐标事实上都对应有两个 y 坐标，其中一个属于在这一点终止的部分，另一个属于从那里开始的部分。在下面，将有必要区分这两个 φ（β）的值，我们将用 φ（β－0）和 φ（β＋0）来表示它们。

这些引文毫无疑问表明了狄利克雷距离“狄利克雷函数概念”是多么遥远。

那些把狄利克雷与“狄利克雷定义”联系在一起的人，大抵会想到出现在他的［1829］论文中的狄利克雷函数：一个函数，当 x 是有理数时其为 0，当 x 是无理数时其为 1。麻烦的还是狄利克雷依然坚持所有真正的函数实际上都是傅里叶可展开的——他明显地把这种“函数”设计为了一个怪物。按照狄利克雷的观点，他的“函数”并不是“普通的”实函数的例子，而是并非应该以这一名称来命名的函数的例子。

令人好奇的是，那些设法去发觉狄利克雷函数定义而不管它并不存在的人，他们却没有注意到他的两篇论文的标题谈及的就是所有“完全任意的”（ganz willkürliche）函数展开成为傅里叶级数的问题。然而，这就意味着——依照狄利克雷的观点——狄利克雷函数是在“完全任意的函数”这一家族之外，他把它当作一个怪物，因为一个“普通的”函数必须有一个积分而这个函数显然没有。事实上，黎曼在批评柯西的积分概念连带狄利克雷对其所做的专门的修正时，就已经批评了狄利克雷狭隘的函数概念。黎曼表明，如果我们扩大了积分概念，像对于每一个形式为 p/2n 的有理数都是非连续的函数这样的怪物都是可积的，这里 p 是奇数，与 n 互素，即使这一函数在处处稠集上都是非连续的。因此，这一如此类似于狄利克雷怪物的函数是普通的函数。（在黎曼扩展了的积分概念中并没有什么“任意的”东西；他的革命性的一步是追问何种函数可以由三角级数来表示，而不是追问何种函数是傅里叶可展开的。他的目的是要扩展积分的概念，使所有三角级数之和的函数能够是可积的从而是傅里叶可展开的。这是概念的工具主义的一个最漂亮的例子。）

或许我们在这里应该能够识别出关于狄利克雷已经建立了“狄利克雷函数定义”这一传言的始作俑者。那就是 H·汉克尔，他在分析函数概念的发展中（［1882］，第 63—112 页），解释了傅里叶的结论是如何打破旧的函数概念的。然后，他继续说道：

剩下要做的是，首先，不再讨论函数能够解析的条件，原因是这一条件无关紧要；其次，在摆脱这一纠缠的同时，给出如下的说明：一个被称作变元 x 的函数 y，如果对某一区间内变元 x 的值，都相应地存在确定的 y 的值，不论 y 在整个区间依照同样的定律是否依赖于 x，也不论这一依赖关系是否可以用数学运算来表达。我把这个纯粹名词性定义归之于狄利克雷，因为它是狄利克雷研究傅里叶级数的基础，并且表明了那个较早的概念是站不住脚的……

（c）可测集的卡拉西尔德瑞定义

从演绎主义转变为探试论方法的确是困难的，但是一些讲授现代数学的老师已经意识到需要这样做。让我们来看一个例子。在现代教科书关于测度论或概率论的部分，我们经常会碰到可测集的卡拉西尔德瑞（Carathéodory）定义：

设是一个在遗传环 H 上的外测度。集合 E 在 H 中是可测的，如果对于每一个在 H 中的集合 A，

〔25〕。

如此这般的定义一定是令人迷惑的。当然解释它总是很容易：数学家就是以其所好来定义概念的。可是认真的老师不会接受这种安逸的庇护。他们也不会说这就是正确的、真的可测性的定义，成熟的数学方面的见识将会如此来看待它。事实上，他们通常会给出一个相对模糊的暗示，提示我们可以看看后面由定义得出的结论："诸多定义都是一些教条；只有那些从这些定义得出的结论才能够提供新的见识。"〔20〕所以我们不得不对定义暂且不加考察，而看看会出现什么情况。虽然这中间有专横的论述，但是至少它是问题已经被意识到的一种标记。这是一个辩解，即使它依然是一个专横的辩解。让我们引用哈莫斯为卡拉西尔德瑞定义所做的辩解："要获得关于可测性意义的直觉的理解是相当困难的，除非完全熟悉其所隐含的东西，我们打算在下面展开之。"〔21〕然后他继续说道：

不管怎样，下面的注解也许是有帮助的。一个外测度不必是可数的，甚至也不必是有限可加的集函数。为了满足可加性这一合理的要求，我们挑选了可加地分割其他每一个集合的那些集合——可测性定义是这个相当不精确描述的精确表达。这一看似复杂的概念最为正当的理由就是，它作为一个工具，在证明那个重要而且有用的§13中的扩展定理时，尽管可能令人吃惊但却是绝对彻底的成功的事情〔22〕。

这个理由的第一部分，有关"直觉的"那一部分是有一点误导，因为，正如我们从第二部分获知，这一概念在卡拉西尔德瑞关于测度扩张的定理（哈莫斯在下一章引入之）中是证明产生的概念。所以，不管它是或者不是直觉的根本不会引人关注：其根本理由不是存在于它的直觉性之中，而是存在于它的证明原型处。我们决不应该把证明产生的概念从其证明原型处扯下来，而在证明之前的诸节甚至诸章中就提出来，而这一概念从探试法的角度来讲是由证明所衍生的。

M·洛易夫（M. Loeve）在其［1955］中，就非常恰当地在他关于测度的扩张的一节提出这个定义，把它作为扩张定理的一个必要的概念:"我们将需要这里所收集的各种各样的概念。"〔23〕但是，他究竟怎样知道这些最复杂的工具中哪些是将来的运算所需要的呢？的确，他已经对他将会发现什么和怎样进行下去有了一些想法。那么，这一神秘的把定义放在证明之前的安排又是为了什么呢？

人们可以容易地举出更多的例子，在那里陈述原始猜想，给出证明、反例，并且按照探试法的秩序直到定理和证明产生的定义，这将消除抽象数学中专横的神秘主义，并将担当阻止退化之闸。研究几个退化的案例对数学来讲是大有益处的。不幸的是，演绎主义风格和数学知识的支离破碎为"退化的"论文保驾护航使之处于相当重要的地位。

注　释

〔1〕某些教科书声称并不期望读者具备什么预先的知识，只要认识到数学的完备性特征就行了。这常常意味着他们期望读者生来就具有从事欧几里得式论证的"能力"，而对问题的背景、论证背后的探试过程则没有任何不自然的兴趣。

〔2〕人们依然没有充分地意识到现在的数学和科学教育是权威主义的温床，也是独立和批

判性的思想的最坏的敌人。在数学中这种权威主义遵循刚才所描述的演绎主义模式，在科学中它是通过归纳主义模式来运作的。

在科学之中，有着长久以来的归纳主义传统。以这种风格撰写的完美的论文都是从辛勤地描述试验布置开始，随后是对实验及结果的描述。一个“归纳的概括”就可以结束这篇论文了。问题情形，试验中必须加以检验的猜想被隐藏了。作者自吹其空白的（empty）、纯洁无瑕的心灵。这样的论文只有那些少数实际了解问题情形的人才能读懂。——归纳主义风格反映了一种伪装，就是伪装科学家都是从空白的心灵开始其研究的，然而，事实上他们的心灵在开始时就装满了想法。这一游戏并非总能成功，它只能由那些也只能为那些经过挑选的内行的专家来进行。归纳主义风格，正如它的演绎主义孪生兄弟一样（并非互补的东西！），当声称其客观性时，事实上是在培养一种并非普遍通用的行业语言，是在分裂科学、窒息批评、使科学权威化。反例在这样的表述中永远不能出现：人们是从观察（不是理论）开始，那么显然除非有预先的理论，否则谁也不能观察到反例。

〔3〕这些人声称，数学家在充满乐趣的自由创造的活动过程中是从空白的心灵开始，随意地建立其公理和定义，只是在稍后的阶段，他们才从这些公理和定义中推演出定理。如果依照某些解释，公理为真，那么定理也将为真。数学真理的传送带不可能失败。在我们对证明程序进行案例研究之后，如果我们不接受把数学限制为一个形式系统，那么大体上，这一作为对演绎主义风格进行辩护的论证就可以排除了。

现在既然波普尔已经表明了那些声称归纳是科学发现的逻辑的人是错的，那么这些文章就是打算表明那些声称演绎是数学发现的逻辑的人也是错的。波普尔批判了归纳主义风格，而这些文章是试图批判演绎主义风格。

〔4〕这一教条是大多数类型的形式主义数学哲学的本质部分。形式主义者，当他们谈到发现，会区别对待发现的背景（context）和论证的背景。“发现的背景留给了心理分析，而逻辑才关涉到论证的背景。”（莱欣巴赫（Reichenbach）［1947］，第 2 页）相似的观点可以在 R·B·布雷思韦特［1953］第 27 页，甚至在 K·R·波普尔［1959］第 31—32 页以及他的［1935］中找到。波普尔，当他（实际上是在 1934 年）如此这般把发现的有关方面在心理学和逻辑学之间进行划分，而没有一个位置留给探试法作为一个独立的调查领域，那时他显然还没有意识到他的“发现的逻辑”不仅仅只是一个科学进步的严格的逻辑模式。这就是他的那本著作的标题自相矛盾的源头，其论点似乎是两面性的：（a）没有科学发现的逻辑——培根和笛卡儿都错了；（b）科学发现的逻辑就是猜想和反驳的逻辑。这一悖论的解决方法就在手边：（a）并没有绝无谬误论者那样的科学发现的逻辑，其可以绝无谬误地导出结果；（b）存在难免有错误论的发现逻辑，其就是科学进步的逻辑。但是波普尔，他已经放下了这一发现的逻辑之基础，不再对什么是他的研究的本质这样的元问题（metaquestion）感兴趣，并且他没有意识到这既不是心理学也不是逻辑学，它是一门独立的学科，就是发现的逻辑——探试法。

〔5〕尽管不得不承认这样的论文也将非常少，但是关于问题情形的陈述也会非常明显地显示出相当多的论文是空洞无意义的。

〔6〕由于某种原因，在一些教科书中，一致收敛被单列出来作为例外（准探试法）看待。例如 W·鲁丁（Rudin）在其［1953］中，首先介绍的一节：“主要问题的讨论”（第 115 页），

在那里，他提出了原始猜想及其反驳，并且只是那时才引入一致收敛的定义。这一表述有两处瑕疵：(a)鲁丁并不是仅仅只提出原始猜想和它的反驳，而是要追问原始猜想是对还是错，并且用熟悉的例子表明其错误性。但是他这样做也没有超越绝无谬误论者的风格;在他的"问题情形"中没有猜想而只有尖锐深奥的问题，跟在后面的是一个给出坚定回答的例子（不是反例)。(b）鲁丁并没有说明一致收敛的概念是来自于证明，相反，依照他的陈述，定义是先于证明的。这也无外乎是落入演绎主义风格的窠臼，因为如果他先给出初始证明，然后是一个反驳，跟着是改进的证明和证明产生的定义，那么他将揭示出"永恒静止的"数学的运动、"不可能错误的"数学的可错性，这与欧几里得传统就不一致了。(也许还应该补充，我一直在引用鲁丁的著作，因为那是这一传统中的最好的教科书之一。）例如，在前言中，鲁丁说道："这一点看起来很重要，特别是对于初学者，就是要清楚地看到定理的假设是保证结论的有效性所必需的。为这一目的，相当大的数量的反例已经包含在课本中。"不幸的是，这些都是假的反例，因为事实上，这些例子都是为了显示数学家是多么聪明地把所有的假设都包含在定理之中。但是他并不说出：这些假设是从哪里来的，它们来自于证明的计划，定理也不是从数学家的脑袋中蹦出来的，就像雅典娜女神一样武装整齐地从宙斯的脑袋中蹦出来。他的"反例"一词的使用将不会误导我们期待一个难免有错误论的风格。*编者按：拉卡托斯关于鲁丁的著作的所有评论都是以这本书的第一版为基础。拉卡托斯所引用的段落不是都能在 1964 年出版的第二版中找到。

〔7〕这一黑格尔式的异化的人的活动自主性的观念可以为一些涉及社会科学特别是经济学的方法论的问题提供线索。我的数学家作为数学的不完美的人格化的概念，与马克思的资本家作为资本的人格化的概念非常相似。不幸的是，马克思没有强调这一人格化的不完美的特征，关于这一过程的实现也没有什么东西是坚定不变的，并以此来限制他的观念。相反，人的活动总是能够压制或者歪曲异化过程的自主性，并且能够产生新的自主性。对这一具体化的过程的疏漏是马克思主义辩证法的主要缺点。

〔8〕*编者按：我们确实觉得拉卡托斯会在某些方面修改这一段，因为随着其工作的进展，他的黑格尔的背景的限制变得越来越弱了。然而，他的确保留了一个信念，就是确认人的知性活动的产品部分的自主性的重要价值。在这个命题的客观内容的世界中（波普尔把它叫做"第三世界"：见其［1972］)，问题的存在（例如，由两个命题之间的逻辑的不一致性所引起的）独立于我们对它们的认知；因此，我们可以发现（而不是发明）知性的问题。但是拉卡托斯相信这些问题并不"要求"解答或者强求属于它们自己的解答；更确切地说，人的创造力（它或许会出现，或许不会）是解决这些问题必不可少的。上面对马克思批评的脚注中已经预示了这一观点。

〔9〕鲁丁［1953］，第 99—100 页。

〔10〕鲁丁［1953］，前言。

〔11〕这一证明和包括其在内的定理事实上都在鲁丁的著作中提到过，但是它们都隐藏在第 8 章练习 17 中了，与上面两个以专横的方式引入的概念完全没有联系。

〔12〕傅里叶［1808］，第 112 页。

〔13〕"傅里叶可展开的"代表"能够展开成为带有傅里叶系数的三角级数"。

〔14〕见其［1829］和［1837］。对于这一证明的背景有许多有趣的方面，不幸我们现在都不能深入探究；例如，傅里叶最初的“证明的”价值问题，关于后来的两个狄利克雷证明的比较的问题，以及狄利克雷对柯西的较早的证明所作的决定性的批判之问题。

〔15〕这里应该提到，狄利克雷的证明并非由针对傅里叶原始猜想的反例所引导，或是受其启发。没有人提出任何反例；事实上，柯西“证明了”原始猜想。（参见第 131 页，脚注②；他的证明的有效范围是空集。）最初的反例只是由狄利克雷证明的引理才让人想到的；特别是由于其第一引理。除此之外，傅里叶猜想的第一个反例只是在 1876 年才由杜布瓦斯-雷蒙德提出来，他发现了不是傅里叶可展开的连续函数。（杜布瓦斯-雷蒙德［1876］。）

〔16〕突然就“引入”一个概念是一种不可思议的做法，以演绎主义风格撰写的历史中就常常诉诸这一做法。

〔17〕见约当［1881］和［1893］，第 241 页。约当他自己强调他并没有修改狄利克雷的证明，而只是修改了他的定理。（“……于是狄利克雷的证明不需要修改就可以应用到每一个有限振荡的函数中……”）然而，齐格蒙德（Zygmund）当他说约当的定理与狄利克雷的相比“只是表面上更加普遍”时，他说错了（齐格蒙德［1935］，第 25 页）。这是约当证明而非约当定理之真实情况。然而，说约当把狄利克雷定理“扩展”到有界变差函数的更普遍的范围是一种误导。（例如，舍克法尔维-纳吉（Szökefalvi-Nagy）［1954］，第 272 页。）卡斯劳（Carslaw）在其［1930］的历史导论中也显示出对证明分析缺乏理解。他没有注意到狄利克雷的证明是证明产生的有界变差概念的证明原型。

〔18〕多证多驳法全部标准阶段的清单可参见第 137—138 页。

〔19〕在这一发现中，杜布瓦斯-雷蒙德又是先行者（［1879］，［1885］），而拥有令人羡慕的敏锐的 C·约当又是实际的发现者（约当［1887］第 594—598 页和［1893］第 100—108 页）。

〔20〕K·门格尔（K. Menger）［1928］，第 76 页，经由 K·R·波普尔同意引自其［1959］，第 55 页。

〔21〕哈莫斯［1950］，第 44 页。

〔22〕哈莫斯［1950］，第 44 页。

〔23〕洛易夫［1955］，第 87 页。

〔24〕鲁丁［1953］，第 106 页。

〔25〕哈莫斯（Halmos）［1950］，第 44 页。

参考书目

（由格里高利·柯里（Gregory Currie）修订和扩充）

Abel, N. H. [1825] 'Letter to Holmboë', in S. Lie and L. Sylow (eds.): Oeuvres Complètes, Vol. 2. Christiania: Grøndahl, 1881, pp. 257-258.

Abel, N. H. [1826a] 'Letter to Hansteen', in S. Lie and L. Sylow (eds.): Oeuvres Complètes, Vol. 2. Christiania: Grøndahl, 1881, pp. 263-265.

Abel, N. H. [1826b] 'Untersuchungen über die Reihe

Jounral fiir die Reine und Angewandte Mathematik, Ⅰ, pp. 311-339.

Abel, N. H. [1881] 'Sur les Séries', in S. Lie and L. Sylow (eds.): Oeuvres Complètes, Vol. 2. Christiania: Grøndahl, pp. 197-205.

Aetius [c. 150] Placita, in H. Diels (ed.): Doxographi Graeci. Berolini: Reimeri, 1879.

Aleksandrov, A. D. [1956] 'A General View of Mathematics', in A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov and M. A. Lavrent'ev (eds.): Mathematics: its Content, Methods and Meaning. (English translation by S. H. Gould, K. A. Hirsch and T. Bartha. Cambridge, Massachusetts: M. I. T. Press, 1963).

Ambrose, A. [1959] 'Proof and the Theorem Proved', Mind, 68, pp. 435-445.

Arber, A. [1954] The Mind and the Eye. Cambridge: Cambridge University Press.

Arnauld, A. and Nicole, P. [1724] La Logique, ou L'Art de Penser. Lille: Publications de la Faculté des Lettres et Sciences Humaines de l'Université de Lille, 1964.

Bacon, F. [1620] Novum Organum. English translation in R. L. Ellis and J. Spedding (eds.): The Philosophical Works of Francis Bacon. London: Routledge, 1905, pp. 241-387.

Baltzer, R. [1862] Die Elemente der Mathematik, Vol. 2. Leipzig: Hirzel.

Bartley, W. W. [1962] Retreat to Commitment. New York: Alfred A. Knopf.

Becker, J. C. [1869a] 'Über Polyeder', Zeitschrift für Mathematik und Physik, 14, pp. 65-76.

Becker, J. C. [1869b] 'Nachtrag zu dem Aufsätze über Polyeder', Zeitschrift für Mathematik und Physik, 14, pp. 337-343.

Becker, J. C. [1874] 'Neuer Beweis und Erweiterung eines Fundamentalsatzes über Polyederflächen', Zeitschrift für Mathematik und Physik, 19, pp. 459-460.

Bell, E. T. [1945] The Development of Mathematics. Second edition. New York: McGraw-Hill.

Bérard, J. B. [1818-1819] 'Sur le Nombre des Racines Imaginaires des Équations; en Réponse aux Articles de MM. Tédenat et Servois', Annales de Mathématiques, Pures et Appliquées, 9, pp. 345-372.

Bernays, P. [1947] Review of Pólya [1945], Dialectica Ⅰ, pp. 178-188.

Bolzano, B. [1837] Wissenschaftslehre. Leipzig: Meiner, 1914-1931.

Bourbaki, N. [1949] Topologie Général. Paris: Hermann.

Bourbaki, N. [1960] Éléments d'Histoire des Mathématiques. Paris: Hermann.

Boyer, C. [1939] The Concepts of the Calculus. New York: Dover, 1949.

Braithwaite, R. B. [1953] Scientific Explanation. Cambridge: Cambridge University Press.

Brouwer, L. E. J. [1952] 'Historical Background, Principles and Methods of Intuitionism', South African Journal of Science, 49, pp. 139-146.

Carnap, R. [1937] The Logical Syntax of Language. New York and London: Kegan Paul. (Revised Translation of Logische Syntax der Sprache, Vienna: Springer, 1934.)

Carslaw, H. S. [1930] Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals. Third Edition. New York: Dover, 1950.

Cauchy, A. L. [1813a] 'Recherches sur les Polyèdres', Journal de l'Ecole Polytechnique, 9, pp. 68-86. (Read in February 1811).

Cauchy, A. L. [1813b] 'Sur les Polygones et les Polyèdres', Journal de l'École Polytechnique, 9, pp. 87-98. (Read in January 1812.)

Cauchy, A. L. [1821] Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique. Paris: de Bure.

Cauchy, A. L. [1826] 'Mémoire sur les Développements des Functions en Séries Périodiques', Mémoires de l'Académie des Sciences 6, pp. 603-612.

Cauchy, A. L. [1853] 'Note sur les Séries Convergentes dont les Divers Terms sont des Fonctions Continues d'une Variable Réelle ou Imaginaire Entre des Limites Données', Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, 37, pp. 454-459.

Cayley, A [1859] 'On Poinsot's Four New Regular Solids', The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 4th Series, 17, pp. 123-128.

Cayley, A. [1861] 'On the Partitions of a Close', The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 4th Series, 21, pp. 424-428.

Church, A. [1956] Introduction to Mathematical Logic, Vol. 1. Princeton: Princeton University Press.

Clairaut, A. C. [1741] Eléments de Géométrie. Paris: Gauthier-Villars.

Copi, I. M. [1949] 'Modern Logic and the Synthetic A Priori', The Journal of Philosophy, 46, pp. 243-245.

Copi, I. M. [1950] 'Gödel and the Synthetic A Priori: a Rejoinder', The Journal of Philosophy, 47, pp. 633-636.

Crelle, A. L. [1826-1827] Lehrbuch der Elemente der Geometrie, Vols. 1 and 2, Berlin: Reimer.

Curry, H. B. [1951] Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics. Amsterdam: North Holland.

Darboux, G. [1874a] 'Lettre à Houel, 12 Janvier'. (Quoted in F. Rostand: Souci d'Exactitude et Scrupules des Mathématiciens. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin, 1960, p. 11.)

Darboux, G. [1874b] 'Lettre à Houel, 19 Février'. (Quoted in F. Rostand: Souci d'Exactitude et Scrupules des Mathématiciens. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin, 1960, p. 194.)

Darboux, G. [1875] 'Mémoire sur les Fonctions Discontinues', Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, second series 4, pp. 57-112.

Darboux, G. [1883] 'Lettre à Houel, 2 Septembre'. (Quoted in F. Rostand: Souci d'Exactitude et Scrupules des Mathématiciens. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin, 1960, p. 261.)

Denjoy, A. [1919] 'L'Orientation Actuelle des Mathématiques', Revue du Mois, 20, pp. 18-28.

Descartes, R [1628] Rules for the Direction of the Mind. English Translation in E. S. Haldane and G. R. T. Ross (eds.): Descartes' Philosophical Works, Vol. 1, Cambridge: Cambridge University Press, 1911.

Descartes, R. [1639] De Solidorum Elementis. (First published in Foucher de Careil: Oeuvres Inédites de Descartes, Vol. 2, Paris: August Durand, 1860, pp. 214-234. For a Considerably Improved Text See C. Adam and P. Tannery (eds.): Oeuvres de Descartes, Vol. 10, pp. 257-278, Paris: Cerf, 1908.)

Dieudonné, J. [1939] 'Les Méthodes Axiomatiques Moderes et les Fondements des Mathématiques', Revue Scientifique, 77, pp. 224-232.

Diogenes Laertius [c. 200] Vitae Philosophorus. With an English Translation by R. D. Hicks. Vol. 2, London: Heinemann, 1925.

Dirichlet, P. L. [1829] 'Sur la Convergence des Séries Trigonométriques que Servent à Représenter une Fonction Arbitraire Entre des Limites Données', Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 4, pp. 157-169.

Dirichlet, P. L. [1837] 'Über die Darstellung Ganz Willkürlicher Functionen durch Sinus und Cosinusreihen', in H. W. Dove and L. Moser (eds.): Repertorium der Physik, 1, pp. 152-174.

Dirichlet, P. L. [1853] 'Letter to Gauss, 20 February 1853', in L. Kronecker (ed.): Werke, Vol. 2, pp. 385-387. Berlin: Reiner, 1897.

du Bois-Reymond, P. D. G. [1875] 'Beweis, das die Coefficienten der Trigono-metrischen Reihe f(x) ＝(ap cos px ＋bp sin px) die werte

haben, jedesmal wenn diese Integrale Endlich und Bestimmt sind', Abhandlungen der Königlich-Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-Physikalischen Classe, 12, 1, pp. 117-166.

du Bois-Reymond, P. D. G. [1876] 'Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourier'schen Darstellungsformeln', Abhandlungen der Königlich-Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-Physikalischen Classe, 12, 2, pp. i-xxiv and 1-102.

du Bois-Reymond, P. D. G. [1879] 'Erläuterungen zu den Anfangsgründen der Variationrechnung', Mathematische Annalen, 15, pp. 282-315, 564-576.

du Bois-Reymond, P. D. G. [1885] Über den Begriff der Länge einer Curve', Acta Mathematica, 6, pp. 167-168.

Dyck, W. [1888] 'Beiträge zur Analysis Situs', Mathematische Annalen, 32, pp. 457-512.

Einstein, A. [1953] 'Letter to P. A. Schilpp'. Published in P. A. Schilpp: 'The Abdication of Philosophy', Kant Studien, 51, pp. 490-491, 1959-1960.

Euler, L. [1756-1757] 'Specimen de usu Observationum in Mathesi Pura', Novi Comentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, 6, pp. 185-230. Editorial summary, pp. 19-21.

Euler, L. [1758a] 'Elementa Doctrinae Solidorum', Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, 4, pp. 109-140. (Read in November 1750.)

Euler, L. [1758b] 'Demonstratio Nonnullarum Insignium Proprietatus Quibus Solida Hedris Planis Inclusa sunt Praedita', Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, 4, pp. 140-160. (Read in September 1751.)

Eves, H. and Newsom, C. V. [1958] An Introduction to the Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics. New York: Rinehart.

Félix, L. [1957] L'Aspect Moderne des Mathématiques. (English translation by J. H. Hlavaty and F. H. Hlavaty: The Modern Aspect of Mathematics, New York: Basic Books, 1960.)

Forder, H. G. [1927] The Foundations of Euclidean Geometry. New York: Dover, 1958.

Fourier, J. [1808] 'Mémoire sur la Propagation de la Chaleur dans les Corpe Solides (Extrait)', Nouveau Bulletin des Sciences, par la Société Philomathique de Paris, Ⅰ, pp. 112-116.

Fréchet, M [1928] Les Éspaces Abstraits. Paris: Gauthier-Villars.

Fréchet, M. [1938] 'L'Analyse Générale et la Question des Fondements', in F. Gonseth (ed.): Les Entretiens de Zürich, sur les Fondements et la Méthode des Sciences Mathématiques, Zürich: Leemans Frères et Cie, 1941. pp. 53-73.

Frege, G. [1893] Grundgesetze der Arithmetik, Vol. Ⅰ, Hildesheim: George Olms, 1962.

Gamow, G. [1953] One, Two, Three... Infinity. New York: The Viking Press.

Gauss, C. F. [1813] 'Disquisitiones Generales Circa Seriem Infinitam

in Werke, Vol. 3, pp. 123-162. Leipzig: Teubner.

Gergonne, J. D. [1818] 'Essai sur la Théorie des Definitions', Annales de Mathématiques, Pures et Appliquées, 9, pp. 1-35.

Goldschmidt, R. [1933] 'Some Aspects of Evolution', Science, 78, pp. 539-547.

Grunert, J. A. [1827] 'Einfacher Beweis der von Cauchy und Euler Gefundenen Sätze von Figurennetzen und Polyedern', Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 2, p. 367.

Halmos, P. [1950] Measure Theory. New York and London: Van Nostrand Reinhold.

Hankel, H. [1882] 'Untersuchungen über die Unendlich oft Oscillierenden und Unstetigen Functionen', Mathematische Annalen, 20, pp. 63-112.

Hardy, G. H. [1918] 'Sir George Stokes and the Concept of Uniform Convergence', Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 19, pp. 148-156.

Hardy, G. H. [1928] 'Mathematical Proof', Mind, 38, pp. 1-25.

Haussner, R. (ed.) [1906] Abhandlungen über die Regelmassigen Sternkörper. Ostwald's Klassiker der Exacten Wissenschaften, No. 151, Leipzig: Engelmann.

Heath, T. L. [1925] The Thirteen Books of Euclid's Elements. Second edition. Cambridge: Cambridge University Press.

Hempel, C. G. [1945] 'Studies in the Logic of Confirmation, 1 and 2', Mind, 54, pp. 1-26 and 97-121.

Hermite, C. [1893] 'Lettre à Stieltjes, 20 Mai 1893', In B. Baillaud and H. Bourget (eds.): Correspondence d'Hermite et de Stieltjes, 2, pp. 317-319. Paris: Gautheirs-Villars, 1905.

Hessel, J. F. [1832] 'Nachtrag zu dem Euler'schen Lehrsatze von Polyedern', Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 8, pp. 13-20.

Heyting, A. [1939] 'Les Fondements des Mathématiques du Point de Vue Intuitionniste', in F. Gonseth: Philosophie Mathématique, Paris: Hermann, pp. 73-75.

Heyting, A. [1956] Intuitionism: An Introduction. Amsterdam: North Holland.

Hilbert, D. and Cohn-Vossen, S. [1932] Anschauliche Geometrie. Berlin: Springer. English translation by P. Nemenyi: Geometry and the Imagination. New York: Chelsea (1956).

Hobbes, T. [1651] Leviathan, in W. Molesworth (ed.): The English Works of Thomas Hobbes, Vol. 3. London: John Bohn, 1839.

Hobbes, T. [1656] The Questions Concerning Liberty, Necessity and Chance, in W. Molesworth (ed.): The English Works of Thomas Hobbbes, Vol. 5. London: John Bohn, 1841.

Hölder, O. [1924] Die Mathematische Methode. Berlin: Springer.

Hoppe, R [1879] 'Ergänzung des Eulerschen Satzes von den Polyedern', Archiv der Mathematik und Physik, 63, pp. 100-103.

Husserl, E. [1900] Logische Untersuchungen, Vol. Ⅰ. Tubingen: Niemeyer, 1968.

Jonquières, E. de [1890a] 'Note sur un Point Fondamental de la Théorie des Polyèdres', Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences, 110, pp. 110-115.

Jonquières, E. de [1890b] 'Note sur le Théorème d'Euler dans la Théorie des Polyèdres', Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences, 110, pp. 169-173.

Jordan, C. [1866a] 'Recherches sur les Polyèdres', Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 66, pp. 22-85.

Jordan, C. [1866b] 'Résumé de Recherches sur la Symétrie des Polyèdres non Eulériens', Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 66, pp. 86-91.

Jordan, C. [1881] 'Sur la Série de Fourier', Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences, 92, pp. 228-233.

Jordan, C. [1887] Cours d'Analyse de l'École Polytechnique, Vol. 3, first edition. Paris: Gauthier-Villars.

Jordan, C. [1893] Cours d'Analyse de l'École Polytechnique, Vol. Ⅰ, second edition. Paris: Gauthier-Villars.

Jourdain, P. E. B. [1912] 'Note on Fourier's Influence on the Conceptions of Mathematics', Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematics, 2, pp. 526-527.

Kant, I. [1781] Critik der Reinen Vernunft. First edition.

Kepler, I. [1619] Harmonice Mundi, in M. Caspar and W. von Dyck (eds.): Gesammelte Werke, Vol. 6. Munich: C. H. Beck, 1940.

Knopp, K. [1928] Theory and Application of Infinite Series. (Translated by R. C. Young, London and Glasgow: Blackie, 1928.)

Lakatos, I. [1961] Essays in the Logic of Mathematical Discovery, unpublished Ph. D. Dissertation, Cambridge.

Lakatos, I. [1962] 'Infinite Regress and the Foundations of Mathematics', Aristotelian Society

Supplementary Volumes, 36, pp. 155-184.

Lakatos, I. [1970] 'Falsification and the Methodology of Scientific Research Programmes', in I. Lakatos and A. E. Musgrave (eds.): Criticism and the Growth of Knowledge, Cambridge: Cambridge Univeristy Press, pp. 91-196.

Landau, E. [1930] Grundlagen der Analysis. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft.

Lebesgue, H. [1923] 'Notice sur la Vie et les Travaux de Camille Jordan', Mémoires de l'Académie de l'Institute de France, 58, pp. 34-66. Reprinted in H. Lebesgue, Notices d'Histoire des Mathématiques, Genève. pp. 40-65.

Lebesgue, H. [1928] Lecons sur l'Intégration et la Recherche des Fonctions Primitives. Paris: Gauthier-Villars. (Second, enlarged edition of the original 1905 version.)

Legendre, A. -M. [1809] Éléments de Géométrie. Eighth edition. Paris: Didot. The first edition appeared in 1794.

Leibniz, G. W. F. [1687] 'Letter to Bayle', in C. I. Gerhardt (ed.): Philosophische Schriften. Vol. 3. Hildesheim: George Olms (1965), p. 52.

Lhuilier, S. A. J. [1786] Exposition Élémentaire des Principes des Calculs Supérieurs. Berlin: G. J. Decker.

Lhuilier, S. A. J. [1812-1813a] 'Mémoire sur la Polyèdrométrie', Annales de Mathématiques, Pures et Appliquées, 3, pp. 168-191.

Lhuilier, S. A. J. [1812-1813b] 'Mémoire sur les Solides Réguliers', Annales de Mathématiques, Pures et Appliquées, 3, pp. 233-237.

Listing, J. B. [1861] 'Der Census Räumlicher Complexe', Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 10, pp. 97-182.

Loève, M. [1955] Probability Theory. New York: Van Nostrand.

Matthiessen, L. [1863] 'Über die Scheinbaren Einschränkungen des Euler'schen Satzes von den Polyedern', Zeitschrift für Mathematik und Physik, 8, pp. 449-450.

Meister, A. L. F. [1771] 'Generalia de Genesi Figurarum Planarum et inde Pendentibus Earum Affectionibus', Novi Commentarii Societatis Reglae Scientiarum Gottingensis, 1, pp. 144-180.

Menger, K. [1928] Dimensionstheorie. Berlin: Teubner.

Möbius, A. F. [1827] Der Barycentrische Calcul. Hildesheim: George Olms, 1968.

Möbius, A. F. [1865] 'Über die Bestimmung des Inhaltes eines Polyeders', Berichte Königlich-Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, Mathematisch-Physikalische Classe, 17, pp. 31-68.

Moigno, F. N. M. [1840-1841] Leçons de Calcul Differentiel et de Calcul Intégral, 2 Vols. Paris: Bachelier.

Moore, E. H. [1902] 'On the Foundations of Mathematics', Science, 17, pp. 401-416.

Morgan, A. de [1842] The Differential and Integral Calculus. London: Baldwin and Gadock.

Munroe, M. E. [1953] Introduction to Measure and Integration. Cambridge, Massachusetts: Addison-Wesley.

Neumann, J. von [1947] 'The Mathematician', in Heywood, R. B. (ed.): The Works of the Mind. Chicago: Chicago University Press.

Newton, I. [1717] Opticks. Second Edition. London: Dover, 1952.

Olivier, L. [1826] 'Bemerkungen über Figuren, die aus Behebigen, von Geraden Linien Umschlossenen Figuren Zusammengesetzt sind', Journal für die Reine und Angewandt Mathematik, Ⅰ, pp. 227-231.

Pascal, B. [1659] Les Réflexions sur la Géométrie en Général (De l'Ésprit Géométrique et de l'Art de Persuader). In J. Chevalier (ed.): Oeuvres Complètes, Paris: La Librairie Gallimard, 1954, pp. 575-604.

Peano, G. [1894] Notations de Logique Mathématique. Turin: Guadagnini.

Pierpont, [1905] The Theory of Functions of Real Variables, Vol. Ⅰ. New York: Dover, 1959.

Poincaré, H. [1893] 'Sur la Généralisation d'un Théorème d'Euler relatif aux Polyèdres', Comptes Rendus de Séances de l'Académie des Sciences, 117, p. 144.

Poincaré, H. [1899] 'Complément à l'Analysis Situs', Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 13, pp. 285-343.

Poincaré, H. [1902] La Science et l'Hypothèse. Paris: Flammarion. Authorised English translation by G. B. Halsted: The Foundations of Science, Lancaster, Pennsylvania: The Science Press, 1913, pp. 27-197.

Poincaré, H. [1905] La Valeur de la Science. Paris: Flammarion. Authorised English translation by G. B. Halsted: The Foundations of Science, Lancaster, Pennsylvania: The Science Press, 1913, pp.

359-546.

Poincaré, H. [1908] Science et Méthode. Paris: Flammarion. Authorised English translation by G. B. Halsted: The Foundations of Science, Lancaster, Pennsylvania: The Science Press, pp. 546-854.

Poinsot, L. [1810] 'Mémoire sur les Polygones et les Polyèdres', Journal de l'École Polytéchnique, 4, pp. 16-48. Read in July 1809.

Poinsot, L. [1858] 'Note sur la Théorie des Polyèdres', Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 46, pp. 65-79.

Pó1ya, G. [1945] How to Solve It. Princeton: Princeton University Press.

Pólya, G. [1954] Mathematics and Plausible Reasoning, Vols. 1 and 2. London: Oxford University Press.

Pólya, G. [1962a] Mathematical Discovery, 1. New York: Wiley.

Pólya, G. [1962b] 'The Teaching of Mathematics and the Biogenetic Law', in I. J. Good (ed.): The Scientist Speculates. London: Heinemann, pp. 352-356.

Pólya, G. and Szegö, G. [1927] Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Vol 1, Berlin: Springer.

Popper, K. R. [1934] Logik der Forschung. Vienna: Springer.

Popper, K. R. [1935] 'Letter to the Editor', Erkenntnis, 3, pp. 426-429. Republished in Appendix ★ i to Popper [1959], pp. 311-314.

Popper, K. R. [1945] The Open Society and its Enemies. 2 volumes, London: Routledge and Kegan Paul.

Popper, K. R. [1947] 'Logic Without Assumptions', Aristotelian Society Proceedings, 47, pp. 251-292.

Popper, K. R. [1952] 'The Nature of Philosophical Problems and their Roots in Science', The British Journal for the Philosophy of Science, 3, pp. 124-156. Reprinted in Popper [1963a].

Popper, K. R. [1957] The Poverty of Historicism. London: Routledge and Kegan Paul.

Popper, K. R. [1959] The Logic of Scientific Discovery. English translation of [1934]. London: Hutchinson.

Popper, K. R. [1963a] Conjectures and Refutations. London: Routledge and Kegan Paul.

Popper, K. R. [1963b] 'Science: Problems, Aims, Responsibilities', Federation of American Societies for Experimental Biology: Federation Proceedings, 22, pp. 961-972.

Popper, K. R. [1972] Objective Knowledge. Oxford University Press.

Pringsheim, A. [1916] 'Grundlagen der Allgemeinen Functionenlehre', in M. Burkhardt, W. Wutinger and R. Fricke (eds.): Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, Vol. 2. Erste Teil, Erste Halbband, pp. 1-53. Leipzig: Teubner.

Quine, W. V. O. [1951] Mathematical Logic. Revised edition. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Ramsey, F. P. [1931] The Foundations of Mathematics and Other Essays. Edited by R. B. Braithwaite. London: Kegan Paul.

Raschig, L. [1891] 'Zum Eulerschen Theorem der Polyedrometrie', Festschrift des Gymnasium Schneeberg.

Reichardt, H. [1941] 'Losung der Aufgabe 274', Jarhresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 51, p. 23.

Reichenbach, H. [1947] Elements of Symbolic Logic. New York: Macmillan.

Reiff, R [1889] Geschichte der Unendlichen Reihen. Tubingen: H. Laupp'schen.

Reinhardt, C. [1885] 'Zu Möbius Polyedertheorie. Vorgelegt von F. Klein', Berichte über die Verhandlungen der Königlich-Sachsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, 37, pp. 106-125.

Riemann, B. [1851] Grundlagen der eine Allgemeine Theorie der Functionen einer Veranderlichen Complexen Grösse. (Inaugural dissertation) In M. Weber and R. Dedekind (eds.): Gesammelte Mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass. Second edition. Leipzig: Teubner, 1892, pp. 3-48.

Riemann, B. [1868] 'Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine Trigonometrische Reihe', Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 13, pp. 87-132.

Robinson, R. [1936] 'Analysis in Greek Geometry', Mind, 45, pp. 464-473.

Robinson, R. [1953] Plato's Earlier Dialectic. Oxford: Oxford University Press.

Rudin, W. [1953] Principles of Mathematical Analysis. First edition. New York: McGraw-Hill.

Russell, B. [1901] 'Recent Work in the Philosophy of Mathematics', The International Monthly, 3.

Reprinted as 'Mathematics and the Metaphysicians', in his [1918], pp. 59-74.

Russell, B. [1903] Principles of Mathematics. London: Allen and Unwin.

Russell, B. [1918] Mysticism and Logic. London: Allen and Unwin.

Russell, B. [1959] My Philosophical Development. London: Allen and Unwin.

Russell, B. and Whitehead, A. N. [1910-1913] Principia Mathematica. Vol. 1, 1910; Vol. 2, 1912; Vol. 3, 1913. Cambridge University Press.

Saks, S. [1933] Théorie de l'Intégrale. English translation by L. C. Young: Theory of the Integral. Second edition. New York: Hafner, 1937.

Schläfli, L. [1852] 'Theorie der Vielfachen Kontinuität'. Published posthumously in Neue Denkschriften der Allgemeinen Schweizerischen Gesellschaft für die Gesamten Naturwissenschaften, 38, pp. 1-237. Zürich, 1901.

Schröder, E. [1862] 'Über die Vielecke von Gebrochener Seitenzahl oder die Bedeutung der Stern-Polygone in der Geometrie', Zeitschrift für Mathematik und Physik. 7, pp. 55-64.

Seidel, P. L. [1847] 'Note über eine Eigenschaft der Reihen, welche Discontinuirliche Functionen Darstellen', Abhandlungen der Mathematisch-Physikalischen Klasse der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften, 5, pp. 381-393.

Sextus Empiricus [c. 190] Against the Logicians. Greek text with an English translation by R. G. Bury. London: Heinemann, 1933.

Sommerville, D. M. Y. [1929] An Introduction to the Geometry of N Dimensions. London: Dover, 1958.

Steiner, J. [1826] 'Leichter Beweis eines Stereometrischen Satzes von Euler', Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 1, pp. 364-367.

Steinhaus, H. [1960] Mathematical Snapshots. Revised and enlarged edition. New York: Oxford University Press.

Steinitz, E. [1914-1931] 'Polyeder und Raumeinteilungen', in W. F. Meyer and H. Mohrmann (eds.): Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, Vol. 3, AB. 12. Leipzig: Teubner.

Stokes, G. [1848] 'On the Critical Values of the Sums of Periodic Series', Transactions of the Cambridge Philosophical Society, 8, pp. 533-583.

Szabó, A. [1958] '"Deiknymi" als Mathematischer Terminus fur "Beweisen"', Maia, N. S. 10, pp.

1-26.

Szabó, A. [1960] 'Anfänge des Euklidischen Axiomensystems', Archive for the History of Exact Sciences, Ⅰ, pp. 37-106.

Szökefalvi-Nagy, B. [1954] Valós Függvények és Függvénysorok. Budapest: Tankönyvkiadó.

Tarski, A. [1930a] 'Über einige Fundamentale Begriffe der Metamathematik', Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, 23, Cl. Ⅲ, pp. 22-29. Published in English in J. H. Woodger (ed.) [1956], pp. 30-37.

Tarski, A. [1930b] 'Fundamentale Begriffe der Methodologie der Deduktiven Wissenschaften, Ⅰ', Monatshefte für Mathematik und Physik, 37, pp. 361-404. Published in English in J. H. Woodger (ed.) [1956], pp. 60-109.

Tarski, A. [1935] 'On the Concept of Logical Consequence'. Published in J. H. Woodger (ed.) [1956], pp. 409-420. This paper was read in Paris in 1935.

Tarski, A. [1941] Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences. Second edition. New York: Oxford University Press, 1946. (This is a partially modified and extended version of On Mathematical Logic and Deductive Method, published in Polish in 1936 and in German translation in 1937.)

Turquette, A. [1950] 'Gödel and the Synthetic A Priori', The Journal of Philosophy, 47, pp. 125-129.

Waerden, B. L. van der [1941] 'Topologie und Uniformisierung der Riemannschen Flachen', Berichte über die Verhandlungen der Königlich-Sachsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, 93, pp. 147-160.

Whewell, W. [1858] History of Scientific Ideas. Vol. Ⅰ. (Part one of the third edition of The Philosophy of the Inductive Sciences.)

Wilder, R. L. [1944] 'The Nature of Mathematical Proof', The American Mathematical Monthly, 52, pp. 309-323.

Woodger, J. M. (ed.) [1956] Logic, Semantics, Metamathematics. Oxford: Clarendon Press.

Young, W. H. [1903-1904] 'On Non-Uniform Convergence and Term-by-Term Integration of Series', Proceedings of the London Mathematical Society, Ⅰ, second series, pp. 89-102.

Zacharias, M. [1914-1931] 'Elementargeometrie', in W. F. Meyer and H. Mohrmann (eds.): Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, 3, Erste Teil, Zweiter Halbband, pp. 862-1176. Leipzig: Teubner.

Zygmund, A. [1935] Trigonometrical Series. New York: Chelsea, 1952.

人名译名对照表

A

Abel, A. H.

阿贝尔

Aetius

埃修斯

Agassi, J.

J·阿加西

Aleksandrov, A. D.

A·D·亚历山大罗夫

Ambrose, Alice

艾丽丝·安布罗斯

Arber, A.

阿伯尔

Aristotle

亚里士多德

卡斯劳

Catalan, E. C.

卡塔兰

Cauchy, A. L.

柯西

Cayley, A.

凯莱

Chrysippus

克里斯帕斯

Church, A.

丘奇

Clairaut, A. C.

克莱洛

Cleanthes

克利安西斯

Cohn-Vossen, S.

康佛森

Copi, I. M.

柯比

Crelle, A. L.

克赖莱

Currie, G.

E

Einstein, A.

爱因斯坦

Eschweiler, T. J.

艾施外勒

Euclid

欧几里得

Euler, L.

欧拉

Eves, H.

伊夫斯

F

Félix, L.

菲利克斯

Forder, H. G

H・G・福德尔

Fourier, J.

傅里叶

Fréchet, M.

弗雷歇

Frege, G.

弗雷格

Hacking, I.

I・哈金

Haeckel, E.

E・海克尔

Hallett, M.

迈克・哈莱特

Halmos, P.

哈莫斯

Hanke, H.

汉克尔

Hansteen, C.

汉斯丁

Hardy, G. H.

G・H・哈代

Haussner, R.

R・豪斯纳

Heath, T. L.

希思

Hegel, G. W. F.

黑格尔

Heis, E.

海斯

Hermite, C.

埃尔米特

Hessel, F. C.

赫塞尔

Heyting, A.

海丁

Hilbert, D.

希尔伯特

Hobbes, T.

霍布斯

Hölder, O.

霍尔德

Holmboë, B. M.

霍尔姆博

Hoppe, R.

霍珀

Husserl, E.

胡塞尔

J

Jonquiéres, E. de.

德荣奎埃

Jordan, C.

勒贝格

Legendre, A. M.

勒让德

Leibniz, G. W. F.

莱布尼茨

Lhuilier, S. A. J.

鲁易里

Listing, J. B.

李斯丁

Littlewood, J. E.

李特伍德

Lobatschewsky, P. I.

罗巴契夫斯基

Loeve, M.

洛易夫

M

Machover, M.

莫舍·玛肖韦

MacLennan, B.

B·麦克莱南

Matthiessen, L.

马蒂森

Meister, A. L. F.

迈斯特

Menger, K.

K • 门格尔

Mitchell, S. D.

桑德拉 • D • 米歇尔

Möbius, A. F.

麦比乌斯

Moigno, F. N. M.

莫格诺

Moore, E. H.

E • H • 摩尔

Morgan, A. de.

德摩根

Munroe, M. E.

芒罗

Musgrave, A.

A • 穆斯格拉夫

N

Neumann, J. von.

约翰 • 冯 • 诺伊曼

Newsom, C. V.

皮尔庞特

Plato

柏拉图

Poincaré, H.

庞加莱

Poinsot, L.

庞索特

Poisson, S. D.

泊松

Pólya, G.

G•波利亚

Popper, K. R.

波普尔

Pringsheim, A.

普林斯汉姆

Proclus

普罗克拉斯

Pythagoras

毕达哥拉斯

Q

Quine, W. V. O.

奎因

R

Young, W. H.

杨

Z

Zacharias, M.

M·扎哈里阿斯

Zahar, E.

埃利·扎哈尔

Zeno

芝诺

Zermelo, E.

策梅罗

Zygmund, A.

齐格蒙德

微信公众号名称：幸福的味道

微信公众号id：d716-716

扫此二维码加我微信好友

行行

扫一扫上面的二维码图案，加我微信

扫此二维码，添加我的微信公众号，查看我的书单