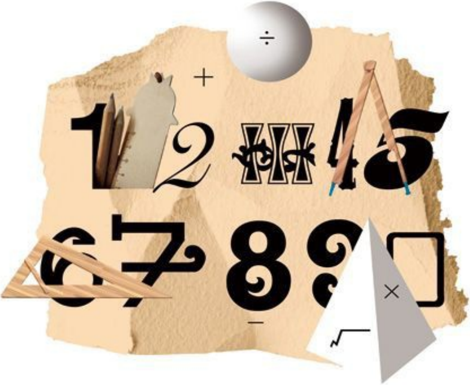
给我的孩子讲数学

• Les Mathématiques expliquées à mes filles •

[法] 德尼·盖之 著
Denis Guedj
袁俊生 译



重庆大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

给我的孩子讲数学 / （法）盖之 （Guedj，D.）著；
袁俊生译. —重庆： 重庆大学出版社， 2011.5
（给我的孩子讲述系列）
ISBN 978-7-5624-6037-4

Ⅰ. ①给… Ⅱ. ①盖… ②袁… Ⅲ. ①数学—少年读
物 Ⅳ. ①O1-49
中国版本图书馆CIP数据核字（2011)第043358号

给我的孩子讲数学 gei wode haizi jiang shuxue
[法] 德尼·盖之 著
袁俊生 译

责任编辑 高雅洁
装帧设计 楠 楠

重庆大学出版社出版发行
出版人 邓晓益
社址 （400030）重庆市沙坪坝正街174号重庆大学（A区）内
网址 http：//www.cqup.com.cn
经销 全国新华书店
印刷 北京华联印刷有限公司

开本：800×1100 1/32 印张：4.5 字数：45千
2011年6月第1版 2011年6月第1次印刷
ISBN 978-7-5624-6037-4 定价：17.00元

版贸核渝字（2010）第078号

谨向让·布莱特致谢

目录

1数学在表达什么呢？

“解释是什么意思呢？”劳拉问道。

“你也太过分了吧！拉丁词plicare的意思是‘弯曲’，explicare的意思是‘展开’，但它还表示复杂及困惑的意思。当人们面对复杂的事情而感到困惑时，便去寻找某种解释。在将剪不断、理还乱的东西展开的同时，解释可以使它变得更加清晰。是的，你紧张的时候，会感到胸口发闷，就像有个心结似的。解释就是要打开这个心结。待事情解释过后，脑子里的东西都变得清晰起来，因此有人说，解释好似‘点亮了一盏明灯’，像一股扫除阴霾的清风。”

雷期待着扫除阴霾的清风。

“劳拉，对你来说，数学究竟是什么呢？”

劳拉并未仔细想想，马上答道：

“咳，这个科目尽是问题和未知数，各种原理

困扰着我们。老师提出好多问题，非要让我去解决！”

雷大声笑起来。

和许多同学一样，劳拉的数学学得很差。至少她是这样毫无愧色地描述自己的。然而在这种高调的反应当中，我们还是不难看出一种故作潇洒的姿态，在某些学生看来，数学学得差是理所当然的事情。难道劳拉真的以此为荣，还是感觉自己在这方面的确有障碍，而且永远无法摆脱这种障碍呢？

雷和劳拉确信，他们首先应该把在数学里喜欢的或讨厌的东西讲述出来。

劳拉先说，她的话真让人感到吃惊：

“坦诚地说，我在数学里很难找到自己真心喜欢的东西……但我并不感到失望。至于说我不喜欢的嘛，我是不是接着说呢？”

“接着说。”

她的话又像炒豆似的响起来：

“首先，学数学的时候，我不知道大家在说什么。其次，我不知道该怎么做才能解答一个问题。再者，我从未搞明白究竟什么是演绎。我停下来还是继续说呢？”

“继续说。”

“我不明白数学究竟有什么用，我的意思是：在生活中有什么用。”

最后，她还是把内心的话说出来了：

“数学真是太强悍了！”

雷用惊愕的眼神看了她一眼。数学太强悍了！只有劳拉才能提出这样的责难。雷笑了笑，接着说：

“如果你能在数学里感受到强悍，这至少说明你对数学并非毫无兴趣。”

劳拉有点动摇了，最终又冒出一句：

“难道监狱会让囚犯不在乎吗？”

“数学，监狱！！！”

“这只是一个类比，是为了反驳你的论据，向你表明你的论据并不能证明什么。你想想看，从小时候到现在，人们强迫我每周要花好几个小时去做数学练习，我会对这么一个科目不在乎吗？”

“也许你能告诉我，数学是怎么强悍的呢？”

“我觉得数学太冷酷了，所有的事情一下子都落下来，就像断头台上的大铡刀似的。你要是在一个微小细节上搞错了，那就全完了，错了，彻底错了……而不是一点小错。”

雷大声笑起来。

劳拉接着说道：“你会感觉到事情就是这样，

而不是别的样子，这真让我受不了。我感到无能为力。这会让你目瞪口呆。我可不想让人弄成目瞪口呆的样子。数学嘛，其实就是……无可辩驳的。”

“那你究竟想辩驳什么呢？”

“什么都不想。”

她发现雷的嘴边露出一丝微笑：

“哎！你可别高兴呀。我没有什么可辩驳的，那是因为我对此没有太大的兴趣，因此也就没有什么好说的了。我只是对自己感兴趣的东西才有说的！”

“你确信只有在数学里‘事情就是这样，而不是别的样子’吗？塞纳河流经巴黎，而不是穿过斯特拉斯堡，事情就是这样，而不是别的样子。巴士底狱是在1789年7月14日，而不是7月13日被攻占的。事情就是这样，而不是别的样子。”

“是的，但本来有可能。”

“有可能什么？”

“有可能是在13日被攻占的。”

劳拉的辩解让雷感到十分吃惊，雷最终明白，他们之间的交流，或者说辩论，不会一蹴而就。

“我同意。”雷还是让步了。“你的历史老师是怎么讲的？他肯定会解释巴士底狱为什么在7月14日被攻占，说明其中的原因，陈述各种事实，以表明这一历史事件为什么会在那一天发生。同样，你的地理老师也会讲塞纳河的流经区域。当然，事情有可能会是别的样子，但它之所以是现在这个样子，肯定有一定的道理。因此，人们常常要去解释，提出论据。”

“我感觉在数学方面，事情恰好不可能是别的样子。事情该是什么样，就是什么样，这也是让人感觉强悍的地方。一个等腰三角形应该有两个

相等的角！你还没进场呢，戏剧早就开演了。你想想，我到这儿干吗来呢？”

“塞纳河可是在你出生之前就一直在奔流呀。”

“是的，但我的感受却截然不同。”

“那是为什么呢？你说说看。”

“我觉得这是因为在数学方面，我不明白人们在说什么。但无论是历史、地理，还是语文、化学或是物理，我明白大家在说什么。即使我不能完全明白，可也能知道其中的大概意思。而数学则像是一种神秘的语言。”

“嘿！”雷喊道，“它要是一种神秘的语言，起码在表达某种意思，而不是什么意思都没有。你是不是有同感呢？”

“嗯……这都是一回事，因为不管是哪种情况，我都不明白人们在说什么。”

“不，这不是一回事，因为如果这是一种神秘

的语言，那么它至少在表达某种意思。因此，你可以试着去破解它。数学并非不表达什么意思，这一点你同意吗？”

“要是这么说的话，我得承认它肯定在表达某种意思。但究竟在表达什么意思呢？”

“我告诉你呀，你上数学课的时候，就像是在上外语课。当然这和你的汉语课并不完全一样，但肯定是一门语言课。”

“不论是法文课，还是汉语课，总有人物，有文章，大家在一起交流，说出自己的想法，表达自己的感情，交流各种信息，甚至可以说一些亲密的话语。”

劳拉脑子里突然冒出一个念头：

“在数学里，人们能说‘我爱你’吗？”

这个问题让雷措手不及，他犹豫了一下，但不得不承认在数学里，人们无法说“我爱你”。

“我并没有说什么都可以说，但人们可以表达很多想法，比如在某某之间、彼此、最大、最小、接近、形成、包括、汇合，等等。”

雷恢复了自信，于是接着说道：

“数学其实也是一种语言，当然它并不仅仅是一种语言。这种语言可以表达思想、陈述想法、设定命题、提出问题、肯定、反驳、画图形等。但它并不是一种神秘的语言，因为支配着这门语言的原理是公开的，每个人都可以学习掌握这些原理。所有的学生都应该去掌握这些原理，这也是数学课的一部分内容。”

“那么在哪个国家我能学到这门语言呢？你在地图上指给我看，我好到那儿去学。”

“小姐是在挖苦人吧。你就是在数学课上学习这门语言呀。”

“我也许还得做数学的互译练习……”

“绝对应该做。把一段数学文字翻译成通用语

言，这是一个很好的练习。我们可以盘点一下数学里常用的词汇和符号。”

雷在一张纸上简短地写了几个字，然后递给劳拉。

“这是三个数学表达式，之所以称为数学表达式，是因为一个式子在表达一个想法、一个事实。这三个式子有点相似，但性质却截然不同：

“2+=，2=1+3，2=1+1。

“2+= 这个式子没有任何意思。这个式子没有错，人们可能会说它没错。如果是错的话，那么它起码应该有一层意思，但它没有任何意思。这个式子的构成有问题，因为它并不是按照数学书写规则写出来的。

“2=1+3，我明白它要表达的意思：2和1+3相等。这一点我懂了，但它是错误的。

“2=1+1，我明白它要表达的意思：2和1+1相等。这一点我懂了，而它是正确的。

“数学里大部分的错误都是因为人们编写的句式没有任何意思。因此，首先要注意，要确认句式是否符合书写规则。”

雷又拿出一张纸，写了几个字，然后递给劳拉。

“D+D=2，2//3，这是两个书写不正确的式子。噢，我忘了说，D和D是指直线。

“D+D=2不正确，因为人们并不知道‘两条直线之和’是什么意思，而+号在几何里是不存在的。

“2//3不正确，因为人们并不知道‘两个平行数’是什么意思，而在数学运算当中，//符号是不存在的。现在我们可以盘点一下数学语言里常用的词汇类型。日常用语的常用词汇有：定冠词及不定冠词；副词，如在……中；连词，如和、例如；动词有表达请求的动词，如设立、找出、确定、求证、画出等，有针对对象的动词，如考

虑、即是等。数学专用词汇大部分都是名词，如中位线、垂直平分线、对角线、函数、正弦、余弦、偶数、圆柱体等，还有形容词，如等腰的、等边的、平行的，等等。

“还有数学语言的专用符号，以简洁的方式来书写运算，如+、×等，以及表示关联关系的符号，如=、//等。

“我们再来看看句子，在数学里我们会碰到哪种类型的句子呢？有设定命题的句子，有阐述对象或状态的句子，还有提出要求的句子。当数学世界中出现一个新的内容时，人们应该为它建立出生证，这就是定义的作用，以此来证明它正式进入数学世界。定义的名称及相关信息描述了这个新的内容的特征。定义的开篇通常是由……”

劳拉打断了他的话：

“老师那时讲课的腔调都变了，故意拿出一种庄重的语气说：‘定义，人们称此为……’”

“这也很正常，定义是最基本的东西。那是数学史上最重要的时刻。和法语中的词汇定义的区别在于，数学定义并不仅仅是描写性的，它还可以直接用于运算，也就是说，只有在熟知定义并运用定义的情况下，人们才能从事数学运算。因此，应该熟悉每一条定义，基本上要把定义当中的每一个字都记牢。要是忘了一个字的话……”

“……那就全错了，而不是错了一点点。这是最让我受不了的地方。”

“但这也是数学能带给你的最重要的东西，精确是数学的优秀品质之一，这个品质对你的日常生活是有好处的。精确并不是过分注意琐碎的细节。当数学家们发现新想法、新概念、新内容时，便给它们起个名字，以便能够谈论并加以利用，他们不会给这些新东西一个严格的定义。无论是直线还是圆，或者其他数学概念，在欧几里得为其设定定义之前，人们一直长期在使用它们。这种情况今天依然存在。”

“人们为什么要花费那么长时间去写等于呢？”

“你能想象出没有等号的数学吗？这是数学里最重要的符号。写下2=1+1时，我在表达什么呢？我是说2和（1+1）是相同的数，它们是数值相同的两个不同的名称，因此我把它们看做是相等的。我甚至会把2的所有名称都画上等号：

（1+1）=（5-3）=（ ）=（2×1）=……”

“你想表达什么意思呢？”

“不管出于什么原因，如果我想把2当做一个和，就会将其写成（1+1），如果我想让它以差的形式出现，就会写成（5-3），依次类推。因此，根据不同的需要，我会分别使用它那多种多样的属性。

“我写下a=b时，就表示a和b是可以互换的。a可以用b来代替，反之亦然。

“等于的反面就是不等于，记录方式是在等号上画一条斜线：≠。不等于的意思就是‘不一样’，

它只有这一层意思，千万别把不等于和大于‘>’或小于‘<’混淆起来。”

“等于是从一开始就有的吗？”

“是的，等于的概念从一开始就有，但等号并不是一开始就有的。1557年，一位名叫罗伯特·雷科德[1]的英国医生脑中生出画两条小横线的念头。有人问他为什么作出这样一个选择，他回答说：‘我选择两条平行线，或两条长短一样的线，因为没有什么比双胞胎更相像的了。’”

[1] 罗伯特· 雷科德（1510—1558）：英国数学教育家。——译者注（下同）

“那么在此之前，人们怎么办呢？”

“把拉丁词语aequali（等于）的每一个字母都写下来。过去人们要把数学用词的全称写下来，那时什么符号都没有，所有的句子要一字不落地写，句子写得既复杂又冗长，而且不方便。”

“那么数学文字也就很像其他文字了？”

“绝对是这样。”

“那么+号和-号呢？”

“说来这还和箱子有关呢。”

“和箱子有关？”

“1500年，在德国，有些商品是用木箱包装好卖出去的。木箱装满的话，应该重4森特（centner，约合50公斤）。如果其中的一只箱子分量不足，比如少了5斤（livre），人们便在箱子上标上4c-5l。如果箱子超重了，比如超出5斤，于是人们就在箱子上画上4c+5l的标记。后来，这个标记便从木箱转抄到纸上，从买卖转到了代数里。

“古埃及人则用两个象形文字：

加
减

“在这个图案上，人们可以看到：

“加：就是两条腿沿书写方向前行。

“减：就是两条腿沿书写方向倒退。”

“加号就是在减号上画一条交叉线，不等于号就是在等于号上画一条斜线。”

“完全正确。在数学里有很多不同的方式来表达‘差’，只要明确说明两个元素的不同之处就行了。涉及数时，采用减法就行了（a-b）。如果差不是零，那么这两个数肯定不一样。还有另外一种方式，人们很少能想到这个方式，那就是商。

“我们来看看求的商。如果≠1，那么这两个数是不一样的。”

“那么其他的数学符号呢？比如乘号？”

“它是一个名叫威廉·奥特雷德[1]的英国人在1600年发明的。”

[1] 威廉·奥特雷德（1574—1660）：英国数学家，他撰写的算术及代数著作《数学之钥》引入许多新的数学符号，包括今天仍在使用的乘号。

“那么大于号和小于号呢？”

“是另一个英国人托马斯·哈里奥特[1]发明的，比乘号发明的时间还要早。”

[1] 托马斯·哈里奥特（1560—1621）：英国天文学家兼数学家，被视为英国代数学学派的奠基人。

“为什么一个向右开口，一个向左开口呢？”

“不知道。不，不，”他改口说道，“我认为符号是朝大数的方向开口。”

“那么根呢？”

“这个符号是一个德国人发明的。有人说根号是拉丁词语Radix的第一个字母R的变化形式。”

“好的，但为什么要用根呢？”

“究竟是什么呢？就是一个其平方值相当于2的数：（）^{2}。人们也说给某数开平方。于是给2开平方，便得出2的平方根。人们在头脑里形成一幅植物在土壤里扎根的图像，根在土里四处伸展的时候，植物就会长得很茂盛。”

“这个解释很美。我常常给自己提这样一个问题：数一直就有吗？”

这个问题有点突然：

“数一直就有吗？”

2数

“在远古时代，人类就发明了数，以此来回答‘多少’这个问题。部落里有多少孩子？天上有多少颗星星？圆月要多少天之后才能再挂在空中？数是人类最伟大的发明之一，正是由于有了数，人们才能计数、测量、计算。

“就像学会保存火种一样，人类也学会了保存数。为了能记住一个数量，他们在甲骨、石头上刻标记，还使用其他东西来记忆，比如小石子、贝壳、绳结等。后来他们便在各种载体，比如黏土、木头、纸莎草纸上标上符号。于是便诞生了文字。

“在掌握了数的表达方法之后，人们便开始计算，开始做运算，先用加法，然后用乘法。数数，排列，点数，排序。”

雷伸出胳膊，张开手掌。

“手是人的第一个计算器，人在几千年当中一

直用手指来计算。

“人类最初用的数都是整数，人们用整数来数数，来计算。后来就有了分数，接着又出现了零，再接下来又有了负数。我是依照它们在历史上出现的顺序来列举的。”

“数字和数，我总是把它们弄混了。”

“你是说‘三个数的数字’呢，还是说‘三个数字的数’？”

“三个数字的数！这还真的很巧妙呢。”劳拉承认道。

“数是由数字组成的，就像字是由字母组成的一样！”

“数字就是数的字母，你想让我这样说，对吧？”

“是的。我们采用的是十进制记数法。”

“因此我们用10个数字。但数字也是数呀。1，2，3……”

“是的。”

“但不是相反，对吧？”

“是的，比如10……”

“……并不是一个数字。”

“这是最小的非单个数字的数。5在555当中是一个数字，但在‘5个手指’里又是一个数。作为数字，它是一个书写符号；作为数，它表示某一数量。人们常常以为数字是最先出现的，其实恰好相反，数字是在数问世之后很久才发明出来的。那时，数可以用来表示数量，表示测量数据，数字则用来书写数。

“数的问题是数太多了。当然这也是它的主要优点，要是有什么不可或缺的东西，那一定是数。”

“既然数多得数不过来，那么该怎么称呼这些数呢？”

“所有的人都意识到整数是无穷尽的，人们总能找到更大的整数。然而最大的整数是不存在的。如果确实有最大的整数，比如说整数A，那

么A+1也同样是最大的整数。或者说，A+1比A还要大，这和A是最大整数一说是相悖的。这类证明是自相矛盾的。因此也就没有最大的整数，这就意味着数成为无穷尽的量。人类所有的早期文明都曾碰到过你提到的这个问题。假设人们毫无条理地，或者说胡乱地来命名数，那么很快就会发现不知道该用什么名字去命名数了。这将引起巨大的混乱。因此，人们想用系统的方法来分配所有的名称，每个名称都包含着它所指定的数的信息。究竟怎么做呢？首先要选择所有的数字，也就是说，某些数被‘选来’代表其他数。然后再用各种方法去组合这些数字，用来书写数。人们称此为记数法。有些记数法十分巧妙，有的则很愚笨，而且很难用。坦诚地说，古罗马人在这方面确实没有什么才能，他们想要表示的数越大，就越要造出新的数字！X(10)， L(50)， C(100)，D(500)， M(1000)，一直排列下去。他们要不断地创造新数字，整个系统变得难以操作。要想让

这个系统运转起来，数字的量必须一次定下来，而且这个量越小越好。

“古希腊人和古希伯来人所采用的记数法并不出色。相反，美索不达米亚人和玛雅人却有一套很实用的记数法。玛雅人采用20进制记数法，而美索不达米亚人则只用两个数字，1和60。”

“和二进制一样。”

“不一样。二进制必须使用0，只用两个数字，0和1。”

“你还没有回答我的问题呢。”

“我现在就来回答：唯一能命名所有数（不管多大的数）的体系，就是我们今天所采用的体系，现在全世界都在使用这个体系，也就是位置记数法。演绎任何一组数字，只遵循一个法则，即数的位值法则，它给定的条件是：一个数的大小，除了其本身的值之外，还取决于它在一个数中的位置。在1717这个数里，排在首位的1值一千，而第二个1值十，第一个7值七百，第二个7

值七。数值的大小取决于数的位置，这真是一个巧妙的设想。”

“价值因位置不同而变化。日常生活里不也是这样吗？”

“是的，你说的有道理。有人常常会按人在社会中所处的地位来判断一个人的价值，这有时是不公正的。但是对于记数法来说，这个方法是人所能发明的最好的方法，人类所有文明的梦想也因此得以实现：用和手指一样多的一组数字就能命名世界上所有的数！不论人们想表示什么样的数，这个方法都会给它一个名称，而且是独一无二的名称。接下去的任何数字还是表示一个数，而且是唯一的一个数。并且还不会产生任何歧义。此外，看看数的名称，就知道数的大小：数的名称越长，数就越大。这个方法真是妙极了！”

“零是什么时候出现的呢？”

“大概是在公元前5世纪，古巴比伦人发明了

一个符号，用来标注空位。在十进制记数法当中，当人们想表示一百零一时，肯定会按个位、十位、百位来排列。因此对于一百零一来说，百位上有一个1，个位上有一个1，于是就写成11。但是11，一个是十位，一个是个位，也就是说，它表示的是十一。问题究竟出在什么地方呢？因为人们没有考虑十位上的空位。”

“还要考虑空位！”

“应该说成一百零一，前一个1是百位，而不是十位，后一个1是个位。但怎么来表示十位的空位呢？于是人们就用一个新符号0来表示‘空位’的意思。

“零还有第二个含义。把一个数全部减掉后，比如5-5，该怎么表示差是无呢？

“这里零就不再表示一个空位的意思，而是表示一个数值，即零值。这一次，零变成一个数。空位和零值就是零的两副面孔。”

“每次使用零的时候，我总感觉灾难就要发

生，好像灾祸就要临头了似的。”

“能说得具体点吗？”

“人们可以用任何数来做除法运算，但绝不能用0。”

“这其中是有原因呢，还是老师的硬性规定？”

“应该是有原因吧。”

“你想知道吗？”

“我早就想知道了。”

“在乘法里，零会打败所有的数，$0\times n=0\times m=0$。可以说，这是一个零化元素。然而在加法里，它就没有这样的功效了。$n+0=n$，零在加法里是一个中性元素。

“那么用零当除数来做除法呢？假设可以用零来做除法，我们来估计一下这种假设的结果。设a为任意一个数，我这里强调是任意一个数，用0来除这个数。假如运算可行的话，那么结果就能得出一个数，我们将它设为b。由此而得到=b。

鉴于内项之积等于外项之积，你还记得吧？当然记得：a=0×b。然而0×b=0呀，因此a=0，而a是任意一个数。我们在此证明了什么呢？假设用0做除数可行的话，那么所有的数都是零。”

“这岂不是很烦人吗？”劳拉承认道。“只有一个数，这个数就是零！但这至少有一个好处：大家的成绩都一样！所有人的数学都很差。”

“这不就是大家所说的向差生看齐吗？我觉得你不喜欢禁令。但在算术里，用0做除数是绝对不允许的。这就需要采取一些预防措施。在碰到一个商为$\frac{P}{Q}$时，第一反应就是赶紧写下‘Q≠0’，来预防‘灾难’，要是Q=0的话，灾难是免不了要发生的。”

“那么二进制体系呢，它和十进制体系有什么不同呢？”

“其实这两个体系极其相似。它们都采用位置记数法，唯一的区别在于数字的量，十进制用十

个数字，二进制用两个数字。

“二进制的优势：它只用很少的数字。不便之处：数的名称太长了。十进制的99用二进制来表示就要写成1100011。两种进制书写的长度差别是很明显的。”

“二进制为什么会如此重要呢？”

“17世纪，伟大的数学家兼哲学家莱布尼茨[1]使出浑身解数，想让他的同事们接受二进制，但没有成功，于是二进制也就被人遗忘了，直到计算机问世。此后，二进制马上被视为最适合与机器交流的语言。我们的书面语是由26个字母和10个数字组成的，也就是说有36个符号，当然还要加上空格及标点。为了和机器交流，信息将通过电流来传递。然而电流只接受两种状态，电流通过，电流不通过。于是人们便选用1和0这两个数字。电流通过就用1，电流阻断就用0。后来，人们又用1和0的组合数字为36个符号编制数码。于是二进制系统便派上用场了。”

[1] 莱布尼茨（1646—1716）：德国著名的自然科学家、数学家、哲学家。他的研究范围涉及自然科学与社会科学的很多领域，几乎在每一个相关领域都有杰出成果，被誉为罕见的科学天才。

雷在文档里查找，从中抽出一张皱巴巴的纸，开始念道：

“A写成01000001，B写成01000010……一直写到Z。从1到10的数字也可以用二进制码来表示。也就是说，二进制体系只用两个数字就足以将世界上任何语言的任何一句话翻译成数码，而这句话里既可以有文字，也可以有数。信息通过电子途径飞快地传递。

“当你在电脑键盘上打下字母A时，便启动了强度不同的电脉冲，弱脉冲相当于0，强脉冲相当于1。

“因此，字母A，即01000001，是由一弱、一强、五弱、一强的一组脉冲构成的。这组脉冲便到电脑存储器里去选择另一组0和1，这组数码与荧屏上的明暗点相吻合，最终在荧屏上画出字母

A来。于是，二进制便成为计算机语言，可以将刻在光盘上的音乐及影像再现出来。人们由此进入‘数码’世界，在这个世界里，所有的信息都是以数字方式来传递的。

“我们接着去谈数。讲过整数之后，我们来看看分数，它源于拉丁语fractus，就是‘打碎’的意思。一个分数就是一个‘被打碎的数’。”

“因为它不是一个整数了。”

“的确如此，一个分数由两个整数和一条横线组成。比如$\frac{7}{5}$。横线下的数叫分母，在这里就是用五来分，也就是说将一个整体分成五份。横线上的数叫分子，在这儿是7。这个分数告诉我们有七个五分之一。

“从接触分数的那一刻起，人们就会碰到两个分数相等的直接结果，这也是分数的特性之一。如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么a×d=b×c。根据外项之积等于内

项之积的公式，两个分数相等就意味着两个整数相等。”

“整数相加很简单，但整数相乘却复杂得多。而分数是不是恰好相反，这究竟是为什么呢？”

“就是为了通分呀！由于分母起指定作用，因此所有分数都应指定相同的东西，人们将其相加时就要格外谨慎。比如，人们当然希望分子和分子相加，分母和分母相加，，这样不就简单多了嘛。但这是错的！因为根据‘不同事物不能相加’的原理，将七等份与十一等份相加没有任何意义。那么应该让什么相加呢？七等份与七等份相加，十一等份与十一等份相加。换句话说，要让分数的分母相同。那么怎样做才能让分母不同的分数具有相同的分母呢？就是要用通分的方法：7×11，只有在通分之后，分子才能相加。＋＝＋＝

。

“至于说乘法呢？这个很简单：分子和分子相乘，分母和分母相乘就行了，。为了便于你记忆，一半的一半就是$\frac{P}{Q}\times\frac{P}{Q}$，即$\frac{1}{4}=\frac{1\times1}{2\times2}$，也就是分子和分母各自的积。你刚才说得对，分数相加要比分数相乘复杂多了。”

“面对两个分数，人们很难看出哪个分数大。”

“面对两个整数时，人们一眼就能分辨出哪个数大。但面对分数时，就不那么容易看出来。比如和，要说出哪个数大，还真得花费一点功夫。要进行计算，那就通分吧：和。然后对比一下分子就行了，前一个分数的分子是132，后一个是133。因此比大，一眼还真是绝对看不出来。

“古希腊数学家最初作出的几项决策之一就是将整数分成两组：能被2整除的整数，即双数，又称偶数；不能被2整除的整数，即单数，又称奇数。这看上去好像没有什么了不起的，但这个简单的区别却让他们能够去‘做数学’，因为在此之前没有人这样做过。由于掌握了奇数和偶数这两个系列，他们便去研究所有为奇数的和为偶数的结果，而不是研究随便哪些数的结果。他们给自己提了一个问题：在主要的运算当中，数的奇偶性是怎样呈现的？它能够保持住吗？如果两个偶数相加的话，那么和还是偶数吗？加法能保持奇偶性吗？

“我们来看一个例子：2+4=6，和是偶数。但这并未构成一个证据，因为没有任何东西可以证明在选择其他两个偶数时，它们的和还会是偶数。为了能证明这一点，除了做演绎之外，古希腊人没有其他方法。你刚才说过一直没明白什么是演绎。谁这么吝啬，连这个都不给你讲？让他

见鬼去吧！我现在就给你做一次演绎。

“首先，要根据定义列出一个偶数公式。一个偶数是一个双数，等于‘任意一个整数的两倍’，因此写成2n，n代表任意一个整数。只要给n一个值，这个公式就能生成所有的偶数，而且只能生成偶数。这就是一个运算算式，有了这个运算算式，演绎就能进行。两个偶数之和：2n+2n。这里我用n和n，因为如果用同样的n，那就意味着两个偶数应该是相等的，这样就破坏了这一特性的普遍性。2n+2n，在目前这一阶段，我不想作出任何结论。我要把这个算式转换成能向我‘表达’的算式：‘一个整数的两倍’。因式分解：2n+2n=2(n+n)，由于n和n是两个整数，它们的和就是一个整数n。我可以由此写出：2n+2n=2(n+n)=2n，这就是一个偶数的‘公式’。我刚刚证明两个偶数之和还是偶数。

“那么奇数呢？我要采用与列出偶数公式相似的方法。比如我给一个偶数加上1，就得出一个

奇数，（2n+1）。我们来作演绎！

“(2n+1)+(2n+1)=2n+2n+2=2(n+n+1)， 但如果n和n是整数，n+n+1还是一个整数，比如n。我们继续来看等式，(2n+1)+(2n+1)=2n+2n+2=2(n+n+1)=2n，也就是说是一个偶数。我可以宣布：两个奇数之和是偶数。奇数性并没有保持住。但结果还是有益的，因为我们知道了两个奇数之和是偶数。相反，假如在普遍意义的层面上，我们对于‘两个奇数之和等于偶数’什么也说不出来，那么这种状况也就没有什么意思了。

“我们来看看乘法。两个偶数相乘，2n×2n=4n×n。如果把这个算式转换成能‘表达’的算式，那么就要让2以因数的面目出现。我们来试试看：4n×n=2(2n×n)=2n，也就是说，结果是一个偶数。

“我们再来看奇数：(2n+1)×(2n+1)=4nn+2n+2n+1=2(2n×n+ n+ n) + 1 =

2n+1，也就是说结果是一个奇数。偶数×偶数=偶数，奇数×奇数=奇数。我由此作出结论，乘法使奇偶性得以保持。这就是做数学：为共性所设定的对象系列计算结果。”

“本来可以用加法的，为什么要用乘法呢？”

“用乘法的目的就是为了不用加法。

“我写算式：2+2+2+2+2(九个符号)，但用乘法：5×2（三个符号），省掉了六个符号。”

“那么乘方呢？乘方是什么时候出现的呢？”

“乘法是连续的加法，同样，乘方是连续的乘法。做乘法时我写算式：5×5×5(五个符号)，用乘方的话，我只写：5^3(两个符号)，省掉了三个符号。

“在数的运算当中，有三个层面：加法，乘法，乘方。乘法是数连续相加，乘方是数连续相乘。

“从理论上讲，只采用加法，人们也能进行计算。比如5^3=5×5×5=(5+5+5+5+5)+(5+5+5+5+5)+

(5+5+5+5+5)+(5+5+5+5+5)+(5+5+5+5+5)。如果采用加法，不算括号，竟然用了49个数字和符号！而且计算机就是这么运算的，只靠加法，而且用许许多多加法，但每一个加法的运算时间非常短。”

“平方和开平方之间有什么联系吗？”

“古希腊数学家在数和几何形状之间建立起紧密的联系。在他们看来，正方形这种图形，如果每边为5，其面积就是5×5，它与数‘5的平方’是有联系的，5的平方即5^2。同样地，如果立方体的棱长为5，其体积就是5的立方，5 的立方即5^3。

“与为分数计算制定规则的方式相同，人们也给乘方计算制定了规则。这些规则并不是随意制定出来的，而是从乘方的定义直接衍生出来的。

“在这里，乘法也比加法简单。

“2^3+2^5=不可简化。尤其是结果不得2^{3+5}！

“$2^3\times2^5=(2\times2\times2)\times(2\times2\times2\times2\times2)$。除掉括号后，就变成整数乘法的性质：

$2^3\times2^5=2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2=2^8=2^{3+5}$。

“这个规则至关重要，这是涉及乘方最重要的规则。现在让我们仔细看看这项规则。左边是乘方的积，右边是指数的和：$a^n\times a^m=a^{n+m}$。

“这种由和到积以及由积到和的转变恰好是乘方的特点。这是乘方最有趣的地方：如果同一个数的两个乘方相乘的话，只需将指数相加即可，也就是说，用加法来代替乘法！”

“乘法为什么比除法简单呢？”

“因为除法并不是像乘法或加法那样直接定义的。除法的定义是从乘法演变过来的，也就是说，它是乘法的反运算。在做除法的时候，人们总得想着乘法。$\frac{P}{Q}$是什么呢？是数C，也就是商，相当于B×C=A。做除法，就是要找到数C，这个数乘以B得A。”

“除法是最难的，可为什么却比乘法还重要呢？”

“在谈除法之前，我们先来谈谈分割。将数A分割成两份就是要找到两个数，其和等于A。

“将含有六个元素的集合数分割成两份。可能分割成的结果：（1和5），（2和4），（3和3），（6和0）。在这四个分割当中，只有一个是均等的：（3和3），这个数恰好是除以2得到的。除法是唯一均等的分割，这也正是除法的功效。两个一半相等，三个三分之一相等，等等。

“人们对除法没有好感，因为除法的运算很难，但在四则运算当中，只有除法得出的结果最重要。除数就其所除的数提供了许多信息，甚至比乘数所提供的信息还多。

“每个数可以容纳无数个乘数，但却只容纳有限的几个除数，而且除数一定要比被除数小。”

“这是不是和质数有关系？质数是不是很重要呢？”

“是的！我们刚才看过，古希腊人对能被2整除的数与其他数作出区别。另外一个重要区别就

是有些数是可整除的，另一些数是不可整除的。我们来看看6和7，6能被2和3整除，而7是不能被1以外的整数整除的。比如2，3，5，11，13，17，19等数，人们将其称为质数。一个质数，任何一个数（除1外）都不是它的除数，它可能是某个数的因数。

“由于一个重要的结果，数学家都醉心于质因数（既是质数又是因数时称为质因数），因为每个整数都有可能是质数的积。质数为数不多，如果我掌握了它们，就能够掌握除1以外的所有整数！

“基于同样的设想：某一系列的若干元素是不是可以构成一个整数序列呢？就像三角形可以搭建成多边形一样。

“质数就是‘砖石’，用这些砖石，人们可以用乘法搭建所有的整数。每一个整数（除1和质数外）都是质因数的积。反过来说，除1和质数外，其余的整数都可以分解成质因数乘积的形

式。然而这种分解只能用一种方法来完成，而且是唯一的方法。在数学里，人们喜欢‘唯一’这个词。如果某一类型的对象是唯一的，某一演算是唯一的，我们就可以为它们加上定冠词，就能说将某数分解成质因数。

“要想知道一个整数是不是质数，有一个方法：验证一个比它更小的数是否能除尽它。这个方法很笨，但总能得出一个结果。下面就是定义：一个质数就是一个能被1及其本身整除的数。”

“这个定义一直在困扰着我。可被1整除，我很难理解，被其本身整除？这让人难以理解。6这个数很有意思，它可以被2和3整除，但不能被1或被6整除吧。”

“但它是不是能被1整除呢？”

“这有什么意义吗？”

“我在问你是不是能被1整除。”

“是。”

“我们还是慢慢来看。B和C是A的约数，如果A=B×C。

“既然6=2×3，2和3就是6的约数。但6=6×1，因此根据定义，6和1也是6的约数。不管是一个什么样的数（n），n=n×1，因此n是可以被1以及其本身整除的。所以质数的定义就是除了1和其本身之外没有任何约数的整数。数学要‘严格地’遵循定义才能运作，这是一个很好的例子。如果不明确指出除了1和其本身之外没有任何约数，那么这个定义就是错的。”

“在很多情况下，人们都用60这个计算单位，比如时、分、秒。一天24小时，此外还有12。”

“是的，过去人们曾就以10为单位还是以12为单位进行过激烈的争论。12的优势是它的可约性，它的可约程度要比10大。

“你有12个鸡蛋，要把它们均分给围桌而坐的客人。如果你有两个客人，每人可分得6个鸡蛋；如果有3个客人，每人可分得4个鸡蛋；如果

有4个客人，每人可分得3个鸡蛋；如果有6个客人，每人可分得2个鸡蛋。有四种被整分的可能性。

“假设你有10个鸡蛋，只有两种被整分的可能性：2个客人，每人分得5个鸡蛋；5个客人，每人分得2个鸡蛋。换句话说，12可以容纳6个除数，1，2，3，4，6，12，而10只容纳4个除数：1，2，5，10。

“我们不妨拿100和60作一番比较，100可以被6个除数整除，而60则能被12个除数整除，即1，2，3，4，5，6，10，12，15，20，30，60。从1到6的序数都可以做60的约数，这真是一个奇迹。60比100小得多（只比100的一半略多一点），但能被整除的约数却比100的多许多。60是除法之王。

“如果在转动的圆盘上标刻度的话，人们更喜欢用60，而不用100。时间是以小时来计算的，每小时有60分钟。一小时可除以2，即半小时

（30分钟）；可除以3，即三分之一小时（20分钟）；可除以4，即一刻钟（15分钟）；可除以5，即五分之一小时（12分钟）；可除以6，即六分之一小时（10分钟）！”

“有些数有小数点，有些数没有小数点，它们之间有什么区别吗？”

“有两种数，一种是整数，一种是分数，这你还记得吧。你知道，人们可以用分数的形式来写整数。5可以写成，等，所有分数的分子都应比分母大5倍。”

“不能反过来吗？”

“有些分数也可以用整数的形式书写。”

“当分子是分母的倍数时，你刚刚说过。”

“在其他情况下，你就不能这么做了。$\frac{P}{Q}$永远也不会等于一个整数。于是人们发明了一种新的写数形式，它的优点就是可以取消分数线：小数

展开。不再有分子和分母了，所有的数都写在一条线上。小数点左侧的数字称为整数部分，小数点右侧的数字称为小数部分，比如155.3。这种通用的写法可以把各种类型的数都写下来。十进制小数必须含有大于零值的有限小数：$\frac{P}{Q}$=0.125。相反，$\frac{P}{Q}$=0.333……这不是一个有限小数。”

“怎么做才能把一个分数变成一个有限小数呢？”

“最简单的方法就是用分母去除分子。$\frac{P}{Q}$写成1.25，而则写成3.333……右边的几个小点表示3是无穷尽的。至于说2，它可以写成2.0。正是阿拉伯数学家为无限小数制定了定义。1325.2457，这个数意味着什么呢？将整个数分解后得出：1×1000+3×100+2×10+5×1，然后再加上小数部

分，+++，小数点后的第一个数称第一位小数，依次类推。

“总之一句话，小数点后是十分位，然后是百分位，和小数点前的十位、百位等是一样的，都是十进位。”

“负数一直就有吗？”

“噢，不！负数直到很晚才出现。不论是美索不达米亚人，还是古埃及人，不论是古代中国人，还是古希腊数学家，他们都不掌握负数。”

“但没有负数，他们怎么办呢？”

“从一个数量a里，他们只能减出一个更小的数量b，b<a。他们只掌握一种有限的减法。在欧洲，人们很难接受比‘无’更小的东西。

“正是因为无法解决这样一个问题，所以人们不得不发明新的东西，来解决这个问题。要是只做计数或测量物体体积的运算，正数也就足够了。

“怎样做3-2呢？（3-2）应该等于加2得3的

数。这个数就是1。这样我就把最小的数从最大的数里减掉。但怎么做才能把最大数从最小的数里减掉呢？怎么做2-3呢？在很长一段时间里，这是不可能的。要想让这算法成为可能，就要设定一个新数，这个数加上3后得2，这就是-1。于是2-3=-1，因为3+（-1）=2。

“要是没有0的话，负数是无法确定的。-1是什么呢？要加上+1才能让和等于零：+1-1=0。

“因此每一个整数n（除零外）都有一个‘对称元素’，即负数-n。

“负数直到很晚才发明出来，甚至比分数还要晚。最早设想使用负数的是印度人，他们那时已经发明了零。在7世纪，印度数学家婆罗摩笈多[1]用资产和债务来表示正数和负数。债务与资产的登记只有在均衡的局面下才能出现，均衡就是‘无’，在这种局面下资产清除债务。从无中扣除一笔资产就是债务：a>0，0-(+a)=-a。从无中扣除一笔债务就是资产：0-(-a)=+a。两笔资产或

两笔债务的积及商就是一笔资产：a，b>0，a×b>0，(-a)×(-b)>0。

[1] 婆罗摩笈多（约598——665）：印度数学家兼天文学家。他编著了《婆罗摩修正体系》，并提出负数的概念。

“用一笔债务乘以或除以一笔资产的积及商就是一笔债务。a×(-b)<0，<0。如果人们抹掉一笔债务……”

“那就是一笔捐赠呗！啊，这正是我喜欢的。这是看事物的另一种角度。”

“你看不出什么东西吗？”

“这不就是符号规则吗？”

“完全正确。在印度数学家提出这个概念1000年之后，负数才极艰难地打开西方数学王国的大门。在15世纪，人们依然将它称为荒谬的数。许多著名数学家都排斥这一概念。要想实实在在地获得一个负的数量，就要从‘无’中减去一个量，而这种运算是不可能的，伟大的数学家拉扎尔·卡诺[1]在1802年曾这样写道：

[1] 拉扎尔·卡诺（1753—1823）：法国工程师、数学家。

“负数在今天已不再是问题了，你甚至可以问小孩子们。对于他们来说，-2就是大型超市的地下二层停车场，每到星期六，全家人都到超市里去采购。”

“为什么说恒等式，而不说同等式呢？”

“因为不管给公式里的变量什么样的值，相等总是真实的。不论在初中，还是在高中，老师并不要你们记住同等式，而只需记住恒等式，因为恒等式总是真实的。

“因此，$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$是真实的，不管赋予a和b什么样的值。$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$也是真实的。$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$同样是真实的。注意，这里所有二次的项都是两个数相乘的积：a^2，b^2，2ab和-2ab。a-b和a+b是一次项，因此，(a-b)(a+b)的结果是二次项。

“$(a+b)^2$的第一个恒等式就是一个积：(a+b)

$(a+b)$，人们将此转变成三个因数的和。我们来说明：一个和的平方等于它们的平方加上它们积的2倍。$(a-b)^2$也是同样的道理。第三个恒等式很有意思，它也将积转变成和。”

“还是有差别的！”

“是有差别。而且差别在于第三个恒等式的两项都是平方。我喜欢平方。”

“因为它们总是正数。”

“确实如此。这样我就掌握了其他信息，这就是正项a^2和b^2的差别。熟知一个公式的符号还是很有用的，虽然这是某一个数，而且人们也知道它的符号，可一旦将公式以文字形式书写下来，人们就不认识它了。然而有两个公式可以给我们信心，即a^2与a的绝对值$|a|$　总是正数，不管a是什么样的值。

“如果面对一个不等式$A<B$，且又想用数a来乘以两边，那会发生什么样的情况呢？不等式的方向是否能保持住呢，这是一个大问题。如果我

对符号a一无所知，那么我对aA及aB不等式就得不出任何推断。相反，我可以写$a^2A<a^2B$。因为如果用一个正数去乘以不等式的两边，不等式的方向并未因此得到改变。”

“那么分配律呢？”

“这是加法与乘法之间的一种规则。根据要解开的问题，有人喜欢用加法，但也有人喜欢用乘法。它们相互关联的关键就是分配律，人们可以将它视为一个转换器，它能将一个和转换成积，也可反过来将积转换成和。用c来乘以(a+b)之和的积等于a×c与b×c之积的和，因为$(a+b)\times c=a\times c+b\times c$。分配律有一个功效，它与恒等式的功效相似，可以将人们要采用的公式变得更实用。”

3几 何

“占据几何空间的物体是什么？”雷问道。

“人所能看到的一切。”

“人能看到3。”

“一切有形的东西。”

“3也有形呀。”

“3是写下来的，而一条直线是画出来的。”

“太棒了！我从未想过这样来表达。”

雷用赞许的目光看了劳拉一眼。劳拉脑中突然冒出来的想法总让雷十分吃惊。他内心为劳拉感到自豪。

“我们先来看点。人们通常会把点忘掉。因为显然‘没有比点更小的东西了’。所有的图形都是由点构成的，而且只是由点构成的，从某种意义上说，点就是几何的原子。

“接下来有平面图形：曲线、圆、椭圆、直线、三角形、四边形（正方形、长方形、菱形、平行四边形、梯形）以及所有的多边形。还有立

体图形，如球形、圆柱体、椎体以及角椎体。我们先来看最简单的图形，即直线。直线最重要的特性是什么？”

“它一直走，不拐弯，不偏向……”

“……不转向，始终保持同一方向，不走回头路。”

“是不是因为这个，人们才说时间之箭呢？”

“是的，开弓没有回头箭，时光不会倒流。人的15岁也只有一次呀！所以要珍惜自己的年华。许多自然现象都和直线有关。在天空的吸引下，植物‘径直’往高里长。在地球引力的作用下，石头也一样，要‘径直’往下落。此外，光线也是呈直线运动。

“一条直线是由无数个点组成的。难道需要无数个点才能确定直线吗？其实两个点就足够了！实际上，‘两点成一线’是几何学的公理。因此，两点确定一条直线。‘确定’是什么意思呢？也就是说，给出两个点就能够判定一条直线。有了A

和B两点，人们就能说‘AB直线’。有了这两个点，就能得到其他所有的直线，或者说无数条直线！

“直线最大的优势就在于它的一个特性：它是两点之间最短的轨迹。在一个平面上，我强调是在一个平面上，它是连接两个端点最直接的方式。”

“你为什么说‘我强调’呢？”

“因为在其他几何空间里，比如在圆柱体的表面上，它就不是这样的。”

“明确指出在哪个空间里是最重要的，对吧？”

“完全正确。我们现在来看曲线。直线是不变向的，而曲线则改变方向，但却没有形成死角。直线的、直线性、正向的、方向、呈直线的等词语都与直线相关。弧、弯曲的、弯曲、卷曲、弯成弓形、圆等词语则同曲线相关。

“我们取两条直线D和D。假设它们在两个点

上相交。然而，我们刚刚看过，两点只能画出一条直线。因此，如果两条直线在两点（或更多的点）相交，那么它们就融合在一起。我可以断定，如果两条不同的直线相交，它们只能有一个交点。于是我们便得出相对称的两句话：‘两线成一点’，‘两点成一线’。线字和点字可以互相换位，但其属性不变！如果两条直线不相交……”

“那么它们一定是平行线。”

“啊！不，不一定！它们可以不相交，也可以不平行。它们可以互不理睬，或者说从一侧闪过。你肯定看见过飞机在空中留下的一条条白色气浪，它们在空中也是相交的，是吧？飞机似乎躲过一场灾难。其实没有任何危险，因为那些白色气浪不在一个平面上，因此飞机是不会撞在一起的。

“只有处在同一平面的情况下，两条直线才有可能是平行的，因此‘两条直线或平行或相交’，只有在同一平面上时才是正确的。在空间里，还

有另外一种可能性：两条直线可以既不平行，也不相交。但需要明确指明是在什么范围内来断定某物，这是一个最好的例子。

“鉴于D和D是在同一平面上，如果它们具有：

——0个共同点，那么它们是平行的。

—1个共同点，那么它们是相交的。

—2个共同点，那么它们是融合在一起的，于是便写成D=D。

“两点成一线。噢，我刚才说的不准确！”

“难道M和M这两点不成一线吗？你刚才可是这么说的。”

“我并没有说两个不同的点。”

“可它们是不同的点呀，既然你取了两个点。”

“当然，我是取了两个点，但这丝毫不能证明它们就不是相同的点呀。”

“可它们的名称不一样！一个叫M，另一个叫

M。”

“是的，但什么也无法阻止M和M是名称相异的同一个点。”

“那又怎么样呢？”

“假如我希望它们是不同的点，只要提出来就行了。我明确指出：两个不同点M和M形成一条直线。那么三个不同的点呢？这取决于第三个点的位置。如果它和前两个点在同一条直线上，那么它的出现并没有带来任何其他东西，因为它就在已画出的直线里。

“相反，如果它和前两个点不在同一条直线上，那么它的出现便改变了一切！三点形成一个角，甚至可以形成一个平面。这第三个非直线排列的点使我们向前跨越了一大步，从一条直线跨越到一个平面上。这个点的出现极大地扩展了空间！”

“噢，对了，两条相交的直线形成几个角呢？两个？四个？”

“我承认，我一直以为角是一个很复杂的课题。角这个词是从希腊语ankon（肘）或拉丁语angulus（角落）派生出来的。在很长时间里，人们一直在说‘倾斜（角）’，因为一个角就是一条直线向另一条直线倾斜的结果。当然，这只是一种说法，但实际上，这既不准确，也不便于操作。今天，我们说：两条相交的直线划出四个空间，每一个空间都是一个角。

“这四个角并非都不相同，两个顶点相对的角相同，因为它们具有相同的顶点，而它们的边又是相似的。因此，有两组相同的角。

“但有一种情况很特殊，也就是四个角都相等。这也是直角的定义，正是由于直角的存在，四个角都相等。人们在此并不以计量角度的度数或百分度来衡量它们，而是以几何状态来表述，即以四角相等的几何状态，以自然的方式来为基本角作定义。比直角小的角叫锐角，比直角大的角叫钝角。两个直角形成一个平角，四个角相当

于一个周角。后来，人们便为角设定计量单位，即度和弧度，有时甚至用周角。”

“为什么要采用不同的计量单位呢？”

“在法国大革命期间，人们确立了一种全新的计量体系，即十进位米制体系，计量单位采用米、千克等，所有这些单位均采用10进率，倍数和约数也都采用10进率。这是全新的计量方法，而且比以前采用的方法要简便得多。由于角的计量单位习惯于以60为基数，于是人们决定将此体系改为十进制，把角的计量方法也融入到新体系之中。人们便发明了以10为基数的百分度，将一个直角定义为100百分度。”

“正交和垂直有什么区别吗？”

“如果只从形容词上看，没有任何区别。正交源于希腊语orthos-gonôs（直角），垂直则源于拉丁语perpendiculum（铅锤）。你知道，铅锤总是垂直的，它与地面形成一个直角。

“但作为名词，人们会说一条垂线，但绝不会

说一条正交线，因为这个词只有形容词，没有名词。人们用源于希腊语的正交性来表示垂直度，但很少用源于拉丁语的词来表示垂直度。正交性主要用来计算间距。比如，为了计算M点与一条直线之间的间距，就要在M点与直线之间‘引’一条垂直线，此线与直线相切于H点。那么从M点到直线的间距就是MH。为了计算两条平行线之间的间距，就要给两条直线画上一条垂直线，此线与两条直线相切于H和H。而HH这一段的长度就是两条平行线之间的间距。你知道平行是什么意思吗？这个词源于希腊语的parallelos（置于相对的位置上）。两条平行线在其整个长度上被置于相对的位置。噢，对了，如果D//D，我能从中推断出什么结果，来看它们是否相等呢？没有。因为D不但能跟D平行，还能跟其他不同的直线平行。如果E⊥F，我能得出什么结果吗？我可以断定E≠F，因为一条直线并不与其自身相垂直。

“垂线常常能让我们去证明平行性，比如，在

平面上，如果直线H垂直于两条直线D和D，那么这两条直线就是平行的。如果H⊥D且H⊥D，那么D//D。”

“人们为什么要在三角形上花费那么多时间呢？”

“这是最小的直线封闭图形。”

劳拉露出疑惑的样子。

“我来解释一下。如果少于三条线段的话，一个封闭的空间是搭建不起来的。如果只有两条线段，那么这个空间就是敞开型的。”

“你的意思是说，如果我想把自己封闭起来，就只能封闭在一个三角形里？”

“不，我的意思是，如果想有一个封闭的空间，你不必非得有一个多于三个边的图形。”

“那就是圆形了？”

“我再重复一遍刚才说过的话：最小的直线封

闭图形，如果漏掉直线这个词，那就错了。”

“这很重要吗？”

“看一个空间是有界的还是无界的，这很重要。这是最重要的区别。三角形、正方形、圆形都是有界的，直线、弧线是无界的。直线及弧线并不限定某一扇面，因此人们也无法计算它们所涉及的平面。”

“难道只有封闭的图形才有面积，而其他图形没有吗？”

“你怎么能给无界限的扇面确定面积呢？人们不知道什么是一个敞开图形的面积，因为没有一个界定值。因此，人们从不说一个角的面积，这没有任何意义。我们再接着说三角形。三角形有什么共性呢？三角形的内角之和为180度。因此，三角形是一个‘封闭’的图形。

“根据这个基本特性，我能断定，如果我知道其中的两个角，也就知道了第三个角，因为我知道三个内角之和。遗憾的是，三角形的边却没有

相似的结果。即使我知道两个边的长度，我也推算不出第三个边的长度。

“当然还有其他的结果：一个三角形只能有一个钝角。如果有两个钝角，那么内角之和就大于180度了！由此，人们可以宣布，只有两种类型的三角形，一种是三个角都是锐角，另一种是其中两个是锐角，一个是钝角。至于说直角三角形，既然其中的一个角是直角，另两个锐角之和就应等于90度。

“知道了三角形的三个角并不能确定三个边的长度，也就是说，我们看不出它的‘体型’，但能知道它的形状。我们知道两个相同形状的三角形，即三个角相同，它们的边是成比例的：

==。”

“是的，但为什么三角形会如此重要呢？”

“因为有了三角形，人们可以打造所有类型的多边形，不管多边形有几条边。菱形？两个相同的等腰三角形底边相对就成菱形。正方形？两个

相同的等腰直角三角形斜边相对就成正方形。长方形？两个相同的直角三角形斜边相对就成长方形。你要是出去旅行，别带多边形的东西，只带三角形的东西就行了。你要是需要一个五角形，从你的旅行包里拿出三个三角形就能构成一个五角形。你需要一个八角形，那就拿出六个三角形。

“此外，还有三角形的‘可视性’！一辆汽车在雾中疾速行驶，司机突然看见前方路边上有一块红色三角形警示牌，他急忙刹车。原来有一辆卡车停在路边。司机及时刹车，避免了一场交通事故。你放一个正方形、一个五角形、一个圆形、一个三角形，然后从远处看，哪个图形最醒目呢？为了警示路况，路警部门为什么选择三角形呢？因为三角形是可视性最好的图形，它肯定有一个锐角，锐角就是一个‘尖形物’。用来标明方向的路标都采用一个箭头，箭头就是一个小三角形。希腊字母德耳塔Δ就是用一个三角形来表

示，呈现出河流三角洲的形状。

“我们来看看角的顶点和边的关系。每个顶点有两条相邻的边，每个角有一个对边，因为只有一个对边，因此可以说顶点对边。但在长方形上，人们就不能这么做，因为每个顶点有两个对边。

“咱们来给三角形做几条定义，包括高、中线、垂直平分线、角平分线。高就是从顶点引到对边上的垂线，它的长度就是从顶点到对边的间距。中线就是连接顶点及对边中点的一条直线。边的垂直平分线就是垂直于边中点的垂直线。角平分线就是将角均分的射线。”

“三个高，三条角平分线，三条垂直平分线，三条中线。三角形是三之王！”

“可以这么说吧。而且人们还能将它称为三边形。我们先画一条垂直平分线，好的。再画第二条垂直平分线，这条线与第一条线相交。接着画第三条垂直平分线，这条线应与前两条线在某处

相交，在哪儿呢？恰好在前两条线相交的地方相交！这真是太奇妙了。三条垂直平分线在同一个点上相交，这真是出人意料！怎么解释这样的结果呢？当然，这其中有许多原因。于是人们便去求证。求证肯定是在意外发生之后，因此求证的目的就是回答这个问题：为什么会出现这样令人惊奇的现象？如果求证成功了，这种现象发生的原因也就一目了然了。这也许仍然让人感到惊奇，但起码不再神秘了。”

“这正是我刚才对你说的。在数学里，所有的一切都有根据，都有理由。”

“这至少是数学家的信念。他们要弄明白，要解释，要证明。难道你喜欢一个对新事物没有任何解释的世界吗？”

“我喜欢一个所有的一切都不需要证明的世界。但这不意味着我希望什么都不需要证据。”

“解释并不会扼杀惊奇。神秘消失之后，留下的只有美，当人们知道美源于何处时，美则显得

更加动人。但出人意料的事接连不断，令人惊奇的同样现象还出现在角的平分线上，它们也在同一点上相交。中线和高也是如此，它们都相交于同一点上，因此具有共点的特性。在三角形里，在这个几何形状里，好像有一股吸引力将三角形的各个元素联结在一起，融合在一起。这四个交汇点是三角形最显著的点。比如，中线相交的点是一个战略要地，即三角形的重心。我们可以做一个小实验：把一个金属三角形放在一颗钉子上，三角形放不住，便掉下来。现在你把钉子钉在重心的位置上，三角形就放住了！此外，你是不是早已见过带两个前轮的新款低座小摩托车？这款摩托车很稳当，车子停下来时，驾驶人不必把脚放在地下来支撑摩托车，因为只要不是线形排列，三个车轮就构成一个三角！三角形是很稳当的。要想有一辆很稳当的汽车，不一定非得要是一辆四轮车。”

“这就是为什么学骑车的时候，我要从小三轮

开始学。”

“你看，数学还是用得着的。”

“为什么在三角形里有那么多相等呢？”

“当人们为某一系列物体作定义时，首先要做的就是看其中的两个物体是不是相等的。在几何里，如果能将两个物体重叠在一起，那么它们就是相等的，也就是说，它们各自相对应的组分是相等的。因此需要对组分一一审核，再一个个地去对比。人们不禁琢磨，究竟有没有更‘省事’的方法，只需对一部分组分进行对比即可。

“我们来看圆形。为了证明两个圆形是相等的，只要证明其直径相等，或证明其圆周相等即可。其实有一个相等值就足够了。这也很正常，因为圆形的大小完全是由其直径或圆周决定的。

“圆形在下列情况下相等：直径相等，则两圆相等。

“那么三角形呢？三角形有三个角，三条边。因此需要确立六个相等值才能宣布两个三角形是

相等的。实际上，是五个相等值，因为知道两个角之后，人们也就知道第三个角了。是不是还有更‘省事’的方法呢？答案是肯定的。这就是三角形全等判定的三种情况。第一种情况，比如：两个角及其夹边对应相等的两个三角形全等。两个角和一条边，三个相等值，而不是五个相等值。当然还有相等情况的其他解释。单凭一条边以及相邻的两个角，我只能画出一个三角形。”

“为什么我每次画任意三角形，画出来的都是等腰三角形或直角三角形呢？”

“这不过是一种感觉。假如实际测量一下三条边，你就确信它们是不同的，只不过三个角相似罢了。从定义上看，任意三角形不具有特殊的属性，边不相等，角也不相等，而且也没有直角。然而，人们从数学里得出的结论均源于物体的特性，物体越普通，它的特性就越少，所能得出的结论也就越少。为此，人们常常研究直角三角形、等腰三角形或等边三角形，研究正方形以及

菱形。

“古希腊人说，某些三角形有两条‘等长的腿’，于是他们将此称为iso-skelos！iso是‘同样’的意思，skelos是腿的意思。至于说三个边不相等的三角形，也就是任意三角形，在很长时间里，人们将其称为‘不等边’三角形，‘不等边’的原意是瘸腿的意思。”

劳拉大笑起来。

“三角形瘸腿，圆形不转动。几何看来真是站不住脚呀！”

“可几何毕竟已在这个世界上生存25个世纪了！我们刚刚看过直角三角形与任意三角形的关系，还看过三角形与多边形的关系。我们现在来看看多边形与圆形的关系。我有一个多边形，有没有一个圆可以经过多边形的各顶点呢？假如有这样一个圆的话，人们将其称为多边形的外接圆。它是完全包容多边形的最小的圆。人们证明

所有的三角形都有一个外接圆，而这个圆就是唯一的。为什么呢？因为经过三个相同点，即三角形顶点的两个圆是相同的。那么怎么画这个圆呢？圆的中心又在哪儿呢？就在垂直平分线的交点上！为什么呢？对于线段来说，垂直平分线起到很重要的作用。而它的位置正是某一线段各端等距的中心点。在第一条垂直平分线上，垂直平分线的交点到A点与B点是等距的，在第二条垂直平分线上，它到B与C是等距的。因此，它与A、B和C都是等距的，也就是经过A、B和C点的圆之中心，即三角形ABC外接圆的中心。”

“四边形是不是也有外接圆呢？”

“没有。正方形和长方形可以有一个外接圆，但菱形、任意梯形以及任意四边形都没有外接圆。对于四边形来说，有一个外接圆是一个‘好的’特性，这种情况称之为‘可内接于圆的’。”

“三角形是三之王，那么四边形是不是四之王呢？”

“不是，四边形确实有四个角、四条边，但只有两条对角线。我们刚才说过，任何一个四边形都是由两个三角形组成的。三角形的内角之和等于180度，因此四边形的内角之和就应等于360度，或等于四个直角。

“人们根据某些特性来为三角形归类，也采用同样的方法来为四边形归类，并按三个标准来实施：看是否有直角；看是否有相等的对边；看对边是否平行。

“四边相等，就是菱形。四边相等，四个直角，就是正方形。四个直角，对边相等，就是长方形。对边相等，就是平行四边形。只有一对对边平行，就是梯形。

“正方形是最简单的四边形，只要一个信息，即边的长度，就可以确定正方形，要想给正方形下定义，只需说边2的正方形。而长方形则需要两个信息，即两个边长，因此要说长方形2，3。至于说平行四边形，它需要三个信息，边长及各

边所形成的夹角值。”

“对称为什么很重要呢？”

“因为当一个图形是对称的，人们可以根据其一部分复原整个图形。仅凭一部分，就能得出整体。对称是一个几何概念，数没有对称之说。人们注意到有两种类型的对称，一种是相对于直线而言的轴向对称，另一种是相对于点而言的中心对称。这两种对称相互关联，如果相对于两条垂直的直线，一个图形是对称的，那么相对于两个轴向的相交点，它也是对称的，即中心对称。

“从等腰三角形的高来看，等腰三角形是对称的。从等边三角形的三个高来看，它也是对称的。从正方形和菱形的对角线来看，这两个图形也是对称的。无论从直径来看，还是从中心来看，圆都是对称的，因此圆形是对称之王。

“你是不是注意到有些体育比赛的场地从中线来看也是对称的呢？包括足球、手球、橄榄球、网球、排球、乒乓球等。为什么呢？就是为了让

两支球队拥有相同的场地：场地面积相同，门及网的设置相同，等等，以便让两队公平地比赛。”

“数字π起什么作用呢？”

“数字？”

“噢，对了，数π。”

“这是一个涉及圆的数，它告诉我们圆的性质。”

“人们什么时候发现π的呢？”

“从远古时代以来，从事计算的人就发现所有的圆形，无论形态大小，都有一个共同点：圆的直径与圆周之间似乎保持着某种关联。这个数的关联似乎与圆形的大小没有直接关系。根据他们的计算，人们可以推断：对于希伯来人来说，这个数是3，详见《圣经》中的记载；对于古巴比伦人来说，它是3+$\frac{P}{Q}$，即3.125；对于公元前16世纪的古埃及人来说，它是 =3.160；对于公元前250年的阿基米德来说，这个关联值介乎3.1408和

3.1429之间；对于公元纪年初的中国人来说，此值为3.162；对于3世纪的印度人来说，此值是3.1416。

“圆有两个显著的元素：圆周和直径。

“这两个长度间的关联值是不变的，它和圆的大小没有任何关系。这个值描绘出圆形的特征。

“过了很久以后，圆周的‘圆’与直径的‘直’之间的关联才在西方用希腊字母π来命名，表示四周长度的意思。这个关联值告诉我们，所有的圆都相似，可以说在全世界只有一种圆，只不过面积大小不同罢了，或者说，圆只有一种存在方式。然而，三角形或长方形则不会出现这种情况，它们并不相似，而且形状也不同。”

“确切地说，π与什么相等呢？”

“确切地说？劳拉，这正是问题关键之处！你问我‘它的确切值究竟是什么？’我的回答是：‘π的确切值就是π！’”

劳拉露出不高兴的样子。

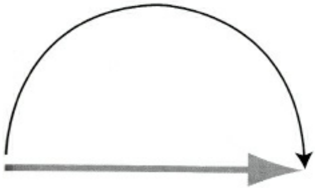
“别这样看着我。其实这是唯一贴切的答案。”

“是吗？”

“如果π等于，那么将其称为好了，人们也不必夸大其词，非得用一个希腊字母来表示这个值。我再给你举另外两个例子：如果你想知道1除以3等于什么，两数相除之后，你得出0.33333……如果你愿意的话，这个数可以一直写下去，你永远也得不到一个准确的值。现在我们知道，人们永远无法用十进制数来准确地书写π值，即使用分数，也无法准确地表述这个值。但人们将来会越来越接近它的精确值，并已计算出小数点后的12410亿个数！对于‘π与什么相等？’这个问题，唯一的答案是‘π与π相等’。

“噢，对了，你到乡下愉快地散步，你不想直接到那儿去，而是转一圈绕过去。你知道要多走

多少路吗？你的路程将是直线的$\frac{\pi}{2}$倍长！相当于1.57倍长！



$\frac{\pi}{2}$倍长

“你刚才问我数学家对什么最感兴趣。他们给自己提出一个很大的问题，而我们在日常生活中也经常提这个问题：在提出问题之后，人们肯定要探求究竟哪个是最小的物体，或者哪个是最大的物体？

“比如，我有某一个周长，于是便琢磨在具备此周长的所有图形里，究竟哪一个图形涵盖的面

积最大呢？人们证明恰好是圆形。在周长等长的条件下，圆形所包含的面积最大。这个知识很有用。假设你有一个长度有限的篱笆和一头牛。要想让牛吃到更多的草，你就给它搭建一个圆形围场。而其他类型的围场，比如正方形或长方形，都会比圆形的面积小。如果你要建一个正方形围场，假设圆形是1的话，正方形的面积只有0.637，也就是说，在这个正方形围场里，你的牛要少吃36%的草！”

“为什么勾股定理会如此重要呢？”

“这也许是数学史上最古老的定理之一。美索不达米亚人和古埃及人发现某些三元组合数与其平方值维持着一种奇妙的关系。你知道，这个关系就是两个数的平方和等于第三个数的平方（3，4，5）。其实就是$3^2+4^2=5^2$，常用的勾股数为（5；12；13），（6；8；10），（8；15；17），（12；16；20）。后来人们证明，如果一个三角形的三条边具有这种关系，那么它就是一

个直角三角形。大概是毕达哥拉斯[1]对此做了验证，从此人们便使用毕氏定理（勾股定理）这个词。

[1]毕达哥拉斯（约公元前572——前497）：古希腊数学家、哲学家。

“根据定理，勾股演算发生在三角形上：根据一个角（直角）的信息可推算出各边的结果，或者反之。

“如果各边的结果是$a^2+b^2=c^2$，只有在这种情况下，此三角形才是直角三角形。

“因此，根据这三个数，即两个平方之和等于第三个平方，人们就能搭建一个三角形。各边长之间的关联为我们提供了搭建三角形的方法，也让我们据此去计算各边的长度：假如我有一个直角，而且也知道其中的两个边长，凭借勾股定理我就能计算出第三个边的长度。这是一种极为常见的情形。”

4代 数

“为什么说‘未知数x’呢？”

“因为x正是人们不知道，而且要去求证的东西。”

“这一点我明白，但未知数的词性为什么是阴性的呢？”

“我也不知道。也许是因为女人更难捉摸，更神秘，更难理解吧……”

“还有，她们总是带来麻烦，对吧？”

“你是不是在挑刺呢？”

“是的。”

“说出来就好了。我要是想探求某物的特征，首先就要给它起个名字。如果不给它起一个名字的话，我就不能去‘掌控’它，因此也就谈不上去探求了。那么我有什么选择吗？用一个已知的数来命名？比如8这个数。这是很愚蠢的做法。假如我决定让未知数等于8，这肯定是错的。问题似乎是解决了，但结果是错的，甚至在没有动手解决问题之前就错了。

“于是，我临时先给它一个名字x，这样所有我要求证的数都有可能是未知数，我就不会把自己引入求证的死胡同里。

“凭借这个临时名称，我可以去求证，可以计算，在探求未知数的过程中一步步地往前走。

“我只是暂时使用这个名称，在鉴别出未知数的特性之前，未知数将一直采用x这个名称。在我所探求的结果出来之后，未知数将放弃化名，用属于自己的名字。

“在一部侦探小说里，提到不明身份者时，作者会说，‘罪犯’、‘杀人犯’、‘犯罪嫌疑人’，有时甚至用‘x先生’，‘x女士’，当人们弄清罪犯或杀人犯的身份时，调查也就结束了。

“一般来说，无论是解习题，还是警察办案，或是科学研究，它们之间有一个共性：人们掌握迹象（或指数），掌握相关的信息，手中还有线索，有时甚至是假线索，有进展时会感到很振奋，一筹莫展时也会感到很沮丧，人们试图找到

一种合乎逻辑的结构，所有的一切都会变得很清晰，人们知道事情的来龙去脉，而且还能提供事情发生过程的佐证。”

“等式和方程式有什么区别吗？”

“=25是一个等式，-x=0是一个方程式。-25和-x则既不是等式，也不是方程式，我们只能说它是表达式。

“等式其实就是一个数学式子，里面有‘＝’，还有已知数。对于等式，我们只能提一个问题：它究竟是真的还是假的？=25是真的，而=是假的，就像刚才咱们所看到的那样。”

“如果它是一个等式，它就是真的！”

“不，不！你再看看定义：等式就是一个数学式子，里面有‘＝’，还有已知数。至于说方程式，这也是一个式子，里面有‘＝’，有已知数，还有未知数：2x+3=7。方程式既不是真的，也不是假的，它是带限定条件的式子，因此，‘两个x加3应该等于7’。等式和方程式有两个边。我想将

它们称为‘岸’，是等号的两岸。”

“我看你倒更像一个诗人，那么在等号两岸之间有什么东西在流动呢？”

“你想想看！可以说，这场游戏就是要把此岸的项转到彼岸去。等号就像是一个界线，要想越过这个界线，必须严格遵循一定的程序。

“解一个方程式就是要确定未知数x的值，这个值要能满足限定条件。为了做到这一点，人们要一步步地将初始方程式改变成一系列等量方程式，这些方程式有可能引导我们找到答案，直到将左边的未知数分离出来，也就是说，直到获得x=A这种形式的方程式，A是仅包含已知数的代数式。未知数的各个不同值就是方程式的解。

“那么方程式怎么解呢？记住这条金科玉律：如果以相同方式对方程式两端进行更改的话，我们就能得到一个等量方程式，这是最主要的手段。如果右边加2，左边也要加2，如果右边乘2，左边也要乘2，等等。

“可又怎么来驾驭未知数呢？无论是加，是减，还是乘，未知数的算法和已知数完全一样。但除法则要注意，如果x是分母，那么x绝对不能是零，其中的原因你已经知道了。

“我们试着把左边的x分离出来，就像刚才所说的那样，一定要把所有能移动的都移到右边去。2x+3=7。要想让3消失，就得在两边分别加上-3：2x+3-3=7-3，也就是说，2x=4。为了把左岸的x分离出来，就要清除x的因数2。为此，要在等号的两边分别除以2。=。结果就是x=2。未知数的谜也就解开了！但在写下结果之前，还是要谨慎一点，要再验证一遍，这样可以避免得出错误的结果。在方程式里用2来代替x，应该得出一个等式，假如结果确实是等式，那么验证就是成功的：2×2+3=7。它果然是一个等式。2是满足限定条件的数，它就是方程式的解。”

“代数和算术有什么区别吗？”

“算术是研究整数和分数的，而代数是数学里

的一个学科，其研究对象是方程式。古希腊人在几何和算术方面颇有建树，但他们并未将自己的研究推向深入，去创建代数。这个学科在9世纪初诞生于底格里斯河岸的巴格达，它的创建者是一位名叫穆罕默德·阿尔·花剌子模[1]的波斯学者，他撰写了《代数学》一书，从而为新学科奠定了基础。此书标题中的一个词演变成‘代数’，现在全世界都采用了这个名词。至于说他的名字阿尔·花剌子模，在经拉丁文音译之后，演变成‘算法’，这个名词在信息学里的意思是‘解决问题的系统程序’，或者说是实施运算的系统程序。

[1] 穆罕默德·阿尔·花剌子模（约780——约850）：阿拉伯阿拔斯王朝著名数学家、天文学家、地理学家。代数与算术的整理者，被誉为“代数之父”。

“代数最早是用来解决遗产问题的，而遗产问题往往很复杂，且又受严格的规则限定。方程式就是最合适的工具，人们凭借它就可以根据逝者的遗嘱来决定分配给法定继承人的份额。”

“在代数里，字母往往比数还要多，这真有点

古怪。变数和参数有什么区别吗？”

“2x+3=7。这个方程式意味着什么呢？第一个数的变数之积加上第二个数等于第三个数。直接让这三个数相等是没有任何道理的，因此我要用不同名称如a，b，c来命名这三个数。其实我要确定的并不是这三个数，而是未知数x。现在我可以用文字来描述这个方程式，而不需要任何数值：第一个数，我用a来表示，第一个数的变数之积为ax，再加上第二个数，我用b来表示：(ax)+b，应该等于第三个数，我用c来表示：(ax)+b=c。

“这个表达式也是一个方程式，但在这个方程式里，没有任何数值。实际上，这并不是一个方程式，而是一组方程式。a，b，c用来描述方程式的‘形态’，它们就是参数，可以用来书写一次方程式。

“每一个带a，b，c数的三元组合确定一个特殊方程式，2，3，5则确定2x+3=5这样一个方程

式。我们先试着解一般方程式：$ax+b=c$，$ax=c-b$，因此x=。

“为了消掉b，就要在两边分别加上-b：$ax+b-b=c-b$，我可以写成$ax=c-b$。为了消掉a，只要两边都除以a就行了。我最终得出想要的结果：x=。这样做有什么意义吗？根据公式x=，我就能得出一次方程式的解。

“假如方程式中不是x，而是x^2，那么我们碰到的就是二次方程式。次数是方程式中最高的指数。

“我们来看另一个例子：第一个数的变数平方积，加上第二个数的变数之积，再加上第三个数等于第四个数。因此a，b，c，d四个数就可以书写最一般的二次方程式$ax^2+bx+c=d$。

“笛卡儿[1]既是哲学家，又是数学家，他把在方程式中使用字母的方法推广开来，用字母表中最后三个字母x，y，z来代表未知数，用字母表中

最前面的字母a，b，c，d等来代表参数。”

[1] 勒内·笛卡儿（1596—1650）：著名的法国哲学家、数学家、物理学家。他对现代数学的发展做出了重要的贡献，因将几何坐标体系公式化而被认为是解析几何之父。他还是西方现代哲学思想的奠基人。

“古代中国人不用字母，他们是怎么做的呢？”

“坦率地说，我对此一无所知。但我知道伟大的印度数学家婆罗摩笈多是怎么做的，当他碰到好几个变数时，就用不同的颜色来表示方程式里的未知数，黑色表示第二个未知数，蓝色表示第三个未知数，接着用黄色、白色以及红色。”

“真是色彩缤纷的代数！兰波不是作过一首诗，为元音描绘色彩吗？”

“是的。你知道这首诗？背给我听听。”

“我想不起来了。”

“A黑……E白。”

“噢，对了，I红，U绿，O蓝。”

“人们常常提起代数语言。有些代数式连成一

体，没有加减号，看上去好像单词，比如：$3xy^2$，这就是单项式。

“用加号+或减号-隔开的一组单项式，看上去好像一句话，这就是多项式。代数语言只需要很少的符号，三种类型的符号就够了。有已知数，如2，$\frac{P}{Q}$，有代表数的字母，如a，b，x，y……有符号，如=，>，<，还有四种运算符号+，×，-，÷，以及指数、平方、立方和平方根的符号$\sqrt{}$。

“噢，我差点忘了一个很重要的符号，它就是括号！括号按对来使用，有开括号（和闭括号）。这是真正的标点符号，用于把某些连续的项组合在一起，以便让人知道它们应视为一个整体。比如我写下 a+b×c。这究竟是什么意思呢？这究竟是a与b×c之积相加的和呢，还是a+b乘以c的积呢？这样的写法无法确定究竟要表达哪个意思，它是含糊不清的。因此要绝对避免出现这样的写法，在数学里不应该用有歧义的式子来表

达。这样就需要创造一个符号来避免歧义，这个符号就是括号。它是如何摆脱这个困境的呢？要想表达a与b×c之积相加的和，就写成a+(b×c)。要想说a+b乘以c的积，就写成(a+b)×c。括号消除了歧义！”

“为什么所有的方程式都等于0，而不等于2，或3，或14呢？”

“首先，我要提醒你，方程式并不等于任何数。方程式就是方程式，仅此而已。其实你问的是，为什么方程式的第二个数常常等于0。不管a=b是不是一个等式，我们总能把它改变成一个新等式，其中的第二个数是零，a=b，a-b=b-b=0。a=b与a-b=0是一样的。”

“当然可以这么做，可为什么要这么做呢？”

“实际上，人们并不是能怎么做就怎么做。其中的意义何在呢？我们再来看看ax+b=c这个一次方程式，此式有三个参数。我们把这个形式变一下，ax+b-c=c-c，因此ax+b-c=0。鉴于（b-c）是

一个数，我用参数d来代表它。于是方程式就变成ax+d=0，第二个数为零，但只有两个参数。我也由此找到一种简化的一般形式。这个方程式比前一个更简单，但同样带有普遍性。这对所有的方程式都是有效的。”

“在代数里，老师总要我们做因子分解，要展开……”

“因子就是‘乘数’。因此在数学里，人们说因子之积，而不说因子之和。老师要你们为一个数学表达式做因子分解，意思是说，要把一个和变成一个积。展开恰好是相反的运算，要把积变成和。

“$(a+b)\times(a-b)=a^2-b^2$从左往右读，这个因数分解式就是一个展开形式，一个积转变成一个和。从右往左读，就是一个因子分解形式，一个和转变成一个积。

“当然相对而言，大家还是更喜欢用乘法。为什么呢？因为乘法更简便。我们来看一个例子：

$a\times b=b^2+b\times c$。做因子分解：$a\times b=b\times(b+c)$。再简化成$a=b+c$。

“坦诚地说，这个式子在最初的写法里根本看不出来。

“做代数，其实就是整理，研碎。我们把代数式研碎后，将其改成相等的其他式子，改成合适的式子，因为我们只掌握习题的已知条件或课堂上老师所提供的信息。

“记住这条金科玉律：形式可变但值不可变。数值上哪怕有一点微小的改变，都会酿成大错！

“人们在数学里做的某些事往往显得很愚笨。”

“你看，你也承认了吧。我为你的洞察力喝彩。”

“等听完我后面的话你再欢呼吧。你有一个代数式A，然后想把它改成A+2-2，一个数学差生会觉得这种做法很愚蠢，加上2之后，马上再把它消掉，那么加2又有什么用呢？其实是有用的！

“在一个代数式里，人们唯一有权做的改变，就是改变它的形式，但不能改变它的值。

“因此，在做代数时，大部分运算就是要用一系列相等的代数式来替换代数式A，直到找到合适的代数式。”

5点和关联

“几何的问题往往很难，你是不是觉得它不难呢？”

“噢，不！要在空间里看出形状来，我真的不行。”

“在17世纪，两位法国数学家勒内·笛卡儿和皮埃尔·费马[1]各自提出自己的想法，他们用代数语言来论述几何物体。这个想法给数学带来了革命性的变化，一个新的学科由此而生，这就是解析几何，它成为与算术、几何学、三角学、代数学并列的学科，从而扩大了数学世界。正是由于有了这个新学科，人们只要在代数式上运算就行了，而不必直接到几何物体上运算，因为代数式操作起来更简单。这就相当于在空间与数之间、在几何与代数之间搭建起额外的桥梁。用代数方法来处理几何问题，就是把代数学的所有计算技巧都用在几何学上。

[1] 皮埃尔·费马（1601—1665）：法国律师和业余数学家。他在数学上的成就丝毫不逊色于职业数学家，他似乎对数论最有兴趣，

亦对现代微积分的建立有所贡献。

“你知道，点是几何最简单的物体，也是最基本的物体，每个几何物体都是由点组成的，而且只是由点组成的。换句话说，如果知道了某一图形的所有点，也就知道了这个图形。因此首先要给这些点起个名字，用某种系统的方法来命名。为此，确定一个坐标系就变得十分必要了，这个坐标系其实就是一种布置法，为某一集合的所有元素定位，并清晰地命名。

“在数学方面，人们常常这样做：为物体起一个名字，以便论述。人们甚至可以给一个尚不熟知的物体起一个名字，比如在一个平面上有A，B，C三个点，另一个点G处于与这三个点等距离的位置上。如果我们不知道答案，那么有两个问题：这样一个点是否存在？如果存在，怎么找到这个点呢？只要这两个问题没有答案，那么G点就是未知的，但我们还是给它起了一个名字，以便论述。

“相对于其他已知的物体，知道自己处于什么

位置上很有用，比如在日常生活中，你处在相对于哪条街、哪个建筑物的位置上。在几何学里也一样，垂线脚上的H点，直线D与D相交处的H点，等等。

“这正是笛卡儿与费马提出新想法的初衷：尝试着将‘数字’名称以及数与‘几何’点结合在一起！

“这个想法真是太棒了，如果成功的话，人们就能利用算术及代数的所有资源，也就是说，要利用整个系统的资源，而不必借助于直观，这和几何学完全不一样。为了获得更有效的成果，尝试着去突破计算的框框！这真是美妙的设想。

“在几何里，命名一个点，就是确定这个点的位置。要确定某物，就需要一个方位标。因此需要给每个点所占据的位置起一个名字。

“比如，假如我说：‘我在南方高速公路上，在里昂的30’，这个信息是不充分的，30的单位是什么呢？是米，还是千米？朝哪个方向呢，是巴

黎还是马赛？相反，假如我给出原点（里昂）、方向（马赛）以及单位（千米），那么就不会产生歧义了，我知道自己在什么地方，即使高速公路并不是一条几何直线。

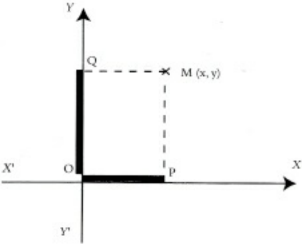
“同样，如果某一点是在一条直线上，那么在直线上就要设一个O点，作为原点，设一个方向（定向直线），再设一个长度（单位），这样就可以避免歧义了：M点的数字名称就是线段度量的代数值x=[OM]。

“如果人处在一条直线上，那么这个点由一个数构成；若在一个平面上，就由两个数构成；若在一个空间里，则由三个数组成。什么原因呢？直线只有一维，平面有两维，空间有三维。

“第二个领域，即平面。方位标由XX和YY这两个定向轴构成，两轴相交于O点上，此点就是坐标的原点。此外，在每一个轴上，人们都可以确定一个单位间距。

“两轴垂直时，便将方位标称为正交。如果除

此之外，单位制长度一样，便称该方位标为标准正交。



纵坐标轴
横坐标轴

“将M点分别投映在两个轴上，便获得两个线段OP和OQ，代数测度提供了数：x，y，它们就是M点的坐标，x是横坐标，y是纵坐标。M点将由一组数（x，y）来命名。对于数学家来说，平面上的一个点往往是一组数。为了纪念笛卡儿，坐标系又被称作‘笛卡儿坐标系’。

“我们本来还可以用不同的方法，比如设一个带原点O的定向轴X，同时用相对于原点O的间距

d来确定M点，并确定OX和OM矢量的夹角θ。这就是人们所说的极坐标。你注意到我们至少需要两个数：在笛卡儿坐标系里需要x和y，在极坐标系里需要d和θ。”

“这和地图完全一样，经度和纬度。经度就是横坐标，纬度就是纵坐标。纵坐标轴就是格林威治子午线，子午线即0度经线，横坐标轴就是赤道。”

“唯一的区别，平面是平的，地图当然也是平的，而地球却是一个球体。因此在一个球体上，人们不是用千米来测间距，而是用度，经度分为360度，纬度分为180度。”

“总是直角、平面、曲线！”

“实际上，这正是数学的大命题之一。

“方位标的所有手段都是用来表示函数的。在日常生活中，人们常常会听到‘取决于’，‘这是……的结果’，‘和……有关’这样的话。有时在研究某些现象时，人们注意到某种现象的变化会

引起其他现象发生变化，比如速度与距离、重量与体积、某种蔬菜的价格与其分量等。当然，人们设法更准确地了解将两种现象连接在一起的纽带，希望能够以数学的方式将其列出来。

“17世纪末，莱布尼茨在一篇论著中写道：‘x是y的函数’。这个词就这样保留下来。20多年过后，约翰·伯努利[1]采用了符号f(x)，意为‘变量x的函数’。这个符号也保留下来。于是数学里的新事物便应运而生——函数，函数的研究也就成为数学的一个重要组成部分。在函数研究方面，数学的效率有目共睹，尤其是将它的效率应用于其他学科，如物理学和天文学时，成果更为显赫。

[1] 约翰·伯努利 （1667—1748）：瑞士杰出的数学家，对微积分的研究倾注了极大的心血，是最先应用微积分于各种问题的数学家。

“比如在电力方面，在一个电路里，电压V和电流强度I之间的关联用函数V=R×I来表示。R表示电阻。

“下面就是函数f(x)=2x+5。我可以将它看做一

台具有输出端和输入端的机器。我在输入端嵌入1，机器开始运转，用2乘以1，再加5，抛出结果：y=7。我用文字来概述这个函数作用：偶（1，7）的第一个项是嵌入输入端的数，第二个项是机器抛出的数，它所表达的正是机器刚完成的作业。

“我们接着看一组数，0，-1，$\frac{P}{Q}$，这几个数进入机器输入端。我们得到几个偶，（0，5），（-1，3），（$\frac{P}{Q}$，6）。其中的每一个数均可视为平面某一点的名称。换句话说，机器[2x+5]可以造出平面上的所有点，这个平面的坐标就是两个横坐标再加5。所有这些点都在一条直线上，于是我便把这条直线称为y=2x+5直线。此外，我还可以断定，两个横坐标再加5这个坐标上的所有点都在这条直线上。

“函数、曲线、方程式，这三个项常常密切相连：一个曲线的方程式，一个函数的表示曲

线。”

“这是不是有点词源学的意思？”

“是的。拉丁文repraesentare（表示）的意思就是使其具有现时性。‘表示’的意思就是让某事变得有现时性。至于说代数形式下的这个函数，我们很快就能看清它的面目了。

“这就是图形表示法的作用：给函数提供一幅‘图像’。

“曲线的方程式就像一个装置，可以随意为曲线上的每一个点起名字。每一个点都满足曲线方程式的条件。”

“‘满足方程式的条件’是什么意思呢？”

“A点（1，7）满足方程式f(x)=y=2x+5的条件，如果用1来替换x，用7来替换y，我们就得出等式：2×1+5=7。因此A点就在函数f(x)=2x+5的表示曲线上。

“你是不是觉得我太啰唆了？”

“不，你在反复论述。如果我理解得不错的

话，你是在以不同的方式向我讲解同样的东西。”

“此外，掌握方程式的知识有助于了解曲线的几何特性。在曲线里，人们第一眼究竟注意到什么呢？首先，曲线达到最高点时便不再攀升，而是开始下降；曲线达到最低点时便不再下降，而是开始攀升。其次，是拐点，曲线改变其弯曲度，由开口朝上转为开口朝下。当然还有好多其他东西，比如切线、交点等，曲线在交点上与XX轴和YY轴相交。我们还可以让两条直线相互对应，成为平行线或切线。

“在某些情况下，仅凭‘看’方程式，就可以断定它所表示的曲线形式。因此，一次方程的所有函数$f(x)=ax+b$必定是由直线来表示，而二次方程的所有函数$y=ax^2+bx+c$必定由抛物线来表示，此时a，b，c是系数，而$a\neq0$。我们明确指出$a\neq0$，因为如果$a=0$的话，函数就变成$y=bx+c$，正像我们所看到的那样，这个函数是由一条直线来表示

的。

“那么怎样才能得到这条直线和这条抛物线呢？通常我们是用一条不间断的线把它们画出来，但实际上它们并不是这样显示出来的。其实它们是一个一个的点：输入是一个数，输出是一个数，两个数形成一个点。就像在电视屏幕上一样，图像并不是‘画’在平面上，而是由许多点组成的，点的布局形成图像。这个图像与其说是油画，倒不如说是刺绣。这幅图像就是函数的图形。”

“搭建一个函数图形需要多少个点呢？”

“在输入端输入多少个数，就需要多少个点。”

“那么，在输入端要输入多少个数呢？”

“这个问题问得好。是应该明确说明。在输入端输入的数之集合都必须出现在函数的定义里，这就是基准点的集合。

“我再次强调，两个方程式相同，但起点的集

合相异的函数是不同的。你看，函数$f(x)=2x+5$，它的起点的集合是0，而函数$g(x)=2x+5$呢，它的起点的集合是所有数的集合。这两个函数是不一样的。前一个函数图形被简化成一个点，即0和5的交点，后一个函数图形则被简化成一条直线！这并不是完全相同的东西……”

6习 题

“我在课堂上往往能明白，但就是解不开所有的习题。”

“你在课堂上没听明白，却能解开习题，这种情况发生过吗？”

“嗯……”

“‘嗯’的意思就是没有发生过？”

“是的，没有发生过。”

“老师向你提问，其实就是在应用课堂上所讲的内容。习题总是和老师讲解的数学知识密切相关。除非在学期末做总复习时，习题涉及整个学期所学过的内容。在向你提问的时候，老师要达到什么目的呢？首先，他要确信你掌握了课堂上的内容；其次，他要评估一下你运用课堂知识的能力。”

“老师又是从哪儿找到这些习题的呢？”

“在专用的教材里。但老师常常根据讲课的内容，根据学生掌握数学知识的程度以及解决问题

的能力，自己编一些习题。也就是说，从原则上讲，你所掌握的知识能让你解开这些问题。

“人们交给你一个工具箱，你要学会使用这个工具箱。

“几乎所有的习题都是按相同的模式编出来的。习题先由一段文字引出，给出条件，然后再去‘画一幅图画’，指出该题的背景以及‘事件’发生在数学的哪个领域里，还要指出哪些数学功能在起作用，究竟是直角三角形呢，还是方程式呢，等等，还要看它们在这一事件当中保持什么样的关系。

“习题的结尾会按一定的顺序提出一系列问题。要始终牢记阐述的各项都是经过准确选择的，因为每一项所提供的信息都是你需要的，以便能解开所有的问题。面对每一个信息，你都要琢磨：为什么会给我这样一个信息呢？它要向我透露什么呢？要给我什么启示呢？破解这些启示是解开问题的重要组成部分。一般来说，向你提

供的已知条件不会超过你所需要的条件。也就是说，为了解开问题，你应该利用所有的已知条件。万一你没有利用其中的一个已知条件，却把题全都解开了，这证明要么你是一个天才，要么是你做错了。

“下面是一道习题，由‘一个等腰三角形ABC’引出。写下这句话后，老师给出一条启示，你应该马上破解它。等腰（三角形）：两边相等，两角相等。你一下子就掌握了两个等式，要赶紧把它写下来，记在笔记本上。如果老师补充说‘顶点为A的等腰（三角形）’，这条启示告诉你，AB边和AC边是相等的，B角和C角也是相等的，AH高既是角的平分线，又是角的中线和BC边的垂直平分线，而且AH还是三角形的对称轴。你要把这些信息都记到笔记本里，这就是你的财富，它可以帮助你解开习题。

“那么问题呢？问题是根据已知条件提出来的，问题提出的顺序并不是随意的。为了回答其

中的一个问题，往往需要利用前面已得出的答案。但有时候，有些问题是独立提出来的，不必利用前面问题的答案也可以答出来。

“那么该怎么做才能解开一道习题呢？你的任务就是用你所掌握的知识去面对需要解开的问题，尝试着用自己的知识去解问题：我所掌握的知识能让我解开问题吗？

“有时你还要把问题当中的词汇‘翻译’成数学文字，也就是说，要用数学定义来替换题中的部分名词。

“在课堂上教给你的定理，包括你几年前学过的定理都是可以随意使用的！但显然并非所有的定理都适合用来解开你的习题。你要找到最适用的定理。找到‘适用’的定理，这是你的第一项任务。‘适用’是什么意思呢？‘将某物置于另一物之上，前者将后者完全覆盖住，并粘合在一起’，这可是字典里说的呀。

“你不妨去想象两个机械零件，你手里有一个

零件，要找到完全适合它的另一个零件。要证明定理是适用的，这是你的第二个任务。一旦证明之后，你要把定理应用到解题当中。后面的工作就由定理去完成了。定理给出的结论目前就掌握在你手里，你可以把这个结论记在笔记本里。

“如果习题所引的文字是用日常用语书写的，就像一个小故事，那么你首先要弄明白它所表达的意思。然后，你才能把它转换成数学语言。这是一项相当微妙的工作，但往往也是最难的事情，因为没有任何公式可以完成这项工作。

“正是在转换数学语言，包括方程式、图形、数、等式、不等式、函数的过程中，人们开始埋头去学数学。

“其实许多习题都是下一学期才会碰到的问题。老师让你去证明一个定理，但对于你的水平来说，这项任务太难了。但在讲解这个定理的过程中，老师会把它分割成若干个问题，就像一个个台阶，引导着你一步步往高处走。”

“就像一个阶梯！”

“没错，习题的构造就像一个阶梯，便于你逐渐地往高处走，你不是猛然间就得出结论，而是逐步迈向结论。在这个过程中，你上学期学过的内容依然能派上用场。一个初三的学生应该熟练掌握在初中学过的所有知识。”

“是不是有很差的习题呢？”

“什么是好的习题呢？这是问题的症结！好的习题就是好的假设、好的问题。有些假设并不‘丰富’，在这块贫瘠的土地上，除了野草，任何有意思的东西也没有。

“数学家的一个重要才能就是‘感知’哪些是好的假设。他们就像身怀绝妙手艺的厨师，这些厨师知道该用什么作料，用哪种肉、哪种蔬菜、哪种香料，将其搭配起来就能做出鲜美的菜肴。”

“你的厨艺那么好，可就是不经常给我们露一手，真是太遗憾了！”

“咱们还是再来看看其他食物吧。你们学习某

一内容时，有必要了解这一内容的不同形式和不同特性。”

“怎么会有‘不同形式’呢？”

“比如一条直线。从几何学的角度来看，它不过是一条线。这条线可以由其中的两个点来确定，也可以由两个非平行面的相交处来确定，还可以由其他特性来确定。从代数学角度看，它还可以由方程式y=ax+b来确定。人们因此可以改变运算方式，某些几何题以相应的代数方式解起来更容易些。你可以根据学过的内容，试着找找不同的求解方式。”

“特性难道是一张王牌吗？”

“是的，劳拉，无论是对数学家，还是对学生，特性确实是一张王牌。特性就是一个信息。一个物体越普通，它的特性就越少，人们掌握的信息也就越少，因此也就更不容易‘掌控’它。研究任意形物体是很难的，因为人们没有什么可依靠的东西。因此无论是在习题里，还是在定理当

中，人们把种种特性分配给这件物体，以便使它变得丰富起来。比如，人们不会去做任意三角形的习题，而是明确说明这是一个直角三角形的习题，因为直角三角形的内容要比任意三角形的丰富得多。其中的原因就是，一个任意三角形里真实的东西，反映到直角三角形里必定也是真实的，而不是相反！

在埋头去解习题里的第一个问题之前，最好把习题给定的条件通读一遍，看看习题最终要把你引向何处。况且一下子把习题都弄明白并不特别重要，但通读一遍给定条件还是有帮助的，这会让你脑子里冒出解题的想法。此外，习题中某些问题甚至可以澄清前几个问题的含义。”

7推 理

“什么是解题证明呢？”

“解题证明就是从习题入手到得出结论的整个过程，即从假设入手到得出答案的过程。我们来看假设一词的词源，hypo的意思是‘在……下面’，thesis的意思是‘放置’，假设就是把情境放到下面去。Conclusio意为‘关’，为解题证明收尾。

“解题证明借助一系列论据，最终走向答案，而每一个论据既是前一论据之果，又是后一论据之因。数学课就是论据、答案、定理的宝贵储备之所，你可以随意汲取，以解开所有的问题，所以熟知课堂内容是绝对必要的。”

“解题证明为什么如此重要呢？我们能不能甩开它……噢，我的意思是说能不能不用呢？”

“不行。证明是数学求证所特有的方式。当人们提出某一论断时，要掌握某种方式以确保论断是真的或是假的，也就是说要建立一个证据，这一问题迟早会提出来。证据是令人信服的论据，

最终会赢得人们的赞同。在人类历史的每一个阶段，证据始终是一个重要的问题，根据证据所应用的范围，可以接受的证据是不同的，比如医学上的证据与法律所要求的证据就截然不同。

“数学致力于找到物体的特性，但并非针对某一特殊的物体，而是针对无穷尽的物体群。当然，人们愿意相信以数字实例来证实答案是有效的，也相信以此演示这一答案的求证过程是完全有可能的。然而，由于每个实例的背景是唯一的，人们所求证的东西只是对这个实例有效，而不能推广开来。数字实例或几何图形可以给我们一些解题的想法，给我们带来做题的启示，帮助我们去搭建一个证明，但它们并不能被视为有效的证据。尽管如此，依然有另一种局面存在：数字实例可以得出一个答案，但却是一个反面的答案！如果某一特性在特例中并未得到证实，那么它在普遍性的例子里也得不到证实。这就是人们所说的反例，这是由特殊转为普遍的唯一情况。

“一方面，任何一个特殊背景都不可能得出具有普遍意义的答案。另一方面，鉴于答案所涉及的物体在数量上是无穷尽的，想要把它们一个个地求证出来是徒劳的。”

“什么？”

“因此需要发明一种工具，它能兼顾物体的一般特性，并特别留意物体的共性。这个工具就是证明。这大概是古希腊思想家最美妙的创造。

“公元前5世纪，古希腊人创造出一种全新的政治模式，这是西方世界从未有过的模式，即民主模式，demos一词就是‘人民’的意思，政权由人民来管理。最高权力来自人民，来自公民，而非来自国王、军阀、宗教领袖或上帝。在社会的不同阶层，人们开始实施全新的政策。在司法界，在公审的过程中，人们应当提供被告有罪或无罪的证据，而且应当尽可能提供无可辩驳的证据，人们应当确定种种事实，并进行辩论。在辩论过程中，控辩双方针锋相对，各自阐述自己的理

由。

“而在政界呢，那些声称能够行使权力的人应该在公民集会上阐述自己的主张，以便让公民信服自己的能力，证明他们在管理这个城市方面是最棒的。基本上也就是在那个时候，专制宣告结束了，象征着权威的这句话：‘因为是我说的，所以它是真的’也宣告结束了。

“就在那个时候，一个类似的现象也给数学带来了革命性的变化。既然你提出一个论断，那么就有必要提供证据，而且必须去证明你的论断。总之一句话，要用实例来证明。你只说有了新的发现是不够的，还要向其他人解释为什么这是真的。正是因为应用证明这一手段，古希腊数学才有别于古巴比伦数学，有别于古埃及或古代中国数学，古希腊数学的辉煌成就也应归功于证明。今天我们在学校里，在大学里所学习的数学，世界上所有数学家所应用的数学，正是古希腊人所发明并留给后世的遗产。因此证明也就是一种证

据，是数学所特有的证据。”

“那么在这之前，人们怎么做呢？”

“人们只满足于阐明答案，并不详细说明答案是怎么得出来的。”

“那时，数学是另一种形态，对吧？”

“是的。比如中国古代数学十分先进，然而它并没有定理，因为它采用了另外一种形式。”

“那么定理并不是一直就有的？”

“是的。古希腊思想家再次提出革新，定理的设想由此而生：用数学的方式来证明给定条件。定理由两部分组成：首先提出假设，阐明背景，最后作出结论，得出数学结果。这正是人们想要得到的，也是竭尽全力想要证明的东西。你知道定理一词从哪儿来的吗？Theorein在希腊语里就是‘冥想’的意思。”

“人们常说数学家想入非非，是不是也是因为这个呢？”

“你想让我回答这个问题吗？”

“不，算了。”

“谢谢。那么应该怎样理解定理所表述的内容呢？定理说：如果假设得到证实，也就是说，如果假设是真的，那么结果也是真的。我再强调一下，定理并没有说‘结果是真的’，而是说，‘在假设是真的情况下，结果也真’是对的。因此，在一项定理里，所谓真的东西，并不是把结果单独拿出来看，而是要把假设和结果合起来看。不管怎么说，几乎没有什么东西在任何情况下都是真的！”

“那么2+2=4也不是真的了？”

“我刚才说的那句话，对2+2=4也是有效的。比如，在三进制里，人们不能写2+2=4，因为三进制里没有4。三进制只使用三个数字：0、1、2，就像二进制里的两个数字和十进制里的10个数字一样。在三进制里，2+2=11！因为2+2=1×3+1，因此等于11。不清楚，是吧？在十进制里，11意味着多少呢？十位上一个数再加上

个位上一个数。而在三进制里，11代表着‘三位’上一个数，个位上一个数：3+1。”

劳拉惊得目瞪口呆。最终冒出一句话：

“如果2+2不等于4，那还不都乱了套呀？”

“并不是因为几乎没有什么东西是真的，就表示一切都是假的。定理总有证明相随，也就是说有证据相随，证据用来证明它所提出的论据是真的，从某种意义上说，这也是它的有效证书。如果说在数学里，几乎没有什么东西在任何情况下都是真的，但真的永远都是真的。

“定理一旦被证明之后，便列入公共范畴，成为共享的数学资产。所有的人都可以使用这笔资产，数学里是不存在产权专利的。数学的特性从此不会改变，也不会随着时间的流逝而弱化。如果你自己提出一个定理，那么这个定理将永远有效。数学是人类社会唯一能够提供这种保证的事业。”

“但我还是一点也不安心。永远是真的，你想想看？这让人感到飘飘然呀。然而我们所做的任何事都无法改变数学的特性，这就是你说的意思吧？”

屋子里一下子安静下来。雷意识到自己刚才的说法会对小姑娘产生什么样的影响，因为她今后的日子还长着呢。他是想告诉她，数学也是自由之地，伟大的数学家康托曾说过：数学的真谛就是自由。他是想说，在面对数学特性时，人们不应“高枕无忧”，而应该去研究数学的特性是怎么展现出来的，搞明白究竟什么可以证明它是真的，它是如何与其他特性融为一体的。雷还想告诉她，有些断定是持久不变的，甚至是不可更改的，他对此并不感到气恼，当然他还要依赖这些特性。是的，他可以完全信赖这些特性。

最后这句话，劳拉没有听明白其中的含义。

劳拉接着他的话说下去：

“我是不会躺在定理上睡大觉的，定理让我闲不住呀。为什么要把定理都背下来呢？”

“不是要把定理都背下来，而是要‘用心’去理解，去弄明白定理当中的深刻含义：定理完成一项工作，它就是一个传递者，从某一数学命题转到另一个命题。这个意思是说：如果我掌握着这个（假设），那么就一定能掌握那个（结论）。

“但你要注意，用心去理解也就意味着要吃透每一个字的含义。给定条件的每一个字都是必不可少的：拿掉一个字，就错了，改一个字，就更错了。定理也就不是定理了。”

“你为什么不说：定理就变成错的了呢？”

“定理就是一个真命题。因此，一个假的定理仍然是一个真命题，但有可能是搞错了！当然，在数学史上，也曾有过一些定理，人们后来发现它们所断定的东西是假的。”

“可它们毕竟是被证明过的呀！”

“是的，但证明的过程是错的！坦诚地说，这样的例子还是很少见的，当数学家在其假设当中忘记提到自己所使用的某一特性，而这一特性又没有经过证明时，这种情况就有可能发生。是数学家自己搞错了！当某一定理确立之后，便引发一个双重责任的问题，一个是创作者的责任，另一个是整个数学界的责任，数学界要对这个定理负责，以确保定理所得出的结果是准确无误的。只有经过大学评审机构或专业杂志评审委员会的批准之后，一个定理才能被‘推向市场’。

“我们来看看勾股定理这个例子。古埃及人似乎知道各条边分别为3，4，5的三角形是直角三角形，这和勾股定理相吻合：人们确实得出$3^2+4^2=5^2$，但勾股定理所告诉我们的与我们所了解的三角形（3，4，5）不是一回事。定理告诉我们：在一个直角三角形里，斜边的平方等于另两个边的平方和。这对所有的直角三角形都是真的，它并非仅仅针对三角形（3，4，5）。为了

更加明确，还应该补充一点，当然这只是暗示，即只有当三角形是平面的，定理才是真的。比如对于一个球面三角形来说，它就是假的。

“概括地说，假如证实的过程在某一个例子里行得通的话，那么这并不意味着它在所有的例子里都行得通。相反，如果在某一个例子里行不通，那么它在一般情况下都行不通。这是推理过程中常出现的错误之一。”

“学生还会犯哪一类错误呢？”

“你知道‘错误’一词是从哪儿来的吗？是从拉丁语error一词派生出来的，此词的原意为‘到处游荡’，因此迷失了方向。出错的时候，你偏离了‘真相之路’，变得糊涂起来。

“错误是多种多样的，而且类别也不同。有些错误与某些特定的范畴有关，有些是书写错误，或者句式写得不对，你还记得吧？有些错误与推理有关，这和出错的那个范畴没有直接关系，是逻辑方面的错误。”

“究竟什么是逻辑呢？”

“可以说是研究思维方式的科学。”

“所有的思维都是逻辑的？那么诗人也是逻辑的了？”

“算你说对了。但我修正一下，应该说：逻辑是理性思维的领域。雅典伟大的哲学家亚里士多德创建了逻辑学。逻辑学最初隶属于哲学，今天它已成为数学的一个分支。支配逻辑思维的绝对法则是矛盾律：某一断定和它的对立面不可能同时是真的。人们不能说，‘某事及其对立面’。

“比如，人们肯定不会说‘两条相交的直线是平行的’，或者说‘奇数可以被2整除’。第二条法则就是排中律，必须确定某一定理要么是真的，要么是假的，没有第三种可能性。断定A及其对立面（非A），两个断定当中必有一个是真的。要么A是真的，要么非A是真的。如果非A是真的，那么A就是假的；如果非A是假的，那么A就是真的。这就意味着人们总是掌握着两种途径来

证明断定A。直接途径：证明A是真的。间接途径：证明非A是假的。你可以根据情况来选择这种或那种途径。有时候，习题的已知条件已经事先选好，你只能用间接途径来解开这个问题。”

“我们在高中里要学逻辑吗？”

“要学的，但只是在上高三的时候学。没有更早安排学习逻辑有点遗憾，起码应该在上高一的时候就开始学，就像哲学课程那样。”

“数学和哲学密切相关，但我们在课堂上从未发现它们之间有什么关联。”

“是的，最初这两个学科是紧密相连的。许多伟大的数学家又是哲学家，许多伟大的哲学家也是数学家。我们前面已接触过笛卡儿、莱布尼茨、毕达哥拉斯等人。人们之所以在课堂上不讲这些，那是因为教学大纲编得不好，你最好别让我谈论这个话题，好吗？”

“不，不嘛！”

“在学校里，人们并未给基础知识留出足够多

的空间，其实正是应该在理解基础知识上投入更多的时间，投入更多的精力。如果基础知识理解得不透彻，人们就无法稳步地向前迈进。况且，这也正是数学里最有意思的东西。”

“那么什么是数学基础知识呢？”

“咱们俩不是一直在谈论数学基础知识吗：即概念和含义！数学语言、推理、证明、定理、等于符号、蕴涵命题等。

“噢，对了，咱们还没有说蕴涵命题呢。你想谈谈蕴涵命题吗？”

“太想了。”

“你这种突如其来的求知欲倒让我心满意足了。”

“我知道你是一个好厨子，所以我的胃口一直很好。”

“那我就用文火给你炖一小盘蕴涵命题，这道菜不太好嚼。

“逻辑学家创造出一个动词‘蕴涵’，并造出一

个符号⇒来代表它。这个符号既不用于数，也不用于几何物体上，它只涉及命题，只关注命题的真实价值，因此人们将此符号划归到逻辑符号里。

“当我写下P⇒Q时，可以将此理解为：如果P则Q，我是在告知，P的真相将引发出Q的真相。Q可以通过逻辑推理从P里推断出来。

“蕴涵命题和等式是数学最重要的概念。在制定和演绎推理的过程中，蕴涵命题和等式是最基本的要素。因此在数学的各个领域里，都能看到它们的符号⇒和=，不像+号或//号那样只应用在数学世界的个别领域里。”

“还真是不太好嚼！这个双箭头符号还真难咽。”

“P⇒Q。两个命题，每一个都有可能是真的，也有可能是假的。因此，总共有四种可能性。”

“四种可能性？假的还能蕴涵真的吗？”

“当然能！虽然这看上去有点奇怪，但假的完全可以蕴涵真的。我们来看看1=3，显然这是假的。我在等号两边各加上2：得出1+2=3+2，也就是说3=5，这还是假的。假的蕴涵假的。但鉴于1=3，我可以在等号左边加3，在等号右边加1，于是得出：1+3=3+1，这是真的。假的蕴涵真的。”

“瞧这一天闹的！假的蕴涵真的！2+2不等于4！”

“并不总是等于。”雷纠正道。“有一种情形是可以排除在外的，即真的蕴涵假的。起点是真的，推理的方法也是真的，却得出假的结果，这是人们无法接受的，如果要真是这样的话，那么一切就都完蛋了。古希腊思想家说过：‘真的东西不可能引出假的结果。’推理的基石以及人们对推理的信任取决于一个原理：如果起点是真的，推理的方法也是真的，那么结果一定是真的。人们绝不可能陷入假的之中。如果没有这个信心的

话，那还怎么推理呢？为了能得出结果，数学家的主要工作就是选择真的命题，然后从中推断出真的命题。这样真命题的储备量就会不断扩大。”

“你是不是以为日常生活也是这样呢？”

“在这方面我不可能说得太多。”

“推断是什么意思呢？”

“这个词源于拉丁语deducere，即‘提取’的意思。”

劳拉拍起手来：

“我就知道你要给我讲词源，但这真是一幅美妙的图画。”

劳拉默不作声，陷入深深的遐想之中。雷不想打扰她。

“那么，推断就是提取了？我从一句话提出另一句话，让这句话获得生命。”

劳拉露出甜甜的微笑：

“我是数学的助产士……”

“嘿，劳拉！你扯得太远了吧？”

“这和必要条件以及充分条件有关联吗？”

“咱们终于又回到现实了！在日常生活当中，人们经常使用‘……就足够了’，‘有必要……’‘应当……’这样的句子。‘天得冷下来，才能下雪’，这句话是什么意思呢？”

“天不冷，当然不会下雪！”

“但不是‘天冷了，因此就下雪了’！”

“确实是，天冷并不一定会下雪。”

“‘只要太阳发光，天就亮了’又是什么意思呢？”

“我敢肯定，只要太阳发出光芒，天就亮了。”

“但不是‘天亮了，太阳就发光’！”

“当然，有时候天亮了，可太阳却被云彩遮住

了。”

“咱们俩合作得天衣无缝。劳拉你真是一个……”雷停顿了一下，然后接着说，“你真是一个高手。咱们就像Q和P两个断定……”

“断定？它和命题有什么区别吗？”

“命题是结构完整的一句话，能表达出某种意思，但并不能说明它所表达的东西是真的，而断定则是已知的真命题。

“因此，Q和P就是两个断定。只要P是真的，Q是得出P的必要条件，那么Q也就肯定是真的。我举个例子：D是平行四边形，它是得出D是菱形的必要条件。于是我就把它写下来：D是菱形  D是平行四边形。注意，这可并不容易呀。”

“没有任何菱形，我想说尚不是……”

“那就说‘尚不是’。”

“……尚不是平行四边形。相反，有些平行四边形却不是菱形。”

“条件还不够充分！这样我可就巧妙地转

到……Q是得出P的充分条件，只要Q是真的，就足以让P也是真的。D是正方形，这是D是平行四边形的充分条件。”

“一个正方形足以成为一个平行四边形。换句话说，正像你所说的那样：所有的正方形都是平行四边形。但这并不是一个必要条件，因为D如果是长方形的话，那么这也是真的。”

“于是，我就写下：D是正方形 $\Rightarrow$ D是平行四边形。接下来，还有你们是怎么说的？必须做的事，就是既必要又充分条件！数学家们醉心于这些东西。首先要造出一个双箭头符号 $\Leftrightarrow$ 。P $\Leftrightarrow$ Q是什么意思呢？如果P是真的，那么Q也是真的；如果Q是真的，那么P也是真的。这意味着Q和P同时为真或同时为假。数学家们把时间都用在寻找相同的命题上。因为如果我得出这一个，也就得出了另一个。人们有时也说：假如而且只要Q是真的，那么P也真的。”

“老师不停地向我们重复：要熟悉公式。”

“我把公式看做一种计算的形式，一段仅采用符号的精练文字，或者说是电脑‘程序’之类的东西。因此，公式是可以在计算机上编成程序的。

“大部分学生都把公式看做沉重的负担，但你要我怎么说呢？其实对学生们来说，公式是真正的礼物。你尝试着去解开一道习题，什么样的习题都行，但不能用公式。我祝你好运。那时候，你肯定要求我了：‘雷，求求你，给我公式吧。’”

“那你该怎么回答我呢？”

“我会打开一个装满了公式的百宝箱，公式发出耀眼的光芒，然后对你说，尽情地用吧！”

“这么说，学生们还是幸运的了。”

“可以这么说。公式最初只用于医学，用来制定配药的规则。超出规则之外使用药物，就会造成死亡事故。数学公式也一样：应务必指明公式是在哪种背景下制定的，在哪种条件下应用。

“在大部分情况下，给学生们出的习题仅涉及已有公式的领域！首先，你要从课堂上所学过的

公式里选择最合适的。接着，要核实习题的给定条件与所选公式的条件是否一致。核实完成之后，你只要应用公式就行了，把公式里的字母换成习题里相对应的东西即可。接下来，公式就会独自完成自己的工作！

“有人常常把数学表达式看做公式。其实他搞错了，公式包含数学表达式和背景描述，即公式应用的条件。一个公式，并不是这样的：，而是一元二次方程式$ax^2+bx+c=0$。如果数学表达式为$b^2-4ac>0$，那么方程式就有两个已知的根和。”

劳拉突然问道：

“依你个人的看法，你觉得数学究竟是容易学，还是难学呢？

“不太容易，一点也不容易。”

“‘劳拉，这很容易，你肯定能学会的！’这样的话，我听过多少遍了！但如果数学很容易，可

我却学不会，那是不是我太笨了？”

“噢，不！你做了一个很不错的推断。不，劳拉，我不是这么说的，我是说：‘数学很难，劳拉，但你能学会。’”

“那么人们有没有权利不喜欢数学呢？”

“我们不能强迫别人去喜欢某件事或某个人，就像人们有权不喜欢其他学科。但不喜欢不能成为自豪的资本。因此，在告诉别人不喜欢之前，最好能先了解一下数学。你奶奶总对我说：‘你先尝尝，然后再说不喜欢。’”

“你到现在讲给我听的东西，就是在让我品尝数学？”

“可以这么说。但品尝还没有结束呢，咱们还有好多领域要看呢。”

“还没有结束呀？我怎么觉得咱们已经把数学全都看了一遍，后面没有什么新鲜东西了呢？”

“你是不是也会给物理、生物以及地理提这个问题呢？不，过去从未出现过这么多数学家，这

么多新的答案，这么多新理论，这么多新问题，这么多习题。每一天，甚至每一个小时，都会有好几个新公式得到证明，当然这些公式并不一定很有意思，但新的结果却是以前从未证明过的。

“2500多年以来，在大部分的文明里，不断会有数学家涌现出来。在每一个时代，他们都会面对两类问题，即尚未解开的古老问题和与新数学密切相关的新问题。上一代数学家所尝试解开的古老问题现已解决，因为有新的工具创建出来，新答案由此而生，新理论也得以问世，要知道上一代数学家手里可没有这样的理论。新学科，如三角学、概率理论、解析几何、统计学等也创建出来。

“另外一个过程也使数学成为无穷尽的领域，因为总有新的物体问世。我们来看看这是怎么发生的。有一位数学家决定去研究一个物体群，他需要工具。如果他所支配的工具不够用的话，那么就要发明新的工具。然而，这些所谓的工具也

是数学物体。于是新的物体群也就创建出来。数学家决定去研究它们。为此，他需要新的工具，而新工具也就成为研究对象……数学之河远没有枯竭。”

“你的意思是说，未来几代人的孩子们还应对新数学抱有很大的希望。”

“实际上，他们最好还是别抱太大的希望。”

“那么数学鼓包（天赋）呢？”

“什么是数学鼓包呀？”

“难道你没有碰到过有数学鼓包的人吗？”

“我喜欢你这副天真的样子！我还确实见过一些有数学天赋的人，还有钢琴弹得很好的人，绘画画得很棒的人，跑步跑得很快的人。但我从未听说过音乐鼓包、绘画鼓包或跑步鼓包。”

“为什么只有数学才能用鼓包这个词呢？”

“在1800年，有一个名叫弗朗茨·高尔[1]的解剖医生注意到人的颅骨上有一个隆起物，他马上认为这是数学能力强的象征。于是数学鼓包便由

此而生！但弗朗茨·高尔的说法从未得到任何人的证实。但这个鼓包好像很坚强，让这个说法流传下来。于是，许多对数学一无所知的人便解释说，由于脑袋上没长鼓包，因此学不好数学。没有鼓包，也就没有其他办法了！其实，最新的研究已确定了大脑中负责运算的位置，这里负责加法，那里负责乘法。”

[1] 弗朗茨·高尔（1758—1828）：奥地利医生及解剖学家，提出颅相学理论，后被视为一种伪科学理论。

雷中断了讲解：

“噢，我差点忘了。负蕴涵命题该是什么样子呢？D是正方形9 D是平行四边形。如果我们转到负命题上，你希望该出现什么样的变化呢，劳拉？”

“我应该希望出现什么变化呢？”

雷用执意的目光看着劳拉，鼓励她说出自己的想法。

“我大概会说，D不是正方形⇒D不是平行四边形。你要是向我提问的话，我是不是不应该这么说呢？”

“我们一起来看看！假如D不是正方形，那它就有可能是平行四边形。因此，我们就会得出：D是平行四边形⇒D不是平行四边形。”

“真让人讨厌透了！”

“还有更可怕的呢。你刚才犯的错正是最常见的错误之一。

“碰到负命题时，要转变蕴涵的方向。

“假如P⇒Q，那么非Q⇒非P，而不是非P⇒非Q。”

“所有非真的东西就是假的。我觉得这也太简练了。开水和冰水之间，还有中间状态呢……”

“‘今天，2008年1月1日，劳拉的手指头已经有11根了’是假的，而不是半假。数学里深思熟虑的句子只有两种可能性：假的，真的。诚然，这

确实有点太简练了，但在日常生活里，有好多这一类的话呀。”

“人‘半死不活’了。”

“一个半死不活的人其实还活着呢。不幸的是，如果人真死了，那就不是半死了。”

屋子里又安静下来。

“在数学里，人们所肯定的东西是不是都应证明是正确的呢？”

“我再讲点让你开心的事。在数学里不许说，‘你明白我的意思’，‘这是显而易见的’，‘相信我’。有时看似明显的东西其实是假的。而那些似乎是假的东西有时却是真的。在数学里是真的，那么在生活里同样也是真的。”

“在数学里，其实是没有信任的！”

“实际上，从主观判断上看，人们确实不能轻信。所有断定的句子只有在包含证明的情况下才

会被接受。句子被接受之后，人们就会绝对信任它。我们可以不信任人，但对人所创建的东西却是完全信任的。”

“你想让我说真话，那我告诉你，对我来说，数学太严格了，有点军队的意味。”

“‘军队味儿的数学’，是这样的吧！可你还是应该静下心来仔细思考一下那些没有军队意味，甚至完全相反的东西。在数学里，一个断言并不是因为我——为首脑、国王、主教、老师——这么说，它就是正确的，同样也不是因为我是最棒的，它就是正确的。说它是正确的，那是因为我给你带来了证据，你可以自己去核实它是否正确。”

劳拉做了一个鬼脸。

“我只是说数学太严格了！而法语、地理和物理都不怎么严格。”

“可是，你不觉得诗歌也很严格吗？一首诗除

了一个接一个的词之外，所有的一切都很严格，包括音乐性、诗句短长、音韵交替等。诗里充满了严格性。那么音乐呢？

“因此，只谈数学的严格性是错误的。每一个领域都有其独特的严格性。与其他领域相比，应当说数学更具创造性。我再解释一下：有时因为处理问题太严格了，只要人们尚处于不明确的状态，反而能发现那些从未发现过的东西。数学的大部分动力就源于严格，数学正是以严格为手段来确定物体、设定结果、核实它所制定的证据。当然，人们从心理上不太喜欢这种严格。”

“那又怎么样？”

“人们不喜欢数学，也不会因此而死掉。”

“那数学又有什么用呢？”

“爱情有什么用呢？”

“你拿爱情和数学比较？”

“难道重要的东西就一定要有用吗？

“什么东西有用呢？”

“我上中学可不是为了学习爱情或友谊。”

“那是为了学习什么呢？”

“就是为了学习，学习得更好。”

“那么学什么呢？”

“学习有用的东西呗。”

“什么是对你有用的东西呢？”

“你应该知道呀。”

“可是，你自己说说，你想学什么，想知道什么，想了解什么呢？”

“让我想想。”劳拉低声说道。“雷，该我提问了，我非常想知道你在数学里能喜欢什么。”

“为什么要问我能在数学里喜欢什么，而不直接说喜欢什么呢？你是不是真想知道呢？”

“嗯……是的。”

“数学细腻、严格、有效、准确、推理简洁，还常常给我们带来惊喜，当然还有美感。”

“美感？”

“是的，美感。有些证明很巧妙，有些则很难

看，很愚笨。”

“现在，至少有一点很清楚了。我们俩完全相反，咱们……”

“说吧！”

“是完全对立的。”

“你这是什么意思呢？”

“没有比咱们俩更对立的了。”

“你看，数学还是有用的吧！”

劳拉激动地看着雷：

“咱们从来没有在一起聊过这么长时间。我唯一感到遗憾的是，你过去没有这么长时间陪我一起玩过。”

“现在开始也不晚呀。”

1、 25岁前一定要读的25本书

2、 20世纪最优秀的100部中文小说

3、 10部豆瓣高评分的温情治愈系小说

4、 有生之年，你一定要看的25部外国纯文学名著

5、 有生之年，你一定要看的20部中国现当代名著

6、 美国亚马逊编辑推荐的一生必读书单100本

7、 30个领域30本不容错过的入门书

8、 这20本书，是各领域的巅峰之作

9、 这7本书，教你如何高效读书

10、 80万书虫力荐的“给五星都不够”的30本书

……

关注“幸福的味道”微信公众号，即可查看对应书单

如果你不知道读什么书，就关注这个微信号。