

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA



TRABAJO DE FIN DE GRADO

Teoría geométrica de la reducción y aplicación al retículo de Toda
periódico

Geometric theory of reduction and application to the periodic Toda lattice

Supervisores: Miguel Á. Rodríguez, Piergiulio Tempesta

Samuel M. A. Luque Astorga

Doble grado en Matemáticas y Física

Curso académico 2023-24

Convocatoria ordinaria de junio

TEORÍA GEOMÉTRICA DE LA REDUCCIÓN Y APLICACIÓN AL RETÍCULO DE TODA PERIÓDICO

SAMUEL M. A. LUQUE ASTORGA

RESUMEN. Este trabajo es una introducción a la teoría de reducción en mecánica clásica en diferentes formulaciones geométricas: simpléctica, Poisson, bihamiltoniana y Poisson bianclada. En concreto, estudiamos el retículo de Toda periódico, demostrando su integrabilidad completa. Logramos esto mediante un proceso adecuado de reducción, en el marco de los algebroides de Lie.

Palabras clave: Geometría simpléctica, geometría de Poisson, reducción de Marsden-Weinstein, reducción de Poisson, variedades bihamiltonianas, variedades de Poisson biancladas, retículo de Toda periódico.

ABSTRACT. This piece of work is an introduction to the theory of reduction in classical mechanics in different geometric settings: symplectic, Poisson, bi-Hamiltonian and Poisson bi-anchored. More precisely, we study the periodic Toda lattice, proving its complete integrability. We achieve this by a suitable reduction process, in the framework of Lie algebroids.

Keywords: Symplectic geometry, Poisson geometry, Marsden-Weinstein reduction, Poisson reduction, bi-Hamiltonian manifolds, Poisson bi-anchored manifolds, periodic Toda lattice.

ÍNDICE

Introducción	1
1. Variedades simplécticas y reducción de Marsden-Weinstein	2
2. Variedades de Poisson y reducción de Marsden-Ratiu	5
3. Variedades bihamiltonianas y reducción	6
4. Variedades de Poisson biancladas	11
5. El retículo de Toda en este formalismo	12
6. La reducción	14
7. Integrabilidad del retículo de Toda	17
8. Un ejemplo: el retículo de Toda de 3 partículas	18
9. Conclusiones y observaciones	19
Referencias	20

INTRODUCCIÓN

Es un resultado clásico, que se remonta a Jacobi y Liouville, que si en un sistema físico hamiltoniano se encuentran k cantidades conservadas independientes, entonces, es posible reducir las ecuaciones del sistema a un conjunto más pequeño en el que se han eliminado $2k$ variables. Similarmente, en el problema de los n cuerpos, la invariancia rotacional permite eliminar cuatro variables (la famosa «eliminación de los nodos» de Jacobi). En el contexto de la revolución geométrica que experimentó la mecánica clásica en la segunda parte del siglo pasado –con los trabajos de Arnold, Marsden, Weinstein y muchos otros– se desarrolló una teoría que generaliza todos estos casos: la teoría de la reducción, en sus múltiples formas.

Uno de los usos más comunes de la reducción hamiltoniana consiste en, dado un sistema de interés, buscar un sistema sencillo en dimensión mayor que se reduzca al sistema original. Este procedimiento, generalmente, permite encontrar cantidades conservadas y, en ocasiones, probar de manera rápida que el sistema que nos interesa es integrable. Exploraremos este enfoque en el presente trabajo.

En particular, estudiaremos el retículo de Toda periódico (véase [Toda1]). Se trata de un sistema de d partículas de masas idénticas conectadas por muelles no lineales cuya fuerza de recuperación es exponencial, con condiciones de contorno periódicas. Sus ecuaciones de movimiento se pueden derivar del hamiltoniano

$$H(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d y_k^2 + \sum_{k=1}^d e^{x_k - x_{k+1}}, \quad x_{k+d} = x_k.$$

Con una transformación parecida a la de Flaschka (véase [Fska]),

$$a_k = -\frac{1}{4}e^{x_k - x_{k-1}}, \quad b_k = -\frac{1}{4}y_k,$$

las ecuaciones de movimiento del sistema se convierten en

$$\dot{a}_k = a_k(b_{k+1} - b_k), \quad \dot{b}_k = a_{k-1} - a_k. \quad (1)$$

En este trabajo, veremos que el retículo de Toda es *completamente integrable* en el sentido de Arnold (véase [Arn]), y de ahí su importancia en la literatura: fue uno de los primeros ejemplos de un sistema no lineal completamente integrable.

Por último, es necesario mencionar que el sistema de Toda se puede entender, en cierto sentido, como la discretización del *sistema KdV* (que también estudiaremos a lo largo del trabajo). Esta idea de que el sistema KdV es el límite continuo del retículo de Toda ya fue desarrollada por Toda en su artículo original [Toda1], y es fundamental para el desarrollo de este trabajo, como se mencionará más adelante. Algunas aplicaciones físicas del sistema de Toda se pueden encontrar en [Toda2].

1. VARIEDADES SIMPLÉCTICAS Y REDUCCIÓN DE MARSDEN-WEINSTEIN

La formulación geométrica más extendida actualmente en el estudio de sistemas integrables es la llamada de *sistemas hamiltonianos con simetrías* (véase, por ejemplo, [AbM]). Se presentan sus rudimentos a continuación.

(1.1) Variedades simplécticas y campos hamiltonianos. Una *variedad simpléctica* M es una variedad diferenciable junto con una 2-forma ω (la *forma simpléctica*) cerrada y no degenerada. La no degeneración de la forma simpléctica induce un isomorfismo

$$\omega^\flat \equiv \flat : TM \rightarrow T^*M$$

$$X_x \mapsto \omega_x(X_x, \bullet) = {}^\flat X_x,$$

cuya inversa denotamos por \sharp . Los isomorfismos inducidos entre el conjunto de campos de M , $\mathfrak{X}(M)$, y el de 1-formas, $\Omega^1(M)$, también se denotan por \flat y \sharp .

Dada una función $f \in C^\infty(M)$, definimos su *campo hamiltoniano* como

$$X_f = \sharp df.$$

El *corchete de Poisson* asociado a ω es la aplicación bilineal $C^\infty(M) \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ definida según

$$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g),$$

que dota a $C^\infty(M)$ de estructura de álgebra de Lie, junto con la propiedad adicional de que $\{f, \bullet\}$ es una derivación (satisface la regla de Leibniz) para cualquier $f \in C^\infty(M)$. Además, el conjunto de campos hamiltonianos de M , $H(M)$, junto con el corchete de campos, es un álgebra de Lie, de forma que la aplicación $f \mapsto X_f$ es un homomorfismo de álgebras de Lie entre $C^\infty(M)$ y $H(M)$. Finalmente, el corchete de Poisson es no degenerado, esto es:

$$\{\bullet, f\} = 0 \implies f = \text{const.}$$

(1.2) Acciones simplécticas de grupos de Lie. Una acción (por la izquierda) de un grupo de Lie G (con identidad e) sobre M es una aplicación diferenciable $\varphi : G \times M \rightarrow M$,

$(a, x) \mapsto \varphi_a(x)$, tal que φ_e es la identidad en M y $\varphi_{ab} = \varphi_a \circ \varphi_b$ para cualesquiera $a, b \in G$. En particular, $a \mapsto \varphi_a$ es una representación de G en el grupo de difeomorfismos de M .

Para $x \in M$, la *órbita* de x bajo φ es el conjunto $G \cdot x = \{\varphi_a(x) : a \in G\}$. Nótese que la relación de pertenecer a la misma órbita es de equivalencia. Se denota por M/G al correspondiente conjunto cociente, que (bajo condiciones no muy limitantes) tiene una estructura natural de variedad diferenciable.

Una acción φ se dice *simpléctica* si cada φ_a es un symplectomorfismo, esto es, preserva la forma simpléctica ω :

$$\varphi_a^* \omega = \omega,$$

y, en particular, el corchete de Poisson:

$$\{f \circ \varphi_a, g \circ \varphi_a\} = \{f, g\} \circ \varphi_a.$$

(1.3) Generadores de la acción y aplicación momento. Sea $\xi \in \mathfrak{g}$, donde \mathfrak{g} denota el álgebra de Lie de G . Entonces,

$$\mathbb{R} \times M \ni (t, x) \mapsto \varphi(\exp(t\xi), x) \in M$$

es un flujo en M , cuyo generador infinitesimal se denota por ξ_M y se llama *generador infinitesimal de la acción* asociado a ξ . Esta asignación da una antirrepresentación de \mathfrak{g} en $\mathfrak{X}(M)$:

$$[\xi_M, \eta_M] = -[\xi, \eta]_M.$$

En muchos casos, los generadores infinitesimales de la acción son campos hamiltonianos. De ser así, se dice que una aplicación $J : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ (el dual del álgebra de Lie de G) es una *aplicación momento* para la acción φ si, para todo $\xi \in \mathfrak{g}$, la función $h \in C^\infty(M)$ definida mediante

$$h_\xi(x) = \langle J(x), \xi \rangle_{\mathfrak{g}}$$

es un hamiltoniano para ξ_M .

(1.4) Reducción de Marsden-Weinstein. Para cada $a \in G$, sea $\text{Ad}_a : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ la aplicación adjunta asociada a a . A la aplicación $\text{Ad}_{a^{-1}}^* : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$ la llamamos *aplicación coadjunta* asociada a a .

Supongamos que la acción de G en M admite una aplicación momento J equivariante respecto de la acción coadjunta Ad^* , esto es, tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi_a} & M \\ J \downarrow & & \downarrow J \\ \mathfrak{g}^* & \xrightarrow{\text{Ad}_{a^{-1}}^*} & \mathfrak{g}^* \end{array}$$

conmute. Escójase $\mu \in \mathfrak{g}^*$ un valor regular de J y sea $G_\mu = \text{Stab}_G(\mu) = \{a \in G : \text{Ad}_{a^{-1}}^* \mu = \mu\}$ el *subgrupo de isotropía de G bajo la acción coadjunta*. El teorema de reducción de Marsden-Weinstein afirma que, bajo algunas condiciones de regularidad,

$$M_\mu = J^{-1}(\mu)/G_\mu$$

es también una variedad simpléctica con la forma simpléctica ω_μ que surge naturalmente de proyectar la forma ω , esto es:

$$\pi_\mu^* \omega_\mu = \omega|_{J^{-1}(\mu)},$$

donde $\pi_\mu : J^{-1}(\mu) \rightarrow M_\mu$ es la proyección canónica. Además, si $h \in C^\infty(M)$ es un hamiltoniano en M invariante bajo la acción de G , entonces su campo hamiltoniano $\sharp dh$ es tangente a $J^{-1}(\mu)$ y h se puede proyectar a M_μ de forma que la dinámica hamiltoniana en M_μ es la proyección de la dinámica hamiltoniana en M , esto es:

$$\pi_\mu \circ \varphi_t^h = \varphi_t^{h_\mu} \circ \pi_\mu,$$

donde φ^h es el flujo hamiltoniano en M y φ^{h_μ} es el flujo hamiltoniano en M_μ del hamiltoniano proyectado, h_μ . Finalmente, recuérdese que el teorema de Noether (hamiltoniano) afirma que J es constante a lo largo de las trayectorias del sistema, cuestión que queda implícita en el teorema anterior, al menos para valores regulares de J .

Ejemplo 1.5 (Movimiento planetario). Un ejemplo paradigmático de aplicación de la reducción de Marsden-Weinstein es el del movimiento planetario, o, más generalmente, el de una partícula moviéndose en un potencial central. En este caso, $M = T^*(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \equiv (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^3$ con la forma simpléctica estándar $\omega = dq^i \wedge dp_i$ (usamos el convenio de índices repetidos). El hamiltoniano de dicha partícula es

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2} + V(\|\mathbf{q}\|),$$

que es invariante bajo la siguiente acción de $G = \text{SO}(3)$ ¹:

$$\begin{aligned} \varphi : \text{SO}(3) \times M &\rightarrow M, \\ (R, (\mathbf{q}, \mathbf{p})) &\mapsto (R\mathbf{q}, R\mathbf{p}). \end{aligned}$$

Esta acción es, en los términos de [AbM], el levantamiento a $T^*(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ de la acción de $\text{SO}(3)$ sobre $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Por tanto, admite una aplicación momento Ad^* -equivariante dada por

$$\langle J(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \xi \rangle_{\mathfrak{so}(3)} = \langle \mathbf{p}, \xi_{\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}}(\mathbf{q}) \rangle_{\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}}. \quad (2)$$

Si identificamos, como se hace habitualmente, $\mathfrak{so}(3)$ con (\mathbb{R}^3, \times) , esta aplicación momento se expresa $J(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{q} \times \mathbf{p}$, esto es, $\langle J(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \xi \rangle = (\mathbf{q} \times \mathbf{p}) \cdot \xi$. J es el momento angular usual. Escogido un valor $0 \neq \mu \in \mathfrak{so}(3)$ (excluimos el 0 para que μ sea un valor regular), $J^{-1}(\mu)$ es el conjunto de pares (\mathbf{q}, \mathbf{p}) tales que $\mathbf{q} \times \mathbf{p} = \mu$ y G_μ es el grupo de rotaciones cuyo eje es la dirección de μ ².

En definitiva, aplicando lo que se dice en 1.4, el movimiento de una partícula con momento angular μ está confinado en $J^{-1}(\mu)$. La variedad reducida es $M_\mu = J^{-1}(\mu)/G_\mu$, que se identifica naturalmente con $(0, \infty) \times (0, \infty)$ con coordenadas (r, p) , donde $r = \|\mathbf{q}\|$, $p = \|\mathbf{p}\|$. La forma simpléctica ω_μ en M_μ es $dr \wedge dp$, de manera que las ecuaciones de Hamilton se obtienen de la forma habitual a partir de un hamiltoniano expresado en coordenadas (r, p) . El hamiltoniano reducido es

$$H_\mu(r, p) = \frac{p^2}{2} + V(r),$$

y sus trayectorias $(r(t), p(t))$ coinciden con $(\|\mathbf{q}(t)\|, \|\mathbf{p}(t)\|)$, donde $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$ es la correspondiente trayectoria de H .

¹En realidad, la acción sobre \mathbf{p} debería ser $(R^T)^{-1}\mathbf{p}$, pero, como R es ortogonal, $(R^T)^{-1} = R$.

²Recuérdese que las acciones adjunta y coadjunta de $\text{SO}(3)$ sobre $\mathfrak{so}(3) \equiv \mathfrak{so}(3)^* \equiv \mathbb{R}^3$ son la acción estándar de $\text{SO}(3)$ sobre \mathbb{R}^3 .

2. VARIEDADES DE POISSON Y REDUCCIÓN DE MARSDEN-RATIU

El marco geométrico que se presenta a continuación es, en cierto sentido, más general que el anterior (pues lo engloba): en lugar de una forma simpléctica en M , lo que se tiene es un corchete de Poisson en $C^\infty(M)$. Dicho corchete no proviene en general de una forma simpléctica en M ; como mucho, existe una foliación de M en variedades simplécticas compatibles con la restricción del corchete de Poisson. Por último, también se presenta la llamada *reducción de Marsden-Ratiu* (ver [MR]), que, de forma similar a la de Marsden-Weinstein, permite obtener una variedad de Poisson «reducida» a partir de una distribución integrable en M y una subvariedad distinguida.

(2.1) Variedades de Poisson. Una *variedad de Poisson* M es una variedad diferenciable junto con un corchete de Poisson. Un corchete de Poisson es un corchete de Lie en el espacio $C^\infty(M)$ que además cumple que $\{f, \bullet\}$ es una derivación para toda $f \in C^\infty(M)$. Esto es, una aplicación bilineal antisimétrica que satisface la identidad de Jacobi y la regla de Leibniz.

A diferencia del corchete de Poisson de una variedad simpléctica, un corchete de Poisson genérico puede ser degenerado, es decir, pueden existir funciones f no constantes en involución con todas las funciones definidas en M :

$$\{\bullet, f\} = 0.$$

Dichas funciones se llaman *funciones de Casimir*.

(2.2) El bivector de Poisson. El *bivector de Poisson* es el único bivector π en M que cumple

$$\{f, g\} = \pi(df, dg) \quad (3)$$

para cualesquiera $f, g \in C^\infty(M)$. En coordenadas, sus componentes $\pi^{ij}(x^1, \dots, x^n)$ son los corchetes de Poisson de las correspondientes funciones coordenadas:

$$\pi^{ij}(x^1, \dots, x^n) = \{x^i, x^j\}.$$

De manera parecida a lo que ocurre en una variedad simpléctica, el bivector de Poisson induce una aplicación

$$\begin{aligned} \pi^\sharp &\equiv \sharp : T^*M \rightarrow TM, \\ \alpha_x &\mapsto \pi_x(\bullet, \alpha_x) = \sharp \alpha_x, \end{aligned} \quad (4)$$

que también da lugar a una aplicación $\Omega^1(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$. Como antes, esto nos permite definir el campo hamiltoniano de una función $f \in C^\infty(M)$: $X_f = \sharp df$. Esto se expresa localmente según

$$X_f^i(x^1, \dots, x^n) = \pi^{ij}(x^1, \dots, x^n) \frac{\partial f}{\partial x^j}.$$

Igual que antes, $H(M)$ con el corchete de campos es un álgebra de Lie, de manera que la aplicación $f \mapsto X_f$ es un homomorfismo de álgebras de Lie entre $C^\infty(M)$ y $H(M)$:

$$[X_f, X_g] = X_{\{f, g\}}. \quad (5)$$

El núcleo de este homomorfismo está compuesto precisamente por las funciones de Casimir. Su imagen se corresponde con la distribución \mathcal{C} generada por los campos hamiltonianos. La anterior ecuación implica que dicha distribución es involutiva. Sin embargo, en general es singular (es decir, los espacios \mathcal{C}_x no tienen todos la misma dimensión), así que es

necesaria una condición técnica adicional para garantizar su integrabilidad. En este caso, sí que es integrable en general (ver [Vai], cap. 2). Sus variedades integrales maximales son subvariedades simplécticas de M llamadas *hojas simplécticas*. La forma simpléctica ω en una hoja cualquiera N se define según la relación

$$\omega(\sharp\alpha, \sharp\beta) = \pi(\alpha, \beta),$$

donde α, β son 1-formas en M tales que $\sharp\alpha, \sharp\beta$ son tangentes a N (nótese que todos los campos en $\mathfrak{X}(N)$ son *sostenidos* de 1-formas de M).

(2.3) Reducción de Marsden-Ratiu. Sea $(M, \{\bullet, \bullet\})$ una variedad de Poisson, $S \subseteq M$ una subvariedad e $i : S \hookrightarrow M$ la inclusión. Sea $\mathcal{D} \subseteq TM|_S$ una distribución en TM definida posiblemente solo en los puntos de S . Supondremos que:

- (H1) $\mathcal{D} \cap TS$ es una distribución integrable en TS , luego define una foliación \mathcal{F} en S .
- (H2) La foliación \mathcal{F} es *regular*, así que el espacio de hojas S/\mathcal{F} es una variedad y la proyección $p : S \rightarrow S/\mathcal{F}$ una sumersión.
- (H3) La distribución \mathcal{D} deja el corchete $\{\bullet, \bullet\}$ invariante, en el sentido de que si $F, G \in C^\infty(M)$ son funciones con derivada nula en \mathcal{D} , entonces $\{F, G\}$ también.
- (H4) $\sharp\mathcal{D}^0 \subseteq TS + \mathcal{D}$, donde $\mathcal{D}_x^0 = \{\alpha_x \in T_x^*M : \alpha_x(\mathcal{D}_x) = 0\}$ es el *aniquilador* de \mathcal{D} .

En este caso, el teorema de reducción afirma que $N = S/\mathcal{F}$ tiene una estructura de Poisson $\{\bullet, \bullet\}_N$ tal que para cualesquiera $f, g \in C^\infty(N)$ y cualesquiera extensiones F, G de $f \circ p$ y $g \circ p$ con derivada nula en \mathcal{D} ,

$$\{F, G\} \circ i = \{f, g\}_N \circ p. \quad (6)$$

En cuanto a la dinámica: si $h \in C^\infty(M)$ es un hamiltoniano para el cual la subvariedad S se conserva³, entonces h se puede proyectar a N de forma que la dinámica hamiltoniana en N es la proyección de la dinámica hamiltoniana en M , esto es:

$$p \circ \varphi_t^h = \varphi_t^{\hat{h}} \circ p,$$

donde φ^h es el flujo hamiltoniano en M y $\varphi^{\hat{h}}$ es el flujo hamiltoniano en N del hamiltoniano proyectado \hat{h} .

3. VARIEDADES BIHAMILTONIANAS Y REDUCCIÓN

La formulación geométrica que se presenta en esta sección es similar al de Marsden-Weinstein, pero con dos diferencias importantes: la variedad M es de Poisson, en lugar de simpléctica; y el grupo de simetría G se sustituye por un segundo corchete de Poisson en M . Variedades dotadas de dos corchetes de Poisson compatibles (en cierto sentido que se explicará a continuación) se denominan *variedades bihamiltonianas*. En una variedad bihamiltoniana, el segundo corchete de Poisson permite definir una reducción de Poisson en el sentido de la sección anterior. Por último, veremos que en la variedad reducida existe una manera sistemática de encontrar cantidades conservadas para ciertos sistemas hamiltonianos.

(3.1) Variedades bihamiltonianas. Sea M una variedad diferenciable dotada de dos corchetes de Poisson $\{\bullet, \bullet\}$ y $\{\bullet, \bullet\}'$. Se dice que M es una *variedad bihamiltoniana* si el

³Se dice que una subvariedad S *se conserva* si el campo hamiltoniano X_h es tangente a S .

corchete dado por la combinación lineal

$$\{f, g\}_\lambda := \{f, g\} + \lambda \{f, g\}', \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

satisface la identidad de Jacobi para cualquier valor real de λ . Esto equivale a que la siguiente condición de compatibilidad

$$\begin{aligned} & \{f, \{g, h\}'\} + \{h, \{f, g\}'\} + \{g, \{h, f\}'\} + \\ & + \{f, \{g, h\}\}' + \{h, \{f, g\}\}' + \{g, \{h, f\}\}' = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

se cumpla para cualesquiera tres funciones $f, g, h \in C^\infty(M)$. En tal caso, se dice que el corchete $\{\bullet, \bullet\}_\lambda$ es el *haz de Poisson* determinado por los otros dos corchetes.

Si se parte de una variedad de Poisson $(M, \{\bullet, \bullet\})$ y se escoge un campo X , el corchete

$$\{f, g\}' := \{Xf, g\} + \{f, Xg\} - X(\{f, g\})$$

es compatible con el primero en el sentido anterior, convirtiendo automáticamente a M en una variedad bihamiltoniana. En este caso, se dice que M es una variedad bihamiltoniana *exacta* y al campo X lo llamamos *campo característico* de M .

Por último, en el contexto de una variedad bihamiltoniana, emplearemos el símbolo \sharp para denotar la aplicación inducida por el primer bivector de Poisson, π , de forma que los campos hamiltonianos asociados a funciones f serán aquellos $X_f = \sharp df$.

(3.2) Reducción en variedades bihamiltonianas. Sea S una hoja simpléctica del bivector de Poisson π' . Denotamos por \mathcal{D} a la distribución generada por los campos hamiltonianos respecto de π cuyos hamiltonianos son funciones de Casimir respecto de π' :

$$\mathcal{D} = \langle X_f : f \text{ es un Casimir para } \pi' \rangle = \pi^\sharp(\ker \pi').$$

Esta distribución es involutiva, como consecuencia de las ecuaciones (5) y (7). Como antes, no es necesariamente regular, pero se puede demostrar que es integrable (ver [MCP]). La intersección de S con las variedades integrales maximales de \mathcal{D} da una foliación regular \mathcal{F} de S . Se puede comprobar que las hipótesis (H1)-(H4) de 2.3 se cumplen en general, por lo que el teorema de reducción implica que el cociente $N = S/\mathcal{F}$ es una variedad bihamiltoniana con un único haz de Poisson $\{\bullet, \bullet\}_\lambda^N$ tal que

$$\{f, g\}_\lambda^N \circ p = \{F, G\}_\lambda \circ i$$

para cualesquiera extensiones F, G de $f \circ p$ y $g \circ p$, donde $p : S \rightarrow S/\mathcal{F}$ es la proyección canónica e $i : S \hookrightarrow M$ la inclusión.

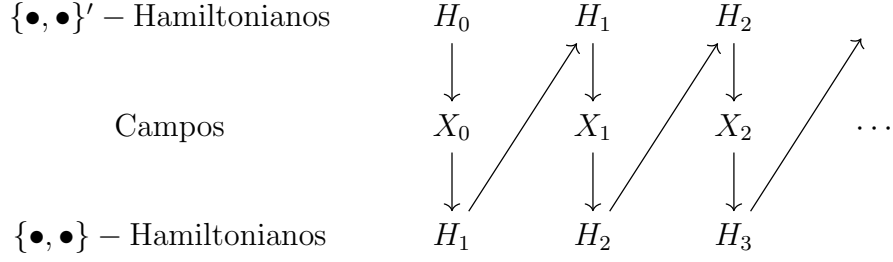
(3.3) Procedimiento de Lenard. Supongamos que X es un campo en M que es hamiltoniano respecto de las dos estructuras de Poisson. El procedimiento que se muestra a continuación nos permitirá encontrar sistemáticamente cantidades conservadas para el sistema descrito por X . En concreto, buscamos una sucesión de funciones H_k , $k = 0, 1, \dots$, en M tales que

(1) H_0 es un hamiltoniano para $X_0 = X$ con respecto a la estructura $\{\bullet, \bullet\}'$.

(2) El campo hamiltoniano X_k del $\{\bullet, \bullet\}'$ -hamiltoniano H_k coincide con el campo del $\{\bullet, \bullet\}$ -hamiltoniano H_{k+1} .

En tal caso, las funciones H_k , $k = 0, 1, \dots$ están en involución con respecto a ambos corchetes de Poisson. El algoritmo para generar los Hamiltonianos H_k se llama *esquema*

de *Lenard* y se muestra a continuación:



¿Cuándo podremos encontrar tales H_k ? Lo que se puede decir en general es que el campo X_{k-1} generado por H_{k-1} siempre preserva el corchete $\{\bullet, \bullet\}$, esto es consecuencia inmediata de la relación (7). Si, además, dicho corchete es simpléctico y M satisface una condición topológica, se puede garantizar que X_k es hamiltoniano para $\{\bullet, \bullet\}$. En general, no siempre es así, pero si tenemos suerte y X_k es hamiltoniano, se continúa el proceso y así sucesivamente.

Una manera eficiente de calcular los H_k del procedimiento de Lenard consiste en encontrar casimires del haz de Poisson —esto es, funciones C cuyos diferenciales estén en el núcleo de π_λ — y expandirlas, si es posible, en series de potencias de λ :

$$C = \sum_k (-1)^k H_k \lambda^k,$$

pues, como

$$0 = \{\bullet, C\}_\lambda = \{\bullet, C\} + \lambda \{\bullet, C\}',$$

entonces

$$\{\bullet, C\} = -\lambda \{\bullet, C\}',$$

luego los coeficientes H_k cumplen las relaciones

$$\{\bullet, H_{k+1}\} = \{\bullet, H_k\}',$$

llamadas *relaciones de Lenard*, que equivalen a que H_{k+1} sea el sucesor de H_k en el procedimiento de Lenard.

Ejemplo 3.4 (Ecuación de KdV en la circunferencia). La ecuación de KdV (véase [KdV]),

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0, \tag{8}$$

es una ecuación en derivadas parciales que modeliza las ondas en aguas poco profundas. La función de dos variables u es el desplazamiento —en altura— de un punto en la superficie del agua a su punto de equilibrio. Imponer condiciones de contorno periódicas equivale a ver u como una función definida en la circunferencia \mathbb{S}^1 .

Es un ejemplo prototípico de sistema hamiltoniano integrable con infinitos grados de libertad. Además, admite una clase de soluciones, los *solitones*, de gran interés físico. Sin embargo, el objetivo de este ejemplo es mostrar cómo obtener infinitas cantidades conservadas para esta ecuación (la llamada *jerarquía KdV*) a partir del procedimiento anterior.

La variedad con la que empezamos es $M = \text{Map}(\mathbb{S}^1, \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$, el conjunto de aplicaciones C^∞ de la circunferencia en $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Los puntos Q se denotan por

$$Q = \begin{pmatrix} p & r \\ q & -p \end{pmatrix},$$

donde p, q, r son funciones periódicas de una variable x . Un vector tangente en el punto Q se representa por

$$\dot{Q} = \begin{pmatrix} \dot{p} & \dot{r} \\ \dot{q} & -\dot{p} \end{pmatrix},$$

y un covector por

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\alpha & \beta \\ \gamma & -\frac{1}{2}\alpha \end{pmatrix}.$$

Todos son lazos arbitrarios en \mathfrak{g} . Convenimos que la actuación de V sobre \dot{Q} se calcula mediante

$$\langle V, \dot{Q} \rangle = \int_{\mathbb{S}^1} \text{Tr}(V\dot{Q})dx.$$

Se puede comprobar que las siguientes expresiones definen bivectores de Poisson compatibles en M :

$$\Pi^\#(V) = [A, V]$$

$$\Pi^\#(V) = V_x + [V, Q],$$

donde V_x denota la derivada del lazo V respecto de la variable x y A es la matriz constante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En componentes:

$$\Pi^\# : \begin{cases} \dot{p} = -\beta, \\ \dot{q} = \alpha, \\ \dot{r} = 0, \end{cases} \quad \Pi^\# : \begin{cases} \dot{p} = \frac{1}{2}\alpha_x + q\beta - r\gamma, \\ \dot{q} = \gamma_x + 2p\gamma - q\alpha, \\ \dot{r} = \beta_x - 2p\beta + r\alpha. \end{cases} \quad (9)$$

Nótese que los campos hamiltonianos del bivector Π' son exactamente los tangentes a los subespacios afines $\{r = r_0\}$, donde r_0 es una función periódica dada. La hoja simpléctica S que tomaremos para hacer la reducción es $S = \{r = 1\}$.

Para la distribución \mathcal{D} , nótese que $\ker \Pi'$ está formado por los covectores que cumplen $\alpha = \beta = 0$. Por tanto, \mathcal{D} estará generada por los campos

$$\dot{p} = -\gamma, \quad \dot{q} = \gamma_x + 2p\gamma, \quad \dot{r} = 0. \quad (10)$$

En este caso, \mathcal{D} ya es tangente a S , de forma que la foliación \mathcal{F} está determinada directamente por sus hojas integrales. Eliminando γ en las ecuaciones (10), se obtiene que, a lo largo de los campos de \mathcal{D} ,

$$\frac{d}{dt}(p_x + p^2 + q) = 0,$$

y recíprocamente, de forma que las hojas de \mathcal{F} son las subvariedades de S definidas por la ecuación

$$p_x + p^2 + q = u, \quad (11)$$

donde u es una función periódica dada. Este cálculo muestra que el cociente $N = S/\mathcal{F}$ es $C^\infty(\mathbb{S}^1)$, y la ecuación (11) da la proyección canónica $p : S \rightarrow N$.

Para reducir la estructura bihamiltoniana a N , hay que levantar los covectores de T^*N a covectores en $T^*M|_S$ que aniquilen la distribución \mathcal{D} . Denotemos por v a un covector en

el punto u , y convengamos que la actuación de v sobre un vector $\dot{u} \in T_u N$ viene dada por

$$\langle v, \dot{u} \rangle = \int_{\mathbb{S}^1} v(x) \dot{u}(x) dx.$$

Levantar v consiste en encontrar un punto $Q \in S$ y un covector $V \in T_Q^* M$ tales que

$$p(Q) = u, \quad \langle V, \mathcal{D} \rangle = 0, \quad \langle V, \dot{Q} \rangle = \langle v, p_* \dot{Q} \rangle, \quad \dot{Q} \in T_Q M.$$

Usando dichas condiciones, se prueba que las componentes (α, β, γ) de V deben ser

$$\alpha = -v_x + 2pv, \quad \beta = v, \quad \gamma = \text{arbitraria}. \quad (12)$$

Para obtener la expresión del bivector reducido π^\sharp , tan solo es necesario proyectar a N el campo

$$\dot{Q} = [A, V],$$

y obtendremos una fórmula que solo dependerá de v . En efecto:

$$\begin{aligned} \dot{u} = \pi^\sharp(v) &\stackrel{(11)}{=} \dot{p}_x + 2p\dot{p} + \dot{q} \\ &\stackrel{(9)}{=} -\beta_x - 2p\beta + \alpha \\ &\stackrel{(12)}{=} -2v_x. \end{aligned} \quad (13)$$

De manera similar, el otro bivector reducido toma la forma

$$\dot{u} = \pi^\sharp(v) = -\frac{1}{2}v_{xxx} + 2uv_x + u_x v. \quad (14)$$

Con todo esto, vamos a revisar la integrabilidad del sistema de KdV. Como se vio en el punto 3.3, la integrabilidad de esta clase de sistemas está relacionada con que el sistema sea hamiltoniano respecto de ambas estructuras de Poisson y el procedimiento de Lenard se pueda continuar para encontrar infinitas cantidades conservadas. Como también vimos, es conveniente estudiar el núcleo del haz de Poisson. Está formado por las 1-formas v en N que resuelven la ecuación

$$-\frac{1}{2}v_{xxx} + 2(u + \lambda)v_x + u_x v = 0.$$

Esta ecuación se puede integrar inmediatamente observando que

$$v \left(-\frac{1}{2}v_{xxx} + 2(u + \lambda)v_x + u_x v \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{4}v_x^2 - \frac{1}{2}vv_{xx} + (u + \lambda)v^2 \right),$$

y por tanto consideramos la ecuación

$$\frac{1}{4}v_x^2 - \frac{1}{2}vv_{xx} + (u + \lambda)v^2 = a(\lambda), \quad (15)$$

donde $a(\lambda)$ no depende de x . Cualquier solución (u, v) de (15) será una 1-forma en el núcleo del haz de Poisson. Pongamos $a(\lambda) = \lambda$. Si, además, llamamos $\lambda = z^2$, observamos la ecuación anterior se puede escribir en la forma de una ecuación de Riccati,

$$\left(\frac{z}{v} + \frac{1}{2} \frac{v_x}{v} \right)_x + \left(\frac{z}{v} + \frac{1}{2} \frac{v_x}{v} \right)^2 = u + z^2.$$

Por esta razón, definimos

$$h(z) = \frac{z}{v} + \frac{1}{2} \frac{v_x}{v}.$$

Se puede comprobar (ver [MCPF]) que las soluciones de la ecuación (15) son exactas y que su primitiva es la función

$$H = 2z \int_{\mathbb{S}^1} h,$$

que, por tanto, es una función de Casimir para el haz de Poisson. Así pues, hemos mostrado que resolver la ecuación de Riccati

$$h_x + h^2 = u + z^2 \quad (16)$$

da una manera de calcular funciones de Casimir del haz de Poisson. Si expandimos h en potencias de z de la siguiente forma

$$h(z) = z + \sum_{k \geq 1} h_k z^{-k}$$

podemos calcular los coeficientes h_k recursivamente, simplemente insertando la expansión en la ecuación de Riccati. Por ejemplo, $h_1 = \frac{1}{2}u$, $h_2 = -\frac{1}{4}u_x$, $h_3 = \frac{1}{8}(u_{xx} - u^2)$. Además, las funciones

$$H_k = \int_{\mathbb{S}^1} h_k$$

son los coeficientes de la expansión de H en potencias de z . Como

$$z^2 \{\bullet, H\}' = \{\bullet, H\},$$

los H_k cumplen las relaciones de Lenard

$$\begin{aligned} \{\bullet, H_1\}' &= 0, \\ \{\bullet, H_{2k+1}\}' &= \{\bullet, H_{2k-1}\}. \end{aligned}$$

Se puede comprobar que este proceso recursivo da infinitos H_{2k+1} funcionalmente independientes, que por tanto serán infinitas cantidades conservadas para cualquiera de sus sistemas hamiltonianos. En concreto, la ecuación de movimiento obtenida a partir de H_3 mediante π' es la de KdV (8). Esto completa la revisión de su integrabilidad.

4. VARIEDADES DE POISSON BIANCLADAS

El último elemento geométrico que introduciremos es el de *variedad de Poisson bianclada* (según la definición de A. Meucci, véase [Meu]). Para ello son necesarias unas definiciones previas:

Definición 4.1 (Algebroides de Lie). Un *algebroides de Lie*⁴ es una tupla $(M, E, \{\bullet, \bullet\}, A)$, donde

- (1) M es una variedad diferenciable.
- (2) E es un fibrado vectorial sobre M .
- (3) $\{\bullet, \bullet\}$ es un corchete de Lie en el espacio $\Gamma(E)$ de secciones de E .
- (4) $A : E \rightarrow TM$ es un homomorfismo de fibrados vectoriales, llamado *ancla*, que induce un homomorfismo de álgebras de Lie $A : \Gamma(E) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$:

$$A(\{s, t\}) = [A(s), A(t)], \quad s, t \in \Gamma(E).$$

⁴El término *algebroides de Lie* tiene su origen en que un álgebra de Lie es un algebroides de Lie sobre un punto, $M = \{x\}$.

Nos interesa fijar una variedad M y un fibrado E y dotarlos de dos estructuras de algebroide de Lie $(M, E, \{\bullet, \bullet\}, A)$ y $(M, E, \{\bullet, \bullet\}', A')$. Se consideran el haz de aplicaciones bilineales antisimétricas

$$\{s, t\}_\lambda = \{s, t\} + \lambda\{s, t\}', \quad s, t \in \Gamma(E),$$

y el haz de aplicaciones

$$A_\lambda(s) = A(s) + \lambda A'(s), \quad s \in \Gamma(E),$$

con λ un parámetro real. A la vista de esto:

Definición 4.2 (Compatibilidad entre algebroides de Lie). Se dice que los dos algebroides de Lie anteriores son *compatibles* si $(M, E, \{\bullet, \bullet\}_\lambda, A_\lambda)$ es un algebroide de Lie para cada valor real de λ . En tal caso, se dice que $(M, E, \{\bullet, \bullet\}_\lambda, A_\lambda)$ es un *haz de algebroides de Lie* y que A_λ es un *haz de anclas*.

No es muy difícil comprobar que la condición de compatibilidad se reduce a

$$[A(s), A'(t)] + [A'(s), A(t)] = A(\{s, t\}') + A'(\{s, t\}). \quad (17)$$

En este contexto también se puede definir una relación entre covectores de la siguiente forma: si denotamos por $A^*, A'^* : T^*M \rightarrow E^*$ a las anclas duales, se dice que un covector α está relacionado con otro β , escribimos $\alpha \sim \beta$, si

$$A^*\alpha = A'^*\beta. \quad (18)$$

Téngase en cuenta que esta relación no es necesariamente simétrica.

(4.3) Variedades de Poisson biancladas. Sea M una variedad de Poisson con bivector π y, como antes, con dos estructuras compatibles de algebroide de Lie. Estas tres piezas se terminan de ensamblar mediante dos aplicaciones $J, J' : T^*M \rightarrow E$ que satisfacen la siguiente condición: si $\alpha \sim \beta$,

$$\begin{aligned} \pi^\sharp(\alpha) &= A'(J(\alpha) + J'(\beta)), \\ \pi^\sharp(\beta) &= A(J(\alpha) + J'(\beta)). \end{aligned} \quad (19)$$

En tal caso, se dice que M es una variedad de Poisson bianclada. La situación se resume en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \xrightarrow{\pi^\sharp} & \pi(\alpha) \\ & \searrow J & \nearrow A' \\ & J(\alpha) + J'(\beta) & \\ & \nearrow J' & \searrow A \\ \beta & \xrightarrow{\pi^\sharp} & \pi(\beta) \end{array}$$

\sim

5. EL RETÍCULO DE TODA EN ESTE FORMALISMO

Comenzaremos a estudiar el retículo de Toda de manera casi análoga a lo que se hizo en el ejemplo 3.4 con el sistema KdV. El espacio de fases de la jerarquía KdV es un sistema bihamiltoniano obtenido mediante un proceso de reducción aplicado al espacio $\text{Map}(\mathbb{S}^1, \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$ de aplicaciones C^∞ de la circunferencia \mathbb{S}^1 al álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Para pasar al caso discreto, es muy natural reemplazar la circunferencia \mathbb{S}^1 por el grupo cíclico

\mathbb{Z}_d . Además, en nuestro caso, es conveniente reemplazar $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ por el grupo $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$. De esta forma, la variedad inicial será el conjunto $M = \mathrm{Map}(\mathbb{Z}_d, \mathrm{GL}(2, \mathbb{R}))$ de aplicaciones de \mathbb{Z}_d a $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$, o, dicho de otro modo, el conjunto de d -tuplas de matrices 2×2 invertibles.

Por desgracia, en este caso, no es posible dotar a M de una estructura bihamiltoniana; en su lugar, describiremos en ella una estructura de variedad de Poisson bianclada. Tras un proceso de reducción de Marsden-Ratiu, obtendremos una variedad N que sí será bihamiltoniana y nos permitirá obtener las ecuaciones que describen el retículo de Toda, así como todas sus cantidades conservadas.

Denotaremos a los elementos de M por

$$q = (q^1, \dots, q^d), \text{ donde}$$

$$q^k = \begin{pmatrix} q_1^k & q_2^k \\ q_3^k & q_4^k \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, d.$$

A lo largo de la discusión que sigue, lidiaremos siempre con d -duplas de matrices, y establecemos el convenio $(\bullet)^{k+d} = (\bullet)^k$.

Los campos tangentes a M se representan mediante d -tuplas $(\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^d)$ de matrices 2×2 cuyas componentes son funciones del punto $q \in M$. Del mismo modo, las 1-formas en M se representan mediante d -tuplas $(\alpha^1, \dots, \alpha^d)$ de matrices 2×2 con componentes dependientes del punto. La actuación de la forma α sobre el campo \dot{q} resulta en la función escalar

$$\langle \alpha, \dot{q} \rangle = \sum_{k=1}^d \mathrm{Tr}(\alpha^k \dot{q}^k).$$

(5.1) Estructura de Poisson en M . A continuación, equipamos a M de una estructura de Poisson. Se comprueba rápidamente que la aplicación $\Pi^\sharp : T^*M \rightarrow TM$ dada por

$$\dot{q}^k = \Pi^\sharp(\alpha)^k = q^k \alpha^k b - b \alpha^k q^k, \quad (20)$$

donde b es cualquier matriz prefijada, es un bivector de Poisson. En virtud de las ecuaciones (3) y (4), esto quiere decir que el corchete en M se calcula según

$$\{f, g\} = \langle df, \Pi^\sharp dg \rangle.$$

Para recuperar las ecuaciones de Toda, escogemos

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De esta manera, la forma explícita del bivector de Poisson es

$$\begin{aligned} \dot{q}_1^k &= q_2^k \alpha_3^k - q_3^k \alpha_2^k, & \dot{q}_2^k &= -\alpha_1^k q_2^k - \alpha_2^k q_4^k, \\ \dot{q}_3^k &= q_3^k \alpha_1^k - q_4^k \alpha_3^k, & \dot{q}_4^k &= 0. \end{aligned}$$

(5.2) Algebroides de Lie en M . Vamos a definir dos algebroides de Lie compatibles en M . Primero, consideramos el fibrado trivial

$$E = M \times (\mathrm{Mat}(2, \mathbb{R}))^d,$$

donde $(\bullet)^d$ denota el producto cartesiano $(\bullet) \times \dots \times (\bullet)$. Las secciones $\Gamma(E)$ de este fibrado son las d -tuplas (s^1, \dots, s^d) de matrices 2×2 cuyas componentes son funciones del punto

$q \in M$. Ahora, definimos el haz de anclas $A_\lambda : E \rightarrow TM$:

$$\dot{q}^k = A_\lambda(s)^k = s^{k+1}(q^k + \lambda b) - (q^k + \lambda b)s^k. \quad (21)$$

En componentes:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1^k &= ((s_1^{k+1} - s_1^k)q_1^k + s_2^{k+1}q_3^k - q_2^ks_3^k) + \lambda(s_1^{k+1} - s_1^k), \\ \dot{q}_2^k &= (s_1^{k+1}q_2^k + s_2^{k+1}q_4^k - s_2^kq_1^k - q_2^ks_4^k) - \lambda s_2^k, \\ \dot{q}_3^k &= (s_3^{k+1}q_1^k + s_4^{k+1}q_3^k - q_3^ks_1^k - q_4^ks_3^k) + \lambda s_3^{k+1}, \\ \dot{q}_4^k &= (s_3^{k+1}q_2^k + s_4^{k+1}q_4^k - q_3^ks_2^k - q_4^ks_4^k). \end{aligned}$$

Para finalizar, definamos un haz de corchetes en $\Gamma(E)$. La ecuación de compatibilidad (17) sugiere tomar

$$\{s, t\}_\lambda^k = t_*^k A(s) - s_*^k A(t) + \lambda(t_*^k A'(s) - s_*^k A'(t)) + t^k s^k - s^k t^k,$$

donde $t_* \dot{q}$ es la derivada de la sección t en la dirección del vector \dot{q} e identificamos $TE \equiv E$. Es una comprobación rutinaria que las anteriores definiciones resultan en un haz de algebroides de Lie en M .

(5.3) Relación en las 1-formas. Primero, obtengamos una expresión del haz de anclas duales $A_\lambda^* = A^* + \lambda A'^*$. Un elemento ξ del fibrado dual E^* se puede representar mediante una d -tupla (ξ^1, \dots, ξ^d) de matrices 2×2 , conviniendo que la actuación de ξ sobre un $s = (s^k) \in E$ es

$$\langle \xi, s \rangle = \sum_{k=1}^d \text{Tr}(\xi^k s^k).$$

Por ende, el ancla dual $A_\lambda^* : T^*M \rightarrow E^*$ se puede ver como una aplicación que toma una forma lineal α definida en el espacio tangente a un punto $q \in M$ y le asocia una d -tupla (ξ^k) de matrices. En este caso, A_λ^* toma la forma

$$\xi^k = A_\lambda^*(\alpha)^k = (q^{k-1} + \lambda b)\alpha^{k-1} - \alpha^k(q^k + \lambda b).$$

Con esta fórmula y la definición (18), es inmediato verificar que $\alpha \sim \beta$ si y solo si

$$\begin{aligned} q_1^{k-1}\alpha_1^{k-1} + q_2^{k-1}\alpha_3^{k-1} - \alpha_1^k q_1^k - \alpha_2^k q_3^k &= \beta_1^{k-1} - \beta_1^k, \\ q_1^{k-1}\alpha_2^{k-1} + q_2^{k-1}\alpha_4^{k-1} - \alpha_1^k q_2^k - \alpha_2^k q_4^k &= \beta_2^{k-1}, \\ q_3^{k-1}\alpha_1^{k-1} + q_4^{k-1}\alpha_3^{k-1} - \alpha_3^k q_1^k - \alpha_4^k q_3^k &= -\beta_3^k, \\ q_3^{k-1}\alpha_2^{k-1} + q_4^{k-1}\alpha_4^{k-1} - \alpha_3^k q_2^k - \alpha_4^k q_4^k &= 0. \end{aligned}$$

(5.4) Estructura de variedad de Poisson bianclada. Finalmente, definimos las aplicaciones $J, J' : T^*M \rightarrow E$ de 4.3:

$$s^k = J(\alpha)^k = \alpha^k q^k, \quad s^k = J'(\alpha)^k = -\alpha^k b.$$

Estas aplicaciones cumplen las relaciones (19), por lo que, finalmente, M —con todos los objetos definidos anteriormente— es una variedad de Poisson bianclada.

6. LA REDUCCIÓN

En esta sección, vamos a aplicar una reducción de Poisson en M para obtener una nueva variedad N , de dimensión menor, con una estructura geométrica similar. Más tarde, descubriremos que en N se puede utilizar dicha estructura para definir una bihamiltoniana.

(6.1) La subvariedad. Como primer paso, tomamos la distribución $\text{Im } \Pi^\# + \text{Im } A' \subseteq \text{TM}$, que es integrable. En concreto, sus hojas integrales maximales son los $3d$ -subespacios afines de la forma

$$q^k = \begin{pmatrix} q_1^k & q_2^k \\ q_3^k & \nu^k \end{pmatrix},$$

con ν^k constante. La subvariedad distinguida S que tomaremos será la hoja correspondiente a $\nu^k = 0$ para todo k .

(6.2) La distribución. El haz de anclas nos permite definir la distribución $\mathcal{D} = A(\ker A')$, que es la que tomaremos para realizar la reducción. Como se menciona en 2.3, solo estamos interesados en los valores de la distribución sobre los puntos de S , $\mathcal{D}|_S = \mathcal{D} \cap \text{TM}|_S$. Un cálculo directo muestra que $\mathcal{D}|_S \cap \text{TS}$ está generada por los campos de la forma

$$\dot{q}_1^k = 0, \quad \dot{q}_2^k = -\mu^k q_2^k, \quad \dot{q}_3^k = \mu^{k+1} q_3^k \quad (22)$$

para μ^k arbitrario. Esto muestra que es regular de rango d . Además, es involutiva, luego, según el teorema de Frobenius, integrable (y la foliación \mathcal{F} resultante es regular). A partir de la expresión (22), es inmediato ver que, a lo largo de los campos que generan la distribución,

$$\frac{d}{dt} q_1^k = 0, \quad \frac{d}{dt} (q_2^{k+1} q_3^k) = 0,$$

luego las funciones

$$a_1^k = q_1^k, \quad a_2^k = q_2^{k+1} q_3^k \quad (23)$$

son constantes en las hojas de la foliación. De hecho, las subvariedades de nivel dadas por $\{q_1^k = \text{const.}, q_2^{k+1} q_3^k = \text{const.} \neq 0\}$ —cuya unión es S — son conexas, de la misma dimensión que las hojas de \mathcal{F} , luego coinciden con \mathcal{F} .

(6.3) La variedad reducida. La variedad reducida N es el cociente S/\mathcal{F} , que tiene dimensión $2d$ y, por lo que acabamos de ver, se puede dotar de coordenadas $(a_1^k, a_2^k)_{k=1, \dots, d}$, $a_2^k \neq 0$ (esta última condición es consecuencia de que $q^k \in \text{GL}(2, \mathbb{R})$). De esta manera, las fórmulas (23) también permiten calcular la proyección canónica $p : S \rightarrow N$.

(6.4) El corchete de Poisson en N . Veamos explícitamente que N hereda la estructura de Poisson de M , es decir, que la fórmula (6) induce un corchete de Poisson en N . Para ello, siguiendo las ideas de [MR], para cada 1-forma φ en N , $p^* \varphi$ debe poder extenderse a una 1-forma α en M (posiblemente solo definida en los puntos de S) que aniquile la distribución \mathcal{D} . Esto significa:

$$\langle \alpha, \mathcal{D} \rangle = 0, \quad \langle \alpha, \dot{q} \rangle = \langle \varphi, p_* \dot{q} \rangle, \quad \dot{q} \in \text{TS}.$$

Tenemos que comprobar que la expresión

$$\pi'^\#(\varphi) = p_*(\Pi'^\#(\alpha)) \quad (24)$$

está bien definida (no depende de la extensión α) y determina una estructura de Poisson en N . Si escribimos $\varphi = \sum_{k=1}^d (\varphi_1^k da_1^k + \varphi_2^k da_2^k)$, cualquier extensión α tendrá la forma

$$\alpha^k = \begin{pmatrix} \varphi_1^k & q_2^{k+1} \varphi_2^k \\ q_3^{k-1} \varphi_2^{k-1} & \alpha_4^k \end{pmatrix},$$

donde α_4^k es libre. Aplicando la fórmula (24), se obtiene la expresión de $\pi'^\#$:

$$\dot{a}_1^k = a_2^{k-1} \varphi_2^{k-1} - a_2^k \varphi_2^k, \quad \dot{a}_2^k = a_2^k (\varphi_1^k - \varphi_1^{k+1}),$$

que es una de las estructuras de Poisson del retículo de Toda periódico (ver [AdMo]).

(6.5) El fibrado y la proyección del haz de anclas en N . Veamos que el haz de anclas $A_\lambda : E \rightarrow TM$ en M induce un haz de aplicaciones $a_\lambda : U \rightarrow TN$, donde U es un fibrado sobre N escogido adecuadamente. Para ello, conviene intentar definir primero el fibrado dual U^* y el haz dual a_λ^* . La definición de U y a_λ se seguirán inmediatamente por dualidad.

Como antes, sea $\varphi \in T^*N$ un covector y $\alpha \in T^*M$ una extensión de $p^*\varphi$ que aniquile \mathcal{D} . Calculemos las componentes de $\xi = A_\lambda^*(\alpha)$:

$$\begin{aligned}\xi_1^k &= \varphi_1^{k-1}(q_1^{k-1} + \lambda) - \varphi_1^k(q_1^k + \lambda) + \varphi_2^{k-2}q_2^{k-1}q_3^{k-2} - \varphi_2^kq_2^{k+1}q_3^k, \\ \xi_2^k &= -\varphi_1^kq_2^k + \varphi_2^{k-1}q_2^k(q_1^{k-1} + \lambda) + \alpha_4^{k-1}q_2^{k-1}, \\ \xi_3^k &= \varphi_1^{k-1}q_3^{k-1} - \varphi_2^{k-1}q_3^{k-1}(q_1^k + \lambda) - \alpha_4^kq_3^k, \\ \xi_4^k &= 0.\end{aligned}$$

Nótese que las siguientes combinaciones

$$\begin{aligned}\xi_1^k &= \varphi_1^{k-1}(q_1^{k-1} + \lambda) - \varphi_1^k(q_1^k + \lambda) + \varphi_2^{k-2}q_2^{k-1}q_3^{k-2} - \varphi_2^kq_2^{k+1}q_3^k, \\ \xi_2^{k+1}q_3^k + \xi_3^kq_2^k &= \varphi_1^{k-1}q_2^kq_3^{k-1} - \varphi_1^{k+1}q_2^{k+1}q_3^k + (q_2^{k+1}q_3^k\varphi_2^k - q_2^kq_3^{k-1}\varphi_2^{k-1})(q_1^k + \lambda)\end{aligned}$$

no dependen de la extensión (esto es, no dependen de α_4^k) y son invariantes a lo largo de las fibras de la proyección (esto es, dependen de las coordenadas de S solo a través de las combinaciones $q_1^k = a_1^k$ y $q_2^{k+1}q_3^k = a_2^k$). Así pues, lo más natural es definir el fibrado dual $U^* = N \times \mathbb{R}^{2d}$, con coordenadas $(a_1^k, a_2^k, \eta_1^k, \eta_2^k)$, y la proyección $\tau : E^*|_S \rightarrow U^*$ como sigue: en la base del fibrado es la proyección canónica $p : S \rightarrow N$ definida según (23), en las fibras es la dada por las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned}\eta_1^k &= \xi_1^k, \\ \eta_2^k &= \xi_2^{k+1}q_3^k + \xi_3^kq_2^k.\end{aligned}$$

Con todo esto, el haz dual reducido α_λ^* se define análogamente a (24):

$$\eta = a_\lambda^*(\varphi) = \tau(A_\lambda^*(\alpha)),$$

que en coordenadas se lee

$$\begin{aligned}\eta_1^k &= \varphi_1^{k-1}(a_1^{k-1} + \lambda) - \varphi_1^k(a_1^k + \lambda) + \varphi_2^{k-2}a_2^{k-2} - \varphi_2^ka_2^k, \\ \eta_2^k &= \varphi_1^{k-1}a_2^{k-1} - \varphi_1^{k+1}a_2^k + (a_2^k\varphi_2^k - a_2^{k-1}\varphi_2^{k-1})(a_1^k + \lambda).\end{aligned}$$

La expresión anterior también da la relación entre las 1-formas en N . Recordemos que dos formas φ, ψ en N están relacionadas si y solo si

$$a^*\varphi = a'^*\psi,$$

que, en componentes, se lee

$$\begin{aligned}\varphi_1^ka_1^k - \varphi_1^{k+1}a_1^{k+1} + \varphi_2^{k-1}a_2^{k-1} - \varphi_2^{k+1}a_2^{k+1} &= \psi_1^k - \psi_1^{k+1}, \\ a_1^k(a_2^k\varphi_2^k - a_2^{k-1}\varphi_2^{k-1}) + \varphi_1^{k-1}a_2^{k-1} - \varphi_1^{k+1}a_2^k &= a_2^k\psi_2^k - a_2^{k-1}\psi_2^{k-1}.\end{aligned}$$

Dada una forma φ , la clase de formas relacionadas con ella es $[\psi] = \psi + \ker a'^*$. Obsérvese que, en esta estructura reducida, $\ker a'^* \subset \ker \pi'$. Por tanto, la siguiente asignación

$$\pi^\#(\varphi) = \pi'^\#(\psi)$$

está bien definida. Se puede demostrar que induce un segundo corchete de Poisson $\{\bullet, \bullet\}$ en N compatible con el primero (en el sentido del punto 3.1), esto es, $\pi_\lambda = \pi + \lambda\pi'$ es un haz de Poisson. Explícitamente, $\dot{a} = \pi_\lambda^\#(\varphi)$ se lee

$$\begin{aligned}\dot{a}_1^k &= (\varphi_2^{k-1}a_2^{k-1} - \varphi_2^ka_2^k)(a_1^k + \lambda) + \varphi_1^{k+1}a_2^k - \varphi_1^{k-1}a_2^{k-1}, \\ \dot{a}_2^k &= a_2^k(\varphi_1^k(a_1^k + \lambda) - \varphi_1^{k+1}(a_1^{k+1} + \lambda) + \varphi_2^{k-1}a_2^{k-1} - \varphi_2^{k+1}a_2^{k+1}).\end{aligned}\quad (25)$$

Esta es la estructura bihamiltoniana asociada al retículo de Toda periódico (véase [MoPi]), que era nuestro objetivo: hemos llegado a una variedad bihamiltoniana que describe el sistema de Toda mediante un proceso de reducción aplicado a una variedad de Poisson bianclada.

7. INTEGRABILIDAD DEL RETÍCULO DE TODA

Como se mencionó en el punto 3.3 y se hizo en el ejemplo 3.4, nuestra estrategia ahora es encontrar funciones de Casimir $C(\lambda)$ del haz de Poisson, expandirlas en serie de potencias de λ ,

$$C = \sum_i H_i \lambda^i,$$

y las cantidades H_i estarán en involución con respecto a ambos corchetes de Poisson. Si se encuentran suficientes H_i funcionalmente independientes, el sistema será integrable en el sentido clásico de Arnold y Liouville ([Arn]).

La siguiente proposición, cuya prueba se puede encontrar en [Meu], da una manera sistemática de encontrar funciones de Casimir para nuestro problema

Proposición 7.1. *Si $h_1, \dots, h_d \in C^\infty(N)$ cumplen las ecuaciones*

$$h_k h_{k+1} = (a_1^{k+1} + \lambda)h_k + a_2^k, \quad (26)$$

entonces $C(\lambda) = h_1 \cdots h_d$ es un Casimir del haz de Poisson (25). Las soluciones h_k de (26) —y, por tanto, el Casimir C — se pueden calcular explícitamente como series de Laurent en el parámetro λ .

Para expresar los h_k en forma de serie de Laurent, basta con escribir

$$h_k = \lambda + \sum_{j \geq 1} \frac{h_{kj}}{\lambda^j}$$

y sustituir en (26). Los coeficientes h_{kj} se determinan algebraicamente.

La ecuación (26) se llama *ecuación característica* del sistema. Es la contraparte de la ecuación de Riccati (16) que aparece en el estudio del sistema de KdV. Un atajo para calcular las soluciones a (26) es el siguiente: si llamamos

$$h_k = \frac{\psi_{k+1}}{\psi_k} \mu, \quad (27)$$

la ecuación característica se transforma en el sistema lineal

$$\mu^2 \psi_{k+2} - \mu(a_1^{k+1} + \lambda)\psi_{k+1} - a_2^k \psi_k = 0, \quad (28)$$

que se puede expresar en forma matricial

$$L\psi = 0,$$

donde L es la *matriz de Lax*

$$L = \begin{pmatrix} \mu(a_1^1 + \lambda) & -\mu^2 & 0 & \cdots & a_2^d \\ a_2^1 & \mu(a_1^2 + \lambda) & -\mu^2 & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2^2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mu(a_1^{d-1} + \lambda) & -\mu^2 \\ -\mu^1 & 0 & \cdots & a_2^{d-1} & \mu(a_1^d + \lambda) \end{pmatrix}$$

y ψ es el vector de «coordenadas homogéneas»

$$\psi = (\psi_1 \quad \cdots \quad \psi_d)^T.$$

Para que (28) tenga soluciones no triviales, es necesario que $\det L = 0$. Se puede demostrar que la ciclicidad de la matriz L implica que su determinante es un polinomio de grado 2 en μ^d . Por tanto, debemos tener

$$0 = \det L = -\mu^{2d} + C_1\mu^d + C_2, \quad (29)$$

donde C_1 es un polinomio mónico de grado d en λ :

$$C_1(\lambda) = H_1 + H_2\lambda + \cdots + H_{d-1}\lambda^{d-2} + K_1\lambda^{d-1} + \lambda^d, \quad (30)$$

y la función C_2 no depende de λ :

$$C_2 = K_2 = (-1)^{d+1}a_2^1a_2^2 \cdots a_2^d. \quad (31)$$

Por la proposición 7.1 y la ecuación (27), para cualquier μ que cumpla la ecuación (29), se tiene que $\mu^d = h_1 \cdots h_d$ es una función de Casimir, luego C_1 y C_2 también lo son. Sus $d+1$ coeficientes dan toda la información geométrica relativa a la integrabilidad del sistema de Toda: como K_1 , K_2 son funciones de Casimir para π' y sus hojas simplécticas tienen dimensión $2(d-1)$, las ecuaciones

$$K_1 = \text{const.}, \quad K_2 = \text{const.}$$

describen una hoja simpléctica. Además, como consecuencia de las relaciones de Lenard, los $d-1$ coeficientes H_i están en involución con respecto al corchete de Poisson $\{\bullet, \bullet\}'$. Como estas funciones son independientes, constituyen un conjunto completo de funciones en involución en la hoja simpléctica, luego los campos

$$X_i = \pi'^{\sharp}(\mathrm{d}H_i)$$

describen sistemas integrables. Esta es la *jerarquía del retículo de Toda periódico de d partículas*.

8. UN EJEMPLO: EL RETÍCULO DE TODA DE 3 PARTÍCULAS

Exploremos más explícitamente el caso $d = 3$. Para que las ecuaciones se lean más fácilmente, hacemos el siguiente cambio de notación:

$$a_1^k \mapsto b_k, \quad a_2^k \mapsto a_k, \quad \varphi_1^k \mapsto \beta_k, \quad \varphi_2^k \mapsto \alpha_k.$$

Nuestra variedad bihamiltoniana N se convierte en \mathbb{R}^6 con coordenadas $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$. El haz de Poisson π_λ^\sharp le asigna a cada 1-forma $\sum_{k=1}^3 (\alpha_k \mathrm{d}a_k + \beta_k \mathrm{d}b_k)$ el campo vectorial

$$\begin{aligned} \dot{a}_k &= a_k(-\alpha_{k+1}a_{k+1} + \alpha_{k-1}a_{k-1} - \beta_{k+1}(b_{k+1} + \lambda) + \beta_k(b_k + \lambda)), \\ \dot{b}_k &= (b_k + \lambda)(-\alpha_k a_k + \alpha_{k-1}a_{k-1}) + a_k\beta_{k+1} - a_{k-1}\beta_{k-1}, \end{aligned}$$

donde $k = 1, 2, 3$. Las ecuaciones (30) y (31) dan funciones de Casimir del haz de Poisson anterior:

$$C_1(\lambda) = H_1 + H_2\lambda + K_1\lambda^2 + \lambda^3, \quad C_2(\lambda) = K_2,$$

donde

$$\begin{aligned} H_1 &= b_1b_2b_3 + a_2b_1 + a_1b_3 + a_3b_2, & H_2 &= b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3 + a_1 + a_2 + a_3, \\ K_1 &= b_1 + b_2 + b_3, & K_2 &= a_1a_2a_3. \end{aligned}$$

Por tanto, los dos campos $X_1 = \pi'^{\sharp}(dH_1)$ y $X_2 = \pi'^{\sharp}(dH_2)$ son sistemas integrables en las hojas simplécticas de π' , que son los conjuntos de nivel de (K_1, K_2) . Explícitamente, los campos son

$$X_1 : \begin{cases} \dot{a}_k = a_k(b_{k+1}b_{k-1} - b_{k-1}b_k + a_{k+1} - a_{k-1}), \\ \dot{b}_k = b_{k+1}a_{k-1} - b_{k-1}a_k, \end{cases} \quad X_2 : \begin{cases} \dot{a}_k = a_k(b_{k+1} - b_k), \\ \dot{b}_k = a_{k-1} - a_k. \end{cases}$$

La expresión de X_2 es la ecuación del retículo de Toda periódico, (1).

9. CONCLUSIONES Y OBSERVACIONES

En este trabajo, se ha visto la integrabilidad del retículo de Toda como consecuencia de un proceso de reducción aplicado a un tipo de variedades llamadas *variedades de Poisson biancladas*, pero el procedimiento de reducción que hemos empleado, en principio, no parece sistemático: solamente se ha aplicado a la variedad $M = \text{Map}(\mathbb{Z}_d, \text{GL}(2, \mathbb{R}))$.

En esta última sección, intentaremos convencer al lector de que dicho proceso de reducción es más general y sistemático. Utilizamos la misma notación que en la sección 5.

Proposición 9.1. *Sea M una variedad de Poisson bianclada. Sean $S \subseteq M$ una subvariedad regular y $\mathcal{D} = A(\ker A')$, y supongamos que se puede hacer una reducción de Marsden-Ratiu en (M, S, \mathcal{D}) respecto al bivector Π' , obteniendo una variedad de Poisson N tal que $p : S \rightarrow N$ es una sumersión.*

Sea \mathcal{H} una foliación en el fibrado $E^|_S$ tal que*

- (1) \mathcal{H} es regular, y por tanto $U^* = E^*|_S/\mathcal{H}$ es una variedad diferenciable.
- (2) U^* es un fibrado sobre N y la proyección $\tau : E^*|_S \rightarrow U^*$ un homomorfismo de fibrados vectoriales.
- (3) $(\mathcal{D} + \text{TS})^0 \subseteq \ker(\tau \circ A'_\lambda)$.

Entonces, el haz de anclas duales A'_λ se proyecta a U^ , resultando en un haz de aplicaciones a^*_λ y el bivector π definido por*

$$\pi^{\sharp}(\varphi) = \pi'^{\sharp}(\psi), \quad a^*\varphi = a'^*\psi$$

está bien definido y es cuasi-Poisson (esto es, bilineal, antisimétrico y su corchete asociado es una derivación en cada componente). Si, además, satisface la identidad de Jacobi, entonces π es de Poisson. Si $\text{Im } a^ \supseteq \text{Im } a'^*$, entonces es compatible con π' .*

Idea de la demostración. Es una pequeña comprobación que la condición (3) garantiza que el haz a^*_λ está bien definido: si φ es una 1-forma en N y tomamos dos extensiones α, α' de $p^*\varphi$ que aniquilen \mathcal{D} , la diferencia $\alpha - \alpha'$ se anulará en $\mathcal{D} + \text{TS}$, luego $\tau(A'_\lambda(\alpha - \alpha')) = 0$.

Por otro lado, la elección de la distribución $\mathcal{D} = A \ker A'$ garantiza que $\ker a' \subseteq \ker a$, luego $\operatorname{Im} a'^* = (\ker a')^0 \supseteq (\ker a)^0 = \operatorname{Im} a^*$. Esto quiere decir que para cualquier 1-forma β existe alguna γ tal que $\beta \sim \gamma$. Usando las aplicaciones J, J' y la relación de compatibilidad (19), se tiene que $\pi^\sharp(\beta)$ está en la imagen de a' . Así, para cada forma $\alpha \in \ker a'^*$,

$$\pi'(\alpha, \beta) = \langle \alpha, \pi^\sharp \beta \rangle \in \operatorname{Im}(\underbrace{\alpha \circ a'}_{a'^*(\alpha)}) = \{0\},$$

lo que prueba que $\ker a'^* \subseteq \ker \pi'$, condición suficiente para que π esté bien definido.

Que π sea cuasi-Poisson se puede demostrar sin dificultad recurriendo de nuevo al truco anterior: la bilinealidad es evidente; la antisimetría es consecuencia de que π' es antisimétrico y de la relación (19) junto con que $\operatorname{Im} a^* \subseteq \operatorname{Im} a'^*$; y la regla de Leibniz es consecuencia exclusiva de $\operatorname{Im} a^* \subseteq \operatorname{Im} a'^*$. \square

Nótese que la reducción que se presenta en la proposición anterior es la más natural posible: debido a la elección de \mathcal{D} , N es el máximo cociente de S en el que $\operatorname{Im} a^* \subseteq \operatorname{Im} a'^*$ y por tanto π está bien definido y es cuasi-Poisson.

Sin embargo, el resultado anterior es (aún) muy rudimentario. Cabe preguntarse, sobre todo, bajo qué condiciones es π un bivector de Poisson, incluso si son necesarias condiciones adicionales para garantizarlo. Ídem con la compatibilidad de los bivectores reducidos. Estas cuestiones van mucho más allá del objetivo del presente trabajo, pero espero que sirvan como aliciente para continuar esta línea de investigación.

REFERENCIAS

- [AbM] ABRAHAM, R., & MARSDEN, J. E. (2008). *Foundations of Mechanics*. American Mathematical Society. 2, 4
- [AdMo] ADLER, M., & VAN MOERBEKE, P. (1980). Completely integrable systems, Euclidean Lie algebras, and curves. *Advances in mathematics*, 38(3), 267-317. 16
- [Arn] ARNOLD, V. I. (2013). *Mathematical methods of classical mechanics* (Vol. 60). Springer Science & Business Media. 2, 17
- [Fska] FLASCHKA, H. (1974). The Toda lattice. II. Existence of integrals. *Physical Review B*, 9(4), 1974. 2
- [KdV] KORTEWEG, D. J., & DE VRIES, G. (1895). XLI. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 39(240), 422-443. 8
- [MCP] MAGRI, F., CASATI, P., & PEDRONI, M. (1992). Bi-Hamiltonian manifolds and τ -function. *Contemporari Mathematics*, 132, 213-234. 7
- [MCPF] MAGRI, F., CASATI, P., FALQUI, G., & PEDRONI, M. (2004). Eight lectures on integrable systems. *Integrability of nonlinear systems*, 209-250. 11
- [MR] MARSDEN, J. E., & RATIU, T. (1986). Reduction of Poisson manifolds. *Letters in mathematical Physics*, 11(2), 161-169. 5, 15
- [Meu] MEUCCI, A. (2000). Compatible Lie algebroids and the periodic Toda lattice. *Journal of Geometry and Physics*, 35(4), 273-287. 11, 17
- [MoPi] MOROSI, C., & PIZZOCCHERO, L. (1996). R-matrix theory, formal Casimirs and the periodic Toda lattice. *Journal of Mathematical Physics*, 37(9), 4484-4513. 17
- [Toda1] TODA, M. (1970). Waves in nonlinear lattice. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 45, 174-200. 1, 2
- [Toda2] TODA, M. (2012). *Theory of nonlinear lattices* (Vol. 20). Springer Science & Business Media. 2
- [Vai] VAISMAN, I. (1994) *Lectures on the Geometry of Poisson Manifolds*. Springer Basel AG. 6