

Teoría geométrica de la reducción y aplicación al retículo de Toda periódico

Trabajo de Fin de Grado

Samuel M. A. Luque Astorga

7 de junio de 2024

Universidad Complutense de Madrid
Departamento de Física Teórica



1. Introducción
2. Marcos geométricos
3. La integrabilidad del sistema de Toda
4. Conclusiones y observaciones

Introducción

El retículo de Toda periódico

M. Toda, 1970: cadena lineal de d partículas descrita por

$$H(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d y_k^2 + \sum_{k=1}^d e^{x_k - x_{k+1}}, \quad x_{k+d} = x_k.$$

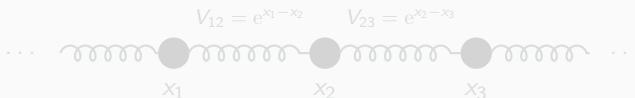


Fig. 1: El retículo de Toda periódico

Uno de los primeros ejemplos de **sistema no lineal completamente integrable**.

El retículo de Toda periódico

M. Toda, 1970: cadena lineal de d partículas descrita por

$$H(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d y_k^2 + \sum_{k=1}^d e^{x_k - x_{k+1}}, \quad x_{k+d} = x_k.$$

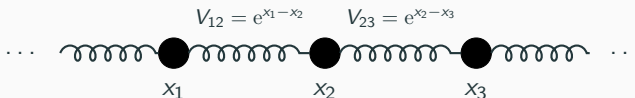


Fig. 1: El retículo de Toda periódico

Uno de los primeros ejemplos de sistema no lineal completamente integrable.

El retículo de Toda periódico

M. Toda, 1970: cadena lineal de d partículas descrita por

$$H(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d y_k^2 + \sum_{k=1}^d e^{x_k - x_{k+1}}, \quad x_{k+d} = x_k.$$

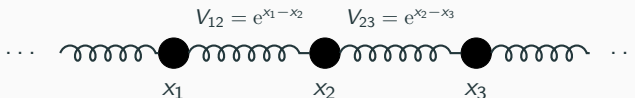


Fig. 1: El retículo de Toda periódico

Uno de los primeros ejemplos de **sistema no lineal completamente integrable**.

Observaciones iniciales

1. Mediante un **cambio de variable** parecido al de Flaschka (1974):

$$a_k = -\frac{1}{4}e^{x_k - x_{k-1}}, \quad b_k = -\frac{1}{4}y_k,$$

las ecuaciones de movimiento son

$$\dot{a}_k = a_k(b_{k+1} - b_k), \quad \dot{b}_k = a_{k-1} - a_k.$$

2. Se puede entender como la discretización del **sistema de KdV**:

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0.$$

Al igual que este, el retículo de Toda también admite soluciones distinguidas interesantes: los **solitones**.

Observaciones iniciales

1. Mediante un **cambio de variable** parecido al de Flaschka (1974):

$$a_k = -\frac{1}{4}e^{x_k - x_{k-1}}, \quad b_k = -\frac{1}{4}y_k,$$

las ecuaciones de movimiento son

$$\dot{a}_k = a_k(b_{k+1} - b_k), \quad \dot{b}_k = a_{k-1} - a_k.$$

2. Se puede entender como la discretización del **sistema de KdV**:

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0.$$

Al igual que este, el retículo de Toda también admite soluciones distinguidas interesantes: los **solitones**.

Observaciones iniciales

1. Mediante un **cambio de variable** parecido al de Flaschka (1974):

$$a_k = -\frac{1}{4}e^{x_k - x_{k-1}}, \quad b_k = -\frac{1}{4}y_k,$$

las ecuaciones de movimiento son

$$\dot{a}_k = a_k(b_{k+1} - b_k), \quad \dot{b}_k = a_{k-1} - a_k.$$

2. Se puede entender como la discretización del **sistema de KdV**:

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0.$$

Al igual que este, el retículo de Toda también admite soluciones distinguidas interesantes: los **solitones**.

Observaciones iniciales

1. Mediante un **cambio de variable** parecido al de Flaschka (1974):

$$a_k = -\frac{1}{4}e^{x_k - x_{k-1}}, \quad b_k = -\frac{1}{4}y_k,$$

las ecuaciones de movimiento son

$$\dot{a}_k = a_k(b_{k+1} - b_k), \quad \dot{b}_k = a_{k-1} - a_k.$$

2. Se puede entender como la discretización del **sistema de KdV**:

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0.$$

Al igual que este, el retículo de Toda también admite soluciones distinguidas interesantes: los **solitones**.

Reducción

Procedimiento general en mecánica geométrica mediante el cual las simetrías de un sistema mecánico permiten eliminar algunos grados de libertad, reduciendo el **espacio de fases** y la **dinámica**.

(Espacio de fases M , Hamiltoniano H)



(Espacio de fases reducido M_{red} , Hamiltoniano reducido H_{red})

Ejemplo paradigmático: **movimiento planetario**.

Existen muchas teorías de reducción, una por cada formulación geométrica de la mecánica.

Reducción

Procedimiento general en mecánica geométrica mediante el cual las simetrías de un sistema mecánico permiten eliminar algunos grados de libertad, reduciendo el **espacio de fases** y la **dinámica**.

(Espacio de fases M , Hamiltoniano H)



(Espacio de fases reducido M_{red} , Hamiltoniano reducido H_{red})

Ejemplo paradigmático: **movimiento planetario**.

Existen muchas teorías de reducción, una por cada formulación geométrica de la mecánica.

Reducción

Procedimiento general en mecánica geométrica mediante el cual las simetrías de un sistema mecánico permiten eliminar algunos grados de libertad, reduciendo el **espacio de fases** y la **dinámica**.

(Espacio de fases M , Hamiltoniano H)



(Espacio de fases reducido M_{red} , Hamiltoniano reducido H_{red})

Ejemplo paradigmático: **movimiento planetario**.

Existen muchas teorías de reducción, una por cada formulación geométrica de la mecánica.

Marcos geométricos

Geometría de Poisson

El espacio de fases M tiene un corchete de Poisson $\{\bullet, \bullet\}$ (bilineal, antisimétrico, Jacobi y Leibniz).

Equivale a un bivector de Poisson

$$\begin{aligned}\pi^\sharp : T^*M &\rightarrow TM, \\ \alpha &\mapsto v = \sharp\alpha,\end{aligned}$$

según el cual podemos obtener ecuaciones de Hamilton: $X_H = \sharp dH$.

Reducción de Marsden-Ratiu

Sea (M, H) un sistema hamiltoniano. Ingredientes:

- $S \subseteq M$ invariante por X_H .
- \mathcal{F} "buena" foliación en S (grados de libertad ignorables).

Entonces, $M_{\text{red}} = S/\mathcal{F}$ hereda un corchete de Poisson $\{\bullet, \bullet\}_{\text{red}}$ y la dinámica hamiltoniana se reduce: $H_{\text{red}} : M_{\text{red}} \rightarrow \mathbb{R}$.

Geometría de Poisson

El espacio de fases M tiene un corchete de Poisson $\{\bullet, \bullet\}$ (bilineal, antisimétrico, Jacobi y Leibniz).

Equivale a un bivector de Poisson

$$\begin{aligned}\pi^\sharp : T^*M &\rightarrow TM, \\ \alpha &\mapsto v = \sharp\alpha,\end{aligned}$$

según el cual podemos obtener ecuaciones de Hamilton: $X_H = \sharp dH$.

Reducción de Marsden-Ratiu

Sea (M, H) un sistema hamiltoniano. Ingredientes:

- $S \subseteq M$ invariante por X_H .
- \mathcal{F} "buena" foliación en S (grados de libertad ignorables).

Entonces, $M_{\text{red}} = S/\mathcal{F}$ hereda un corchete de Poisson $\{\bullet, \bullet\}_{\text{red}}$ y la dinámica hamiltoniana se reduce: $H_{\text{red}} : M_{\text{red}} \rightarrow \mathbb{R}$.

Geometría de Poisson

El espacio de fases M tiene un corchete de Poisson $\{\bullet, \bullet\}$ (bilineal, antisimétrico, Jacobi y Leibniz).

Equivale a un bivector de Poisson

$$\begin{aligned}\pi^\sharp : T^*M &\rightarrow TM, \\ \alpha &\mapsto v = \sharp\alpha,\end{aligned}$$

según el cual podemos obtener ecuaciones de Hamilton: $X_H = \sharp dH$.

Reducción de Marsden-Ratiu

Sea (M, H) un sistema hamiltoniano. Ingredientes:

- $S \subseteq M$ invariante por X_H .
- \mathcal{F} “buena” foliación en S (grados de libertad ignorables).

Entonces, $M_{\text{red}} = S/\mathcal{F}$ hereda un corchete de Poisson $\{\bullet, \bullet\}_{\text{red}}$ y la dinámica hamiltoniana se reduce: $H_{\text{red}} : M_{\text{red}} \rightarrow \mathbb{R}$.

Geometría de Poisson

El espacio de fases M tiene un corchete de Poisson $\{\bullet, \bullet\}$ (bilineal, antisimétrico, Jacobi y Leibniz).

Equivale a un bivector de Poisson

$$\begin{aligned}\pi^\sharp : T^*M &\rightarrow TM, \\ \alpha &\mapsto v = \sharp\alpha,\end{aligned}$$

según el cual podemos obtener ecuaciones de Hamilton: $X_H = \sharp dH$.

Reducción de Marsden-Ratiu

Sea (M, H) un sistema hamiltoniano. Ingredientes:

- $S \subseteq M$ invariante por X_H .
- \mathcal{F} “buena” foliación en S (grados de libertad ignorables).

Entonces, $M_{\text{red}} = S/\mathcal{F}$ hereda un corchete de Poisson $\{\bullet, \bullet\}_{\text{red}}$ y la dinámica hamiltoniana se reduce: $H_{\text{red}} : M_{\text{red}} \rightarrow \mathbb{R}$.

Geometría bihamiltoniana

El espacio de fases M tiene dos corchetes de Poisson $\{\bullet, \bullet\}$, $\{\bullet, \bullet\}'$ compatibles:

$$\{\bullet, \bullet\}_\lambda := \{\bullet, \bullet\} + \lambda \{\bullet, \bullet\}'$$

es un corchete de Poisson $\forall \lambda$.

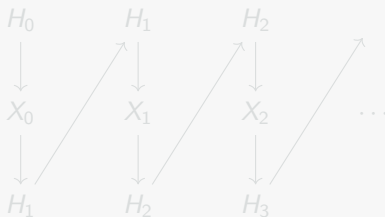
Reducción bihamiltoniana: una reducción de Poisson en $(M, \{\bullet, \bullet\}_\lambda)$
 $\rightsquigarrow (M_{\text{red}}, \{\bullet, \bullet\}_\lambda^{\text{red}})$.

Procedimiento de Lenard

$\{\bullet, \bullet\}'$ – Hamiltonianos

Campos

$\{\bullet, \bullet\}$ – Hamiltonianos



Geometría bihamiltoniana

El espacio de fases M tiene dos corchetes de Poisson $\{\bullet, \bullet\}$, $\{\bullet, \bullet\}'$ compatibles:

$$\{\bullet, \bullet\}_\lambda := \{\bullet, \bullet\} + \lambda \{\bullet, \bullet\}'$$

es un corchete de Poisson $\forall \lambda$.

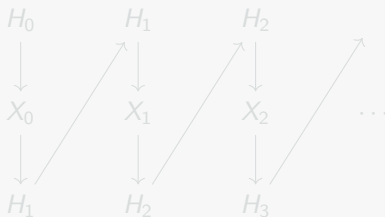
Reducción bihamiltoniana: una reducción de Poisson en $(M, \{\bullet, \bullet\}_\lambda)$
 $\rightsquigarrow (M_{\text{red}}, \{\bullet, \bullet\}_\lambda^{\text{red}})$.

Procedimiento de Lenard

$\{\bullet, \bullet\}'$ – Hamiltonianos

Campos

$\{\bullet, \bullet\}$ – Hamiltonianos



Geometría bihamiltoniana

El espacio de fases M tiene dos corchetes de Poisson $\{\bullet, \bullet\}$, $\{\bullet, \bullet\}'$ compatibles:

$$\{\bullet, \bullet\}_\lambda := \{\bullet, \bullet\} + \lambda \{\bullet, \bullet\}'$$

es un corchete de Poisson $\forall \lambda$.

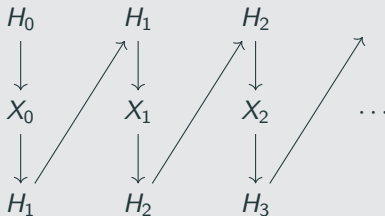
Reducción bihamiltoniana: una reducción de Poisson en $(M, \{\bullet, \bullet\}_\lambda)$
 $\rightsquigarrow (M_{\text{red}}, \{\bullet, \bullet\}_\lambda^{\text{red}})$.

Procedimiento de Lenard

$\{\bullet, \bullet\}'$ – Hamiltonianos

Campos

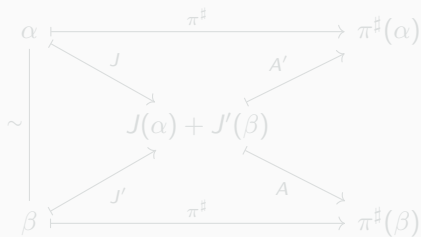
$\{\bullet, \bullet\}$ – Hamiltonianos



Geometría de Poisson bianclada

El espacio de fases M tiene:

- Una estructura de **Poisson** π .
- Dos **algebroides de Lie** $(E, \{\bullet, \bullet\}_i, A_i)$ compatibles: $A_\lambda = A + \lambda A'$.
- Dos aplicaciones $J, J' : T^*M \rightarrow E$, que sueldan todas las piezas:

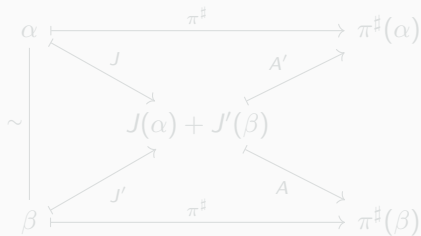


donde $\alpha \sim \beta \iff A^* \alpha = A'^* \beta$.

Geometría de Poisson bianclada

El espacio de fases M tiene:

- Una estructura de **Poisson** π .
- Dos **algebroides de Lie** $(E, \{\bullet, \bullet\}_i, A_i)$ compatibles: $A_\lambda = A + \lambda A'$.
- Dos aplicaciones $J, J' : T^*M \rightarrow E$, que sueldan todas las piezas:

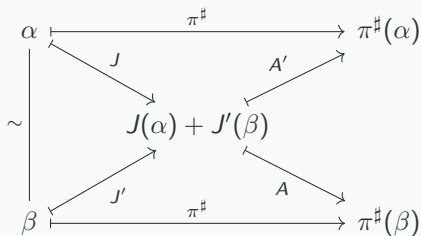


donde $\alpha \sim \beta \iff A^* \alpha = A'^* \beta$.

Geometría de Poisson bianclada

El espacio de fases M tiene:

- Una estructura de **Poisson** π .
- Dos **algebroides de Lie** $(E, \{\bullet, \bullet\}_i, A_i)$ compatibles: $A_\lambda = A + \lambda A'$.
- Dos aplicaciones $J, J' : T^*M \rightarrow E$, que sueldan todas las piezas:



donde $\alpha \sim \beta \iff A^* \alpha = A'^* \beta$.

La integrabilidad del sistema de Toda

- **Espacio de fases:** $M = \text{Map}(\mathbb{Z}_d, \text{GL}(2, \mathbb{R}))$: discretización de $\text{Map}(\mathbb{S}^1, \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$. Sus elementos son:

$$q = (q^1, \dots, q^d), \text{ donde}$$
$$q^k = \begin{pmatrix} q_1^k & q_2^k \\ q_3^k & q_4^k \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, d.$$

- **Estructura de Poisson bianclada:** Un bivector de Poisson Π' , un haz de algebroides $(E, \{\bullet, \bullet\}_\lambda, A_\lambda)$ y dos aplicaciones J, J' .

- **Espacio de fases:** $M = \text{Map}(\mathbb{Z}_d, \text{GL}(2, \mathbb{R}))$: discretización de $\text{Map}(\mathbb{S}^1, \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$. Sus elementos son:

$$q = (q^1, \dots, q^d), \text{ donde}$$
$$q^k = \begin{pmatrix} q_1^k & q_2^k \\ q_3^k & q_4^k \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, d.$$

- **Estructura de Poisson bianclada:** Un bivector de Poisson Π' , un haz de algebroides $(E, \{\bullet, \bullet\}_\lambda, A_\lambda)$ y dos aplicaciones J, J' .

- **Espacio de fases:** $M = \text{Map}(\mathbb{Z}_d, \text{GL}(2, \mathbb{R}))$: discretización de $\text{Map}(\mathbb{S}^1, \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$. Sus elementos son:

$$q = (q^1, \dots, q^d), \text{ donde}$$
$$q^k = \begin{pmatrix} q_1^k & q_2^k \\ q_3^k & q_4^k \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, d.$$

- **Estructura de Poisson bianclada:** Un bivector de Poisson Π' , un haz de algebroides $(E, \{\bullet, \bullet\}_\lambda, A_\lambda)$ y dos aplicaciones J, J' .

Hacemos una reducción de Marsden-Ratiu en M :

- **Subvariedad:** Escogemos

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} q_1^k & q_2^k \\ q_3^k & 0 \end{pmatrix} : q_2^k q_3^k \neq 0 \right\}.$$

- **El espacio reducido:** Viene dado por las coordenadas

$$a_1^k = q_1^k, \quad a_2^k = q_2^{k+1} q_3^k.$$

- **La estructura en el espacio reducido:** Estructura de Poisson
biinclada en $M \rightsquigarrow$ estructura **bihamiltoniana** en el espacio reducido:
 (N, π_λ) , que es el espacio de fases del sistema de Toda.

La reducción

Hacemos una reducción de Marsden-Ratiu en M :

- **Subvariedad:** Escogemos

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} q_1^k & q_2^k \\ q_3^k & 0 \end{pmatrix} : q_2^k q_3^k \neq 0 \right\}.$$

- **El espacio reducido:** Viene dado por las coordenadas

$$a_1^k = q_1^k, \quad a_2^k = q_2^{k+1} q_3^k.$$

- **La estructura en el espacio reducido:** Estructura de Poisson
bianclada en $M \rightsquigarrow$ estructura **bihamiltoniana** en el espacio reducido:
 (N, π_λ) , que es el espacio de fases del sistema de Toda.

La reducción

Hacemos una reducción de Marsden-Ratiu en M :

- **Subvariedad:** Escogemos

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} q_1^k & q_2^k \\ q_3^k & 0 \end{pmatrix} : q_2^k q_3^k \neq 0 \right\}.$$

- **El espacio reducido:** Viene dado por las coordenadas

$$a_1^k = q_1^k, \quad a_2^k = q_2^{k+1} q_3^k.$$

- **La estructura en el espacio reducido:** Estructura de Poisson bianclada en $M \rightsquigarrow$ estructura **bihamiltoniana** en el espacio reducido: (N, π_λ) , que es el espacio de fases del sistema de Toda.

Integrabilidad del sistema de Toda (I)

Idea: encontrar un casimir $C(\lambda)$ de π_λ , $\{\bullet, C(\lambda)\}_\lambda = 0$. Si expandimos

$$C(\lambda) = \sum_i H_i \lambda^i,$$

se tendrá $\{\bullet, H_i\}' = -\{\bullet, H_{i+1}\}$ (relaciones de Lenard).

Proposición

Si $h_k \in C^\infty(N)$ cumplen la *ecuación característica*

$$h_k h_{k+1} = (a_1^{k+1} + \lambda) h_k + a_2^k,$$

entonces $C(\lambda) = h_1 \cdots h_d$ es un casimir del haz de Poisson.

Integrabilidad del sistema de Toda (I)

Idea: encontrar un casimir $C(\lambda)$ de π_λ , $\{\bullet, C(\lambda)\}_\lambda = 0$. Si expandimos

$$C(\lambda) = \sum_i H_i \lambda^i,$$

se tendrá $\{\bullet, H_i\}' = -\{\bullet, H_{i+1}\}$ (relaciones de Lenard).

Proposición

Si $h_k \in C^\infty(N)$ cumplen la *ecuación característica*

$$h_k h_{k+1} = (a_1^{k+1} + \lambda) h_k + a_2^k,$$

entonces $C(\lambda) = h_1 \cdots h_d$ es un casimir del haz de Poisson.

Integrabilidad del sistema de Toda (I)

Idea: encontrar un casimir $C(\lambda)$ de π_λ , $\{\bullet, C(\lambda)\}_\lambda = 0$. Si expandimos

$$C(\lambda) = \sum_i H_i \lambda^i,$$

se tendrá $\{\bullet, H_i\}' = -\{\bullet, H_{i+1}\}$ (relaciones de Lenard).

Proposición

Si $h_k \in C^\infty(N)$ cumplen la *ecuación característica*

$$h_k h_{k+1} = (a_1^{k+1} + \lambda) h_k + a_2^k,$$

entonces $C(\lambda) = h_1 \cdots h_d$ es un casimir del haz de Poisson.

Integrabilidad del sistema de Toda (II)

En consecuencia de lo anterior: si

$$L = \begin{pmatrix} \mu(a_1^1 + \lambda) & -\mu^2 & 0 & \cdots & a_2^d \\ a_2^1 & \mu(a_1^2 + \lambda) & -\mu^2 & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2^2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mu(a_1^{d-1} + \lambda) & -\mu^2 \\ -\mu^1 & 0 & \cdots & a_2^{d-1} & \mu(a_1^d + \lambda) \end{pmatrix},$$

y ponemos $\det L = -\mu^{2d} + C_1\mu^d + C_2$, se tiene:

$$C_1(\lambda) = H_1 + H_2\lambda + \cdots + H_{d-1}\lambda^{d-2} + K_1\lambda^{d-1} + \lambda^d,$$

$$C_2 = K_2 = (-1)^{d+1} a_2^1 a_2^2 \cdots a_2^d.$$

y, en $\{K_1 = \text{const.}, K_2 = \text{const.}\}$, las H_i son un CCFI para π' .

Integrabilidad del sistema de Toda (II)

En consecuencia de lo anterior: si

$$L = \begin{pmatrix} \mu(a_1^1 + \lambda) & -\mu^2 & 0 & \cdots & a_2^d \\ a_2^1 & \mu(a_1^2 + \lambda) & -\mu^2 & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2^2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mu(a_1^{d-1} + \lambda) & -\mu^2 \\ -\mu^1 & 0 & \cdots & a_2^{d-1} & \mu(a_1^d + \lambda) \end{pmatrix},$$

y ponemos $\det L = -\mu^{2d} + C_1\mu^d + C_2$, se tiene:

$$C_1(\lambda) = H_1 + H_2\lambda + \cdots + H_{d-1}\lambda^{d-2} + K_1\lambda^{d-1} + \lambda^d,$$

$$C_2 = K_2 = (-1)^{d+1} a_2^1 a_2^2 \cdots a_2^d.$$

y, en $\{K_1 = \text{const.}, K_2 = \text{const.}\}$, las H_i son un CCFI para π' .

Integrabilidad del sistema de Toda (II)

En consecuencia de lo anterior: si

$$L = \begin{pmatrix} \mu(a_1^1 + \lambda) & -\mu^2 & 0 & \cdots & a_2^d \\ a_2^1 & \mu(a_1^2 + \lambda) & -\mu^2 & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2^2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mu(a_1^{d-1} + \lambda) & -\mu^2 \\ -\mu^1 & 0 & \cdots & a_2^{d-1} & \mu(a_1^d + \lambda) \end{pmatrix},$$

y ponemos $\det L = -\mu^{2d} + C_1\mu^d + C_2$, se tiene:

$$C_1(\lambda) = H_1 + H_2\lambda + \cdots + H_{d-1}\lambda^{d-2} + K_1\lambda^{d-1} + \lambda^d,$$

$$C_2 = K_2 = (-1)^{d+1} a_2^1 a_2^2 \cdots a_2^d.$$

y, en $\{K_1 = \text{const.}, K_2 = \text{const.}\}$, las H_i son un CCFI para π' .

Ejemplo: el caso de 3 partículas

Cambio de notación:

$$a_1^k \mapsto b_k, \quad a_2^k \mapsto a_k, \quad \varphi_1^k \mapsto \beta_k, \quad \varphi_2^k \mapsto \alpha_k.$$

Las funciones anteriores son

$$H_1 = b_1 b_2 b_3 + a_2 b_1 + a_1 b_3 + a_3 b_2, \quad K_1 = b_1 + b_2 + b_3,$$

$$H_2 = b_1 b_2 + b_1 b_3 + b_2 b_3 + a_1 + a_2 + a_3, \quad K_2 = a_1 a_2 a_3.$$

En particular, el sistema

$$X_2 : \begin{cases} \dot{a}_k = a_k(b_{k+1} - b_k), \\ \dot{b}_k = a_{k-1} - a_k. \end{cases}$$

es integrable.

Ejemplo: el caso de 3 partículas

Cambio de notación:

$$a_1^k \mapsto b_k, \quad a_2^k \mapsto a_k, \quad \varphi_1^k \mapsto \beta_k, \quad \varphi_2^k \mapsto \alpha_k.$$

Las funciones anteriores son

$$H_1 = b_1 b_2 b_3 + a_2 b_1 + a_1 b_3 + a_3 b_2, \quad K_1 = b_1 + b_2 + b_3,$$

$$H_2 = b_1 b_2 + b_1 b_3 + b_2 b_3 + a_1 + a_2 + a_3, \quad K_2 = a_1 a_2 a_3.$$

En particular, el sistema

$$\chi_2 : \begin{cases} \dot{a}_k = a_k(b_{k+1} - b_k), \\ \dot{b}_k = a_{k-1} - a_k. \end{cases}$$

es integrable.

Ejemplo: el caso de 3 partículas

Cambio de notación:

$$a_1^k \mapsto b_k, \quad a_2^k \mapsto a_k, \quad \varphi_1^k \mapsto \beta_k, \quad \varphi_2^k \mapsto \alpha_k.$$

Las funciones anteriores son

$$H_1 = b_1 b_2 b_3 + a_2 b_1 + a_1 b_3 + a_3 b_2, \quad K_1 = b_1 + b_2 + b_3,$$

$$H_2 = b_1 b_2 + b_1 b_3 + b_2 b_3 + a_1 + a_2 + a_3, \quad K_2 = a_1 a_2 a_3.$$

En particular, el sistema

$$X_2 : \begin{cases} \dot{a}_k = a_k(b_{k+1} - b_k), \\ \dot{b}_k = a_{k-1} - a_k. \end{cases}$$

es integrable.

Conclusiones y observaciones

El procedimiento es, en realidad, sistemático...

Proposición

Sea M una variedad de Poisson bianclada. Escogemos

- $S \subseteq M$ una subvariedad regular.
- \mathcal{F} la foliación integral de $A(\ker A')$.
- \mathcal{H} una foliación en $E^*|_S$.

Bajo algunas condiciones técnicas, el haz de anclas duales A_λ^* se proyecta a $E^*|_S/\mathcal{H}$, y el bivector π definido en $M_{\text{red}} = S/\mathcal{F}$ por

$$\pi^\sharp(\varphi) = \pi'^\sharp(\psi), \quad a^*\varphi = a'^*\psi$$

está bien definido y es **cuasi-Poisson**. Si es de Poisson y $\text{Im } a^* \supseteq \text{Im } a'^*$, entonces es compatible con π' .

El procedimiento es, en realidad, sistemático...

Proposición

Sea M una variedad de Poisson bianclada. Escogemos

- $S \subseteq M$ una subvariedad regular.
- \mathcal{F} la foliación integral de $A(\ker A')$.
- \mathcal{H} una foliación en $E^*|_S$.

Bajo algunas condiciones técnicas, el haz de anclas duales A_λ^* se proyecta a $E^*|_S/\mathcal{H}$, y el bivector π definido en $M_{\text{red}} = S/\mathcal{F}$ por

$$\pi^\sharp(\varphi) = \pi'^\sharp(\psi), \quad a^*\varphi = a'^*\psi$$

está bien definido y es **cuasi-Poisson**. Si es de Poisson y $\text{Im } a^* \supseteq \text{Im } a'^*$, entonces es compatible con π' .

El procedimiento es, en realidad, sistemático...

Proposición

Sea M una variedad de Poisson bianclada. Escogemos

- $S \subseteq M$ una subvariedad regular.
- \mathcal{F} la foliación integral de $A(\ker A')$.
- \mathcal{H} una foliación en $E^*|_S$.

Bajo algunas condiciones técnicas, el haz de anclas duales A_λ^* se proyecta a $E^*|_S/\mathcal{H}$, y el bivector π definido en $M_{\text{red}} = S/\mathcal{F}$ por

$$\pi^\sharp(\varphi) = \pi'^\sharp(\psi), \quad a^*\varphi = a'^*\psi$$

está bien definido y es **cuasi-Poisson**. Si es de Poisson y $\text{Im } a^* \supseteq \text{Im } a'^*$, entonces es compatible con π' .

El procedimiento es, en realidad, sistemático...

Proposición

Sea M una variedad de Poisson bianclada. Escogemos

- $S \subseteq M$ una subvariedad regular.
- \mathcal{F} la foliación integral de $A(\ker A')$.
- \mathcal{H} una foliación en $E^*|_S$.

Bajo algunas condiciones técnicas, el haz de anclas duales A_λ^* se proyecta a $E^*|_S/\mathcal{H}$, y el bivector π definido en $M_{\text{red}} = S/\mathcal{F}$ por

$$\pi^\sharp(\varphi) = \pi'^\sharp(\psi), \quad a^*\varphi = a'^*\psi$$

está bien definido y es **cuasi-Poisson**. Si es de Poisson y $\text{Im } a^* \supseteq \text{Im } a'^*$, entonces es compatible con π' .

El procedimiento es, en realidad, sistemático...

Proposición

Sea M una variedad de Poisson bianclada. Escogemos

- $S \subseteq M$ una subvariedad regular.
- \mathcal{F} la foliación integral de $A(\ker A')$.
- \mathcal{H} una foliación en $E^*|_S$.

Bajo algunas condiciones técnicas, el haz de anclas duales A_λ^* se proyecta a $E^*|_S/\mathcal{H}$, y el bivector π definido en $M_{\text{red}} = S/\mathcal{F}$ por

$$\pi^\sharp(\varphi) = \pi'^\sharp(\psi), \quad a^*\varphi = a'^*\psi$$

está bien definido y es **cuasi-Poisson**. Si es de Poisson y $\text{Im } a^* \supseteq \text{Im } a'^*$, entonces es compatible con π' .

El procedimiento es, en realidad, sistemático...

Proposición






Sea M una variedad de Poisson bianclada. Escogemos

- $S \subseteq M$ una subvariedad regular.
- \mathcal{F} la foliación integral de $A(\ker A')$.
- \mathcal{H} una foliación en $E^*|_S$.

Bajo algunas condiciones técnicas, el haz de anclas duales A_λ^* se proyecta a $E^*|_S/\mathcal{H}$, y el bivector π definido en $M_{\text{red}} = S/\mathcal{F}$ por

$$\pi^\sharp(\varphi) = \pi'^\sharp(\psi), \quad a^*\varphi = a'^*\psi$$

está bien definido y es **cuasi-Poisson**. Si es de Poisson y $\text{Im } a^* \supseteq \text{Im } a'^*$, entonces es compatible con π' .

-  FLASCHKA, H. (1974). The Toda lattice. II. Existence of integrals. *Physical Review B*, 9(4), 1974.
-  MAGRI, F., CASATI, P., FALQUI, G., & PEDRONI, M. (2004). Eight lectures on integrable systems. *Integrability of nonlinear systems*, 209-250.
-  MARSDEN, J. E., & RATIU, T. (1986). Reduction of Poisson manifolds. *Letters in mathematical Physics*, 11(2), 161-169.
-  MEUCCI, A. (2000). Compatible Lie algebroids and the periodic Toda lattice. *Journal of Geometry and Physics*, 35(4), 273-287.
-  TODA, M. (1970). Waves in nonlinear lattice. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 45, 174-200.

Muchas gracias.