

Introducción a la teoría del invariante de Hopf

Trabajo de Fin de Grado

Samuel M. A. Luque Astorga

10 de julio de 2024

Universidad Complutense de Madrid

Departamento de Álgebra, Geometría y Topología

Supervisor: Jesús María Ruiz Sancho



1. Introducción y resumen
2. El invariante es un número entero
3. Fibraciones de Hopf

Introducción y resumen

- Hopf, 1930's: **invariante de homotopía** para aplicaciones entre esferas,

$$f : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m \rightsquigarrow h(f) \in \mathbb{Z}.$$

Análogo al **grado de Brouwer** para aplicaciones $M^m \rightarrow N^m$.

- Whitney, 1947: **fórmula integral** (nuestro punto de vista).
- Adams, 1960: solo existen aplicaciones con $h = 1$ para $m = 2, 4, 8$, con consecuencias muy importantes.
- Otras aplicaciones:
 - Cálculo de **grupos de homotopía** ($\pi_{2m-1}(\mathbb{S}^m)$).
 - Estudio de campos vectoriales en **física**.

Introducción

- Hopf, 1930's: **invariante de homotopía** para aplicaciones entre esferas,

$$f : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m \rightsquigarrow h(f) \in \mathbb{Z}.$$

Análogo al **grado de Brouwer** para aplicaciones $M^m \rightarrow N^m$.

- Whitney, 1947: **fórmula integral** (nuestro punto de vista).
- Adams, 1960: solo existen aplicaciones con $h = 1$ para $m = 2, 4, 8$, con consecuencias muy importantes.
- Otras aplicaciones:
 - Cálculo de **grupos de homotopía** ($\pi_{2m-1}(\mathbb{S}^m)$).
 - Estudio de campos vectoriales en **física**.

Introducción

- Hopf, 1930's: **invariante de homotopía** para aplicaciones entre esferas,

$$f : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m \rightsquigarrow h(f) \in \mathbb{Z}.$$

Análogo al **grado de Brouwer** para aplicaciones $M^m \rightarrow N^m$.

- Whitney, 1947: **fórmula integral** (nuestro punto de vista).
- Adams, 1960: solo existen aplicaciones con $h = 1$ para $m = 2, 4, 8$, con consecuencias muy importantes.
- Otras aplicaciones:
 - Cálculo de **grupos de homotopía** ($\pi_{2m-1}(\mathbb{S}^m)$).
 - Estudio de campos vectoriales en **física**.

- Hopf, 1930's: **invariante de homotopía** para aplicaciones entre esferas,

$$f : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m \rightsquigarrow h(f) \in \mathbb{Z}.$$

Análogo al **grado de Brouwer** para aplicaciones $M^m \rightarrow N^m$.

- Whitney, 1947: **fórmula integral** (nuestro punto de vista).
- Adams, 1960: solo existen aplicaciones con $h = 1$ para $m = 2, 4, 8$, con consecuencias muy importantes.
- Otras aplicaciones:
 - Cálculo de **grupos de homotopía** ($\pi_{2m-1}(\mathbb{S}^m)$).
 - Estudio de campos vectoriales en **física**.

Introducción

- Hopf, 1930's: **invariante de homotopía** para aplicaciones entre esferas,

$$f : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m \rightsquigarrow h(f) \in \mathbb{Z}.$$

Análogo al **grado de Brouwer** para aplicaciones $M^m \rightarrow N^m$.

- Whitney, 1947: **fórmula integral** (nuestro punto de vista).
- Adams, 1960: solo existen aplicaciones con $h = 1$ para $m = 2, 4, 8$, con consecuencias muy importantes.
- Otras aplicaciones:
 - Cálculo de **grupos de homotopía** ($\pi_{2m-1}(\mathbb{S}^m)$).
 - Estudio de campos vectoriales en **física**.

Resumen del trabajo (cuerpo)

1. Preliminares: variedades diferenciables, regularidad, homotopía, integración y cohomología.
2. Grado de Brouwer-Kronecker mediante integración.
3. Invariante de Hopf mediante integración.
4. **El invariante de Hopf es un número entero.**
5. Disgresión: definición mediante el número de enlace.

Resumen del trabajo (cuerpo)

1. Preliminares: variedades diferenciables, regularidad, homotopía, integración y cohomología.
2. Grado de Brouwer-Kronecker mediante integración.
3. Invariante de Hopf mediante integración.
4. **El invariante de Hopf es un número entero.**
5. Disgresión: definición mediante el número de enlace.

Resumen del trabajo (cuerpo)

1. Preliminares: variedades diferenciables, regularidad, homotopía, integración y cohomología.
2. Grado de Brouwer-Kronecker mediante integración.
3. Invariante de Hopf mediante integración.
4. El invariante de Hopf es un número entero.
5. Disgresión: definición mediante el número de enlace.

Resumen del trabajo (cuerpo)

1. Preliminares: variedades diferenciables, regularidad, homotopía, integración y cohomología.
2. Grado de Brouwer-Kronecker mediante integración.
3. Invariante de Hopf mediante integración.
4. **El invariante de Hopf es un número entero.**
5. Disgresión: definición mediante el número de enlace.

Resumen del trabajo (cuerpo)

1. Preliminares: variedades diferenciables, regularidad, homotopía, integración y cohomología.
2. Grado de Brouwer-Kronecker mediante integración.
3. Invariante de Hopf mediante integración.
4. **El invariante de Hopf es un número entero.**
5. Disgresión: definición mediante el número de enlace.

6. Aplicaciones de la teoría desarrollada:

- Grupos de **cohomotopía** $[M, \mathbb{S}^k]$ (en particular, $\pi_p(\mathbb{S}^k)$).

Teorema de Hopf: $[M, \mathbb{S}^m] \stackrel{\text{deg}}{\simeq} \mathbb{Z}$.

- Grupos de **homotopía** $\pi_{2m-1}(\mathbb{S}^m)$. Son infinitos para m par.
- **Fibraciones de Hopf**. La fibración de Hopf compleja induce isomorfismos $\pi_n(\mathbb{S}^3) \simeq \pi_n(\mathbb{S}^2)$, $n \geq 3$.
- En concreto, el invariante de Hopf es un isomorfismo $\pi_3(\mathbb{S}^3) \stackrel{h}{\simeq} \pi_3(\mathbb{S}^2)$.

6. Aplicaciones de la teoría desarrollada:

- Grupos de **cohomotopía** $[M, \mathbb{S}^k]$ (en particular, $\pi_p(\mathbb{S}^k)$).
Teorema de Hopf: $[M, \mathbb{S}^m] \stackrel{\text{deg}}{\simeq} \mathbb{Z}$.
- Grupos de **homotopía** $\pi_{2m-1}(\mathbb{S}^m)$. Son infinitos para m par.
- **Fibraciones de Hopf**. La fibración de Hopf compleja induce isomorfismos $\pi_n(\mathbb{S}^3) \simeq \pi_n(\mathbb{S}^2)$, $n \geq 3$.
- En concreto, el invariante de Hopf es un isomorfismo $\pi_3(\mathbb{S}^3) \stackrel{h}{\simeq} \pi_3(\mathbb{S}^2)$.

6. Aplicaciones de la teoría desarrollada:

- Grupos de **cohomotopía** $[M, \mathbb{S}^k]$ (en particular, $\pi_p(\mathbb{S}^k)$).
Teorema de Hopf: $[M, \mathbb{S}^m] \stackrel{\deg}{\simeq} \mathbb{Z}$.
- Grupos de **homotopía** $\pi_{2m-1}(\mathbb{S}^m)$. Son infinitos para m par.
- **Fibraciones de Hopf**. La fibración de Hopf compleja induce isomorfismos $\pi_n(\mathbb{S}^3) \simeq \pi_n(\mathbb{S}^2)$, $n \geq 3$.
- En concreto, el invariante de Hopf es un isomorfismo $\pi_3(\mathbb{S}^3) \stackrel{h}{\simeq} \pi_3(\mathbb{S}^2)$.

6. Aplicaciones de la teoría desarrollada:

- Grupos de **cohomotopía** $[M, \mathbb{S}^k]$ (en particular, $\pi_p(\mathbb{S}^k)$).
Teorema de Hopf: $[M, \mathbb{S}^m] \stackrel{\deg}{\simeq} \mathbb{Z}$.
- Grupos de **homotopía** $\pi_{2m-1}(\mathbb{S}^m)$. Son infinitos para m par.
- **Fibraciones de Hopf**. La fibración de Hopf compleja induce isomorfismos $\pi_n(\mathbb{S}^3) \simeq \pi_n(\mathbb{S}^2)$, $n \geq 3$.
- En concreto, el invariante de Hopf es un isomorfismo $\pi_3(\mathbb{S}^3) \stackrel{h}{\simeq} \pi_3(\mathbb{S}^2)$.

**El invariante es un número
entero**

El invariante de Hopf: generalidades

Definición

Sea $f : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$ diferenciable. Sea ω una m -forma en \mathbb{S}^m con $\int_{\mathbb{S}^m} \omega = 1$. Sea α una primitiva de $f^*\omega$. El **invariante de Hopf** de f es el número

$$h(f) = \int_{\mathbb{S}^{2m-1}} \alpha \wedge d\alpha.$$

Propiedades:

- Es **invariante por homotopía** (\leadsto definición para aplicaciones continuas).
- Si m es impar, $h \equiv 0$.
- Si f es nulhomótopa, $h(f) = 0$.
- Si $\mathbb{S}^{2m-1} \xrightarrow{g} \mathbb{S}^{2m-1} \xrightarrow{f} \mathbb{S}^m$, $h(f \circ g) = h(f) \deg(g)$.

El invariante de Hopf: generalidades

Definición

Sea $f : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$ diferenciable. Sea ω una m -forma en \mathbb{S}^m con $\int_{\mathbb{S}^m} \omega = 1$. Sea α una primitiva de $f^*\omega$. El **invariante de Hopf** de f es el número

$$h(f) = \int_{\mathbb{S}^{2m-1}} \alpha \wedge d\alpha.$$

Propiedades:

- Es **invariante por homotopía** (\leadsto definición para aplicaciones continuas).
- Si m es impar, $h \equiv 0$.
- Si f es nulhomótopa, $h(f) = 0$.
- Si $\mathbb{S}^{2m-1} \xrightarrow{g} \mathbb{S}^{2m-1} \xrightarrow{f} \mathbb{S}^m$, $h(f \circ g) = h(f) \deg(g)$.

El invariante de Hopf: generalidades

Definición

Sea $f : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$ diferenciable. Sea ω una m -forma en \mathbb{S}^m con $\int_{\mathbb{S}^m} \omega = 1$. Sea α una primitiva de $f^*\omega$. El **invariante de Hopf** de f es el número

$$h(f) = \int_{\mathbb{S}^{2m-1}} \alpha \wedge d\alpha.$$

Propiedades:

- Es **invariante por homotopía** (\leadsto definición para aplicaciones continuas).
- Si m es impar, $h \equiv 0$.
- Si f es nulhomótota, $h(f) = 0$.
- Si $\mathbb{S}^{2m-1} \xrightarrow{g} \mathbb{S}^{2m-1} \xrightarrow{f} \mathbb{S}^m$, $h(f \circ g) = h(f) \deg(g)$.

El invariante de Hopf: generalidades

Definición

Sea $f : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$ diferenciable. Sea ω una m -forma en \mathbb{S}^m con $\int_{\mathbb{S}^m} \omega = 1$. Sea α una primitiva de $f^*\omega$. El **invariante de Hopf** de f es el número

$$h(f) = \int_{\mathbb{S}^{2m-1}} \alpha \wedge d\alpha.$$

Propiedades:

- Es **invariante por homotopía** (\leadsto definición para aplicaciones continuas).
- Si m es impar, $h \equiv 0$.
- Si f es nulhomótopa, $h(f) = 0$.
- Si $\mathbb{S}^{2m-1} \xrightarrow{g} \mathbb{S}^{2m-1} \xrightarrow{f} \mathbb{S}^m$, $h(f \circ g) = h(f) \deg(g)$.

El invariante de Hopf: generalidades

Definición

Sea $f : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$ diferenciable. Sea ω una m -forma en \mathbb{S}^m con $\int_{\mathbb{S}^m} \omega = 1$. Sea α una primitiva de $f^*\omega$. El **invariante de Hopf** de f es el número

$$h(f) = \int_{\mathbb{S}^{2m-1}} \alpha \wedge d\alpha.$$

Propiedades:

- Es **invariante por homotopía** (\leadsto definición para aplicaciones continuas).
- Si m es impar, $h \equiv 0$.
- Si f es nulhomótota, $h(f) = 0$.
- Si $\mathbb{S}^{2m-1} \xrightarrow{g} \mathbb{S}^{2m-1} \xrightarrow{f} \mathbb{S}^m$, $h(f \circ g) = h(f) \deg(g)$.

Otra fórmula integral (I)

Lema

Sea $f : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$ diferenciable. Sea ω una m -forma en \mathbb{S}^m con $\int_{\mathbb{S}^m} \omega = 1$. Sea α una primitiva de $f^*\omega$. Sean $a \in \mathbb{S}^m$ un valor regular de f y $M_a = f^{-1}(a)$, orientada según la orientación inducida. Entonces,

$$h(f) = \int_{M_a} \alpha.$$

Demostración. Primero, $\int_{M_a} \alpha = \int_{M_b} \alpha$ para todo b en un entorno de a :

- $R_f = \mathbb{S}^m \setminus f(C_f)$ es abierto, escogemos $a \in U \subset R_f$ ($U \cong \mathbb{R}^n$).
- Para cada $b \in U$, existe un camino diferenciable γ que une a con $b \implies f^{-1}(\gamma)$ subvariedad compacta orientada de dimensión m con borde $M_a \cup M_b$ (o bien \emptyset).
- Aplicando Stokes:

$$\int_{M_a} \alpha - \int_{M_b} \alpha = \int_{f^{-1}(\gamma)} d\alpha = \int_{f^{-1}(\gamma)} f^*\omega = 0.$$

Otra fórmula integral (I)

Lema

Sea $f : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$ diferenciable. Sea ω una m -forma en \mathbb{S}^m con $\int_{\mathbb{S}^m} \omega = 1$. Sea α una primitiva de $f^*\omega$. Sean $a \in \mathbb{S}^m$ un valor regular de f y $M_a = f^{-1}(a)$, orientada según la orientación inducida. Entonces,

$$h(f) = \int_{M_a} \alpha.$$

Demostración. Primero, $\int_{M_a} \alpha = \int_{M_b} \alpha$ para todo b en un entorno de a :

- $R_f = \mathbb{S}^m \setminus f(C_f)$ es abierto, escogemos $a \in U \subset R_f$ ($U \cong \mathbb{R}^n$).
- Para cada $b \in U$, existe un camino diferenciable γ que une a con $b \implies f^{-1}(\gamma)$ subvariedad compacta orientada de dimensión m con borde $M_a \cup M_b$ (o bien \emptyset).
- Aplicando Stokes:

$$\int_{M_a} \alpha - \int_{M_b} \alpha = \int_{f^{-1}(\gamma)} d\alpha = \int_{f^{-1}(\gamma)} f^*\omega = 0.$$

Otra fórmula integral (I)

Lema

Sea $f : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$ diferenciable. Sea ω una m -forma en \mathbb{S}^m con $\int_{\mathbb{S}^m} \omega = 1$. Sea α una primitiva de $f^*\omega$. Sean $a \in \mathbb{S}^m$ un valor regular de f y $M_a = f^{-1}(a)$, orientada según la orientación inducida. Entonces,

$$h(f) = \int_{M_a} \alpha.$$

Demostración. Primero, $\int_{M_a} \alpha = \int_{M_b} \alpha$ para todo b en un entorno de a :

- $R_f = \mathbb{S}^m \setminus f(C_f)$ es abierto, escogemos $a \in U \subset R_f$ ($U \equiv \mathbb{R}^n$).
- Para cada $b \in U$, existe un camino diferenciable γ que une a con $b \implies f^{-1}(\gamma)$ subvariedad compacta orientada de dimensión m con borde $M_a \cup M_b$ (o bien \emptyset).
- Aplicando Stokes:

$$\int_{M_a} \alpha - \int_{M_b} \alpha = \int_{f^{-1}(\gamma)} d\alpha = \int_{f^{-1}(\gamma)} f^*\omega = 0.$$

Otra fórmula integral (I)

Lema

Sea $f : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$ diferenciable. Sea ω una m -forma en \mathbb{S}^m con $\int_{\mathbb{S}^m} \omega = 1$. Sea α una primitiva de $f^*\omega$. Sean $a \in \mathbb{S}^m$ un valor regular de f y $M_a = f^{-1}(a)$, orientada según la orientación inducida. Entonces,

$$h(f) = \int_{M_a} \alpha.$$

Demostración. Primero, $\int_{M_a} \alpha = \int_{M_b} \alpha$ para todo b en un entorno de a :

- $R_f = \mathbb{S}^m \setminus f(C_f)$ es abierto, escogemos $a \in U \subset R_f$ ($U \equiv \mathbb{R}^n$).
- Para cada $b \in U$, existe un camino diferenciable γ que une a con $b \implies f^{-1}(\gamma)$ subvariedad compacta orientada de dimensión m con borde $M_a \cup M_b$ (o bien \emptyset).
- Aplicando Stokes:

$$\int_{M_a} \alpha - \int_{M_b} \alpha = \int_{f^{-1}(\gamma)} d\alpha = \int_{f^{-1}(\gamma)} f^*\omega = 0.$$

Otra fórmula integral (I)

Lema

Sea $f : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$ diferenciable. Sea ω una m -forma en \mathbb{S}^m con $\int_{\mathbb{S}^m} \omega = 1$. Sea α una primitiva de $f^*\omega$. Sean $a \in \mathbb{S}^m$ un valor regular de f y $M_a = f^{-1}(a)$, orientada según la orientación inducida. Entonces,

$$h(f) = \int_{M_a} \alpha.$$

Demostración. Primero, $\int_{M_a} \alpha = \int_{M_b} \alpha$ para todo b en un entorno de a :

- $R_f = \mathbb{S}^m \setminus f(C_f)$ es abierto, escogemos $a \in U \subset R_f$ ($U \equiv \mathbb{R}^n$).
- Para cada $b \in U$, existe un camino diferenciable γ que une a con $b \implies f^{-1}(\gamma)$ subvariedad compacta orientada de dimensión m con borde $M_a \cup M_b$ (o bien \emptyset).
- Aplicando Stokes:

$$\int_{M_a} \alpha - \int_{M_b} \alpha = \int_{f^{-1}(\gamma)} d\alpha = \int_{f^{-1}(\gamma)} f^*\omega = 0.$$

Otra fórmula integral (I)

Lema

Sea $f : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$ diferenciable. Sea ω una m -forma en \mathbb{S}^m con $\int_{\mathbb{S}^m} \omega = 1$. Sea α una primitiva de $f^*\omega$. Sean $a \in \mathbb{S}^m$ un valor regular de f y $M_a = f^{-1}(a)$, orientada según la orientación inducida. Entonces,

$$h(f) = \int_{M_a} \alpha.$$

Demostración. Primero, $\int_{M_a} \alpha = \int_{M_b} \alpha$ para todo b en un entorno de a :

- $R_f = \mathbb{S}^m \setminus f(C_f)$ es abierto, escogemos $a \in U \subset R_f$ ($U \equiv \mathbb{R}^n$).
- Para cada $b \in U$, existe un camino diferenciable γ que une a con $b \implies f^{-1}(\gamma)$ subvariedad compacta orientada de dimensión m con borde $M_a \cup M_b$ (o bien \emptyset).
- Aplicando Stokes:

$$\int_{M_a} \alpha - \int_{M_b} \alpha = \int_{f^{-1}(\gamma)} d\alpha = \int_{f^{-1}(\gamma)} f^*\omega = 0.$$

Otra fórmula integral (II)

Fibración de Ehresmann aplicada a $f|_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \rightarrow U$:

$$\begin{array}{ccc} M_a \times U & \xrightarrow[\approx]{h} & f^{-1}(U) \\ & \searrow \pi_U \quad \swarrow f & \\ & U & \end{array}$$

Ahora, supongamos que $\text{supp}(\omega) \subseteq U \implies \text{supp}(\alpha \wedge d\alpha) \subseteq f^{-1}(U)$. Así:

$$\begin{aligned} h(f) &= \int_{f^{-1}(U)} \alpha \wedge d\alpha = \int_{M_a \times U} h^* \alpha \wedge h^* d\alpha = \int_{M_a \times U} h^* \alpha \wedge h^* f^* \omega \\ &= \int_{M_a \times U} h^* \alpha \wedge \pi_U^* \omega = \int_U \left(\int_{M_a \times \{\bullet\}} h^* \alpha|_{M_a \times \{\bullet\}} \right) \omega \\ &= \int_U \left(\int_{M_\bullet} \alpha \right) \omega = \left(\int_{M_a} \alpha \right) \underbrace{\left(\int_U \omega \right)}_{=1} = \int_{M_a} \alpha. \end{aligned}$$

Otra fórmula integral (II)

Fibración de Ehresmann aplicada a $f|_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \rightarrow U$:

$$\begin{array}{ccc} M_a \times U & \xrightarrow[\approx]{h} & f^{-1}(U) \\ & \searrow \pi_U \quad \swarrow f & \\ & U & \end{array}$$

Ahora, supongamos que $\text{supp}(\omega) \subseteq U \implies \text{supp}(\alpha \wedge d\alpha) \subseteq f^{-1}(U)$. Así:

$$\begin{aligned} h(f) &= \int_{f^{-1}(U)} \alpha \wedge d\alpha = \int_{M_a \times U} h^* \alpha \wedge h^* d\alpha = \int_{M_a \times U} h^* \alpha \wedge h^* f^* \omega \\ &= \int_{M_a \times U} h^* \alpha \wedge \pi_U^* \omega = \int_U \left(\int_{M_a \times \{\bullet\}} h^* \alpha|_{M_a \times \{\bullet\}} \right) \omega \\ &= \int_U \left(\int_{M_\bullet} \alpha \right) \omega = \left(\int_{M_a} \alpha \right) \underbrace{\left(\int_U \omega \right)}_{=1} = \int_{M_a} \alpha. \end{aligned}$$

Otra fórmula integral (II)

Fibración de Ehresmann aplicada a $f|_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \rightarrow U$:

$$\begin{array}{ccc} M_a \times U & \xrightarrow[\approx]{h} & f^{-1}(U) \\ & \searrow \pi_U \quad \swarrow f & \\ & U & \end{array}$$

Ahora, supongamos que $\text{supp}(\omega) \subseteq U \implies \text{supp}(\alpha \wedge d\alpha) \subseteq f^{-1}(U)$. Así:

$$\begin{aligned} h(f) &= \int_{f^{-1}(U)} \alpha \wedge d\alpha = \int_{M_a \times U} h^* \alpha \wedge h^* d\alpha = \int_{M_a \times U} h^* \alpha \wedge h^* f^* \omega \\ &= \int_{M_a \times U} h^* \alpha \wedge \pi_U^* \omega = \int_U \left(\int_{M_a \times \{\bullet\}} h^* \alpha|_{M_a \times \{\bullet\}} \right) \omega \\ &= \int_U \left(\int_{M_\bullet} \alpha \right) \omega = \left(\int_{M_a} \alpha \right) \underbrace{\left(\int_U \omega \right)}_{=1} = \int_{M_a} \alpha. \end{aligned}$$

Otra fórmula integral (III)

Finalmente, si $\text{supp}(\omega) \not\subseteq U$, tomamos ω' con soporte en U e integral 1
 $\implies \omega' = \omega + d\beta$.

$\alpha' = \alpha + f^*\beta$ es una primitiva de $f^*\omega'$. Así:

$$h(f) = \int_{M_a} \alpha' = \int_{M_a} \alpha + \int_{M_a} f^*\beta = \int_{M_a} \alpha,$$

pues, para todo $x \in M_a$, $(f^*\beta)_x$ es nula al evaluarla sobre vectores de $T_x M_a = \ker d_x f$. □

Otra fórmula integral (III)

Finalmente, si $\text{supp}(\omega) \not\subseteq U$, tomamos ω' con soporte en U e integral 1
 $\implies \omega' = \omega + d\beta$.

$\alpha' = \alpha + f^*\beta$ es una primitiva de $f^*\omega'$. Así:

$$h(f) = \int_{M_a} \alpha' = \int_{M_a} \alpha + \int_{M_a} f^*\beta = \int_{M_a} \alpha,$$

pues, para todo $x \in M_a$, $(f^*\beta)_x$ es nula al evaluarla sobre vectores de $T_x M_a = \ker d_x f$. □

El invariante es un número entero

Proposición

El invariante de Hopf de cualquier $f : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$ es un número entero.

Demostración. Sean a un valor regular y $M_a = f^{-1}(a)$. Tomamos $c \notin M_a$. La homotopía

$$H : [0, 1] \times M_a \rightarrow \mathbb{S}^{2m-1}, \quad (t, x) \mapsto \frac{(1-t)x + t(-c)}{\|(1-t)x + t(-c)\|}$$

une $H_0 : M_a \hookrightarrow \mathbb{S}^{2m-1}$ con $H_1 \equiv -c$. Además, $H_0^* \equiv |_{M_a}$, $H_1^* \equiv 0$.

Usando Stokes y escribiendo $N = [0, 1] \times M_a$,

$$\int_{M_a} \alpha = \int_{M_a} H_0^* \alpha - \int_{M_a} H_1^* \alpha = \int_{\partial N} H^* \alpha = \int_N H^* d\alpha = \int_N (f \circ H)^* \omega.$$

El invariante es un número entero

Proposición

El invariante de Hopf de cualquier $f : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$ es un número entero.

Demostración. Sean a un valor regular y $M_a = f^{-1}(a)$. Tomamos $c \notin M_a$. La homotopía

$$H : [0, 1] \times M_a \rightarrow \mathbb{S}^{2m-1}, \quad (t, x) \mapsto \frac{(1-t)x + t(-c)}{\|(1-t)x + t(-c)\|}$$

une $H_0 : M_a \hookrightarrow \mathbb{S}^{2m-1}$ con $H_1 \equiv -c$. Además, $H_0^* \equiv |_{M_a}$, $H_1^* \equiv 0$.

Usando Stokes y escribiendo $N = [0, 1] \times M_a$,

$$\int_{M_a} \alpha = \int_{M_a} H_0^* \alpha - \int_{M_a} H_1^* \alpha = \int_{\partial N} H^* \alpha = \int_N H^* d\alpha = \int_N (f \circ H)^* \omega.$$

El invariante es un número entero

Proposición

El invariante de Hopf de cualquier $f : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$ es un número entero.

Demostración. Sean a un valor regular y $M_a = f^{-1}(a)$. Tomamos $c \notin M_a$. La homotopía

$$H : [0, 1] \times M_a \rightarrow \mathbb{S}^{2m-1}, \quad (t, x) \mapsto \frac{(1-t)x + t(-c)}{\|(1-t)x + t(-c)\|}$$

une $H_0 : M_a \hookrightarrow \mathbb{S}^{2m-1}$ con $H_1 \equiv -c$. Además, $H_0^* \equiv |_{M_a}$, $H_1^* \equiv 0$.

Usando Stokes y escribiendo $N = [0, 1] \times M_a$,

$$\int_{M_a} \alpha = \int_{M_a} H_0^* \alpha - \int_{M_a} H_1^* \alpha = \int_{\partial N} H^* \alpha = \int_N H^* d\alpha = \int_N (f \circ H)^* \omega.$$

El invariante es un número entero

Proposición

El invariante de Hopf de cualquier $f : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$ es un número entero.

Demostración. Sean a un valor regular y $M_a = f^{-1}(a)$. Tomamos $c \notin M_a$. La homotopía

$$H : [0, 1] \times M_a \rightarrow \mathbb{S}^{2m-1}, \quad (t, x) \mapsto \frac{(1-t)x + t(-c)}{\|(1-t)x + t(-c)\|}$$

une $H_0 : M_a \hookrightarrow \mathbb{S}^{2m-1}$ con $H_1 \equiv -c$. Además, $H_0^* \equiv |_{M_a}$, $H_1^* \equiv 0$.

Usando Stokes y escribiendo $N = [0, 1] \times M_a$,

$$\int_{M_a} \alpha = \int_{M_a} H_0^* \alpha - \int_{M_a} H_1^* \alpha = \int_{\partial N} H^* \alpha = \int_N H^* d\alpha = \int_N (f \circ H)^* \omega.$$

El invariante es un número entero

Proposición

El invariante de Hopf de cualquier $f : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$ es un número entero.

Demostración. Sean a un valor regular y $M_a = f^{-1}(a)$. Tomamos $c \notin M_a$. La homotopía

$$H : [0, 1] \times M_a \rightarrow \mathbb{S}^{2m-1}, \quad (t, x) \mapsto \frac{(1-t)x + t(-c)}{\|(1-t)x + t(-c)\|}$$

une $H_0 : M_a \hookrightarrow \mathbb{S}^{2m-1}$ con $H_1 \equiv -c$. Además, $H_0^* \equiv |_{M_a}$, $H_1^* \equiv 0$.

Usando Stokes y escribiendo $N = [0, 1] \times M_a$,

$$\int_{M_a} \alpha = \int_{M_a} H_0^* \alpha - \int_{M_a} H_1^* \alpha = \int_{\partial N} H^* \alpha = \int_N H^* d\alpha = \int_N (f \circ H)^* \omega.$$

El invariante es un número entero (II)

Para concluir:

- $f \circ H : N \rightarrow \mathbb{S}^m$ entre variedades compactas de la misma dimensión.
- T. Sard: existe $p \in R_f \setminus \{a, f(-c)\}$
 $\implies (f \circ H)^{-1}(p) = \{q_1, \dots, q_r\}$ (¡y $q_k \notin \partial N$ por la elección de p !)
- De hecho, existen $W_1, \dots, W_r \subseteq N$ abiertos disjuntos y W entorno abierto de p tales que $f^{-1}(W) = \bigcup_{k=1}^r W_k$ y $(f \circ H)|_{W_k} : W_k \approx W$.
- Si tomamos ω con soporte en W , $\text{supp}((f \circ H)^*\omega) \subseteq \bigcup_k W_k$, y

$$\begin{aligned} \int_N (f \circ H)^*\omega &= \int_{(f \circ H)^{-1}(W)} (f \circ H)^*\omega = \sum_{k=1}^r \int_{W_k} (f \circ H)^*\omega \\ &= \sum_{k=1}^r \left(\pm \int_W \omega \right) = \sum_{k=1}^r (\pm 1). \end{aligned}$$

□

El invariante es un número entero (II)

Para concluir:

- $f \circ H : N \rightarrow \mathbb{S}^m$ entre variedades compactas de la misma dimensión.
- T. Sard: existe $p \in \mathbb{R}_f \setminus \{a, f(-c)\}$
 $\implies (f \circ H)^{-1}(p) = \{q_1, \dots, q_r\}$ (¡y $q_k \notin \partial N$ por la elección de p !)
- De hecho, existen $W_1, \dots, W_r \subseteq N$ abiertos disjuntos y W entorno abierto de p tales que $f^{-1}(W) = \bigcup_{k=1}^r W_k$ y $(f \circ H)|_{W_k} : W_k \approx W$.
- Si tomamos ω con soporte en W , $\text{supp}((f \circ H)^*\omega) \subseteq \bigcup_k W_k$, y

$$\begin{aligned}\int_N (f \circ H)^*\omega &= \int_{(f \circ H)^{-1}(W)} (f \circ H)^*\omega = \sum_{k=1}^r \int_{W_k} (f \circ H)^*\omega \\ &= \sum_{k=1}^r \left(\pm \int_W \omega \right) = \sum_{k=1}^r (\pm 1).\end{aligned}$$

□

El invariante es un número entero (II)

Para concluir:

- $f \circ H : N \rightarrow \mathbb{S}^m$ entre variedades compactas de la misma dimensión.
- T. Sard: existe $p \in \mathbb{R}_f \setminus \{a, f(-c)\}$
 $\implies (f \circ H)^{-1}(p) = \{q_1, \dots, q_r\}$ (¡y $q_k \notin \partial N$ por la elección de p !)
- De hecho, existen $W_1, \dots, W_r \subseteq N$ abiertos disjuntos y W entorno abierto de p tales que $f^{-1}(W) = \bigcup_{k=1}^r W_k$ y $(f \circ H)|_{W_k} : W_k \approx W$.
- Si tomamos ω con soporte en W , $\text{supp}((f \circ H)^*\omega) \subseteq \bigcup_k W_k$, y

$$\begin{aligned}\int_N (f \circ H)^*\omega &= \int_{(f \circ H)^{-1}(W)} (f \circ H)^*\omega = \sum_{k=1}^r \int_{W_k} (f \circ H)^*\omega \\ &= \sum_{k=1}^r \left(\pm \int_W \omega \right) = \sum_{k=1}^r (\pm 1).\end{aligned}$$

□

El invariante es un número entero (II)

Para concluir:

- $f \circ H : N \rightarrow \mathbb{S}^m$ entre variedades compactas de la misma dimensión.
- T. Sard: existe $p \in \mathbb{R}_f \setminus \{a, f(-c)\}$
 $\implies (f \circ H)^{-1}(p) = \{q_1, \dots, q_r\}$ (¡y $q_k \notin \partial N$ por la elección de p !)
- De hecho, existen $W_1, \dots, W_r \subseteq N$ abiertos disjuntos y W entorno abierto de p tales que $f^{-1}(W) = \bigcup_{k=1}^r W_k$ y $(f \circ H)|_{W_k} : W_k \approx W$.
- Si tomamos ω con soporte en W , $\text{supp}((f \circ H)^*\omega) \subseteq \bigcup_k W_k$, y

$$\begin{aligned}\int_N (f \circ H)^*\omega &= \int_{(f \circ H)^{-1}(W)} (f \circ H)^*\omega = \sum_{k=1}^r \int_{W_k} (f \circ H)^*\omega \\ &= \sum_{k=1}^r \left(\pm \int_W \omega \right) = \sum_{k=1}^r (\pm 1).\end{aligned}$$

□

El invariante es un número entero (II)

Para concluir:

- $f \circ H : N \rightarrow \mathbb{S}^m$ entre variedades compactas de la misma dimensión.
- T. Sard: existe $p \in R_f \setminus \{a, f(-c)\}$
 $\implies (f \circ H)^{-1}(p) = \{q_1, \dots, q_r\}$ (¡y $q_k \notin \partial N$ por la elección de p !)
- De hecho, existen $W_1, \dots, W_r \subseteq N$ abiertos disjuntos y W entorno abierto de p tales que $f^{-1}(W) = \bigcup_{k=1}^r W_k$ y $(f \circ H)|_{W_k} : W_k \approx W$.
- Si tomamos ω con soporte en W , $\text{supp}((f \circ H)^*\omega) \subseteq \bigcup_k W_k$, y

$$\begin{aligned} \int_N (f \circ H)^*\omega &= \int_{(f \circ H)^{-1}(W)} (f \circ H)^*\omega = \sum_{k=1}^r \int_{W_k} (f \circ H)^*\omega \\ &= \sum_{k=1}^r \left(\pm \int_W \omega \right) = \sum_{k=1}^r (\pm 1). \end{aligned}$$

□

El invariante es un número entero (II)

Para concluir:

- $f \circ H : N \rightarrow \mathbb{S}^m$ entre variedades compactas de la misma dimensión.
- T. Sard: existe $p \in R_f \setminus \{a, f(-c)\}$
 $\implies (f \circ H)^{-1}(p) = \{q_1, \dots, q_r\}$ (¡y $q_k \notin \partial N$ por la elección de p !)
- De hecho, existen $W_1, \dots, W_r \subseteq N$ abiertos disjuntos y W entorno abierto de p tales que $f^{-1}(W) = \bigcup_{k=1}^r W_k$ y $(f \circ H)|_{W_k} : W_k \approx W$.
- Si tomamos ω con soporte en W , $\text{supp}((f \circ H)^*\omega) \subseteq \bigcup_k W_k$, y

$$\begin{aligned} \int_N (f \circ H)^*\omega &= \int_{(f \circ H)^{-1}(W)} (f \circ H)^*\omega = \sum_{k=1}^r \int_{W_k} (f \circ H)^*\omega \\ &= \sum_{k=1}^r \left(\pm \int_W \omega \right) = \sum_{k=1}^r (\pm 1). \end{aligned}$$

□

Fibraciones de Hopf

Las fibraciones de Hopf

Sea $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$. $\mathbb{F}^2 \equiv \mathbb{R}^{2m}$, $m = 1, 2, 4, 8$.

Recta proyectiva \mathbb{FP}^1 : cociente de $\mathbb{F}^2 \setminus \{0\}$ por la relación de equivalencia

$$(z_0, z_1) \sim (w_0, w_1) \iff \begin{cases} z_1^{-1} z_0 = w_1^{-1} w_0, & \text{si } z_1, w_1 \neq 0, \\ z_1 = w_1 = 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Si equipamos \mathbb{FP}^1 con la topología cociente, $\mathbb{FP}^1 \equiv \mathbb{F}_\infty \equiv \mathbb{S}^m$.

Fibraciones de Hopf: el paso al cociente $\mathbb{F}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{FP}^1$ restringido a \mathbb{S}^{2m-1} :

$$p|_{\mathbb{S}^{2m-1}} : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{FP}^1 \equiv \mathbb{S}^m,$$

visto como una aplicación $f : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$ (sigue siendo sobreyectiva).

¡Tienen invariante de Hopf 1!

Las fibraciones de Hopf

Sea $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$. $\mathbb{F}^2 \equiv \mathbb{R}^{2m}$, $m = 1, 2, 4, 8$.

Recta proyectiva \mathbb{FP}^1 : cociente de $\mathbb{F}^2 \setminus \{0\}$ por la relación de equivalencia

$$(z_0, z_1) \sim (w_0, w_1) \iff \begin{cases} z_1^{-1} z_0 = w_1^{-1} w_0, & \text{si } z_1, w_1 \neq 0, \\ z_1 = w_1 = 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Si equipamos \mathbb{FP}^1 con la topología cociente, $\mathbb{FP}^1 \equiv \mathbb{F}_\infty \equiv \mathbb{S}^m$.

Fibraciones de Hopf: el paso al cociente $\mathbb{F}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{FP}^1$ restringido a \mathbb{S}^{2m-1} :

$$p|_{\mathbb{S}^{2m-1}} : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{FP}^1 \equiv \mathbb{S}^m,$$

visto como una aplicación $f : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$ (sigue siendo sobreyectiva).

¡Tienen invariante de Hopf 1!

Las fibraciones de Hopf

Sea $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$. $\mathbb{F}^2 \equiv \mathbb{R}^{2m}$, $m = 1, 2, 4, 8$.

Recta proyectiva \mathbb{FP}^1 : cociente de $\mathbb{F}^2 \setminus \{0\}$ por la relación de equivalencia

$$(z_0, z_1) \sim (w_0, w_1) \iff \begin{cases} z_1^{-1} z_0 = w_1^{-1} w_0, & \text{si } z_1, w_1 \neq 0, \\ z_1 = w_1 = 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Si equipamos \mathbb{FP}^1 con la topología cociente, $\mathbb{FP}^1 \equiv \mathbb{F}_\infty \equiv \mathbb{S}^m$.

Fibraciones de Hopf: el paso al cociente $\mathbb{F}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{FP}^1$ restringido a \mathbb{S}^{2m-1} :

$$p|_{\mathbb{S}^{2m-1}} : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{FP}^1 \equiv \mathbb{S}^m,$$

visto como una aplicación $f : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$ (sigue siendo sobreyectiva).

¡Tienen invariante de Hopf 1!

Las fibraciones de Hopf

Sea $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$. $\mathbb{F}^2 \equiv \mathbb{R}^{2m}$, $m = 1, 2, 4, 8$.

Recta proyectiva \mathbb{FP}^1 : cociente de $\mathbb{F}^2 \setminus \{0\}$ por la relación de equivalencia

$$(z_0, z_1) \sim (w_0, w_1) \iff \begin{cases} z_1^{-1} z_0 = w_1^{-1} w_0, & \text{si } z_1, w_1 \neq 0, \\ z_1 = w_1 = 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Si equipamos \mathbb{FP}^1 con la topología cociente, $\mathbb{FP}^1 \equiv \mathbb{F}_\infty \equiv \mathbb{S}^m$.

Fibraciones de Hopf: el paso al cociente $\mathbb{F}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{FP}^1$ restringido a \mathbb{S}^{2m-1} :

$$p|_{\mathbb{S}^{2m-1}} : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{FP}^1 \equiv \mathbb{S}^m,$$

visto como una aplicación $f : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$ (sigue siendo sobreyectiva).

¡Tienen invariante de Hopf 1!

Las fibraciones de Hopf

Sea $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$. $\mathbb{F}^2 \equiv \mathbb{R}^{2m}$, $m = 1, 2, 4, 8$.

Recta proyectiva \mathbb{FP}^1 : cociente de $\mathbb{F}^2 \setminus \{0\}$ por la relación de equivalencia

$$(z_0, z_1) \sim (w_0, w_1) \iff \begin{cases} z_1^{-1} z_0 = w_1^{-1} w_0, & \text{si } z_1, w_1 \neq 0, \\ z_1 = w_1 = 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Si equipamos \mathbb{FP}^1 con la topología cociente, $\mathbb{FP}^1 \equiv \mathbb{F}_\infty \equiv \mathbb{S}^m$.

Fibraciones de Hopf: el paso al cociente $\mathbb{F}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{FP}^1$ restringido a \mathbb{S}^{2m-1} :

$$p|_{\mathbb{S}^{2m-1}} : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{FP}^1 \equiv \mathbb{S}^m,$$

visto como una aplicación $f : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$ (sigue siendo sobreyectiva).

¡Tienen invariante de Hopf 1!

Fibración de Hopf compleja

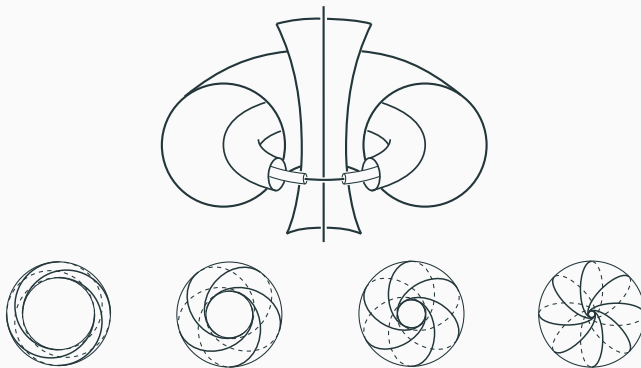





Fig. 1: Imagen mediante proyección estereográfica $\mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de los toros formados por las fibras de la fibración de Hopf compleja $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^3 \rightarrow_f \mathbb{S}^2$ (figura tomada de [Hat], §4.2, ejemplo 4.45).

-  HATCHER, A. (2002). *Algebraic topology*. Cambridge University Press.
-  OUTERELO, E., & RUIZ, J. M. (2009). *Mapping Degree Theory*. American Mathematical Society.
-  WHITNEY, H. (1957). *Geometric integration theory*. Princeton University Press.

Muchas gracias.