赢-输游戏的近似复杂性

陈曦 清华大学

滕尚华* 波士顿大学

Paul Valiant†
MIT

†由NDSEG奖学金支持。

[1]准确的说法请见Lemma 3.1。

摘要

我们进一步了解纳什均衡的算法和结构。具体而言：

- 我们提炼出纳什均衡的复杂性的硬核，表明即使正确计算一 个 对数位的双人输赢游戏的均衡策略，也和一般问题一样难。

- 我们证明以下关于纳什均衡的结构性结果："零和博弈的近似均衡集是凸的 "[1]。

1 简介

*纳什均衡*的概念[18, 19]吸引了许多计算机科学界人士的想象力，因为它在日益增长的在线互动领域有许多应用，而且它有深刻的基本数学结构。随着典型互联网应用的复杂性和规模的增加，有效分析其博弈论属性的问题变得更加突出。人们已经提出了各种算法来计算纳什均衡，使用数学编程的思想[10, 14, 15, 17, 23, 24]。在过去的几年里，在均衡的应用算法方面取得了重大进展[16]，这些算法适用于特殊形式的游戏[21，2，13]。最近有很多关于纳什均衡计算和逼近的复杂性的工作[7, 11, 4, 3, 5, 1, 6, 12, 9, 8, 22]。

直观地说，博弈的复杂性沿着几个轴线增长：参与的玩家数量、每个玩家可选择的数量、指定博弈的报酬的复杂性，以及我们希望计算出的均衡的准确性。然而，在本文中，我们表明，能够计算纳什均衡是一个*全有或全无的*问题。也就是说，如果我们甚至可以粗略地近似于最简单的可想象的游戏的纳什均衡--双人游戏

*部分由美国国家科学基金会资助的CCR-0311430和ITR CCR-0325630支持。

其中任何一方的*结果*要么是 "赢"，要么是 "输"--那么我们就可以按照我们的愿望精确地计算任意游戏的纳什均衡。特别是，我们表明，找到一个对数位数的双赢双输游戏的纳什均衡与一般版本的纳什均衡完全一样难：计算
在任何固定的$r≥2$的情况下，在一般的*r玩家*博弈中，摄取均衡的多项式比特。

考虑到$\Theta(\log n)$位的计算，无论从数值分析还是从实践上看，都具有重要意义。
从理论建模的角度来看。最近，算法领域的重点已经从*精确*算法转向了近似算法，这在很大程度上是因为对于大多数目的来说，近似解几乎和ex act解一样有意义，但也是因为在许多情况下，问题的输入只是近似已知。这些观察结果在博弈论领域可能特别真实，博弈的参数被去掉，以近似地模拟玩家的真实偏好，而纳什均衡则是为了模拟玩家的行动。在实践中，纳什问题的输入和输出可能都不会超过前几位数字的意义。

以前，不同的论文分析了纳什问题的三个 " 硬度轴 "的不同方面的重要性：输入的比特复杂度，玩家的数量，以及期望的输出精度。Abbott, Kane和Valiant表明，输赢的双人游戏和一般的双人游戏一样难[1]。Chen和Deng[4]在Daskalakis、 Goldberg和Papadimitriou[9]的工作基础上表明，双人游戏与r*人*游戏一样难。Chen, Deng和Teng表明，找到精度为$\Theta(\log n)$比特的双人游戏的纳什均衡与一般双人游戏的情况一样难[5]。在这项工作中，我们结合了以前这些减法的最有力的方面，表明寻找双人输赢博弈的近似均衡与一般情况下一样难。为了证明这一点，我们对[1]和[5]的变换进行了组合，并分析了其在近似情况下的稳定性。作为本文的贡献之一，我们建立了一个关于双人零和博弈的近似均衡的凸性结果，与经典结果相类似，即它们的精确均衡形成一个凸的

设置。

2 游戏和纳什均衡

我们介绍一下博弈论中的概念，我们将在本文的其余部分使用这些概念。我们从双人游戏的定义开始。

定义2.1.（双人游戏）*双人游戏由一对大小相同的实值"报酬"或"效用"矩阵（***U***，***V***）定义，其中游戏的进行方式如下：第一和第二游戏者同时独立地分别选择矩阵的一行和一列；第一游戏者重新获得与该行和该列指定的***U***条目相对应的"报酬"，第二游戏者获得与***V***条目相对应的"报酬"。*

在玩这样的游戏时，玩家可以提前挑选某一行或某一列，并以1的概率进行游戏，或者他们可以挑选行或列上的概率分布，当被要求进行游戏时，翻转随机硬币并从这些分布中抽取。我们用一对向量（$\mathbf{x}$，$\mathbf{y}$）来表示一对策略，其中$\mathbf{x}$是行的概率分布，$\mathbf{y}$是列的概率分布。我们将用$\mathbb{P}^n$来表示n维的概率向量集合。

鉴于第一个玩家玩的是策略$\mathbf{x}$，如果第二个玩家玩的是第i列，那么如果我们让V_i表示矩阵$\mathbf{V}$的第i列，第二个玩家将得到的*预期*报酬正好是$\mathbf{x}^T V_i$。更一般地说，我们把向量$\mathbf{x}^T\mathbf{V}$称为第二个玩家玩各列的*激励*向量。因此，如果第二位玩家玩的是策略$\mathbf{y}$，那么他的预期报酬是$\mathbf{x}^T\mathbf{V}\mathbf{y}$。同样地，我们说向量$\mathbf{U}\mathbf{y}$代表第一个玩家的激励，第一个玩家在玩他的策略$\mathbf{x}$时的预期报酬是$\mathbf{x}^T\mathbf{U}\mathbf{y}$。

为了捕捉这种博弈中*合理博弈*的概念，我们有*纳什均衡*的概念，它直观地指出，如果每个玩家的策略相对于另一个玩家的策略是最优的，那么一对（$\mathbf{x}$，$\mathbf{y}$）就处于均衡状态。(请注意，下一个定义在语法上与标准定义不同；我们这样写是为了激励我们使用的近似均衡的概念）。

定义2.2.（纳什均衡）*给定一个双人博弈（***U***，***V***），用U_i表示***U***的第i行，用V_i表示***V***的第i列，如果对于每一对指数，一对策略（*$\mathbf{x}$*，*$\mathbf{y}$*）是一个*纳什均衡。

i, j, $U_i\,\mathbf{y} < U_j\,\mathbf{y} \Rightarrow x_i = 0$ *和* $\mathbf{x}^T V_i < \mathbf{x}^T V_j \Rightarrow y_i = 0$。

著名的纳什定理[18，19]表明，每个双人游戏（**U**，**V**）都有纳什均衡。

寻找其中的一个问题一直是一个令人兴奋和具有挑战性的问题。为了精确计算复杂性，我们自然要正确定义输入大小。在实数的复杂性理论中，每个报酬条目是一个数字。因此，输入大小只是行和列策略数量的两倍。但在离散复杂度设置中，我们可以假设条目是有理的。因此，除了策略的数量之外，一个双人游戏的输入长度还取决于其报酬条目的表示。我们可以通过d和e的二进制表示来表达每个有理数$c=d/e$，并且

因此其长度为$[\log_2 d/ + [\log_2 e/]$。的*输入*大小为矩阵游戏的长度之和就是所有的

其条目。

尽管其最坏情况下的复杂度是指数级的[22]，但用于寻找双矩阵博弈的纳什均衡的经典Lemke-Howson算法[15]可以用来证明任何理性双矩阵博弈的均衡条目都是理性的。此外，均衡的理性表达的长度是输入长度的多项式。

我们将把寻找理性双矩阵博弈的均衡的理性表示的问题称为理性双矩阵。一个输赢博弈在

另一只手是由一对{0，1}矩阵指定的。我们把寻找有理表征的问题表示为

通过WIN-LOSE BIMATRIX的输赢游戏的纳什均衡。

在本文中，我们关注的是*近似*纳什均衡。有几种方法可以定义近似纳什均衡。也许，最常用的近似纳什均衡的定义是下面这个：

定义2.3. (ϵ-近似纳什均衡)
给定一个双人博弈（**U**，**V**）*，我们定义一对策略*（**x**，**y**）*为ϵ-近似*纳什均衡*，如果*∀ **u**∈$\mathbb{P}^n$，**v**∈$\mathbb{P}^n$*，这对策略满足*
$\mathbf{x}^T\mathbf{U}\mathbf{y} \geq \mathbf{u}^T\mathbf{U}\mathbf{y} - \epsilon$ *和* $\mathbf{x}^T\mathbf{V}\mathbf{y} \geq \mathbf{x}^T\mathbf{V}\mathbf{v} - \epsilon$。

为了方便起见，我们使用下面的定义，该定义在[5]中被证明与上述定义等价于多项式因子。

定义2.4.（ϵ-well-SUPPORTED NASH）*给定一个双人博弈*（**U**，**V**）*，我们定义一对策略*（**x**，**y**）*是一个ϵ-well-supported* Nash均衡，*如果对于任何一对指数i，j，我们有*$U_i y < U_j y - \epsilon \Rightarrow x_i = 0$ *和*$xV_i < xV_j - \epsilon \Rightarrow y_i = 0$。

3 凸性定理

[1]的简化方法包括构建一个0-1的 "生成器 "博弈G，其唯一的纳什均衡包括

的向量包含2的幂；然后他们用游戏*G*来表达二进制的任意理性报酬。

在这一节和下一节中，我们对他们的结果进行了扩展，表明这一结果的近似版本甚至对有良好*支持的*纳什均衡也成立。

本节的结果是我们为ϵ良好支持的纳什均衡制定的凸性法则。从标准博弈论中可以看出，在所谓的*零和*博弈中，整个矩阵的总和**U**+**V**=0，纳什均衡是线性程序的解，因此构成一个凸集。我们展示一个

这个结果在近似均衡环境中的相似性。我们在下一节中使用这个结果来帮助描述*G*的近似平衡。关于近似平衡的一般结构，已知的结果很少，我们希望随着这个领域的发展，这个定理将被证明是有用的。

定理3.1（近似凸性）*给定一个零和双矩阵博弈*（**U**，**V**），（**U**，**V**）*的一对ϵ良好支持的纳什均衡的凸组合*

将是$\frac{4}{\delta}\epsilon$*-well-supported Nash equilibrium of* (**U**, **V**)、

其中δ是找到的最小非零权重，作为一个

其中一个均衡的元素，而其他均衡的相应元素的权重为0。

*证明。*假设(**U**, **V**)有两个ϵ良好支持的Nash

平衡，（$\mathbf{r}_1$，$\mathbf{c}_1$）和（$\mathbf{r}_2$，$\mathbf{c}_2$）。在不损失基因的情况下，我们可以把$\mathbf{r}_1$和$\mathbf{r}_2$写成$\mathbf{r}_1$ = [$\mathbf{x}$, $\mathbf{y}_1$, **0**]和$\mathbf{r}_2$ = [**0**, $\mathbf{y}_2$, $\mathbf{z}$]，其中第一块con-由那些只在第一个均衡中发挥的行组成，第二块由那些在两个均衡中发挥的行组成，第三块由那些只在第二个均衡中发挥的行组成。同样地，我们可以将$\mathbf{c}_1$和$\mathbf{c}_2$以块的形式表示为

$\mathbf{c}_1 = [\mathbf{p}, \mathbf{q}_1, \mathbf{0}]$ and $\mathbf{c}_2 = [\mathbf{0}, \mathbf{q}_2, \mathbf{r}]$.请注意，在不丧失一般性的情况下，我们可以忽略那些在任何一个均衡中都没有发挥的行和列。

考虑到这一区块分解，我们将行参与者的报酬矩阵**U**表示为

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{D} & \mathbf{E} & \mathbf{F} \\ \mathbf{G} & \mathbf{H} & \mathbf{I} \end{bmatrix},$$

以下是不等式：

$$\begin{array}{lrcl}
(3.1) & l_1 - \epsilon \leq & \mathbf{Ap} + \mathbf{Bq}_1 & \leq l_1 \\
(3.2) & l_1 - \epsilon \leq & \mathbf{Dp} + \mathbf{Eq}_1 & \leq l_1 \\
(3.3) & & \mathbf{Gp} + \mathbf{Hq}_1 & \leq l_1
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl}
(3.4) & l_2 - \epsilon \leq & \mathbf{Eq}_2 + \mathbf{Fr} & \leq ◆ \\
(3.5) & l_2\ l_2 - \epsilon \leq & \mathbf{Hq}_2 + \mathbf{Ir} & \leq l_2 \\
(3.6) & & \mathbf{Bq}_2 + \mathbf{Cr} & \leq l_2
\end{array}$$

现在考虑表达式$\mathbf{r}\ \mathbf{Uc}_{11} \equiv -\mathbf{r}\ \mathbf{V}\mathbf{c}_{11}$。

我们对此解释如下：在符号变化之前，在行的玩家玩行的*平均*激励等于列的玩家玩列的平均激励，其中平均数分别取自$\mathbf{r}_1$和$\mathbf{c}_1$引起的分布。

由于每个激励都在该玩家的最大激励的ϵ之内，所以平均激励也必须在这些各自的最大激励的ϵ之内，我们的结论是

$$-\max \mathbf{r}_1 \mathbf{V} \leq l_1 \equiv \max \mathbf{Uc}_1 \leq 2\epsilon - \max \mathbf{r}_1 \mathbf{V}, \text{和}$$

$$-\max \mathbf{r}_2 \mathbf{V} \leq l_2 \equiv \max \mathbf{Uc}_2 \leq 2\epsilon - \max \mathbf{r}_2 \mathbf{V}。$$

利用这一点，我们现在写出列位玩家的报酬的不等式。注意到**V**=-**U**，不等式的方向与上面不同：

$$\begin{array}{ll}
(3.7) & l_1 - 2\epsilon \leq \mathbf{xA} + \mathbf{y}_1\mathbf{D} \leq l_1 + \epsilon\ l_1 - \\
(3.8) & 2\epsilon \leq \mathbf{xB} + \mathbf{y}_1\mathbf{E} \leq ĀĀĀĀĀ \\
(3.9) & l_1 - 2\epsilon \leq \mathbf{xC} + \mathbf{y}\ \mathbf{F}_1 \\
(3.10) & l_2 - 2\epsilon \leq \mathbf{y}_2\mathbf{E} + \mathbf{zH} \leq l_2 + \epsilon\ l_2 - \\
(3.11) & 2\epsilon \leq \mathbf{y}_2\mathbf{F} + \mathbf{zI} \leq l_2 + \epsilon\ l_2 - 2\epsilon \leq \\
(3.12) & \mathbf{y}_2\mathbf{D} + \mathbf{zG}
\end{array}$$

如果我们将左边的方程（3.2）乘以$\mathbf{y}_2$，方程（3.3）乘以**z**，然后将结果相加，我们就会发现

$$\mathbf{y}_2\mathbf{Dp} + \mathbf{y}\ \mathbf{Eq}_{21} + \mathbf{zGp} + \mathbf{zHq}_1 \leq l_1\ (\bar{\mathbf{y}}_2 + \bar{\mathbf{z}})$$

、

其中，我们用符号$\bar{\mathbf{v}}$表示向量**v**的元素之和。如果我们将右边的方程（3.10）乘以$\mathbf{q}_1$，方程（3.12）乘以**p**，并加上

结果是，我们有

其中　，列位玩家的报酬矩阵只是

V=-U，因为（U，V）是一个零和游戏。

让l_1为均衡（$\mathbf{r}_1$，$\mathbf{c}_1$）中行方的最大激励，即 max $\mathbf{Uc}_1$，让l_2 = max $\mathbf{Uc}_2$为均衡（$\mathbf{r}_2$，$\mathbf{c}_2$）中行方的最大激励。从 ϵ-well supported Nash equilibrium的定义中，我们有

$$(3.13)\quad (l_2 - 2\epsilon)(\bar{p} + \bar{\mathbf{q}}_1) \leq \mathbf{y}_2 \mathrm{D}p + \mathbf{y}\,\mathbf{Eq}_{21} + \mathbf{zGp} + \mathbf{zHq}_1\text{。}$$

比较这两个不等式可以发现，（l_2 - 2ϵ）（$\bar{p}$ + $\bar{q}_1$）≤ l_1（$\bar{y}_2$ + $\bar{z}$）。我们注意到，由于$\mathbf{r}_2$和$\mathbf{c}_1$是概率向量，$\bar{p}$ + $\bar{\mathbf{q}}_1$ = $\bar{y}_2$ + $\bar{\mathbf{z}}$ = 1，并且
因此我们可以得出结论：$l_2 \leq l_1 + 2\epsilon$。由于行和列的作用没有任何不对称性

列的玩家，我们通过对称性得到：$l_1 \le l_2 + 2\epsilon$。将此与（3.13）结合起来，可以得到

$$l_1 - 4\epsilon \le \mathbf{y}_2 \, Dp + \mathbf{y} \, \mathbf{Eq}_{21} + \mathbf{zGp} + \mathbf{zHq}_1 。$$

从方程（3.2）中，我们有$l_1 \; \bar{y}_2 \ge \mathbf{y}_2 \, Dp + \mathbf{y} \, \mathbf{Eq}_{21}$。减去这两个不等式，并注意到$1 - \bar{y}_2 = \bar{z}$，我们有$l_1 \bar{z} - 4\epsilon \le \mathbf{z}（\mathbf{Gp} + \mathbf{Hq}_1）$。由于$\mathbf{Gp}+\mathbf{Hq}$的每个条目最多只有$l$，从公式3，而z的每个条目 $_1$ $_1$ 的定义至少是δ，我们得出结论：$l_1 -(4\epsilon)/\delta \le \mathbf{Gp} + \mathbf{Hq}_1$，即行棋者在行棋中的激励是在当列位玩家采取策略$\mathbf{c}_1$时，第三区间在$\frac{4}{\delta}\epsilon$的最佳范围内。因为当列位玩家采取策略$\mathbf{c}_2$时，情况肯定也是如此，所以我们可以得出，对于任何策略$\mathbf{c}$的凸组合来说 $_1$ 和$\mathbf{c}_2$第三行区块的每一排都有激励措施$\frac{4}{\delta}\epsilon$以内的最佳值。我们注意到，第二行区块中的行也是如此，因为根据定义，每个激励措施在$\mathbf{c}_1$和$\mathbf{c}_2$的情况下都在最优的ϵ之内。

我们现在援引对称性来声称，对于两个原始均衡的任何凸组合，博弈的所有行和列的激励都在$\frac{4}{\delta}\epsilon$的最佳范围内，这意味着任何凸组合都将是一个$\frac{4}{\delta}\epsilon$-良好支持的纳什均衡，如愿以偿。 ∎

4 生成器博弈中的近似平衡点G

回顾一下[1]中的生成器游戏G，它使他们能够将一般的报酬转化为二进制。

定义4.1.（生成器博弈）*定义母体*$\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$*和*$\mathbf{S}^j$ *为*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{S}^j = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{A} & \cdots & \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{A} & \mathbf{A} & \cdots & \mathbf{B} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{A} & \mathbf{B} & \cdots & 0 & 0 \\ \mathbf{B} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

k×k矩阵$\mathbf{S}^j$ *是一个j×j块状矩阵，其中k=3j。定义游戏*$G_j = (\mathbf{S}^j, 1 - \mathbf{S}^j)$。

下面的主张在[1]中得到了证明：

声称4.1。*博弈*$G_j = (\mathbf{S}^j, 1 - \mathbf{S}^j)$ *有一个唯一的(的（确切的）纳什均衡*（$\mathbf{R}$，$\mathbf{C}$）。

$$\mathbf{r} = \mathbf{c} = \frac{2^{j}-1，2^{j-1}，2^{j}-1，\ldots，4，4，4，2，2，2，1，1，1}{3(2^j - 1)}.$$

作为展示其近似版本的第一步，我们描述了G的*全支持*近似均衡$_j$，也就是那些每一行和每一列都以严格的正概率进行游戏的均衡。

声称4.2。*每个*全支持的ϵ- 全 支 持 的 *纳什博弈的均衡*（$\mathbf{S}^j$，$1 - \mathbf{S}^j$）*与*（$\mathbf{R}$，$\mathbf{C}$）*不同*

上文定义的最多$18j^2\epsilon$*在任何坐标上。*

*证明。*考虑这样一个均衡（$\mathbf{r}'$，$\mathbf{c}'$）。我们注意到，每个激励$\mathbf{S}\,\mathbf{c}^{j'}$必须在$q$和$q-\epsilon$之间，其中$q$是最高的激励。让$\mathbf{c}''$是方程$\mathbf{S}\,\mathbf{c}^{j''} = q$的解。[1]我们知道，$\mathbf{c}''$必须与我们的目标成正比。

的$\mathbf{c}$。

我们注意到，$\mathbf{S}^j$是可反转的，并且进一步具有其反转的所有条目的绝对值都小于1的特性。后者可以通过写下$(\mathbf{S}^j)^{-1}$的封闭形式来验证，这可以很从$\mathbf{S}^j$的块状三角形结构中很容易确定。因此，$\mathbf{c}'$的每个坐标与$\mathbf{c}''$的相应坐标的差异小于$3j\epsilon$，其中$3j$是S的行数或列数^j。

根据定义，$\mathbf{c}$和$\mathbf{c}'$的和都是1。因此，$\mathbf{c}''$的总和在1的$(3j)2^{\epsilon}$以内，因为$\mathbf{c}''$的每一个$3j$条目都在$\mathbf{c}'$的相应条目的$3j\epsilon$以内。另外，由于c的每一个条目都是正数，而且$\mathbf{c}''$与$\mathbf{c}$成正比，$\mathbf{c}$和$\mathbf{c}''$之间的总(L^1)距离等于它们的总和之差。因此从三角形不等式的L^1 $\mathbf{c}$之间的距离。而$\mathbf{c}'$最多只有$18j^2\epsilon$，如愿以偿。

同样的论点也适用于排球运动员的战略，产生了预期的结果。 ∎

我们现在表明，对于足够小的ϵ，我们可以从上述要求中移除全支持条件，而不需要改变结果。

声称4.3。*每个有良好支持的纳什均衡的博弈*$(\mathbf{S}^j, 1\text{-}\mathbf{S}^j)$*与上面定义的*$(\mathbf{r}, \mathbf{c})$*的不同之处在于在任何坐标中最多有*$18j^2\epsilon$*，只要*$\epsilon < \frac{1}{648j^2 4^j}$

*证明。*为矛盾起见，假设我们有一个违反这一条件的均衡（$\mathbf{r}'$，$\mathbf{c}'$）。根据前面的主张，$(\mathbf{r}', \mathbf{c}')$不可能有完整的支持：它必须发挥某些战略的概率

现在我们将Lemma 3.1应用于这对平衡状态$(\mathbf{r}', \mathbf{c}')$和$(\mathbf{r}, \mathbf{c})$，后者如权利要求4.1所定义。

这两者都是ϵ充分支持*的*，因此，来自Lemma 3.1的ϵ只是ϵ。为了计算δ，我们注意到，由于（$\mathbf{r}$，$\mathbf{c}$）是一个*完全支持的*均衡，从定义来看的，我们可以得出，δ必须至少是$\mathbf{r}$和$\mathbf{c}$的最小值，即$\delta \ge \frac{1}{3(2^j-1)}$.

现在我们从Lemma 3.1得出结论，任何$(\mathbf{r}', \mathbf{c}')$和$(\mathbf{r}, \mathbf{c})$的凸组合都是$12(2^j-1)\epsilon$-*良好*支持的纳什均衡。我们进一步注意到

任何严格意义上的正凸组合都会
有充分的支持，因此受制于权利要求4.2。

明确地说，这两个均衡的任何严格正的凸组合在任何坐标上都必须在（r，c）的$18j^2 - 12$（$2^j - 1$）ϵ之内。由于r和c的每个条目都在

至少 $\frac{1}{3(2^j-1)}$ 并且$(\mathbf{r}', \mathbf{c}')$的某些条目为0，这意味着即$\epsilon \geq \frac{1}{648j^2(2^j-1)^2}$，这与我们的约束相矛盾 ϵ.因此，不存在其他均衡。 ∎

5 转化为0-1：纳什同构体的 稳定性分析

在这一节中，我们将介绍一个 "规模良好 "的概念。稳定性分析。

在[1]中发展的纳什同构在这个博弈族上。由于在[5]中构建的硬性双人博弈家族可以转化为良好规模的博弈，我们将在下一节使用这一稳定性分析来证明我们的主要结果。

如果一个矩阵U的每个条目都可以表示为r/K，用于$K/2$和K之间的某个整数，那么这个矩阵对于正整数K来说就是K-well-*scaled的*。

以下是本节的主要结果。

定理5.1.*存在一对多项式时间可计算的函数f，g，以便给定一个n×n 博弈H=*（**A**，**B**），*以及整数*$K=3(2^k-1) \leq n$，*从而H是K-well-scaled，f*（*H*）*是一个0-1 博弈*$H' = (\mathbf{A}', \mathbf{B}')$，*维度*$\Theta(nk^2)$、*对于博弈H′ 的任何*$\epsilon/n^{25}$-*良好支持的纳什均衡*$(\mathbf{x}', \mathbf{y}')$，*其中*$\epsilon \leq 1$，$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(\mathbf{x}', \mathbf{y}')$*是一个*$\epsilon$-*良好支持的纳什H的平衡点。*

我们应用[1]的纳什同构法来构筑地图*f*。

构建5.1.（翻译）*设*$H = (\mathbf{A}, \mathbf{B})$*是一个双矩阵游戏，其中***A***和***B***都是*$n\times n$*矩阵。***A***是K-well-scaled，其中*$K=3(2^k-1) \leq n$，$k \in \mathbb{Z}^+$。**B***的每一行至少有一个条目* $\frac{1}{2}$，*并且* $0 \leq \mathbf{B} \leq 1$. *让*$H' = (\mathbf{A}', \mathbf{B}')$*是一对*$2n \times 2n$*的块矩阵，定义在图1中。*

*详细来说，***A**′ *中的块是：块（i，2i - 1），为1≤i≤n，是一个3k×1的所有1的向量；块（i，2i），为1≤i≤n，是3k×3k矩阵*$\mathbf{S}^k$；*块（n+i，2j），对于1≤i，j≤n，是一个1×3k 0-1矢量*$\mathbf{R}_{i,j}$，*这样*$\mathbf{R}_{i,j}\,\mathrm{c} = \mathbf{A}_{i,j}$，*其余块是矩阵的*

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{S}^k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{S}^k & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \mathbf{S}^k \\ 0 & \mathbf{R}_{1,1} & 0 & \mathbf{R}_{1,2} & \cdots & 0 & \mathbf{R}_{1,n} \\ 0 & \mathbf{r}_{2,1} & 0 & \mathbf{r}_{2,2} & \cdots & 0 & \mathbf{R}_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \mathbf{Rn}_{,1} & 0 & \mathbf{Rn}_{,2} & \cdots & 0 & \mathbf{Rn}_{,n} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}' = \begin{bmatrix} 0 & 1-\mathbf{S}^k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\mathbf{S}^k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-\mathbf{S}^k \\ B1,1 & 0 & B1,2 & 0 & \cdots & B1,n & 0 \\ B2,1 & 0 & B2,2 & 0 & \cdots & B2,n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ Bn_{,1} & 0 & Bn_{,2} & 0 & \cdots & Bn_{,n} & 0 \end{bmatrix}.$$

图1：矩阵A'和B'

适当大小的所有0，其中回顾一下向量

$$\mathbf{r} = \mathbf{c} = \frac{2^k-1,\ 2k^-1,\ 2^k-1、\ \ldots,\ 4,\ 4,\ 4,\ 2,\ 2,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1}{3(2^k-1)}^T$$

是生成器博弈$G_k = (\mathbf{S}^k, 1-\mathbf{S}^k)$*的确切纳什均衡。请注意，对于K-well-scaled博弈的任何条目*$\mathbf{A}_{i,j}$，*存在一个0-1的向量*$\mathbf{R}_{i,j}$，*从而即*$\mathbf{R}_{i,j}\,\mathrm{c} = \mathbf{A}_{i,j}$。

B′ *的块是：块（i，2i），对于1≤i≤n，是3k×3k矩阵*$1-\mathbf{S}^k$；*块（n+i，2j-1），对于1≤i，j≤n，是标量*$B_{i,j}$；*其余的块是适当大小的全0的矩阵。*

'让（x，y）成为$H' = (\mathbf{A}', \mathbf{B}')$的一个$\epsilon' = \epsilon/n^{12}$和 $\epsilon \leq 1$的有良好支持的纳什均衡。由于**x**和**y**可以被认为是块状向量，我们将其索引为它们按块排列如下：对于1≤i≤n和1≤j≤3k、让$x^i_j = x_{(i-1)(3k)+j}$和$y^i_j = y_{(i-1)(3k+1)+(j+1)}$。对于 1 ≤ i ≤ n，让$\mathbf{x}_{(*)}$($\mathbf{y}_{(*)}$)表示3k-向量，其第j项是$x^i_j$ (y^i_j)。让$\bar{x}^i$和$\bar{y}^i$表示下列各项之和每个区块，即

$$\bar{x}^i = \sum_{1 \leq j \leq 3k} x^i_j \quad 和 \quad \bar{y}^i = \sum_{1 \leq j \leq 3k} y^i_j。$$

如上所述，我们用$\mathbf{A}'_i$表示$\mathbf{A}'$的第i*行*，$\mathbf{B}'$表示$\mathbf{B}'_i$的第i*列*。记得我们假设$K = 3(2^k-1) \leq n$，因此$k = O(\log n)$。我们让

$\mathbf{c}^k$ 是第4节中定义的向量，使（$\mathbf{c}^k$，$\mathbf{c}^k$）是发电机G的唯一纳什均衡$_k$。

我们首先证明了几个公理，以说明$(\mathbf{x}, \mathbf{y})$的结构，然后我们表明这个结构事实上与近似平衡元素的关系是最多为1，我们有：的原始游戏H。

定理5.1。*如果$x_i > 0$，那么$\mathbf{A}\ \mathbf{y}'^T \geq \frac{1}{\quad} - \epsilon'$；如果$y_i > 0$，那么$\mathbf{B}'^T\ \mathbf{x} \geq \frac{1}{2}\frac{1}{n(3k+1)} - \epsilon'$。*

*证明。*我们注意到，从K-well-的定义中可以看出缩放，以及$\mathbf{A}'$ 和$\mathbf{B}'$ 的构造，我们可以看到$\mathbf{A}'$ 的每一列都包含一个1，而每一行$\mathbf{B}'$ 至少包含一个条目$\frac{1}{2}$。

从ϵ-良好支持的纳什均衡的定义中，我们可以看出，任何有$x_i > 0$的第i行必须有激励$\mathbf{A}\ \mathbf{y}'^T$ 在最大行的ϵ' 内。

激励。我们注意到，由于该游戏有$n = n(3k+1)$列，其中一列j必须有$y_j \geq 1/n'$。由于这一列包含一个条目$A_{i',j} = 1$通过上述观察，第i' 行必须有激励至少$1/n'$，因此任何有$x_i > 0$的行必须有激励在ϵ' 之内，如愿以偿。论点

为列几乎是相同的。 ∎

推理5.2。*如果$\bar{y}_i \geq n\epsilon^{6'}$ 对于某些$i: 1 \leq i \leq n$，则我们有$\bar{x}_i \geq 1/n^3$ 和$\mathbf{y}^i_{(\square)} = \bar{y}_i \mathbf{c}^k \pm n\epsilon^{4'}$。*

*证明。*为矛盾起见，假设$\bar{x}_i < 1/n^3$。那么对于区块$\mathbf{y}^i_{(\square)}$的每一列，由于$0 \leq B' \leq 1$，第二位玩家的期望报酬小于$1/n^3$。但$1/n^3 < \frac{1}{2}\frac{1}{n(3k+1)} - \epsilon'$，我们可以援引Lemma 5.2得出的结论是：该列的块从来没有被打过，这就是所希望的矛盾。

为了证明后半部分，我们注意到，如果我们让$L = \max(1/\bar{x}_i, 1/\bar{y}_i)$，那么如果我们考虑一对矢量$(\mathbf{x}^i_{(\square)}/\bar{x}_i, \mathbf{y}^i_{(*)}/\bar{y}_i)$ 作为*子博弈*中的一对策略G_k，我们注意到它们满足作为博弈G_k 的$L\epsilon'$-良好支持的纳什均衡的所有条件。

由于$\bar{x}_i \geq 1/n^3$，$\bar{y}_i \geq n\epsilon^{6'}$，我们有$L\epsilon' \leq \max(n\epsilon^{3'}, 1/n^6) \leq 1/n^6\ 1/(648k^2\ 4^k)$。因此，我们援引Lemma 4.3 来得出结论：$\mathbf{y}^i_{(\square)} = \bar{y}_i \mathbf{c}^k \pm 18k^2 L\bar{y}_i\epsilon'$。由于$L\bar{y}_i = \max(1, \bar{y}_i/\bar{x}_i)$，并且$\bar{y}_i \leq 1$ 和$\bar{x}_i \geq 1/n^3$，我们有$L\bar{y}_i \leq n^3$。对于足够大的n、我们有$18k^2 \leq n$，因为$k = O(\log n)$，所以我们有$\mathbf{y}^i_{(\square)} = \bar{y}_i \mathbf{c}^k \pm n\epsilon^{4'}$。

$\mathbf{c}^k$ *证明。*根据$\mathbf{R}_{j,i}$ 的定义，$\mathbf{R}\ \mathbf{c}_{j,i}{}^k = A_{j,i}$。因为从Lemma 5.2我们可以看出，$\mathbf{y}^i_{(\square)} = \bar{y}_i \mathbf{c}^k \pm n\epsilon^{4'}$、我们知道，$\mathbf{R}_{j,i}\ (\mathbf{y}^i_{(\square)})^T = A_{j,i}\bar{y}_i \pm n\epsilon^{4'} \sum \mathbf{R}_{j,i}$。因为$\mathbf{R}_{j,i}$ 是一个长度为$3k\,n$的向量，其每个$\mathbf{R}_{j,i}\ (\mathbf{y}^i_{(\square)})^T = A_{j,i}\bar{y}_i \pm n\epsilon^{5'}$，如愿以偿。 □

为了证明第二部分，我们又有了以下几点$\mathbf{y}^i_{(\square)} = \bar{y}_i \mathbf{c}^k \pm n\epsilon^{4'}$，从Lemma 5.2可以看出，$\mathbf{c}_k$ 是$3k \times 3k$博弈的全支持纳什均衡。$G^k = (\mathbf{S}^k, 1 - \mathbf{S}^k)$，因此$\mathbf{S}\ \mathbf{c}^k{}_k = \frac{1}{3k}$。因此，如上所述我们得出结论：$\mathbf{S}^k_j (\mathbf{y}^i_{(*)})^T = \bar{y}_i/3k \pm n\epsilon^{5'}$ 如意。 ∎

推理5.3。*如果$s_i = y_{(i-1)(3k+1)+1} = 0$，对于一些$1 \leq i \leq n$则$\bar{y}_i < n\epsilon^{6'}$。*

*证明。*假设$\bar{y}_i \geq n\epsilon^{6'}$，那么从 Lemma 5.2 可知有，$\bar{x}_i \geq 1/n^3$，$\mathbf{y}^i_{(*)} = \bar{y}_i \mathbf{c}^k \pm n\epsilon^{4'}$。

考虑到排球运动员的激励机制，以发挥与其他行相比，第i行区块中的行的激励作用更大。由于$s_i = 0$，对第i块中的行的激励的唯一贡献来自于$\mathbf{y}^i_{(*)}$，并且我们从根据上述推论，$\mathbf{S}^k_j\ (\mathbf{y}^i_{(*)})^T = \bar{y}_i/3k \pm n\epsilon^{5'}$。然而，考虑到他打排$3kn+i$的动机、即$\mathbf{R}_{j,i}\ (\mathbf{y}^i_{(\square)})^T = A_{j,i}\bar{y}_i \pm n\epsilon^{5'}$。由于$A_{j,i} \geq \frac{1}{2}$，我们有$\mathbf{R}_{j,i}\ (\mathbf{y}^i_{(\square)})^T \geq \frac{1}{2}\bar{y}_i - n\epsilon^{5'}$。由于$\bar{y}_i \geq n\epsilon^{6'}$ 我们有第一位玩家玩第i行的激励大于ϵ'，小于他玩第$3kn+i$行的激励，因此他不会在一个区块中玩第i行。

ϵ'-良好支持的纳什均衡，这与我们的结果相矛盾，即$\bar{x}_i \geq 1/n^3$。 ∎

我们接下来为某些行和列的总权重提供下限。

定理5.4。*让$r_i = x_{3kn+i}$ 对于所有$i: 1 \leq i \leq n$，则*

$$\sum_{1 \leq i \leq n} r_i \geq 1/n^3。$$

*证明。*为矛盾起见，假设$\sum r_i < 1/n^3$。

考虑在列块中的报酬，索引为由$s_i = y_{(i-1)(3k+1)+1}$.由于唯一的非零报酬在这些列中，列位棋手的报酬位于以r为索引的行中，而这些报酬中的每一个最多只有1、

我们注意到以下的直接推论：其中任何一列i的总奖励金额最多就是 $r_i < 1/n^3$ 。从Lemma 5.2可以看出，这意味着对于所有的i，$s_i = 0$。由于y是一个和为1的向量、

Σ

Σ

推论5.1。*如果$\bar{y}_i \geq n\epsilon^{6'}$，对于某些$1 \leq i \leq n$，则对于所有$j$，$1 \leq j \leq 3k$，我们有*

$$\mathbf{R}_{j,i}(\mathbf{y}^i_{(\cdot)})^T = A_{j,i}\,\bar{y}_i \pm n\epsilon^{5'}\text{、} \quad \text{和}$$

$$\mathbf{S}^k_j(\mathbf{y}^i_{(\cdot)})^T = \bar{y}_i/3k \pm n\epsilon^{5'}\text{、}$$

其中$\mathbf{S}^k_j$表示$\mathbf{S}^k$的第j行。

我们有 $\sum \bar{y}_i = 1$。因此，对于某些行块j，我们有$\bar{y}_j \geq 1/n\, n\epsilon^{6'}$。然而，从 Lemma 5.3 中我们可以看出即每个$\bar{y}_j \leq n\epsilon^{6'}$。由于$\epsilon' = \epsilon/n^{12}$，且$\epsilon \leq 1$，所以我们有理想的矛盾。

推理5.5。$\sum_{1 \leq i \leq n} \bar{y}_i \geq 1/n^3$ 。

*证明。*为矛盾起见，假设 $\sum \bar{y}_i < 1/n^3$。

考虑到排球运动员的激励措施，在 $r_i = x_{3kn+i}$ 所对应的行。由于唯一的非零条目出现在$\bar{y}^{(*)}$列中，并且每个条目最多只有1，因此我们可以看出，在这些行中，总的游戏激励最多为$\sum \bar{y}_i < 1/n^3$。

如上所述，我们将其与Lemma 5.2进行比较，可以看到 $r_i = 0$ for all i. 然而，这与Lemma相矛盾。

5.4，意味着事实上 $\sum \bar{y}_i \geq 1/n^3$，如愿以偿。 ∎

我们现在可以构建一个方案，从ϵ'-良好支持的纳什均衡中恢复原始游戏H的ϵ-*良好支持的*纳什均衡。

修改后的游戏H'。

构建5.2。*给出一个ϵ'-良好支持的等式 librium $(\mathbf{x}', \mathbf{y}')$ 的H'，其中$\epsilon' = \epsilon/n^{12}$，$\epsilon \leq 1$、定义变量$\bar{y}_i, r_i, s_i$ 如上所述。我们构建一个 H的ϵ-良好支持的均衡（$\mathbf{x}$，$\mathbf{y}$）：*

- *设$C_1 = 1/\sum r_i$，并设$\mathbf{x} = C_1 r$，其中$x_i = r_i$ 对于所有i：$1 \leq i \leq n$。*
- *设$\mathbf{q}$为长度为n的矢量，使$q_i = 0$，如果 $\bar{y}_i < n\epsilon^{6'}$，否则$q_i = \bar{y}_i$。*
- *设$C_2 = 1/\sum q_i$，并设$\mathbf{y} = C_2\mathbf{q}$。*

鉴于上述公理告诉我们关于结构的我们现在处于平衡状态$(\mathbf{x}', \mathbf{y}')$。

我们可以直接证明，所构建的（$\mathbf{x}$，$\mathbf{y}$）是原始博弈H=（$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$）的一个有良好支持的纳什均衡。我们首先证明没有任何一列游戏的激励比最优的要少ϵ以上，然后再证明行的相应声明。

定理5.6。*对于所有$1 \leq i$，$j \leq n$，如果$\mathbf{x}^T\mathbf{B}_j < \mathbf{x}^T\mathbf{B}_i - \epsilon$ 那么$y_j = 0$。*

*证明。*在上述结构中，$\mathbf{B}$的i，j列对应于$\mathbf{B}'$的$(3k+1)(i-1)+1$和$(3k+1)(j-1)+1$列。此外，由于我们构建$\mathbf{B}'$的方式，这些列的最后n行的条目与$\mathbf{B}$的条目相同。因此我们

有

$$\epsilon < \mathbf{x}^T\mathbf{B}_i - \mathbf{x}^T\mathbf{B}_j = C_1(\mathbf{r}^T\mathbf{B}_i - \mathbf{r}^T\mathbf{B})_j = C_1(\mathbf{r}^T\mathbf{B}_{(3k+1)(i-1)+1} - \mathbf{r}^T\mathbf{B}_{(3k+1)(j-1)+1}),$$

其中最后一个表达式，除以C_1，就是在博弈H'中，这些列的激励差异。从Lemma 5.4可以看出，$C_1 \leq n^3$，因此H'的这些列的激励差异至少是$\epsilon/n^3 > \epsilon'$。因此，$r_j = 0$，从y的构造来看，这意味着$y_j = 0$，如愿以偿。

悖论5.7。*对于所有$1 \leq i$，$j \leq n$，如果$\mathbf{A}\,\mathbf{y}_j^T < \mathbf{A}\,\mathbf{y}_i^T - \epsilon$ 那么$x_j = 0$。*

*证明。*考虑在转换后的博弈H'中对行博弈者的激励。让I_i，I_j分别为在第$3kn+i$, $3kn+j$行博弈的激励。我们降低

界限I_i和上限I_j来证明所需的结果。从推论5.1中我们可以得出

$$I_i = \sum_{1 \leq m \leq n} R_{i,m}(\mathbf{y}_{(*)})^{m\,T} \geq \sum_{q_m > 0} R_{i,m}(\mathbf{y}_{(*)})^{m\,T}$$
$$\geq \sum_{q_m > 0} A_{i,m}\,\bar{y}^m - n\epsilon^{5'} \geq \mathbf{A}_i\,y/C_2 - n\epsilon^{6'}。$$

同样地，从推论5.1和y的构造，我们有$I_j \leq \mathbf{A}_j\, y/C_2 + n\epsilon^{7'} + n\epsilon^{6'}$。我们注意到根据定理5.5和$C_2$的定义，我们可以得出：$C_2 \leq n^4$。因此，$I_i - I_j\ \epsilon'$ 因为 $\epsilon' = \epsilon/n^{12}$.因此 $r_j = 0$的博弈中，H'，由此我们得出结论：$x_j = 0$，如愿以偿。 ∎

我们结合上述公理，得出以下结论。

摄取：

推理5.8。*存在一对多项式时间的可计算的函数（f，g），以便给定一个$n \times n$的游戏H=（$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$），整数$K = (2^k - 1) \leq n$ 这样，$\mathbf{A}$是K-well-scaled的，$\mathbf{B}$的每一行都有至少有一个条目 且$0 \leq \mathbf{B}_{i,j} \leq 1$，$f(H)$是一个游戏$H' = (\mathbf{A}', \mathbf{B}')$，其中 1).$\mathbf{A}'$和$\mathbf{B}'$都是 $n(3k+1) \times n(3k+1)$ 矩阵；2).$\mathbf{A}'$是一个0-1矩阵，每一列至少有一个非零条目；3).$\mathbf{B}'$有0、1或来自$\mathbf{B}$的条目。对于H'的每一个ϵ/n^{12}-支持良好的纳什均衡（$\mathbf{x}'$，$\mathbf{y}'$），其中$\epsilon \leq 1$，（$\mathbf{x}$，$\mathbf{y}$）=g（$\mathbf{x}'$，$\mathbf{y}'$）是H的一个ϵ-支持良好的纳什均衡。*

让f和g分别为构造5.1和5.2所定义的两个函数。那么我们就可以从定理5.6和5.7得到所需的结果。现在我们展示我们的主要结果，定理5.1。

证明。[定理5.1]给定一个K-*well-scaled*博弈H=（A，B），首先应用构造5.1得到一个博弈H'=（$\mathbf{A}'$，$\mathbf{B}'$），其中$\mathbf{A}'$和$\mathbf{B}'$满足条件例5.8中所列。设$n'' = n(3k+1)$ and $K'' = 3(2K+1-1) = 2K+3$。 我们定义博弈H'' = $(\mathbf{A}'', \mathbf{B}'')$ 其中$\mathbf{B}'' \stackrel{def}{=} \mathbf{A}'^T$和$\mathbf{A}'' \stackrel{def}{=} \frac{(K+2)+\mathbf{K}\mathbf{B}'}{K}$. 人们可以检查出，$\mathbf{A}''$是$K''$-好比例，而$K'' =$

$2K+3 \leq 2n+3 < n''$ 。对于任何$c>0$，如果（$\mathbf{x}''$，$\mathbf{y}''$）是H'' 的$c/3$-*well*-supported Nash均衡，那么（$\mathbf{y}''$，$\mathbf{x}''$）是H' 的c-well-*supported* Nash均衡。现在我们可以再次应用构造5.1，得到一个0-1博弈$H''' =$（$\mathbf{A}'''$，$\mathbf{B}$）。$'''$

给出H'''的ϵ/n^{25}-良好支持的纳什均衡（$\mathbf{x}'''$，$\mathbf{y}'''$），我们可以通过结构5.2找到H''游戏的$\epsilon/(3n^{12})$-良好支持的纳什均衡（$\mathbf{x}''$，$\mathbf{y}''$），因为$k = O(\log n)$和

$$\frac{\epsilon}{3n12} - \frac{1}{(n')^{12}} = \frac{\epsilon}{3n12} - \frac{1}{(n(3k+1))^{12}} > \frac{\epsilon}{n25}.$$

从H'到H''的构造表明，$(\mathbf{x}', \mathbf{y}') = (\mathbf{y}'', \mathbf{x}'')$是$H'$的一个$\epsilon/n^{12}$-良好支持的纳什均衡。我们现在最后一次应用构造 5.2 来恢复H的一个ϵ良好支持的均衡，如

希望如此。

6 大概的输赢：不成功便成仁

为了定义寻找和逼近纳什均衡的计算复杂性，我们必须决定均衡的表示格式。请注意，均衡中的每个条目是一个介于0和1之间的数字。

泊位$0 \le c \le 1$是用它的二进制表示（$c_0 . c_1 \cdots c_L \cdots$），其中$c_i \in \{0, 1\}$和
$c = \lim_{i\to\infty} \sum_{i=0} c_i/2^i$。

作为一些有理数的二进制表示

我们必须对这些数字进行四舍五入，以便使用有限的表示方法，从而得到一个近似值。前L位c_0，..., c_{L-1}给我们一个

c的L位近似值$\tilde{c}$。我们可以类似地"表达"

一个纳什均衡（$\mathbf{x}$，$\mathbf{y}$）由其条目的有限二进制表示。

在这种均衡的离散表示中，我们可以将双矩阵游戏的计算问题定义为：:

给定一个双矩阵游戏（$\mathbf{U}$，$\mathbf{V}$）和一个整数L，找到两个$n\times L$的二进制矩阵（$\mathbf{X}$，$\mathbf{Y}$），使得对于每个i，$\mathbf{X}[i, *]$和$\mathbf{Y}[i, *]$分别为前L个二进制位、
在纳什均衡中，$\mathbf{x}$和$\mathbf{y}$的i^{th}-条目的。
$(\mathbf{x}, \mathbf{y})$的（$\mathbf{U}, \mathbf{V}$）。我们把这个计算问题称为*L-BIT* BIMATRIX。当输入实例为理性游戏时，我们用*L-BIT* RATIONAL BIMATRIX来指代这个计算问题。当输入实例为输赢博弈时，我们称之为*L-BIT* WIN-LOSE BIMATRIX。

在本节中，我们将证明本文的主要结果。

定理6.1 (ALL-OR-NOTHING IN Approximat- ING NASH FOR WIN-LOSE GAMES) *对于任何常数$c > 0$，寻找$1/n^c$-近似纳什均衡的问题与*RATIONAL BIMATRIX*的难度完全相同。因此，*$(1 + c)\log n$*-Bit* WIN-LOSE BIMATRIX*的难度与*RATIONAL BIMATRIX*完全一样。*

在证明这个定理之前，我们简要地回顾一下以前沿着这些思路的结果。我们用$P\equiv Q$来表示两个问题P和Q*相互之间*是多项式时间可还原的。

- 阿伯特、凯恩和维拉提[1]证明是赢了-输了 bimatrix ≡有理bimatrix。
- Chen 和 Deng[4] 在 Daska- lakis 、 Goldberg 和 Papadimitriou[12, 9] 的工作基础上，证明了 RATIONAL BIMATRIX是PPAD-**complete**[2]。这一结果意味着，一般的双人游戏是
  对于任何固定的整数r，*都*和一般的r型游戏一样难。
  - 下面的命题6.1意味着$\Theta(n)$-BIT RATIONAL BIMATRIX ≡RATIONAL BIMATRIX。
- Chen, Deng和Teng[5]建立了对于任何常数$c>0$，计算INTEGER BIMATRIX的$1/n^c$-近似纳什均衡仍然是PPAD-**完全的**[5]，在一个实例（$\mathbf{U}, \mathbf{V}$）中的INTEGER BIMATRIX有n个策略，$(\mathbf{U}, \mathbf{V})$的每个条目都是一个poly(n)量级的整数。
  - 命题6.1意味着（$1+c$）log n-*bit* INTEGER BIMATRIX ≡RATIONAL BIMATRIX。

6.1 定理6.1的证明。

我们首先观察以下简单的事实：假设（$\mathbf{x}$，$\mathbf{y}$）是博弈（$\mathbf{U}$，$\mathbf{V}$）的纳什均衡，其中所有的报酬条目都在0和1之间，有n行和n列的策略；让（$\tilde{\mathbf{x}}$，$\tilde{\mathbf{y}}$）是由（$\mathbf{x}$，$\mathbf{y}$）中的前L*位*条目生成的向量；那么$1 - n2^{-L+1} \le \tilde{x}_1, \tilde{y}_1 \le 1$，并且

$$\mathbf{x}^T \mathbf{U}\mathbf{y} - n2^{-L+1} \le \tilde{\mathbf{x}}^T\mathbf{U}\tilde{\mathbf{y}} \le \mathbf{x}^T\mathbf{U}\mathbf{y}、$$
$$\mathbf{x}^T \mathbf{V}\mathbf{y} - n2^{-L} \le \tilde{\mathbf{x}}^T\mathbf{V}\tilde{\mathbf{y}} \le \mathbf{x}^T\mathbf{V}\mathbf{y}。$$

因此，我们马上就能从
ϵ-近似*的*纳什均衡、

命题6.1。*从L-BIT* BIMATRIX*的内态*（$\mathbf{U}$，$\mathbf{V}$）*的解*（$\tilde{\mathbf{x}}$，$\tilde{\mathbf{y}}$），*我们可以得到双矩阵博弈*（$\mathbf{U}$，$\mathbf{V}$）*的*（$n2^{-L+1}$）*近似纳什均衡*（$\bar{\mathbf{x}}$，$\bar{\mathbf{y}}$）。

[2]**PPAD**是由Papadimitriou[20]提出的一个复杂度等级。非正式地讲，如果一个问题的难度与一般的离散定点问题完全一样，那么这个问题就是**PPAD-完整的**。由于我们的论文的结果并不直接需要**PPAD**的定义，因此我们请感兴趣的读者参考Papadimitriou的原始论文。在本文中，我们唯一需要的事实是，如果一个问题的难度与RATIONAL BIMATRIX完全一样，那么它就是**PPAD-完全的**。

我们注意到，由于复杂度等级**PPAD**在Karp还原下可能不封闭--由多项式时间可计算的转换函数给出的还原--我们谨

慎地将我们的主要结果表述为：*问题A与问题B完全一样*

难。

WIN-LOSE BIMATRIX并不在**PPAD**中，尽管它完全是按照
根据Karp的减法，很难成为RATIONAL BIMATRIX。

我们现在证明我们的主要结果。

*证明。[*定理6.1] 根据命题6.1，定理的第二个陈述直接来自定理的第一个陈述。我们首先证明对某个常数$c>0$的陈述，然后说明如何减少的常数。在[5]中，以下问题被证明为是**PPAD完整的**，因此和RATIONAL一样难。

BIMATRIX：给定一个博弈H=（**U**，**V**），其中**U**和**V**是$n\times n$矩阵，其整数项在0和n之间$^{1/2}$，找到一个n^{-1} -良好支持的纳什均衡。

让H=（**U**，**V**）是这样一个具有n种策略的双矩阵博弈。设k是最大的整数，使$K=3(2^k-1)\le n$，其中对于足够大的n，我们有$2n^{1/2}<K=\Theta(n)$。我们构建一个K-*well*-scaled博弈$(\mathbf{U}',\mathbf{V}')$通过设置$\forall\ i,j:1\le i,j\le n$、

$$\mathbf{U}'_{i,j}=\frac{(K+1)+2\mathbf{U}_{i,j}}{2K}\quad 和\mathbf{V}'_{i,j}=\frac{(K+1)+2\mathbf{V}_{i,j}}{2K}.$$

由于$K\le n$，H的每一个n^{-2} -well-supported Nash equilib- rium′，也是一个n^{-1} -well-supported Nash equi-。根据定理5.1，我们可以构建一个0-1 游戏 H' 尺寸 $n'=\Theta(nk^2)$。中的多聚物从0-1博弈H''的每一个n^{-27} -良好支持的纳什均衡中，可以计算出H^{-2} -*良好支持的n*′的均衡，从而在多名义时间内计算出H的n^{-1} -良好支持的均衡。因此，我们已经表明，在一个$n\times n$*的*输赢博弈中寻找一个n^{-27} -支持良好的纳什均衡是**PPAD-完全的**。使用多项式均衡

我们知道，存在一个常数$c>2$，这样，就会有一个"有支 持 的纳什均衡 "和 "近似的纳什均衡 "的问题。

在尺寸为$n\times n$的输赢博弈中寻找一个n^{-c} -近似的纳什均衡也是**PPAD不完全的**。根据文献[5]的观点，我们在 "Nash均衡 "的第7.1条定理中表明

第7节，我们可以将**PPAD的完备性**扩展到任何常数$c>0$。

7 任何常数$c>0$的PPAD-完备性

定理7.1。*如果存在一个常数$c>0$，那么，在$n\times n$输赢双矩阵博弈中寻找n^{-c} -近似纳什均衡的问题是***PPAD完整***，那么对于任何常数$c'>0$，它仍然是***PPAD完整***。*

我们用一个填充论证来证明这一点，说明如何将游戏从$n\times n$大小填充到$n''\times n$大小。″有大块均匀的零和一，没有显著改变平衡结构。

我们需要证明常数为$0<c'<c$的定理。让$H=(\mathbf{A},\mathbf{B})$是一个$n\times n$*的*输赢博弈，然后我们将其转化为一个新的博弈$H'=(\mathbf{A}',\mathbf{B}')$，如下所示。这里我们用$\mathbf{A}_i$和$\mathbf{B}_i$来表示$i^{th}$列和$i^{th}$行，分别是**A**和**B**的。对于每个$i:1\le i\le n$，如果$\mathbf{A}_i=0$，则$\mathbf{A}'_i=1$，否则、$\mathbf{A}'_i=\mathbf{A}_i$。对于每个$i:1\le i\le n$，如果$\mathbf{B}_i=0$，那么$\mathbf{B}'_i=1$，否则，$\mathbf{B}'_i=\mathbf{B}_i$。我们可以验证，$H'$的任何$\epsilon$近似纳什均衡也是$H$的一个$\epsilon$近似纳什均衡。此外，每个$\mathbf{A}'$的行和$\mathbf{B}'$的每一列都至少有一个值为1的条目。

接下来我们构建一个$n''\times n''$博弈$H''=(\mathbf{A}'',\mathbf{B}'')$，其中$n''=n^{2c/c'}$，如下所示。这里$\mathbf{A}''$和$\mathbf{B}''$都是2×2的块状矩阵，$\mathbf{A}''_{1,1}=\mathbf{A}'$，$\mathbf{B}''_{1,1}=\mathbf{B}'$，$\mathbf{A}''_{1,2}=\mathbf{B}''_{2,1}=\mathbf{A}''_{2,1}=\mathbf{B}''_{1,2}=1$和$\mathbf{A}''_{2,2}=\mathbf{B}''_{2,2}=0$。根据定义，$H''$是一个0-1的游戏。现在让$(\mathbf{x}'',\mathbf{y}'')$是一个$1/n''^{c'}=1/n^{2c}$ -近似的纳什的均衡$H''=(\mathbf{A}'',\mathbf{B}'')$的均衡。根据$\epsilon$-近似纳什均衡的定义，我们可以证明$0\le\sum_{n<i\le n''}x''_i,\sum_{n<i\le n''}y''_i\le n^{1-2c}$ 1/2，因为我们假设$c\ge2$。假设$a=\sum_{1\le i\le n}x''_i$

*证明。*如果$c<2$，那么在0-1博弈中找到一个n^{-2} -近似的纳什均衡就比较困难，因此也是在**PPAD**中是完整的。因此，我们总是可以假设$c\ge2$。

和$b=\sum_{1\le i\le n} y_i''$，我们构建一个$H'$的混合策略档案（$\mathbf{x}'$，$\mathbf{y}'$）如下：$x_i'=x_i''/a$和$y_i'=y_i''/b$，对于所有$i$：$1\le i\le n$。由于$a$，$b>1/2$，（$\mathbf{x}'$，$\mathbf{y}'$）是$H'$的$2/n^{2c}$-近似纳什均衡、这也是一个$1/n^c$-近似纳什均衡的$H$.

上述还原表明，对于任何常数$c'>0$，在$n\times n$输赢博弈中计算$n^{-c'}$-近似纳什均衡的问题是PPAD-**完全的**。

鸣谢

我们感谢Silvio Micali的愉快讨论和有益评论。

参考文献

[1] Tim Abbott, Daniel Kane, and Paul Valiant.On the complexity of two-player win-los games.In *FOCS '05: Proceedings of the 46th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 113-112, 2005.

[2] I.Barany, S. Vempala, and A. Vetta.Nash equilibria in random games.在*第46届IEEE计算机科学基础年会论文集中*。

[3] 陈曦和邓小铁.3-Nash是PPAD-完整的。*ECC, TR05-134*, 2005.

[4] 陈曦和邓小铁.Settling the Complexity of 2-layer Nash-Equilibrium.In *FOCS '06: Proceedings of the 47th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, 2006.

[5] Xi Chen, Xiaotie Deng, and Shang-Hua Teng.Computing Nash equilibria: approximation and smoothed complexity.In *FOCS '06: Proceedings of the 47th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, 2006.

[6] Bruno Codenotti and Daniel Stefankovic.On the computational complexity of Nash equilibria for (0,1)-bimatrix games.*Inf.Process.Lett.*94(3):145-150 (2005)

[7] V.Conitzer and T. Sandholm.关于纳什均衡的复杂度结果.*IJCAI*, 765 - 771, 2003.

[8] C.Daskalakis and C.H. Papadimitriou.三人游戏是困难的。*ECCC, TR05-139*.

[9] C.Daskalakis, P.W. Goldberg, and C.H. Papadimitriou.计算纳什均衡的复杂性。In *STOC'06, the 38th ACM Symposium on Theory of Computing*, 71-78.

[10] C.B. Garcia, C. E. Lemke, and H. J. Luthi.Hu, T.C. and Robinson, S.M. (eds.), *Mathematical Programming*, Academic Press, New York, 227-260, 1973中，对非合作性N人博弈的均衡点的简单近似。

[11] Gilboa and E. Zemel.纳什和相关的均衡状 态：一些复杂性的考虑。*Games and Eco- nomic Behavior*, vol 1, 80- 93, 1989.

[12] P.Goldberg and C.H. Papadimitriou.平衡问题中的可减少性.In *STOC'06, the 38th ACM Symposium on Theory of Computing*, 61-70, 2006.

[13] Michael J. Kearns, Michael L. Littman, and Satin- der P. Singh.博弈论的图形模型。In *UAI '01: Proceedings of the 17th Conference in Uncer- tainty in Artificial Intelligence*, pages 253-260, 2001.

[14] H.W. Kuhn.双矩阵博弈中均衡点的算法。载于*《美国国家科学院院刊》*，第1657-1662页，1961年。

[15] C.E. Lemke和JR.J.T. Howson.Equilibrium points of bimatrix games.*J. Soc. Indust.Appl. Math.*, 12:413-423, 1964.

[16] Richard J. Lipton, Evangelos Markakis, and Aranyak Mehta.使用简单策略玩大型游戏。在*EC '03：第四届ACM电子商务会议论文集*，第36-41页，2003年。

[17] R.D. McKelvey and A. McLennan.有限博弈中的均衡计算。In *Handbook of Computa- tional Economics*, volume 1.Elsevier Science B. V., 87-142, 1996.

[18] J.Nash.n人游戏中的均衡点.*美国国家学院会议记录*，36（1）：48-49，1950。

[19] J.Nash.非合作性游戏.*Annals of Mathemat- ics*, 54:289-295, 1951,.

[20] C.H. Papadimitriou.论奇偶论证的复杂性和其他低效的存在证明.*计算机与系统科学杂志》*，第498-532页，1994年。

[21] C.H. Papadimitriou, T. Roughgarden.计算多人游戏中的均衡。*第16届ACM-SIAM离散算法年度研讨会*，第82-91页，2005。

[22] Rahul Savani and Bernhard von Stengel.Exponentially many steps for finding a nash equilibrium in a bimatrix game.In *FOCS '04: Proceedings of the 45th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS'04)*, pages 258-267, 2004.

[23] L.S. Shapley, A note on the Lemke-Howson algorithm. in "Pivoting and extensions: in honor of A. W. Tucker", *Math.Programming Study 1*, M.L. Balinski editor, pp.175-189, 1974.

[24] R.Wilson.计算n人博弈的平衡点.*SIAM Journal on Applied Mathematics*, 21(1):80-87, 1971.