پاسخنامه تمرین دوم هوش محاسباتی بهار 1402

1) الف) مجموعه ی مرجع $X = \{a, b, c, d, e\}$ و دو زیرمجموعه ی $A = \{\frac{0.8}{a}, \frac{0.2}{b}, \frac{1}{c}, \frac{0.5}{d}\}$ و $B = \{\frac{0.9}{b}, \frac{0.1}{c}, \frac{0.2}{d}, \frac{1}{e}\}$ را در نظر بگیرید. موارد خواسته شده را در هر قسمت بیابید:

1. اجتماع دو مجموعه ی A و B
2. اشتراک دو مجموعه ی A و B
3. مکمل مجموعه ی A و مکمل مجموعه ی B
4. هسته (core) ، مرز (boundary) ، تکیه گاه (support) و ارتفاع (height) برای مجموعه ی A و مجموعه ی B (راهنمایی: لینک و لینک)
5. برش های لامبدای هر یک از مجموعه های A و B را با مقادیر $\lambda = 0.2$ و $\lambda = 0.8$ به دست آورید. سپس A^{λ} و B^{λ} را با مقادیر λ داده شده به دست آورید.

ب) فرض کنید مجموعه های مرجع $X = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ و $Y = \{2, 3, 6\}$ را داریم و زیرمجموعه های زیر وجود دارند:

$$A = \{\frac{0.1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{0.7}{3}\} \quad , \quad B = \{\frac{0.5}{2}, \frac{0.3}{6}\} \quad , \quad C = \{\frac{0.2}{6}, \frac{0.8}{2}, \frac{1}{4}\}$$

در صورتیکه X مجموعه ی مرجع برای A و C باشد و Y مجموعه ی مرجع برای B باشد، ابتدا BUC را حساب کرده و سپس اشتراک آن را با A حساب کنید.

جواب: الف)

.1

$$A \cup B = max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \{\frac{0.8}{a}, \frac{0.9}{b}, \frac{1}{c}, \frac{0.5}{d}, \frac{1}{e}\}$$

.2

$$A \cap B = min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \{\frac{0.2}{b}, \frac{0.1}{c}, \frac{0.2}{d}\}$$

.3

$$A' = 1 - \mu_A(x) = \{\frac{0.2}{a}, \frac{0.8}{b}, \frac{0.5}{d}, \frac{1}{e}\}$$

$$B' = 1 - \mu_B(x) = \{\frac{1}{a}, \frac{0.1}{b}, \frac{0.9}{c}, \frac{0.8}{d}\}$$

.4

$$core(A) = \{x \mid \mu_A(x) = 1\}$$

$core(A) = \{c\}$, $core(B) = \{e\}$

$$boundary(A) = \{x \mid 0 < \mu_A(x) < 1\}$$

$boundary(A) = \{a, b, d\}$, $boundary(B) = \{b, c, d\}$

$$support(A) = \{x \mid \mu_A(x) > 0\}$$

$support(A) = \{a, b, c, d\}$, $support(B) = \{b, c, d, e\}$

$$height(A) = Max\{\mu_A(x)\} \, \forall x \in X$$

$height(A) = 1$, $height(B) = 1$

.5

$$A_\lambda = \{x \mid \mu_A(x) \geq \lambda\} \quad , \quad A^\lambda = \{\frac{\lambda}{x} \mid x \in A_\lambda\}$$

$A_{0.2} = \{a, b, c, d\}$

$A_{0.8} = \{a, c\}$

$B_{0.2} = \{b, d, e\}$

$B_{0.8} = \{b, e\}$

$A^{0.2} = \{\frac{0.2}{a}, \frac{0.2}{b}, \frac{0.2}{c}, \frac{0.2}{d}\}$

$A^{0.8} = \{\frac{0.8}{a}, \frac{0.8}{c}\}$

$B^{0.2} = \{\frac{0.2}{b}, \frac{0.2}{d}, \frac{0.2}{e}\}$

$B^{0.8} = \{\frac{0.8}{b}, \frac{0.8}{e},\}$

ب) :

$B \cup C = (B \times X) \cup (Y \times C)$

$B \times X = \{\frac{0.5}{2,2}, \frac{0.5}{2,3}, \frac{0.5}{2,4}, \frac{0.5}{2,5}, \frac{0.5}{2,6}, \frac{0.3}{6,2}, \frac{0.3}{6,3}, \frac{0.3}{6,4}, \frac{0.3}{6,5}, \frac{0.3}{6,6}\}$

$Y \times C = \{\frac{0.2}{2,6}, \frac{0.2}{3,6}, \frac{0.2}{6,6}, \frac{0.8}{2,2}, \frac{0.8}{3,2}, \frac{0.8}{6,2}, \frac{1}{2,4}, \frac{1}{3,4}, \frac{1}{6,4}\}$

$\rightarrow BUC = \{\frac{0.8}{2,2}, \frac{0.5}{2,3}, \frac{1}{2,4}, \frac{0.5}{2,5}, \frac{0.5}{2,6}, \frac{0.8}{3,2}, \frac{1}{3,4}, \frac{0.2}{3,6}, \frac{0.8}{6,2}, \frac{0.3}{6,3}, \frac{1}{6,4}, \frac{0.3}{6,5}, \frac{0.3}{6,6}\}$

$(B \cup C) \cap A = (B \cup C) \cap (Y \times A)$

$Y \times A = \{\frac{0.1}{2,2}, \frac{0.1}{3,2}, \frac{0.1}{6,2}, \frac{1}{2,5}, \frac{1}{3,5}, \frac{1}{6,5}, \frac{0.7}{2,3}, \frac{0.7}{3,3}, \frac{0.7}{6,3}\}$

$(B \cup C) \cap A = \{\frac{0.1}{2,2}, \frac{0.1}{3,2}, \frac{0.1}{6,2}, \frac{0.5}{2,5}, \frac{0.3}{6,5}, \frac{0.5}{2,3}, \frac{0.3}{6,3}\}$

2) فرض کنید رابطه S و R به صورت زیر هستند:

S	c1	c2	c3
b1	0.4	0.7	0.5
b2	0.4	0.8	0.5
b3	0.4	0.4	0.4

R	b1	b2	b3
a1	0.3	0.7	0.7
a2	0.3	0.8	0.9
a3	0.3	0.8	1

الف) جدایی پذیر بودن روابط R و S را بررسی کنید.

ب) رابطه RoS را به کمک Min-max محاسبه کنید

جواب:

الف)

برای بررسی باید مراحل زیر طی شود:

۱- ابتدا هر سطر و هر ستون را تصویر کنیم که headerها مشخص شوند. طبق تعریفی هم که برای تصویر کردن داشتیم برای مثال برای تصویر کردن یک سطر باید بین اعضای آن سطر ماکسیمم بگیریم.

۲- حال باید هر یک از هدرهای به دست آمده را توسعه استوانه ای دهیم. یعنی مثلا در یک ستون هدر آن ستون را به عنوان زیروند راست در هر cell مینویسیم و یا برای هر سطر هدر مربوط به آن سطر را به عنوان زیروند چپ در هر cell مینویسیم.

۳- حال بین در هر خانه (cell) بین دو عدد جدید اضافه شده که همان توسعه استوانه‌ای ها هستن، اشتراک بگیریم که برای اشتراک گرفتن میتوان min گرفت.

۴- اگر رابطه جدا پذیر باشد باید در هر خانه min ای که در مرحله قبل گرفتیم با مقداری که از قبل در آن خانه نوشته شده بود یکسان باشد. اگر یکی از آن‌ها هم متفاوت باشد دیگر جداپذیر نیست.

ابتدا رابطه R را بررسی میکنیم:

۱- تصویر کردن(ماکسیمم گرفتن):

R	b1	b2	b3
a1	0.3	0.7	0.7
a2	0.3	0.8	0.9
a3	0.3	0.8	1

R	0.3	0.8	1
0.7	0.3	0.7	0.7
0.9	0.3	0.8	0.9
1	0.3	0.8	1

۲- توسعه استوانه‌ای:

R	0.3	0.8	1
0.7	0.3 0.7 0.3	0.7 0.7 0.8	0.7 0.7 1
0.9	0.3 0.9 0.3	0.8 0.9 0.8	0.9 0.9 1
1	0.3 1 0.3	0.8 1 0.8	1 1 1

۳- اشتراک توسعه استوانه‌ای ها:

R	0.3	0.8	1
0.7	0.3 0.3 ~~0.7 0.3~~	0.7 0.7 ~~0.7 0.8~~	0.7 0.7 ~~0.7 1~~
0.9	0.3 0.3 ~~0.9 0.3~~	0.8 0.8 ~~0.9 0.8~~	0.9 0.9 ~~0.9 1~~
1	0.3 0.3 ~~1 0.3~~	0.8 0.8 ~~1 0.8~~	1 1 ~~1 1~~

۴- حال همانطور که دیده میشود مقادیر سبز رنگ نوشته شده در بالای هر عدد در هر خانه که مقدار اشراک توسعه استوانه‌ای‌ها مباشد، برابر مقدار آن خانه میباشد. پس R جدا پذیر میباشد.

حال رابطه S را بررسی میکنیم:

۱- تصویر کردن(ماکسیمم گرفتن):

S	c1	c2	c3
b1	0.4	0.7	0.5
b2	0.4	0.8	0.5
b3	0.4	0.4	0.4

S	0.4	0.8	0.5
0.7	0.4	0.7	0.5
0.8	0.4	0.8	0.5
0.4	0.4	0.4	0.4

۲- توسعه استوانه‌ای:

S	0.4	0.8	0.5
0.7	0.4 0.7 0.4	0.7 0.7 0.8	0.5 0.7 0.5
0.8	0.4 0.8 0.4	0.8 0.8 0.8	0.5 0.8 0.5
0.4	0.4 0.4 0.4	0.4 0.4 0.8	0.4 0.4 0.5

۳- اشتراک توسعه استوانه‌ای ها:

S	0.4	0.8	0.5
0.7	0.4 0.4 ~~0.7 0.4~~	0.7 0.7 ~~0.7 0.8~~	0.5 0.5 ~~0.7 0.5~~
0.8	0.4 0.4 ~~0.8 0.4~~	0.8 0.8 ~~0.8 0.8~~	0.5 0.5 ~~0.8 0.5~~
0.4	0.4 0.4 ~~0.4 0.4~~	0.4 0.4 ~~0.4 0.8~~	0.4 0.4 ~~0.4 0.5~~

۴- حال همانطور که دیده میشود مقادیر سبز رنگ نوشته شده در بالای هر عدد در هر خانه که مقدار اشراک توسعه استوانه‌ای‌ها مباشد، برابر مقدار آن خانه میباشد. پس S جدا پذیر میباشد.

ب)

R	b1	b2	b3
a1	0.3	0.7	0.7
a2	0.3	0.8	0.9
a3	0.3	0.8	1

S	c1	c2	c3
b1	0.4	0.7	0.5
b2	0.4	0.8	0.5
b3	0.4	0.4	0.4

برای محاسبه از روش max-min استفاده میکنیم. طبق شکل بالا هم ستون‌های R با سطرهای S از یک جنس میباشند و میتوان ترکیب کرد. فرمول کلی به صورت زیر خواهد بود:

$$\mu_{R^\circ S}(a_i, c_j) = \max_{b\in B}\left\{min\left(\mu_R(a_i, b), \mu_S(b, c_j)\right)\right\}$$

حال طبق فرمول خواهیم داشت:

$$\mu_{R^\circ S}(a_1, c_1) = \max\{min(0.3,0.4), min(0.7,0.4), min(0.7,0.4)\} = 0.4$$

$$\mu_{R^\circ S}(a_1, c_2) = \max\{min(0.3,0.7), min(0.7,0.8), min(0.7,0.4)\} = 0.7$$

$$\mu_{R^\circ S}(a_1, c_3) = \max\{min(0.3,0.5), min(0.7,0.5), min(0.7,0.4)\} = 0.5$$

$$\mu_{R^\circ S}(a_2, c_1) = \max\{min(0.3,0.4), min(0.8,0.4), min(0.9,0.4)\} = 0.4$$

$$\mu_{R^\circ S}(a_2, c_2) = \max\{min(0.3,0.7), min(0.8,0.8), min(0.9,0.4)\} = 0.8$$

$$\mu_{R^\circ S}(a_2, c_3) = \max\{min(0.3,0.5), min(0.8,0.5), min(0.9,0.4)\} = 0.5$$

$$\mu_{R^\circ S}(a_3, c_1) = \max\{min(0.3,0.4), min(0.8,0.4), min(1,0.4)\} = 0.4$$

$$\mu_{R^\circ S}(a_3, c_2) = \max\{min(0.3,0.7), min(0.8,0.8), min(1,0.4)\} = 0.8$$

$$\mu_{R^\circ S}(a_3, c_3) = \max\{min(0.3,0.5), min(0.8,0.5), min(1,0.4)\} = 0.5$$

در نهایت نتیجه به صورت زیر میشود:

R°S	c1	c2	c3
a1	0.4	0.7	0.5
a2	0.4	0.8	0.5
a3	0.4	0.8	0.5

3) مجموعه های U_1, U_2, U_3, U_4 و همچنین رابطه ی Q که در فضای ضرب کارتزین $U_1 \times U_2 \times U_3 \times U_4$ تعریف شده است را در نظر بگیرید و موارد خواسته شده را به دست آورید.

$U_1 = \{a, b, c\}$, $U_2 = \{s, t\}$, $U_3 = \{x, y\}$, $U_4 = \{i, j\}$

$$Q = \frac{0.3}{b,t,y,i} + \frac{0.4}{a,s,x,i} + \frac{0.9}{b,s,y,i} + \frac{0.6}{b,s,y,j} + \frac{0.1}{a,t,y,j} + \frac{0.7}{c,s,y,i}$$

الف) تصویر رابطه ی Q بر $U_1 \times U_2 \times U_4$

ب) تصویر رابطه ی Q بر U_4

ج) گسترش استوانه ای رابطه ی حاصل از بند الف به فضای $U_1 \times U_2 \times U_3 \times U_4$

د) گسترش استوانه ای رابطه ی حاصل از بند ب به فضای $U_1 \times U_2 \times U_3 \times U_4$

جواب :

الف)

$$Q = \{\frac{0.3}{b,t,i}, \frac{0.4}{a,s,i}, \frac{0.9}{b,s,i}, \frac{0.6}{b,s,j}, \frac{0.1}{a,t,j}, \frac{0.7}{c,s,i}\}$$

ب)

$$Q = \{\frac{0.9}{i}, \frac{0.6}{j}\}$$

ج)

$Q = \{\frac{0.3}{b,t,x,i}, \frac{0.3}{b,t,y,i}, \frac{0.4}{a,s,x,i}, \frac{0.4}{a,s,y,i}, \frac{0.9}{b,s,x,i}, \frac{0.9}{b,s,y,i}, \frac{0.6}{b,s,x,j}, \frac{0.6}{b,s,y,j}, \frac{0.1}{a,t,x,j}, \frac{0.1}{a,t,y,j}, \frac{0.7}{c,s,x,i}, \frac{0.7}{c,s,y,i}\}$

د)

$Q = \{\frac{0.9}{a,s,x,i}, \frac{0.9}{a,s,y,i}, \frac{0.9}{a,t,x,i}, \frac{0.9}{a,t,y,i}, \frac{0.9}{b,s,x,i}, \frac{0.9}{b,s,y,i}, \frac{0.9}{b,t,x,i}, \frac{0.9}{b,t,y,i}, \frac{0.9}{c,s,x,i}, \frac{0.9}{c,s,y,i}, \frac{0.9}{c,t,x,i}, \frac{0.9}{c,t,y,i},$

$\frac{0.6}{a,s,x,j}, \frac{0.6}{a,s,y,j}, \frac{0.6}{a,t,x,j}, \frac{0.6}{a,t,y,j}, \frac{0.6}{b,s,x,j}, \frac{0.6}{b,s,y,j}, \frac{0.6}{b,t,x,j}, \frac{0.6}{b,t,y,j}, \frac{0.6}{c,s,x,j}, \frac{0.6}{c,s,y,j}, \frac{0.6}{c,t,x,j}, \frac{0.6}{c,t,y,j}\}$

---

4) فرض کنید رابطه $y = x_1^{\ 2}x_2 - x_1x_2^{\ 2}$ بین سه متغیر x_1 برگرفته از مجموعه فازی $A_1 = \{\frac{0.2}{1} + \frac{0.8}{2}\}$ و x_2 برگرفته از مجموعه فازی $A_2 = \{\frac{0.9}{1} + \frac{0.3}{2}\}$ و y برگرفته از مجموعه فازی B است. مجموعه B را بیابید.

جواب: در این سوال ورودی ما حاصل ضرب کارتزین x_1 و x_2 میباشد.

$B = A \circ R \ , \ A = A_1 \times A_2$

$A_1 \times A_2 = \{\frac{0.2}{1,1} + \frac{0.2}{1,2} + \frac{0.8}{2,1} + \frac{0.3}{2,2}\}$

حال باید براساس ورودی رابطه را درست کنیم. ستون‌های ورودی باید سطرهای رابطه همجنس باشند:

2	-2	0	
0	0	1	1,1
0	1	0	1,2
1	0	0	2,1
0	0	1	2,2

در نهایت بین مقادیر تعلق متناظر در هر درایه مینیمم میگیریم و بین نتایج آن‌ها ماکسیمم میگیریم و داریم:

$B = \{\frac{0.3}{0} + \frac{0.2}{-2} + \frac{0.8}{2}\}$

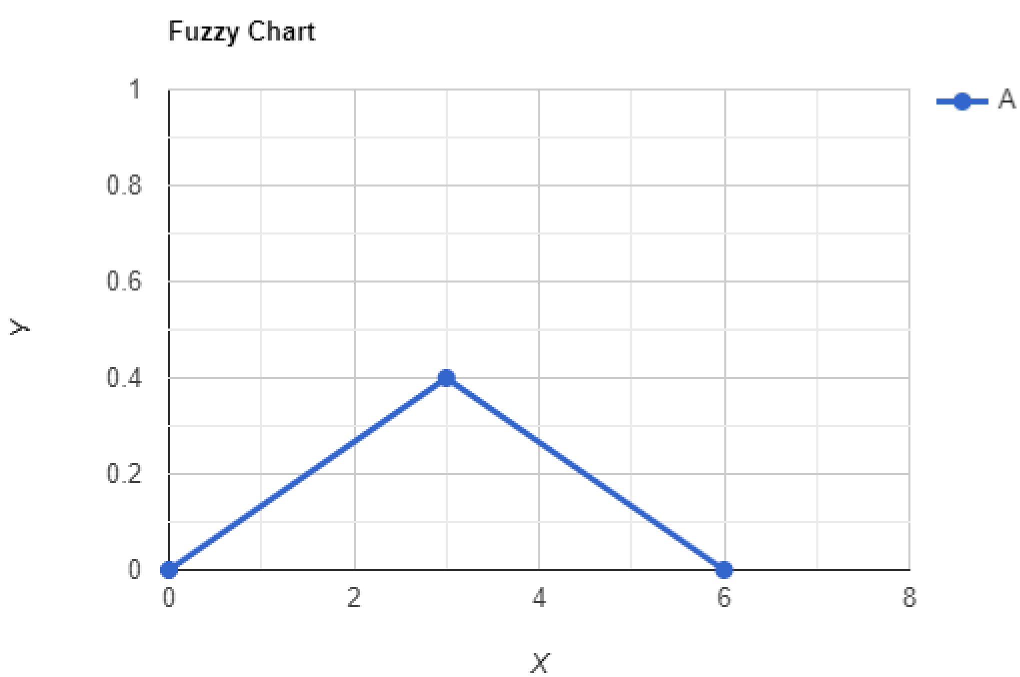
---

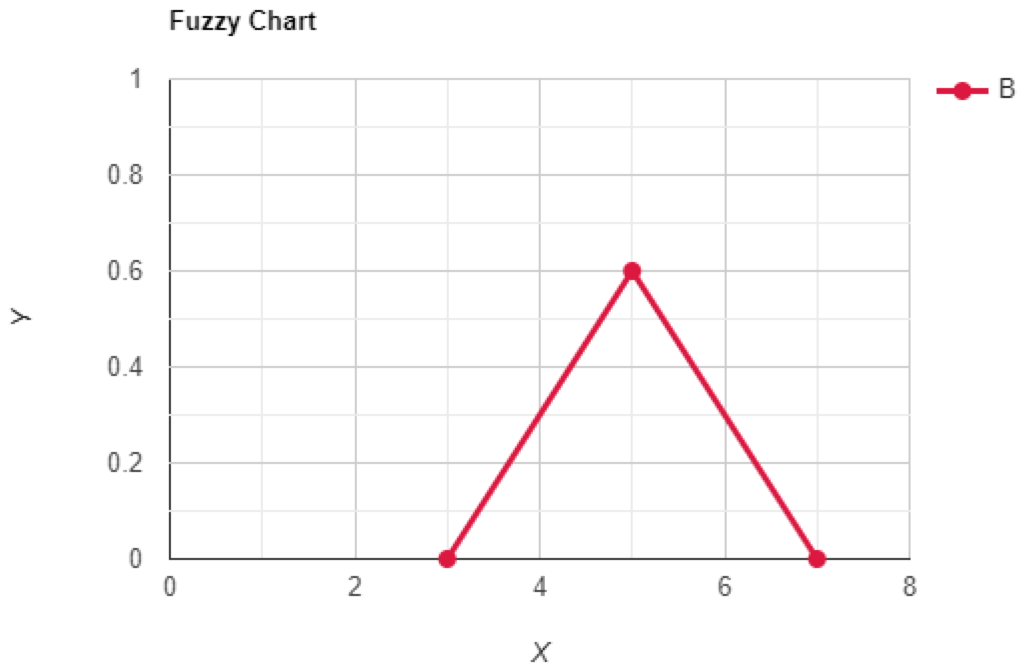
5) الف) فازی سازی و غیر فازی سازی را تعریف کنید.

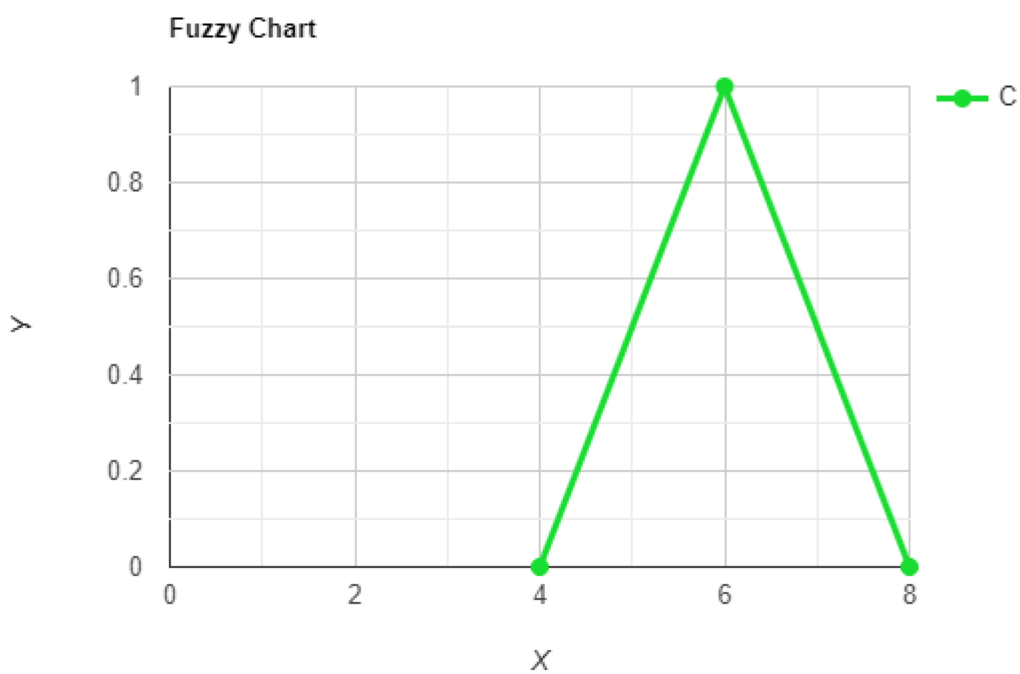
ب) مجموعه های فازی زیر را در نظر بگیرید. مجموعه ی D=AUBUC را با تکنیک های خواسته شده غیرفازی کنید.

روش ماکسیمم گیری

روش متوسط وزنی مراکز




Fuzzy Chart
B
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
2
4
6
8
Y
X


Fuzzy Chart
C
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
2
4
6
8
Y
X

جواب:

الف) **فازی سازی:** تبدیل یک متغیر یا مقدار دقیق را به یک مقدار فازی را عمل فازی سازی می گویند.

غیرفازی سازی: تبدیل مجموعه فازی خروجی به یک مقدار غیرفازی (دقیق crisp) است.

ب)

1. روش ماکسیمم گیری:

جایی که تابع تعلق بیشترین مقدار را دارد : $Z^{*} = 6$

2. روش متوسط وزنی مراکز:

$$Z^{*} = \frac{\sum \bar{z}\mu_c(\bar{z})}{\sum \mu_c(\bar{z})} = \frac{3\times0.4 + 5\times0.6 + 6\times1}{0.4+0.6+1} = 5.1$$

---

6) درستی یا نادرستی گزاره های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

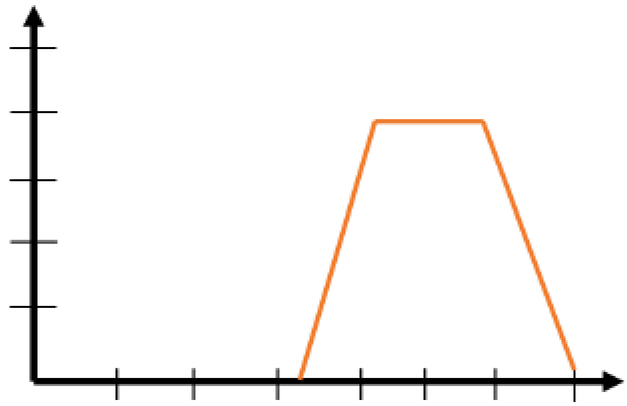
الف) اجتماع دو مجموعه ی فازی محدب ، همیشه یک مجموعه ی فازی محدب خواهد بود.

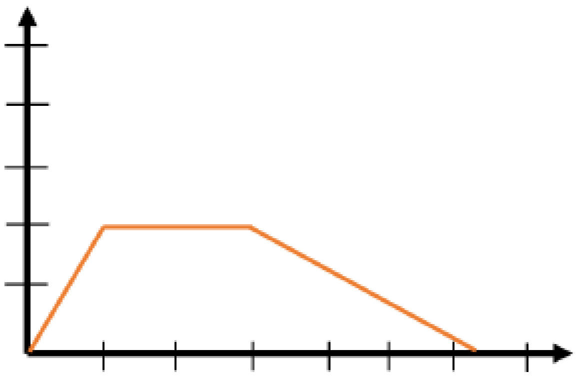
ب) با فرض مجموعه جهانی X و مجموعه ی دلخواه A و 'A (مکمل A) ، اشتراک A و 'A همیشه برابر تهی است.

ج) اگر R جداناپذیر نباشد، می توان $A \circ R = B$ را نتیجه گرفت.

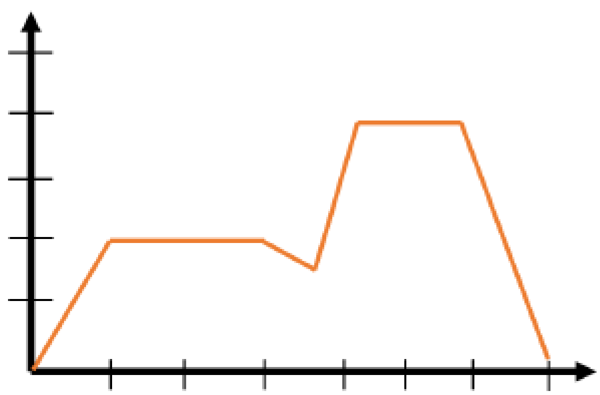
جواب:

الف) غلط - مثال نقض: دو مجموعه ی زیر محدب هستند





اما اجتماع این دو محدب نمی شود:



ب) غلط- مثال نقض:

$X = \{a, b\}\,,\ A = \{\frac{0.3}{a}\}\,,\ A' = \{\frac{0.7}{a}, \frac{1}{b}\}$

$A \cap A' = \{\frac{0.3}{a}\}$

ج) درست- تنها زمانی که رابطه جداپذیر باشد، می توان از تصویر R ، B را به دست آورد.

سوالات امتیازی:

7) الف) چرا ترکیب max-min از لحاظ فیزیکی و شهودی قابل قبول میباشد؟ (در صورت نیاز با ترسیم شکل مناسب توضیح دهید.)

ب) با رسم شکل نشان دهید که دو توجیه مختلف زیر برای رابطه A => B در چه ناحیه‌ای هایی با هم برابر و در چه ناحیه‌ای هایی با هم متفاوت هستند. (مقادیر تعلق حاصل در هر ناحیه را برای هر دو رابطه نشان دهید.)

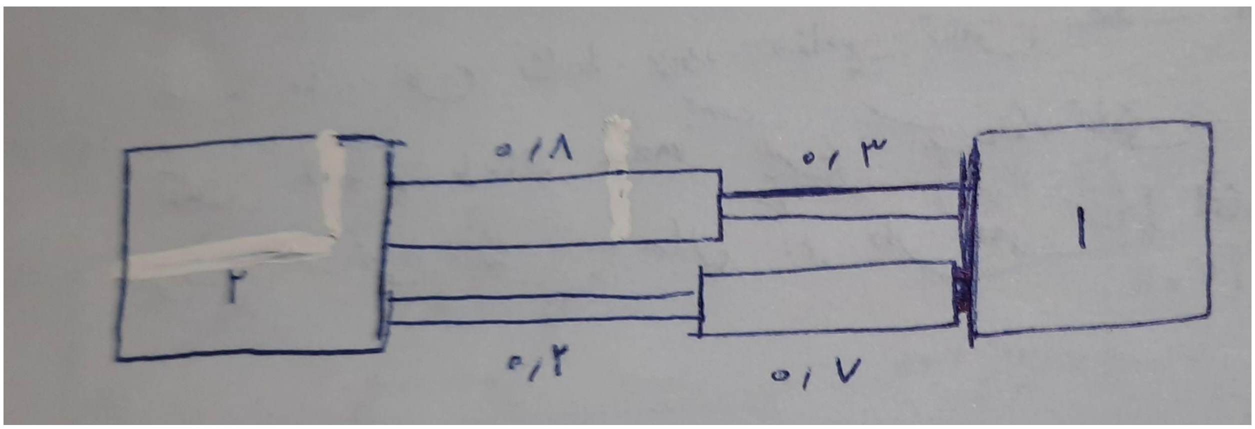
a) A => B = (A×B) ∪ (A’×Y)

b) A => B = A’ ∪ B

جواب:

الف) فرض کنید دو ماشین 1 و 2 را داریم که با اتصال یک سری طناب کلفت و نازک مانند شکل زیر به هم متصل شدند و میخواهیم ماشین 2 را به کمک 1 بکشیم. اعداد نوشته شده در حقیقت حداکثر نیروی قابل تحمل هر طناب میباشد. همچنین فرض کنید طناب‌ها توانایی کشیدن ماشین را نداشته باشند. اولین طنابی که پاره میشود طناب نازک با توانایی تحمل نیروی 0.2 میباشد ولی هنوز ارتباط بین ماشین‌های 1 و 2 وجود دارد و

ماشین 1 همچنان درحال کشیدن ماشین 2 میباشد. اگر نیرو را بیشتر کنیم و همچنان بازهم توانایی لازم را نداشته باشد در مرحله بعدی طناب نازک 0.3 پاره میشود. زمانی که طناب های 0.2 و 0.3 پاره شوند دیگر ارتباط بین ماشین‌های 1 و 2 ازبین میرود و میتوان گفت که حداکثر نیروی قابل تحمل بین این دو ماشین، 0.3 میباشد و اگر نیروی وارده از 0.3 بیشتر شود این دو ماشین از هم جدا میشوند. به عبارتی میتوان گفت تا زمانی که بین minها ، max برقرار است، ارتباط بین 1 و 2 برقرار است و وقتی بین minها مقدار max قطع شد، اون ارتباط بین این دو کامل ازبین میرود.



ب)

ابتدا قوانین را به شکل max-min می‌نویسیم:

$(A \times B) \cup (A' \times Y) = max\{min(\mu_A, \mu_B), 1 - \mu_A\}$

$(A' \cup B) = max\{1 - \mu_A, \mu_B\}$

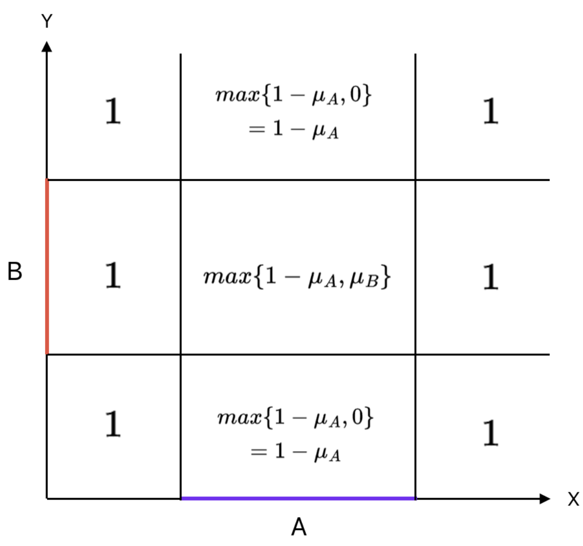
فرض کنید در شکل‌های زیر خط آبی محدوده‌ای از مجموعه مرجع X است که مجموعه A در آن مقادیر تعلق غیر صفر و خط قرمز محدوده‌ای از مجموعه مرجع Y است که مجموعه B در آن مقادیر تعلق غیر صفر دارد.

در نقاطی که مجموعه A در آن تعریف نمی‌شود و مقادیر تعلق صفر دارد، خروجی قانون اول برابر با ۱ می‌شود چون مقدار $1 - \mu_A$ برابر با ۱ شده و ماکسیمم لزوما برابر با ۱ می‌شود. به همین ترتیب قانون دوم نیز مقدارش ۱ می‌شود. بنابراین در نقاطی که A تعریف نشده است هر دو قانون مقدار ۱ را می‌دهند.

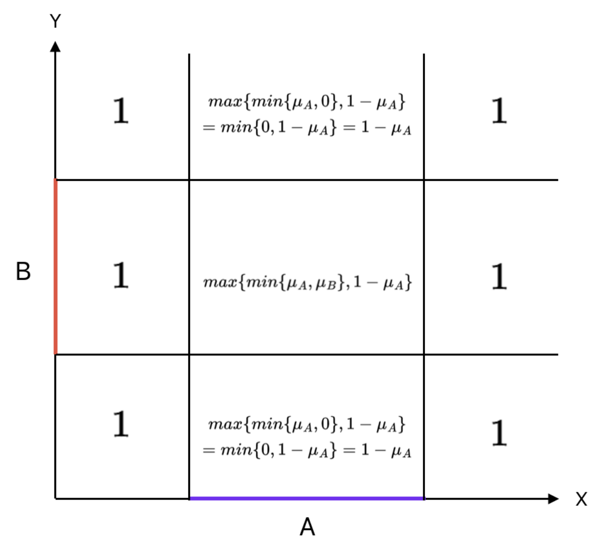
در نقاطی که مجموعه A تعریف می‌شود اما مجموعه B تعریف نمی‌شود مقدار خروجی در هر دو قانون برابر با $1 - \mu_A$ خواهد بود. نحوه به دست آمدن این مقدار برای این دو قانون را می‌توانید در نمودارهای زیر مشاهده کنید.

در نقاطی که هر دو مجموعه تعریف می‌شوند به نتیجه متفاوتی برای هر یک از قانون‌های می‌رسیم. این نتایج همان فرمول‌های max-min ای است که در بالا برای دو قانون ذکر شده به دست آوردیم. این دو فرمول تنها در صورتی برابر می‌شوند که مقدار μ_B برابر با $min(\mu_A, \mu_B)$ باشد. بنابراین در حالت فازی این دو توجیه لزوما با هم برابر نیستند.

$A' \cup B$



$(A \times B) \cup (A' \times Y)$



8) یکی از قوانین دمورگان را به دلخواه با استفاده از عملگرهای Max, Min از طریق استدلال فازی (منطق فازی) اثبات کنید.

$$\left(\mu_A(x) \vee \mu_B(x)\right)' = 1 - \left(\mu_A(x) \vee \mu_B(x)\right) = 1 - Max\left(\mu_A(x), \mu_B(x)\right)$$
$$= 1 - \begin{cases} \mu_A(x) & \mu_A(x) \geq \mu_B(x) \\ \mu_B(x) & \mu_A(x) < \mu_B(x) \end{cases} = \begin{cases} 1 - \mu_A(x) & \mu_A(x) \geq \mu_B(x) \\ 1 - \mu_B(x) & \mu_A(x) < \mu_B(x) \end{cases}$$

$$\mu_A(x)' \wedge \mu_B(x)' = Min(\mu_A(x)', \mu_B(x)') = Min\left(1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\right)$$
$$= \begin{cases} 1 - \mu_A(x) & 1 - \mu_A(x) \leq 1 - \mu_B(x) \\ 1 - \mu_B(x) & 1 - \mu_A(x) > 1 - \mu_B(x) \end{cases} = \begin{cases} 1 - \mu_A(x) & \mu_A(x) \geq \mu_B(x) \\ 1 - \mu_B(x) & \mu_A(x) < \mu_B(x) \end{cases}$$

$$\rightarrow \left(\mu_A(x) \vee \mu_B(x)\right)' = \mu_A(x)' \wedge \mu_B(x)'$$