

ECDSA 签名算法

Sammy

2018-04-10

1 公开参数

ECDSA 基于素数域的椭圆曲线，相关参数如表 1 所示

表 1: ECDSA 涉及的公开参数

符号	含义
O	无穷远点
q	一个大素数
b	椭圆曲线方程 $y^2 \equiv x^3 - 3x + b$ 中的常数
G	基点 (x_g, y_g) ，选定的曲线上的一个点
n	G 的阶，满足 $nG = O$
H	哈希算法

2 具体算法

组成算法的 3 个关键流程分别如算法 1、2、3 所示

Algorithm 1: ECDSA 密钥生成

输出: 私钥 d ，公钥 Q

```
1  $d \in_R [1, n-1]$  /* 随机生成一个整数  $d$  */
2  $Q \leftarrow d \cdot G$ 
```

Algorithm 2: ECDSA 签名

输入: 私钥 d ，消息 m

输出: 签名 (r, s)

```
1  $s \leftarrow 0$ 
2 while  $s = 0$  do
3    $r \leftarrow 0$ 
4   while  $r = 0$  do
5      $k \in_R [1, n-1]$ 
6      $P = (x, y) = k \cdot G$ 
7      $r \equiv x \pmod{n}$ 
8    $e \leftarrow H(m)$ 
9    $s \leftarrow k^{-1}(e + d \cdot r) \pmod{n}$ 
```

Algorithm 3: ECDSA 验签

输入: 公钥 Q ，消息 m ，签名 (r, s)

输出: Y 表示签名合法， N 表示签名非法

```
1 if  $r \notin [1, n-1]$  或  $s \notin [1, n-1]$  then
2   return  $N$ 
3  $e \leftarrow H(m)$ 
4  $w \leftarrow s^{-1} \pmod{n}$ 
5  $A \leftarrow (x_1, y_1) = ewG + rwQ$ 
6 if  $A = O$  then
7   return  $N$ ;
8  $v \leftarrow x_1 \pmod{n}$ 
9 if  $v = r$  then return  $Y$ 
10 else return  $N$ 
```

3 正确性证明

$$\begin{aligned} s &\equiv k^{-1}(e + d \cdot r) \pmod{n} \\ \Rightarrow k &\equiv s^{-1}(e + d \cdot r) \pmod{n} \\ \Rightarrow k &\equiv (s^{-1} \cdot e + s^{-1} \cdot d \cdot r) \pmod{n} \\ \Rightarrow k &\equiv (e \cdot w + r \cdot w \cdot d) \pmod{n} \\ \Rightarrow kG &\equiv (e \cdot w + r \cdot w \cdot d) \cdot G \pmod{n} \\ \Rightarrow kG &\equiv e \cdot w \cdot G + r \cdot w \cdot d \cdot G \pmod{n} \\ \Rightarrow kG &\equiv e \cdot w \cdot G + r \cdot w \cdot Q \pmod{n} \\ \Rightarrow P &= A \\ \Rightarrow r &\equiv x \equiv x_1 \equiv v \pmod{n} \end{aligned}$$

4 Go 语言的 ECDSA 库

Go 语言 `crypto/elliptic` 包提供了 FIPS 186-3 标准规定的 4 种曲线 P224、P256、P384 和 P512，我们根据自己的安全强度需求直接利用这些曲线就行。其中，紧接 P 的数字表示以比特为单位衡量的安全强度，越大越强。

相应的演示程序如 `ecdsa_test.go` 的 `TestECDSA` 函数。