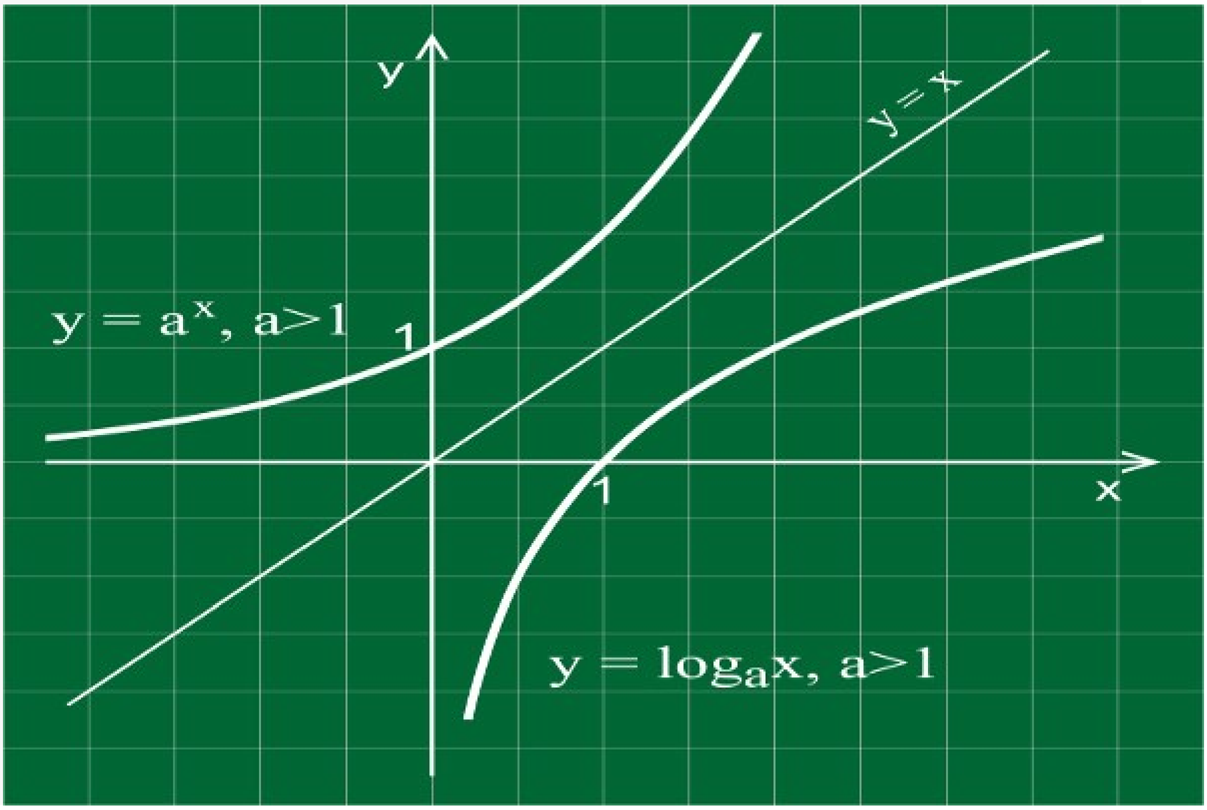
Logaritmo

Logaritmo é a operação inversa da exponencial utilizada para o cálculo de equações exponenciais que não possuem soluções imediatas.



Imprimir
Texto:

PUBLICIDADE

Logaritmo é uma ferramenta muito importante não somente para a área da matemática, pois possui aplicação em diversos campos da ciência, como na geografia, química e computação.

Historicamente o logaritmo **surge a fim de facilitar contas** que apareciam com frequência em diversas áreas cientificas. John Napier foi pioneiro nos estudos sobre logaritmos, e conseguiu desenvolver a operação capaz de transformar produtos em soma, divisões em subtrações e potências em multiplicações.

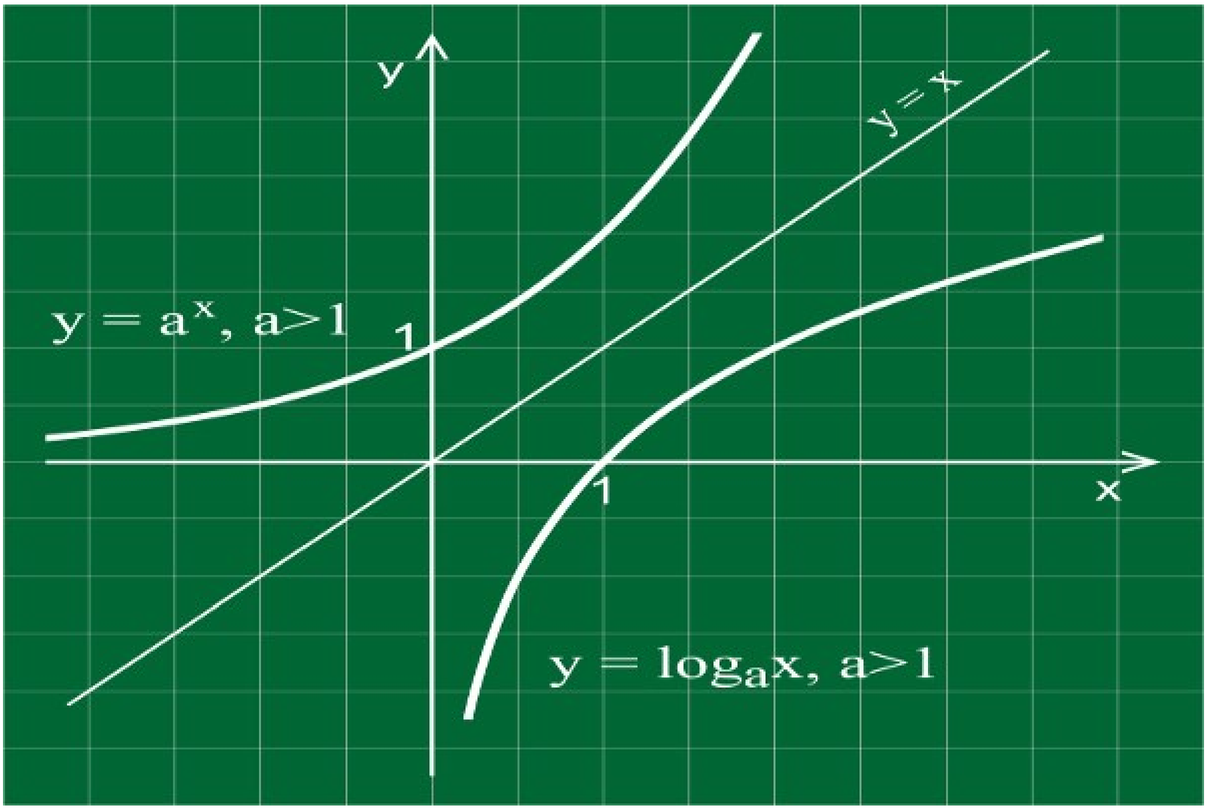
Definindo essa operação, com o tempo, outros matemáticos formalizaram **definições e propriedades**, além disso, foi desenvolvida também a conhecida **tábua de logaritmos**.

Tópicos deste artigo

- 1 - Definição do logaritmo
-
- 2 - Nomenclatura:
-
- 3 - Como calcular um logaritmo?
-
- 4 - Condição de existência do logaritmo
- 5 - Propriedade dos logaritmos
    - Propriedade 1
    - Propriedade 2
    - Propriedade 3
    - Propriedade 4
    - Propriedade 5
-
- 6 - Exercícios resolvidos
-

Definição do logaritmo

Esboço do gráfico da função logaritmo (à direita) e sua inversa exponencial (à esquerda).



Considere dois números reais positivos **a** e **b**, com **a ≠ 0**. O logaritmo de **b** na base **a** é o número **x** se, e somente se, **a** elevado a **x** for igual ao número **b**.

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Nomenclatura:

a → base

b → logaritmando

x → logaritmo

Veja os exemplos:

$$\log_6 36 = 2,\ \ pois\ 6^2 = 36$$

$$\log_2 16 = 4,\ \ pois\ 2^4 = 16$$

$$\log_{\frac{1}{5}} 5 = -1,\ \ pois\ \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = 5$$

Quando um logaritmo possui a base igual a 10, esse é chamado **logaritmo decimal.** Ao registrar-se um logaritmo decimal, não é necessário escrever a base 10. É convencionado que:

$$log_{10}b = log\ b$$

Leia também: Sistema de logaritmos decimais

Não pare agora... Tem mais depois da publicidade ;)

Como calcular um logaritmo?

Para calcular um logaritmo, temos que procurar um **número que, quando elevamos a base, resulte no logaritmando**. Pegando como exemplo o logaritmo de 36 na base 6 do exemplo anterior, devemos encontrar um número que, quando elevamos a base 6, resulte em 36. Como $6^2 = 36$, sendo a resposta 2. Vejamos mais exemplos:

1) Log 1000. Para calcular esse logaritmo, devemos encontrar um número que, elevado a 10, seja igual a 1000, isto é, $10^x = 1000$.

Resolvendo a equação exponencial, temos:

$$10^x = 1000$$

$$\cancel{10}^x = \cancel{10}^3$$

$$x = 3$$

Portanto,

$$log\ 1000 = 3$$

1.Calcule o logaritmo:

$$log_{\sqrt{7}}(\frac{1}{49})$$

Devemos encontrar um número que, elevado à raiz de 7, seja igual a um quarenta e nove avos. Resolvendo a equação, temos:

$$\sqrt{7}^x = \frac{1}{49}$$

$$7^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{7^2}$$

$$7^{\frac{x}{2}} = 7^{-2}$$

$$\frac{x}{2} = -2$$

$$x = -4$$

Leia mais: Equação exponencial - equação com incógnita no expoente

Condição de existência do logaritmo

Considere o logaritmo a seguir:

$$log_a b = x$$

A expressão só está definida para quando a base for maior que zero e diferente de um e quando o logaritmando for maior que zero, ou seja:

$$a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

$$b > 0$$

Propriedade dos logaritmos

Veja a seguir as principais propriedades dos logaritmos. Todos os logaritmos aqui citados satisfazem a condição de existência.

- **Propriedade 1**

O logaritmo do produto de dois fatores é igual à soma dos logaritmos desses fatores.

$$log_a(n \cdot m) = log_a n + log_a m$$

- **Propriedade 2**

O logaritmo do quociente entre dois números é igual à diferença dos logaritmos desses números.

$$log_a\left(\frac{n}{m}\right) = log_a n - log_a m$$

- **Propriedade 3**

O logaritmo de uma potência é igual à multiplicação do expoente dessa potência pelo logaritmo da base da potência, em que mantemos a base do logaritmo.

$$log_a b^n = n \cdot log_a b$$

- **Propriedade 4**

O logaritmo de uma raiz é igual ao inverso do índice da raiz multiplicado pelo logaritmo, em que também mantemos a base.

$$log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \cdot log_a b$$

- **Propriedade 5**

O logaritmo de um número, em uma base elevada a uma potência, é igual à multiplicação do inverso do expoente dessa base.

$$log_{a^n} b = \frac{1}{n} \cdot log_a b$$

Saiba mais: Aplicações dos logaritmos: veja exemplos

Exercícios resolvidos

Questão 1 - (Fuvest - SP) Se $x^5 = 1000$ e $b^3 = 100$, então o logaritmo de x na base b vale:

A) 0,5

B) 0,9

C) 1,2

D) 1,5

E) 2,0

Solução

Como os números 1000 e 100 podem ser escritos na base 10, temos:

$$x^5 = 1000 \Rightarrow x^5 = 10^3 \Rightarrow x = \sqrt[5]{10^3} \Rightarrow x = 10^{\frac{3}{5}}$$

$$b^3 = 100 \Rightarrow b^3 = 10^2 \Rightarrow b = \sqrt[3]{10^2} \Rightarrow b = 10^{\frac{2}{3}}$$

Substituindo no logaritmo de x na base b e aplicando a definição, temos:

$$log_b x = log_{10^{\frac{2}{3}}} 10^{\frac{3}{5}} = y \Rightarrow (10^{\frac{2}{3}})^y = 10^{\frac{3}{5}} \Rightarrow 10^{\frac{2y}{3}} = 10^{\frac{3}{5}} \Rightarrow \frac{2y}{3} = \frac{3}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10y = 9 \Rightarrow y = \frac{9}{10}$$

Questão 2 - (Enem) Define-se o potencial hidrogeniônico (pH) de uma solução como o índice que indica sua acidez, neutralidade ou alcalinidade. É encontrado da seguinte maneira:

$$pH = log\frac{1}{H^+}$$

Sendo H^+ a concentração de íons de hidrogênio nessa solução. O pH de uma solução, em que $H^+ = 1{,}0 \cdot 10^{-9}$, é:

Solução:

Substituindo o valor do H^+ na fórmula do pH, temos:

$$pH = log\frac{1}{H^+}$$

$$pH = log\frac{1}{10^{-9}}$$

$$pH = log10^9$$

$$pH = 9 \cdot log10$$

$$pH = 9$$

Por L.do Robson Luiz
Professor de Matemática

Gostaria de fazer a referência deste texto em um trabalho escolar ou acadêmico? Veja:

LUIZ, Robson. "Logaritmo"; *Brasil Escola*. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/logaritmo.htm. Acesso em 29 de agosto de 2022.