1 Прямая задача

Разделение акустического волнового поля на первичную и отраженную (фоновую и аномальную части)

$P(\overline{r}, t)$ - давление в точке $\overline{r}$ в момент t

Применяем преобразование Фурье:

$$P(\overline{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p(\overline{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$p(\overline{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\overline{r}, t) e^{i\omega t} dt$$

Акустическое уравнение:

$$\nabla^2 p(\overline{r}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2(\overline{r})} p(\overline{r}, \omega) = -f^e(\overline{r}, \omega),$$

где

$$f^e = \int_{-\infty}^{+\infty} F^e(\overline{r}, t) e^{i\omega t} dt$$

Введем граничные условия: $rp(\overline{r}, \omega)$ - ограничено и

$$\lim_{r \to \infty} r \left[\frac{\partial}{\partial r} p(\overline{r}, \omega) - i \frac{\omega}{c} p(\overline{r}, \omega) \right] = 0$$

Введем представление скорости в модели:

$$\frac{1}{c^2(\overline{r})} = \frac{1}{c_b^2}(1 + a(\overline{r})),$$

где величина $a(\overline{r})$ задана внутри аномальной области, где скорость отлична от фоновой.

Считаем, что вызванная этим неоднородность локальна, то есть:

$$\exists R : \forall \overline{r} : \ \|\overline{r}\| > R \ \to (\overline{r}) = c_b(\overline{r})$$

Для удобства введем понятие медленности:

$$s(\overline{r}) = \frac{1}{c(\overline{r})},\, s_b(\overline{r}) = \frac{1}{c_b(\overline{r})},$$

тогда

$$a(\overline{r}) = \frac{s^2(\overline{r}) - s_b^2(\overline{r})}{S_b^2(\overline{r})} = \frac{\Delta S^2(\overline{r})}{S_b^2(\overline{r})}$$

1.1 Разделение:

$$p(\overline{r},\omega) = p^i(\overline{r},\omega) + p^s(\overline{r},\omega),$$

где p^i - первичное (initial) поле, p^s - отраженное (secondary) поле.

Уравнения после разделения примут вид:

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^2 p^i(\overline{r},\omega) + \frac{\omega^2}{c_b^2(\overline{r})} p^i(\overline{r},\omega) = -f^e(\overline{r},\omega), \\ &\nabla^2 p^s(\overline{r},\omega) + \frac{\omega^2}{c_b^2(\overline{r})} p^i s\overline{r},\omega) = -\omega^2 \nabla s^2(\overline{r}) p(\overline{r},\omega) \end{aligned}\right\}\text{удовл. гр.усл.}$$

$f^a(\overline{r},\omega) = \omega^2 \nabla s^2 p(\overline{r},\omega)$ - интенсивность аномального источника
$\nabla^2 p^s(\overline{r},\omega) + \dfrac{\omega^2}{c_b^2(\overline{r})} p^2(\overline{r},\omega) = -f^a(\overline{r},\omega)$

Интегральное уравнение:

$$p^i(\overline{r}_j,\omega) = \int\int_{V\infty}\int f^e(\overline{r},\omega) G^\omega(\overline{r}_j \mid \overline{r},\omega) dv = G_\omega(f^e)$$

Здесь под $\overline{r}_j$ понимается некоторая постоянная точка, в то время как по $\overline{r}$ ведется интегрирование.

$G_\omega(f^e)$ - скалярный волновой оператор Грина,ёё $G^\omega(\overline{r}_j \mid \overline{r},\omega)$ - функция Грина - хорошее решение уравнения для сигнала – дельта-функции,

$$\nabla^2 G^\omega(\overline{r}_j \mid \overline{r}, \omega) + \frac{\omega^2}{c_b^2(\overline{r})} G^\omega(\overline{r}_j \mid \overline{r}, \omega) = -\delta(\overline{r}_j, -\overline{r})$$

Для отр. поля:

$$p^s(\overline{r}, \omega) = \int\int_{\mathcal{D}}\int G^\omega(\overline{r}_j \mid \overline{r}, \omega) f^a(\overline{r}, \omega) d\overline{r} = G_\omega(f^a),$$

то есть $p^s = \omega^2 G_\omega(\nabla s^2 p)$.

1.2 Общее уравнение:

$$p(\overline{r}_j, \omega) = \omega^2 G_\omega \left(\nabla s^2(\overline{r})\ p(\overline{r}, \omega)\right) + p^i(\overline{r}, \omega),$$

где первое слагаемое соответствует отраженным волнам, а второе - первичным.

$\overline{r}_j \in \mathcal{D} \Rightarrow$ инт. ур-е относительно волнового поля $p(\overline{r},\omega)$

Теорема 1.1 (взаимности)**.** *Можно поменять роли точек "источник-приемник" местами, и результат не изменится:*

$$G^\omega(\overline{r}'' \mid \overline{r}', \omega) = G^\omega(\overline{r}' \mid \overline{r}'', \omega)$$

1.3 Приближение Борна

$$\begin{aligned} p^s(\overline{r}_j, \omega) = \omega^2 G_\omega \left(\triangle s^2(\overline{r}) p(\overline{r}, \omega)\right) = \\ \omega^2 \int\int_{\mathcal{D}}\int G^\omega(\overline{r}_j \mid \overline{r}, \omega) \triangle s^2(\overline{r}) \left[p^i(\overline{r},\omega) + p^s(\overline{r},\omega)\right] dr \end{aligned}$$

$p^B(\overline{r},\omega)$ - приближение Борна: отбрасываем отраженное поле внутри области:

$$p^B(\overline{r}_j,\omega) = \omega^2 \int\int_{\mathcal{D}}\int G^\omega\left(\overline{r}_j \mid \overline{r},\omega\right)\nabla s^2(\overline{r})p^i(\overline{r},\omega)dr$$

Теперь эта задача решается: p^i можно вычислить, следовательно, можно посчитать и p^B.

1.4 Квазилинейное приближение

$$p(\overline{r},\omega) = p^i(\overline{r},\omega) + p^s(\overline{r},\omega) = \left[1+\lambda(\overline{r},\omega)\right]p^i(\overline{r},\omega),\;\; \lambda(\overline{r},\omega) = \frac{p^s(\overline{r},\omega)}{p^i(\overline{r},\omega)}$$

$$p^s(\overline{r}_j,\omega) = \omega^2 G_\omega\left(\triangle s^2(\overline{r})\left[1+\lambda(\overline{r},\omega)\right]p^i(\overline{r},\omega)\right)$$

Заметим, что при $\lambda = 0$ получаем приближение Борна.

При таком подходе основной проблемой становится нахождение λ, которая решается численным решением задачи минимизации

$$\|\lambda(\overline{r}_j,\omega)p^i(\overline{r}_j,\omega) - \omega^2 G_\omega\left(\triangle s^2(\overline{r})\left[1+\lambda(\overline{r},\omega)\right]p^i(\overline{r},\omega)\right)\|_{\Omega,\mathcal{D}},$$

где под $\|\cdot\|_{\Omega,\mathcal{D}}$ подразумевается норма в L_2, т.е.

$$\|p\|_{\Omega,\mathcal{D}} = \sqrt{\int_\Omega\int\int_{\mathcal{D}}\int(p(\overline{r},u))^2 drdu}$$

1.5 Квазианалитическое приближение

Раскладываем λ по Тейлору:

$$\lambda(\overline{r},\omega) = \lambda(\overline{r}_j,\omega) + (\overline{r}-\overline{r}_j)\nabla\lambda(\overline{r}_j,\omega) + O(|\overline{r}-\overline{r}_j|^2)$$

Тогда

$$\lambda(\overline{r},\omega)p^i(\overline{r}_j,\omega) \approx \omega^2\lambda(\overline{r}_j,\omega)G_\omega\left[\triangle s^2 p^i\right] + p^B = \lambda(\overline{r}_j,\omega)p^B(\overline{r}_j,\omega) + p^\beta(\overline{r}_j,\omega)$$

$$\lambda(\overline{r}_j,\omega) = \frac{p^B(\overline{r}_j,\omega)}{p^i(\overline{r}_j,\omega) - p^\beta(\overline{r}_j,\omega)}, \quad \overline{r}_j \in \mathcal{D}$$

Таким образом,

$$p^s_{QA} = \omega^2 G_\omega\left[\triangle s^2(\overline{r})\frac{p^i(\overline{r},\omega)}{1-g(\overline{r},\omega)}\right], \quad g(\overline{r},\omega) = \frac{p^B(\overline{r},\omega)}{p^i(\overline{r},\omega)}$$