Niektóre zadania z kolokwiów i egzaminów ze starych lat. Mogły się zdarzyć (niestety) błędy przy przepisywaniu. ML

1 MSE, nieobciążoność, zgodność, efektywność

1.1

Niech $X_1, \ldots, X_n$ próba prosta z rozkładu wykładniczego o wartości oczekiwanej $\mathbb{E}X = \mu$. Rozważmy rodzinę estymatorów parametru μ postaci $\hat{\mu} = A \sum_{i=1}^{n} X_i$.

a) Wyznacz stałą A, dla której błąd średniokwadratowy estymatora μ jest najmniejszy.

b) Zbadaj nieobciążoność oraz zgodność estymatora.

1.2

Niech $X_1, \ldots, X_n$ próba prosta z rozkładu Weibulla

$$W\left(\frac{1}{\theta}, 2\right) \sim f_\theta(x) = \frac{2x}{\theta} \exp(-\frac{x^2}{\theta}) \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x).$$

a) Wyznacz A tak, aby

$$\hat{\theta} = A \min\{X_1^2, \ldots, X_n^2\}$$

był estymatorem nieobciążonym θ.

b) Sprawdź zgodność estymatora θ.

1.3

Niech $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ z nieznaną wartością oczekiwaną oraz skończonym odchyleniem standardowym σ. Niech $\overline{X}$, $\overline{s}$ są odpowiednio średnią i odchyleniem standardowym próby. Wyznacz stałą a tak, aby statystyka $T(X_1, \ldots, X_n) = a\frac{\overline{X}}{\overline{s}}$ było estymatorem nieobciążonym $\hat{\phi} = \frac{\mu}{\sigma}$.

1.4

Niech $X_1, \ldots, X_n$, $Y_1, \ldots, Y_m$ będą niezależnymi próbami składającymi się z niezależnych obserwacji z rozkładu o wartości oczekiwanej μ i wariancji σ^2. Który z poniższych estymatorów

$$\hat{\mu_1} = \frac{1}{2}(\overline{X} + \overline{Y}),$$

$$\hat{\mu_2} = \frac{n}{n+m}\overline{X} + \frac{m}{n+m}\overline{Y}$$

należy zastosować do oszacowania wartości oczekiwanej μ?

1.5

Niech $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d o gęstości

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} x^{\frac{1}{\theta}-1} \mathbb{I}_{(0,1)}(x).$$

a) Znaleźć estymator największej wiarygodności parametru θ.
b) Znaleźć błąd średniokwadratowy parametru θ.

1.6

Niech $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d o gęstości

$$f_\theta(x) = \theta \exp(-\theta x) \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x),\ \theta > 0.$$

Obliczyć efektywność estymatora parametru θ

$$T(\mathbb{X}) = \frac{n-1}{\sum X_i}.$$

1.7

Obliczyć informację Fishera dla parametru p z rozkładu geometrycznego.

1.8

?

Załóżmy, że

1. $X_1, ..., X_{10}, X_{11}, ..., X_{20}$ są niezależnymi obserwacjami,
2. $\mathbb{E}X_i = \mu_1$ dla i=1,...10,
3. $\mathbb{E}X_i = \mu_2$ dla i=11,...20,
4. $\mathrm{Var}X_i = \sigma^2$ dla i=1,...10,
5. $\mathrm{Var}X_i = 2\sigma^2$ dla i=11,...20,
6. $\overline{X}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{10} X_i}{10}$,
7. $\overline{X}_2 = \frac{\sum_{i=11}^{20} X_i}{10}$,
8. $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{20} X_i}{20}$,
9. parametry μ_1, μ_2, σ są nieznane.

Dobrać stałe a, b, aby statystyka

$$T = a\sum_{i=1}^{20}(X_i - \overline{X})^2 + b(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)^2$$

była estymatorem nieobciążonym parametru σ^2.

1.9

Niech $X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}, \ldots, X_{n+m}$ $\quad i.i.d. \quad \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ z nieznaną wartością oczekiwaną i wariancją. Znam wartości tylko pierwszy n obserwacji oraz średniej $\overline{X_{m+n}}$. Wyznaczyć obciążenie następującego estymatora wariancji

$$T = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X_{m+n}})^2.$$

1.10

Niech $X_1, ...X_n$ oznacza próbkę prostą rozkładu o gęstości $f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} \exp\{-\frac{1}{\theta}x\} I_{(0,\infty)}(x)$ przy czym $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Niech $\tilde{\theta}$ oznacza estymator parametru θ wyznaczony metodą momentów. Dobrać stałą a, dla której błąd średniokwadratowy estymatora parametru θ postaci $T(X_1, ..., X_n) = a\tilde{\theta}$ jest najmniejszy. Zbadać czy estymator T, wyznaczony dla tak dobranej stałej, jest zgodny.

1.11

Zadanie 1 (5 punktów)
Niech $X_1, \ldots, X_{15}$ oznaczają ciąg niezależnych zmiennych losowych będących wynikami pomiarów pewnej nieznanej wielkości μ, wykonanych dwoma przyrządami. Zakładamy, że każda ze zmiennych $X_1, \ldots, X_{10}$, ma rozkład $N(\mu, \sigma_1)$, natomiast każda ze zmiennych $X_{11}, \ldots, X_{15}$, ma rozkład $N(\mu, \sigma_2)$. Dobrać tak współczynniki c_i, aby estymator $\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{15} c_i X_i$ był nieobciążony i efektywny. Podać postać tego estymatora dla $\sigma_1 = 0.1$ oraz $\sigma_2 = 0.2$. / $Var\, X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$

2 Generowanie zmiennych losowych, statystyki dostateczne, minimalne statystyki dostateczne

2.1

Dane U$\sim U([0,1])$. Wyznaczyć algorytm generowania zmiennych losowych o gęstości

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}\ , \ X \sim \mathcal{C}(1).$$

2.2

Dane U$\sim U([0,1])$. Wyznaczyć algorytm generowania zmiennych losowych o gęstości

$$f(x) = \frac{\alpha}{\pi} \frac{1}{\alpha^2 + (\theta - x)^2},\ \alpha > 0, \theta \in \mathbb{R}.$$

2.3

Niech $X_1, \ldots, X_n$ próbka prosta z rozkładu Weibulla

$$W(\alpha, \beta) \sim f(x) = \frac{\alpha}{\beta}(\frac{x}{\beta})^{\alpha-1} \exp\{-(\frac{x}{\beta})^{\alpha}\}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x).$$

Znaleźć statystykę dostateczną dla tej rodziny rozkładów.

?

2.4

Niech $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $Beta(\alpha, \alpha)$. Wyznacz minimalną statystykę dostateczną.

$$f_{\alpha,\alpha}(x) = \frac{1}{\beta(\alpha, \alpha)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\alpha-1}\mathbb{I}_{(0,1)}(x)$$

?

2.5

Niech $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. z rozkładu o podanej gęstości

$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha-1}\mathbb{I}_{(\beta,\infty)}(x), \quad \alpha, \beta > 0$$

Wyznaczyć statystykę dostateczną.

?

2.6

Niech $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. z rozkładu o podanej gęstości

$$f(x) = \frac{a^3}{2} x^2 \exp(-ax)\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x) \sim \Gamma(3, a).$$

a) Znaleźć statystykę dostateczną.
b) Znaleźć estymator największej wiarygodności i sprawdzić czy jest zgodny.

2.7

Niech $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. z rozkładu o podanej gęstości

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\theta}\exp\{x - \frac{e^x}{\theta}\}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x).$$

Podać minimalną statystykę dostateczną dla tej rodziny rozkładów.

2.8

Niech $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. z rozkładu o podanej gęstości Rayleigha

$$f_\theta(x) = \frac{x}{\theta^2}\exp\{-\frac{x^2}{2\theta^2}\}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x).$$

Podać minimalną statystykę dostateczną dla tej rodziny rozkładów.

2.9

Niech $(X_1, Y_1), .., (X_n, Y_n)$ będzie próbą prostą z dwuwymiarowego rozkładu normalnego $N_2(\theta, V)$ gdzie θ jest wektorem zerowym, natomiast V jest macierzą kowariancji postaci:

$$V = \{1, \theta; \theta, 1\}.$$

Wyznaczyć minimalną statystykę dostateczną dla parametru θ.

2.10

Niech $X_1, ...X_n$ oznacza próbkę prostą rozkładu o gęstości $f_\theta(x) = \frac{\theta 2^\theta}{(2+x)^{\theta+1}} I_{(0,\infty)}(x)$

1. Wyznaczyć statystykę dostateczną dla parametru θ
2. Wyznaczyć estymator największej wiarygodności parametru θ.

3 Estymatory: metoda momentów, metoda największej wiarygodności, bayesowski

3.1

Realizacja próby prostej z rozkładu $f(x) = \frac{1}{\sigma} \exp(-\frac{x-\xi}{\sigma}) \mathbb{I}_{(\xi,\infty)}(x)$ wygląda następująco:

2.5, 5.5, 2, 10.

Wyznacz wartości estymatorów par. ξ oraz σ korzystając z metody momentów.

3.2

Czas oczekiwania modelowany jest zmienną losową o gęstości $f(x) = \frac{1}{2\theta^3} x^2 \exp(-\frac{x}{\theta})$, $x, \theta > 0$.

a) Skonstruować estymator największej wiarygodności θ i wyznaczyć wartość tego estymatora dla próby:

31.27, 19.94, 16.10, (...) 23.03.

b) Wyznaczyć statystykę dostateczną parametru θ.

3.3

Niech $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. z rozkładu o podanej gęstości

$$f_\theta(x) = (\frac{1}{\theta} - |\frac{x}{\theta^2}|) \mathbb{I}_{(-\theta,\theta)}(x).$$

Metodą momentów skonstruować estymator parametru θ.

3.4

Niech $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. z rozkładu o podanej gęstości

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} x^{\frac{1}{\theta}-1} \mathbb{I}_{(0,1)}(x).$$

Wyznacz estymator największej wiarygodności parametru θ oraz błąd średnio-kwadratowy tego estymatora.

3.5

Poniższe obserwacje:

1.22, 0.09, ... ,3.12

to próba losowa z rozkładu o gęstości

$$f(x) = \theta x \exp(-\theta \cdot \frac{x^2}{2}),\ x, \theta > 0.$$

Oszacuj parametr θ korzystając z estymatora wyznaczonego z metody momentów.

3.6

Niech $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. z rozkładu o podanej gęstości

$$f_\theta(x) = \exp\{-(x-\theta)\} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x),$$

przy czym θ jest nieznanym parametrem. Wyznaczyć estymator parametru θ korzystając z metody momentów. Zbadać zgodność uzyskanego estymatora.

3.7

Niech $X_1, \dots, X_n \quad i.i.d. \quad \sim Exp(\lambda)$. Znaleźć ENW próby $\lceil X_1 \rceil, \dots, \lceil X_n \rceil$.

3.8

Niech $X_1, ...X_n$ oznacza próbkę prostą rozkładu o gęstości $f_\theta(x) = \theta x^{\theta-1} I_{(0,1)}(x)$, natomiast $Y_1, ...Y_m$ próbkę prostą z rozkładu o gęstości $g_\theta(y) = 2\theta y^{2\theta-1} I_{(0,1)}(y)$, przy czym $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Zakładamy, że próbki są niezależne. Wyznaczyć estymator największej wiarygodności $\tilde{\theta}(X_1, ...X_n, Y_1, ...Y_m)$ parametru θ.

4 Przedział ufności

4.1

$X_1, \dots, X_n$ niezależne o rozkładzie normalnym z wartością oczekiwaną μ i wariancją $\frac{1}{i}$ dla każdego $i \in \{1, \dots, n\}$. Wyznaczyć przedział ufności $(\hat{\mu} - d, \hat{\mu} + d)$, gdzie $\hat{\mu}$ jest ENW parametru μ.

4.2

Niech $X_1, ..X_n$ oraz $Y_1, ...Y_n$ oznaczają dwie niezależne próbki proste z rozkładów normalnych, odpowiednio $N(\mu_1, \sigma_1)$ i $N(\mu_2, \sigma_2)$, o znanych odchyleniach standardowych σ_1 i σ_2. Wyznaczyć minimalną liczność n każdej z próbek konieczną do oszacowania przedziałowego różnicy wartości oczekiwanych $\mu_1 - \mu_2$ na poziomie ufności $1 - \alpha$ z maksymalnym błędem d.

4.3

Niech $X_1, \ldots, X_n$ oznacza próbkę prostą z rozkładu o gęstości $f_\theta(x) = 4\theta x^3 \exp(-\theta x^4)\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)$, przy czym $\theta > 0$. Skonstruować przedział ufności dla parametru θ na poziomie ufności $1 - \alpha$. Podać postać tego przedziału dla $1 - \alpha = 0.95$ oraz $n = 10$.

4.4

Niech X_1, X_2 będzie dwuelementową próbą prostą z rozkładu jednostajnego $[0, \theta]$ gdzie $\theta > 0$. Znaleźć stałą C, dla której przedział $(CX_{2:2}, \frac{1}{\sqrt{\alpha}}X_{2:2})$ jest przedziałem ufności dla parametru θ na poziomie ufności $1 - \alpha$ tzn.

$$P(CX_{2:2} < \theta < \tfrac{1}{\sqrt{\alpha}}X_{2:2}) = 1 - \alpha$$

4.5

Zadanie 3 (6 punktów)

Niech $X_1, \ldots, X_n$ oznacza próbkę prostą z rozkładu o gęstości $f_\theta(x) = \theta x^{\theta-1} I_{(0,1)}(x)$, gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Wyznaczyć przedział ufności na poziomie ufności $1-\alpha$ dla parametru θ, postaci $(a\hat{\theta}, b\hat{\theta})$, gdzie $\hat{\theta}$ jest estymatorem największej wiarogodności, natomiast stałe a i b są dobrane tak, aby $P(\theta < a\hat{\theta}) = P(\theta > b\hat{\theta}) = \frac{1}{2}\alpha$. Podać postać tego przedziału ufności dla $n = 10$ oraz $1 - \alpha = 0.9$.

Szukamy estymatora największej wiarogodności

5 Konstruowanie testu

5.1

Niech $X_1, \ldots, X_n \quad i.i.d. \quad \sim f_\theta(x) = \theta x^{\theta-1}\mathbb{I}_{(0,1)}(x)$. Rozważmy test jednostajnie najmocniejszy do weryfikacji hipotezy

$$\begin{cases} H: & \theta \leqslant 1 \\ K: & \theta > 1 \end{cases}$$

na poziomie istotności 0.01. Dla jakich wartości parametru θ test ten ma moc nie mniejszą niż 0.99?

5.2

Niech $X_1, ..., X_n$ będzie próbą prostą z rozkładu prawdopodobieństwa o gęstości

$$f_\theta(x) = \frac{2x}{\theta^2} I_{(0,\theta)}(x)$$

gdzie $\theta > 0$.

1. Skonstruować najmocniejszy test statystyczny na poziomie istotności α do weryfikacji hipotezy $H : \theta = \theta_0$ przy czym alternatywnie $K : \theta = \theta_1$, gdzie $\theta_1 > \theta_0$. Podać postać tego testu dla $n = 5, \theta_0 = 1, \theta_1 = 1,4, \alpha = 0,1$
2. Obliczyć moc tego testu.

5.3

Niech $X_1, ...X_8$ oznacza próbkę prostą z rozkładu jednostajnego na przedziale $[0, \theta]$ gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Hipotezę $H : \theta = 2$ wobec alternatywy $K : \theta = 4$ weryfikujemy najmocniejszym testem na poziomie istotności 0.1. Wyznaczyć prawdopodobieństwo popełnienia błędu drugiego rodzaju.

5.4

Niech $X_1, ...X_n$ oznacza próbkę prostą z rozkładu normalnego o wartości oczekiwanej $\mu = 0$ i o nieznanej wariancji σ^2

1. Wyznaczyć test jednostajnie najmocniejszy do weryfikacji hipotezy $H : \sigma^2 \leqslant 3$ przy hipotezie alternatywnej $K : \sigma^2 > 3$ na poziomie istotności $\alpha = 0.05$. Przyjąć $n = 8$.
2. Dla jakich wartości wariancji moc tego test jest nie mniejsza niż 0.95?

5.5

Niech $X_1, ...X_n$ oznacza próbkę prostą z rozkładu o gęstości $f_\theta(x) = \frac{2x}{\theta^2} I_{(0,\theta)}(x)$ gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Testujemy hipotezę $H : \theta = 1$ przy alternatywie $K : \theta = \frac{1}{2}$ testem jednostajnie najmocniejszym na poziomie istotności 0.05. Wyznaczyć najmniejszą liczność próbki, aby moc tego testu przy podanej alternatywie była nie mniejsza niż 0.95.

5.6

Niech $X_1, ...X_n$ oznacza próbkę prostą z rozkładu o gęstości $f_\theta(x) = \theta x^{-(\theta+1)} I_{(1,\infty)}(x)$, gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Wyznaczyć test jednostajnie najmocniejszy do weryfikacji hipotezy $H : \theta \leqslant \frac{1}{2}$ przy alternatywie $K : \theta > \frac{1}{2}$ na poziomie istotności α. Podać postać tego testu dla $n = 5$ oraz $\alpha = 0.01$.

Zadanie 4 (5 punktów)

Liczba roszczeń z tytułu pewnego ubezpieczenia jest zmienną losową X o rozkładzie Poissona. Skonstruować test jednostajnie najmocniejszy do weryfikacji hipotezy $H : E(X) = 2500$ wobec alternatywy $K : E(X) > 2500$, na poziomie istotności $\alpha = 0.05$.

a) Podać postać tego testu stosując przybliżenie rozkładu Poissona rozkładem normalnym.

b) Jaka jest moc tego testu w przypadku gdy $E(X) = 2704$?

5.7

6 Weryfikacja hipotez, testy niezależności

6.1

W pewnym towarzystwie ubezpieczeniowym wylosowano niezależnie 300 polis, z którym wypłacono odszkodowanie w ramach ubezpieczenia OC. Otrzymano następujące wyniki:

Wysokość odszkodowania (w tys. zł)	Liczba polis
0,0-2,0	190
2,0-4,0	38
4,0-6,0	26
6,0-8,0	34
8,0-10,0	12

1. Obliczyć medianę wysokości odszkodowania
2. Zweryfikować hipotezę, że średnia odszkodowania wynosi mniej niż 3 tys. zł. Przyjąć poziom istotności $0,05$
3. Wyznaczyć przedział ufności dla odsetka odszkodowań nieprzekraczających 4 tys. złotych. Przyjąć poziom ufności $0,95$.

6.2

Pani Kasia i Małgosia od lat dostają mniej więcej tyle samo kartek walentynkowych. Zaczęły się jednak spierać o to, która z nich otrzymuje więcej dowodów sympatii spośród grona, na którym im najbardziej zależy, tzn. od studentów i pracowników Wydziału. Aby rozstrzygnąć spór postanowiły udać się do znajomego statystyka, który wylosował niezależnie po 120 kartek otrzymanych przez każdą z pań i zrobił zestawienie ich nadawców. Dane te zawiera poniższa tabela:

Nadawcy kartek	Kasia	Małgosia
Studenci Wydziału	46	45
Pracownicy Wydziału	34	37
Osoby spoza Wydziału	40	38

Na poziomie istotności $0,01$ stwierdzić czy występuje statystycznie istotna różnica między odsetkami kartek otrzymanych przez obie panie od osób związanych z Wydziałem. Wyznaczyć p-wartość dla przeprowadzonego testu.

6.3

Mendel wydedukował prawo niezależnego dziedziczenia cech krzyżując odmiany grochu o żółtych i gładkich nasionach (AABB) z odmianami o nasionach zielonych i pomarszczonych (aabb). Rozważania teoretyczne doprowadziły go do stwierdzenia, że rośliny o żółtych i gładkich nasionach, o żółtych i pomarszczonych nasionach, o zielonych i gładkich nasionach oraz o zielonych i pomarszczonych nasionach powinny wystąpić w II pokoleniu w stosunku liczbowym 9 : 3 : 3 : 1. W celu empirycznej weryfikacji prawa Mendla przeprowadzono doświadczenie i otrzymano następujące liczności poszczególnych rodzajów nasion:

Rodzaj nasienia	Żółte i gładkie	Żółte i pomarszczone	Zielone i gładkie	Zielone i pomarszczone
Liczba nasion	269	85	83	27

Czy otrzymane wyniki doświadczenia potwierdzają prawo Mendla? Zweryfikować odpowiednią hipotezę na poziomie istotności 0.05.

6.4

W poniższej tabeli zamieszczono wyniki badania wydatków na paliwo losowo wybranej grupy kierowców.

Opłata za tankowane paliwo	50-100	100-150	150-200	200-250
Liczba kierowców	20	36	56	32

1. Obliczyć górny kwartyl wydatków na paliwo
2. Obliczyć p-value test do weryfikacji hipotezy $H : \mu = 150$ przeciwko $K : \mu > 150$. Czy w świetle powyższych badań można stwierdzić, że średni wydatek na paliwo przekracza istotnie 150 złotych?

6.5

Mimo wielu odniesionych sukcesów Prezia wciąż dręczy fakt, że jego zwolennicy rekrutują się w większości spośród warstw mniej wykształconych niż sympatycy rebeliantów. owszem, na jego dworze można spotkać nawet kilku profesorów, ale są to często miernoty bądź lizusi, którymi w duchu sam Prezio gardzi. Kazek, Jurski, szef Radiokomitetu, chcąc pocieszyć Prezia (a przy okazji zarobić kilka punktów) zameldował się któregoś dnia w jego gabinecie. Gdy już ucałował dłoń Prezia i powstał z kolan, zameldował: *Mam dobre wieści. Otóż nasi "niepokorni" reporterzy dokonali obliczeń podczas sobotniej manifestacji rebeliantów i okazało się, że na 200 losowo wybranych manifestantów 128 miało ukończone wyższe studia, 44 miało wykształcenie średnie, a pozostali rekrutowali się spośród osób małoletnich lub nieposiadających matury. Tymczasem podczas naszej ostatniej miesięcznicy* - w tym miejscu Jurski ponownie cmoknął Prezia w mankiet *niepokorni w losowo wziętej próbce 320 osób naliczyli także 128 osób z wyższym wykształceniem (dodam, że pozostałe 192 osoby jakkolwiek nie posiadały wyższego wykształcenia, były niewątpliwie szczerze oddane sprawie). W niczym więc nie ustępujemy rebeliantom!*

Stwierdzić czy w świetle dostarczonych Preziowi danych jego obawy są zasadne, czy też może on podzielić optymizm pana Jurskiego? Zweryfikować odpowiednią hipotezą na poziomie istotności 0.05.

6.6

Henio i Zdzisio zamierzają oszacować przedziałowo wartość oczekiwaną na podstawie próbki prostej $X_1, ..X_n$ z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma)$ posługując się klasycznymi przedziałami ufności na poziomie ufności 0.95. Obaj nie znają wartości oczekiwanej μ, ale Zdzisio w przeciwieństwie do Henia, zna wartość wariancji rozkładu σ^2. Mimo to Henio mówi *Chociaż dysponujesz większą ilością informacji to na* 10% *mój przedział ufności będzie przynajmniej* x *razy krótszy niż Twój*.
Znaleźć wartość x.

6.7

Zadanie 2 (4 punkty)
Pobrano losową próbkę 150 kobiet i 250 mężczyzn i spytano ich o wysokość miesięcznych zarobków, prosząc o wskazanie przynależności do odpowiedniej grupy dochodowej: zarobki wysokie (powyżej 10000 zł), średnie (między 3000 a 10000 zł) i niskie (poniżej 3000 zł). Otrzymane wyniki zawiera poniższa tabela. Stwierdzić, czy rozkład zarobków (rozumiany jako proporcje osób w poszczególnych grupach dochodowych) jest taki sam dla kobiet i mężczyzn. Przyjąć poziom istotności 0.05.

Wysokość zarobków	Kobiety	Mężczyźni
wysokie	34	70
średnie	40	80
niskie	76	100

35/48