JEDNOSTAJNIE NAJMOCNIEJSZY

Z wykładu wiemy, że jednoparametrowa rodzina wykładnicza:

$$p_\theta(x_1, ..., x_n) = h(x_1, ..., x_n)\exp[C(\theta)T(x_1, .., x_n) - B(\theta)],$$

gdzie $C(\theta)$ jest funkcją ściśle rosnącą, jest rodziną z monotonicznym ilorazem wiarogodności względem statystyki T. Pokazanie tego będzie nam potrzebne, aby były spełnione założenia tw. Karlina-Rubina.

$$\begin{cases} H: \beta \geq \beta_0 \\ K: \beta < \beta_0 \end{cases} \qquad \phi(\mathbb{X}) = \begin{cases} 1, & T(\mathbb{X}) < k \\ 0, & T(\mathbb{X}) > k \end{cases}$$

ściśle rosnąca

$$\begin{cases} H: \beta \leq \beta_0 \\ K: \beta > \beta_0 \end{cases} \qquad \phi(\mathbb{X}) = \begin{cases} 1, & T(\mathbb{X}) \geq k \\ 0, & T(\mathbb{X}) < k \end{cases}$$

ściśle rosnąca

p-value $< \alpha$ $\Rightarrow$ odrzucamy

p-value $> \alpha$ $\Rightarrow$ nie ma podstaw do odrzucenia

$T \in K_\alpha \Rightarrow$ odrzucamy H.

$T \notin K_\alpha \Rightarrow$ nie mamy podstaw do odrzucenia H

Przedziały ufności dla wartości średniej μ
Model I. Cecha $X \sim N(\mu, \sigma)$, μ - nieznane, σ - znane $\overline{X} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
Model II. Cecha $X \sim N(\mu, \sigma)$, μ - nieznane, σ - nieznane $\overline{X} - t^{[n-1]}_{1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + t^{[n-1]}_{1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$
Model III. Cecha X ma rozkład dowolny (duża próba) $\overline{X} - z_{1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$

częstsza sytu

dla dużych n, nie znając rozkładu (bo CTG)

χ^2 jest absolutnie niesymetryczny

Przedziały ufności dla wariancji σ^2 (odchylenia standardowego σ)
Model I. Cecha $X \sim N(\mu, \sigma)$, μ - nieznane, σ - nieznane $\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}}$
Model II. Cecha X ma rozkład dowolny (duża próba) $\frac{S\sqrt{2n-2}}{\sqrt{2n-3}+z_{1-\alpha/2}} < \sigma < \frac{S\sqrt{2n-2}}{\sqrt{2n-3}-z_{1-\alpha/2}}$

Przedział ufności dla wskaźnika struktury (proporcji)
Cecha X ma rozkład dwupunktowy $P(X=1) = p$ (duża próba) $\widehat{p} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}} < p < \widehat{p} + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}$ gdzie $\widehat{p} = \frac{k}{n} = \frac{\text{liczba sukcesów}}{\text{liczba prób}}$

Wyznaczanie niezbędnej liczby pomiarów do próby do oszacowania wartości średniej μ z maksymalnym błędem d na poziomie ufności $1-\alpha$
Model I. Cecha $X \sim N(\mu, \sigma)$, μ - nieznane, σ - znane $n \geq \left(z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{d}\right)^2$
Model II. Cecha $X \sim N(\mu, \sigma)$, μ - nieznane, σ - nieznane $n \geq \left(t^{[n_0-1]}_{1-\alpha/2}\frac{S}{d}\right)^2$ gdzie n_0 jest licznością pobranej próby wstępnej
Model III. Cecha X ma rozkład dwupunktowy $P(X=1) = p$, p - nieznane jeżeli znany jest szacunkowy procent p_0, to $n \geq z^2_{1-\alpha/2}\frac{p_0(1-p_0)}{d^2}$ jeżeli nie jest znany szacunkowy procent p_0, to $n \geq z^2_{1-\alpha/2}\frac{1}{4d^2}$

Weryfikacja hipotez dotyczących wartości średniej		
Model I. Cecha $X \sim N(\mu, \sigma)$, μ - nieznane, σ - znane. Hipoteza zerowa $H: \mu = \mu_0$. Statystyka testowa $T = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$		
Hipoteza alternatywna $K: \mu \neq \mu_0$ Obszar krytyczny $(-\infty; -z_{1-\alpha/2}] \cup [z_{1-\alpha/2}; +\infty)$	Hipoteza alternatywna $K: \mu > \mu_0$ Obszar krytyczny $[z_{1-\alpha}; +\infty)$	Hipoteza alternatywna $K: \mu < \mu_0$ Obszar krytyczny $(-\infty; -z_{1-\alpha}]$
Model II. Cecha $X \sim N(\mu, \sigma)$, μ - nieznane, σ- nieznane. Hipoteza zerowa $H: \mu = \mu_0$. Statystyka testowa $T = \frac{\overline{X}-\mu_0}{S}\sqrt{n}$		
Hipoteza alternatywna $K: \mu \neq \mu_0$ Obszar krytyczny $\left(-\infty; -t^{[n-1]}_{1-\alpha/2}\right] \cup \left[t^{[n-1]}_{1-\alpha/2}; +\infty\right)$	Hipoteza alternatywna $K: \mu > \mu_0$ Obszar krytyczny $\left[t^{[n-1]}_{1-\alpha}; +\infty\right)$	Hipoteza alternatywna $K: \mu < \mu_0$ Obszar krytyczny $\left(-\infty; -t^{[n-1]}_{1-\alpha}\right]$
Model III. Cecha X ma rozkład dowolny (duża próba). Hipoteza zerowa $H: \mu = \mu_0$. Statystyka testowa $T = \frac{\overline{X}-\mu_0}{S}\sqrt{n}$		
Hipoteza alternatywna $K: \mu \neq \mu_0$ Obszar krytyczny $(-\infty; -z_{1-\alpha/2}] \cup [z_{1-\alpha/2}; +\infty)$	Hipoteza alternatywna $K: \mu > \mu_0$ Obszar krytyczny $[z_{1-\alpha}; +\infty)$	Hipoteza alternatywna $K: \mu < \mu_0$ Obszar krytyczny $(-\infty; -z_{1-\alpha}]$

Weryfikacja hipotezy dotyczącej wariancji (odchylenia standardowego)		
Model Cecha $X \sim N(\mu, \sigma)$, μ - nieznane, σ - nieznane. Hipoteza zerowa $H: \sigma^2 = \sigma_0^2$. Statystyka testowa $T = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$		
Hipoteza alternatywna $K: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ Obszar krytyczny $\left(0, \chi^2_{\alpha/2;n-1}\right] \cup \left[\chi^2_{1-\alpha/2;n-1}; +\infty\right)$	Hipoteza alternatywna $K: \sigma^2 > \sigma_0^2$ Obszar krytyczny $[\chi^2_{1-\alpha;n-1}; +\infty)$	Hipoteza alternatywna $K: \sigma^2 < \sigma_0^2$ Obszar krytyczny $(0; \chi^2_{\alpha;n-1}]$

Weryfikacja hipotez dotyczących wartości wskaźnika struktury (proporcji)		
Model Cecha X ma rozkład dwupunktowy: $P(X=1) = p$. Hipoteza zerowa $H: p = p_0$. Dla dużej próby n statystyka testowa $T = (\widehat{p} - p_0)/\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$ Dla małej próby n statystyka testowa $T = 2\left(arcsin\sqrt{\widehat{p}} - arcsin\sqrt{p_0}\right)\sqrt{n}$		
Hipoteza alternatywna $K: p \neq p_0$ Obszar krytyczny $(-\infty; -z_{1-\alpha/2}] \cup [z_{1-\alpha/2}; +\infty)$	Hipoteza alternatywna $K: p > p_0$ Obszar krytyczny $[z_{1-\alpha}; +\infty)$	Hipoteza alternatywna $K: p < p_0$ Obszar krytyczny $(-\infty; -z_{1-\alpha}]$

Czy istnieje zależność między... ?

Weryfikacja hipotez dotyczących dwóch średnich

Model I. Cechy $X \sim N(\mu_1, \sigma_1)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2)$, σ_1, σ_2 - znane

Hipoteza zerowa $H: \mu_1 = \mu_2$. Statystyka testowa $T = (\overline{X} - \overline{Y}) / \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$

Hipoteza alternatywna	Hipoteza alternatywna	Hipoteza alternatywna
$K: \mu_1 \neq \mu_2$	$K: \mu_1 > \mu_2$	$K: \mu_1 < \mu_2$
Obszar krytyczny	Obszar krytyczny	Obszar krytyczny
$(-\infty; -z_{1-\alpha/2}] \cup [z_{1-\alpha/2}; +\infty)$	$[z_{1-\alpha}; +\infty)$	$(-\infty; -z_{1-\alpha}]$

Model II. Cechy $X \sim N(\mu_1, \sigma_1)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2)$, σ_1, σ_2 - nieznane, ale równe (tzn. $\sigma_1 = \sigma_2$)

Hipoteza zerowa $H: \mu_1 = \mu_2$. Statystyka testowa $T = (\overline{X} - \overline{Y}) / \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2} \left(\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}\right)}$

Hipoteza alternatywna	Hipoteza alternatywna	Hipoteza alternatywna
$K: \mu_1 \neq \mu_2$	$K: \mu_1 > \mu_2$	$K: \mu_1 < \mu_2$
Obszar krytyczny	Obszar krytyczny	Obszar krytyczny
$\left(-\infty, -t_{1-\alpha/2}^{[n_1+n_2-2]}\right] \cup \left[t_{1-\alpha/2}^{[n_1+n_2-2]}; +\infty\right)$	$\left[t_{1-\alpha}^{[n_1+n_2-2]}; +\infty\right)$	$\left(-\infty, -t_{1-\alpha}^{[n_1+n_2-2]}\right]$

Model III. Cechy X, Y mają rozkłady dowolne (duże próby)

Hipoteza zerowa $H: \mu_1 = \mu_2$. Statystyka testowa $T = (\overline{X} - \overline{Y}) / \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$

Hipoteza alternatywna	Hipoteza alternatywna	Hipoteza alternatywna
$K: \mu_1 \neq \mu_2$	$K: \mu_1 > \mu_2$	$K: \mu_1 < \mu_2$
Obszar krytyczny	Obszar krytyczny	Obszar krytyczny
$(-\infty; -z_{1-\alpha/2}] \cup [z_{1-\alpha/2}; +\infty)$	$[z_{1-\alpha}; +\infty)$	$(-\infty; -z_{1-\alpha}]$

Model IV. Cechy $X \sim N(\mu_1, \sigma_1)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2)$, σ_1, σ_2 - nieznane;
obserwacje w parach (X_i, Y_i) są zależne

Hipoteza zerowa $H: \mu_1 = \mu_2$. Statystyka testowa $T = \frac{\overline{Z}}{S_Z}\sqrt{n}$, gdzie $Z_i = X_i - Y_i$

Hipoteza alternatywna	Hipoteza alternatywna	Hipoteza alternatywna
$K: \mu_1 \neq \mu_2$	$K: \mu_1 > \mu_2$	$K: \mu_1 < \mu_2$
Obszar krytyczny	Obszar krytyczny	Obszar krytyczny
$\left(-\infty; -t_{1-\alpha/2}^{[n-1]}\right] \cup \left[t_{1-\alpha/2}^{[n-1]}; +\infty\right)$	$\left[t_{1-\alpha}^{[n-1]}; +\infty\right)$	$\left(-\infty; -t_{1-\alpha}^{[n-1]}\right]$

Weryfikacja hipotez dotyczących dwóch wskaźników struktury (proporcji)

Model Cechy X, Y mają rozkłady dwupunktowe, $P(X=1) = p_1$, $P(Y=1) = p_2$

Hipoteza zerowa $H: p_1 = p_2$. Niech $\widehat{p}_1 = \frac{k_1}{n_1}$, $\widehat{p}_2 = \frac{k_2}{n_2}$, $p^* = \frac{k_1+k_2}{n_1+n_2}$, $n^* = \frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}$

Dla dużych prób n_1, n_2 statystyka testowa $T = (\widehat{p}_1 - \widehat{p}_2) / \sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n^*}}$

Dla małych prób n_1, n_2 statystyka testowa $T = 2\left(arcsin\sqrt{\widehat{p}_1} - arcsin\sqrt{\widehat{p}_2}\right)\sqrt{n^*}$

Hipoteza alternatywna	Hipoteza alternatywna	Hipoteza alternatywna
$K: p_1 \neq p_2$	$K: p_1 > p_2$	$K: p_1 < p_2$
Obszar krytyczny	Obszar krytyczny	Obszar krytyczny
$(-\infty; -z_{1-\alpha/2}] \cup [z_{1-\alpha/2}; +\infty)$	$[z_{1-\alpha}; +\infty)$	$(-\infty; -z_{1-\alpha}]$

Weryfikacja hipotez o niezależności cech X i Y

Hipoteza zerowa H : cechy X i Y są niezależne

Hipoteza alternatywna K : cechy X i Y są zależne

Statystyka testowa $T = \sum_{i=1}^{r \cdot c} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$

gdzie O_i - liczba obserwacji w i-tej komórce, $E_i = \frac{R_i \cdot C_i}{n}$,

R_i - suma obserwacji w wierszu, w którym jest położona i-ta komórka,

C_i - suma obserwacji w kolumnie, do której należy i-ta komórka,

r - liczba wierszy, c - liczba kolumn w tabeli kontyngencji,

n - liczba wszystkich obserwacji,

Obszar krytyczny $\left[\chi^2_{1-\alpha,(r-1)(c-1)}; +\infty\right)$

Weryfikacja hipotezy dotyczącej równości dwóch wariancji

Model Cechy $X \sim N(\mu_1, \sigma_1)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2)$

Hipoteza zerowa $H: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$. Statystyka testowa $T = \frac{S_1^2}{S_2^2}$

Hipoteza alternatywna $K: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$

Obszar krytyczny $\left[F_{1-\alpha}^{[n_1-1, n_2-1]}; +\infty\right)$

Hipoteza alternatywna K: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Obszar krytyczny $\left(0, F_{1-\frac{\alpha}{2}}^{[n_1-1, n_2-1]}\right] \cup \left[F_{1-\frac{\alpha}{2}}^{[n_1-1, n_2-1]}; +\infty\right)$

Weryfikacja hipotez o postaci rozkładu

Hipoteza zerowa H : cecha X ma rozkład o dystrybuancie F

Hipoteza alternatywna K : cecha X ma rozkład inny niż F

Statystyka testowa $T = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n\,p_i)^2}{n\,p_i}$

gdzie k - liczba klas, p_i - prawdopodobieństwo znalezienia się w i-tej klasie

Obszar krytyczny $\left[\chi^2_{1-\alpha,k-1-r}; +\infty\right)$

gdzie r - liczba parametrów szacowanych z próby

ESTYMATORY ENW

$\mathrm{Poiss}(\lambda) \longrightarrow \bar{X}$

$\mathrm{Exp}(\theta) \longrightarrow \frac{1}{\bar{X}}$

$$\mathbb{P}(|T| > 3.125) = 2 - 2\cdot\Phi(3.125)$$

Zad. 4.14. INNY SPOSÓB. – KOLOKWIUM.

Uzupełnienie.

z tw. Cramera-Rao.

$\bar{X}$ - nieobciążony.

Równość zachodzi, gdy $\frac{d}{d\theta}\left(\ln p_\theta(\mathbb{X})\right) = k(\theta)\cdot\left[T(\mathbb{X}) - q(\theta)\right]$

$$\boxed{F_{1:n}(x) = 1 - (1 - F(x))^n}$$

statystyka porządkowa