Zestawy 2017

Zestaw I (zwolnienie)
Dystrybuanta empiryczna
Twierdzenie Gliwienki-Cantellego + dowód + wnioski
Jądro
Estymatory jądrowe – po co są, jak działają, jak dopadować h i jakie jest najlepsze jądro + rysunek, według jakiego kryterium jest najlepsze (MISE)
Test niezależności Chi-Kwadrat

Zestaw II (zwolnienie)
Lemat Neymana-Pearsona + dowód
Metody konstruowania estymatorów
L-estymatory, M-estymatory + kiedy używamy
Własności Estymatora ENW
Statystyka dostateczna – definicja, intuicja, zastosowanie, jak szukamy statystyk dostatecznych
Statystyka minimalna dostateczna
Przykład trywialnej i nietrywialnej statystyki dostatecznej

Zestaw III (zwolnienie)
Efektywność estymatora + przykład efektywnego i nieefektywnego
Skąd się bierze górne ograniczenie na efektywność
Twierdzenie Cramera-Rao + dowód
Nierówność typu Cramera-Rao gdy mamy estymator obciążony + wytłumaczenie
Poziom istotności
Błąd I i II rodzaju
Rozmiar testu
p-wartość
Współczynnik zmienności + czemu tak jest zdefiniowany

Zestaw IV (zwolnienie)
Do czego służą testy zgodności
Przykłady testów zgodności
Różnice w założeniach testu chi-kwadrat i Kołmogorowa
Dlaczego w teście Kołmogorowa ważne jest założenie o ciągłości rozkładu
Z którym twierdzeniem kojarzy się postać statystyki w teście Kołomogorowa
Twierdzenie Gliwienki-Cantellego + dowód + intuicja w twierdzeniu + odwołania do wcześniejszego twierdzenia
Metody konstruowania estymatorów, którą metodę byśmy polecili
Założenia do metody największej wiarogodności + czy taki estymator może nie istnieć?
Cechy ENW

Zestaw V (zwolnienie)
Lemat Neymana-Pearsona + dowód
Zgodność estymatora – definicja, co to oznacza w praktyce, przykłady zgodnego i niezgodnego
Twierdzenie o zgodności estymatorów
Statystyka dostateczna – definicja + intuicja
Statystyka minimalna dostateczna – dwie definicje + intuicja – wytłumaczyć w terminach warstwic)
Metody szukania statystyki minimalnej dostatecznej + założenia i po co są

Zestaw VI
Poziom Istotności
Błąd I i II rodzaju
Test zgodny
Estymator zgodny + przykład
Różnica między estymatorem mocno zgodnym i zgodnym
Testy zgodności
Estymator nieobciążony + przykład
Statystyka dostateczna + przykład

Zestaw VII
Moc testów
Lemat Neymana-Pearsona + dowód
Estymatory
L-Estymator + przykłady (po co się używa różnych rodzajów średnich)
Obciążoność i nieobciążoność + przykłady

Zestaw VIII
Przedział ufności
Funkcja centralna (wiodąca)
Test zgodności Chi-Kwadrat
Statystyka minimalna dostateczna – definicja, intuicja i jak się ją wyznacza

Zestaw IX
ENW – definicja, własności, rozkład asymptotyczny
Twierdzenie: ENW się dziedziczy przez funkcje
Statystyki położenia
Jaki operator w zależności od parametru może dać średnią lub medianą
L-estymatory

Zestawy 2016

Zestaw X (zwolnienie)
Kryterium faktoryzacji + dowód + zastosowanie
Wykładnicza rodzina rozkładów + związek ze statystyką dostateczną
Lemat o estymatorach (styczność z rodziną wykładniczą)
Czy istnieje test JNM dla hipotezy dwustronnej
Test nieobciążoności
Definicja zgodności

Zestaw XI (zwolnienie)
Twierdzenie Neymana-Pearsona + dowód
Testy JNM dla różnych hipotez
Efektywność - znaczenie wartości efektywności
Współczynnik zmienności

Zestaw XII (zwolnienie)
Twierdzenie Cramera-Rao + dowód
Test niezależności Chi-Kwadrat
Statystyki Minimalne
Statystyki Zupełne

Zestaw XIII
Zgodność estymatora
Zgodność Testu
Efektywność + założenia (modelu regularnego)
Średnia windsorowska + po co się tego używa
Skąd się bierze ograniczenie na efektywność (wzór Cramera Rao)
Miara rozrzutu

Zestaw XIV
Dystrybuanta Empiryczna + twierdzenia związane (test Kołmogorowa, Lemat Gliwienki-Cantellego)
Statystyki dostateczne + po co są, co nam dają, jak się je wyznacza

Zestaw XIII
Konstrukcje estymatorów, które najlepsze
Własności ENW
Konstrukcje testów
Test oparty na ilorazie wiarogodności

Zestaw XIV
Testy zgodności
Estymator nieobciążony
Asymptotyczna nieobciążoność + przykłady
Rozstęp międzykwartylowy

Zestaw XV
Poziom istotności
Błędy I i II rodzaju
Nieobciążoność estymatora
Obciążenie + przykład estymatora o ujemnym obciążeniu
Błąd średniokwadratowy
Współczynnik zmienności – zalety nad odchyleniem standardowym

Zestaw XVI
Testy Chi-Kwadrat
Metody konstrukcji estymatorów
Zalety ENW
L-Estymatory
Estymator Bayesowski

Zebrane z zeszłych lat:

- Metody konstrukcji estymatorów (w szczególności ENW)
- Własności ENW
- Definicje testu jednostajnie najmocniejszego i nieobciążonego testu jednostajnie najmocniejszego i w jakiej sytuacji się go stosuje
- Test Kołmogorowa
- Moc testu
- Dowód Neymana - Pearsona
- Definicje zgodność estymatora, moc testu, współczynnik zmienności
- Czym się różni zgodność od nieobciążoności (intuicyjnie)
- Kiedy estymator nieobciążony jest zgodny
- Narzędzia do szukania statystyk dostatecznych i minimalnych
- Test zrandomizowany
- Przykład estymatora zgodnego i niezgodnego
- Omówić jeden z testów zgodności
- Kryterium faktoryzacji
- Przykład estymatora obciążonego i nieobciążonego
- Definicja minimalnej statystyki dostatecznej (matematycznie i intuicyjnie)

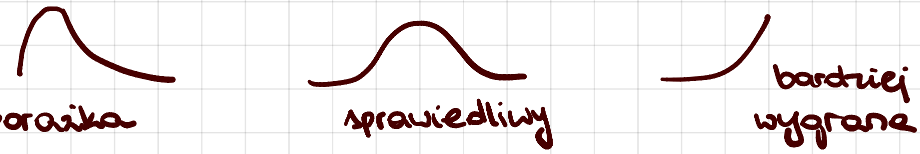
Dowodziki

2.	o własnościach dystrybuanty empirycznej
3.	lemat Gliwienki - Cantelleo (PTSM)
4.	kryterium faktoryzacji
4.	min. stat. dost. <=> $\frac{p_\theta(x)}{p_\theta(y)}$
4.	stat. dost. dla wykładniczych
5.	$MSE = Var + b^2$
6.	lemat o $-\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln p_\theta(X)\right]$ oraz $I_n(\theta) = n \cdot I(\theta)$
6.	tw. Cramera-Rao (n.CS)
6.	dolne ogr. na wariancję dla obciążonych
7.	nieobciążony + $Var \to 0$ => zgodny
8.	Jeśli ENW => to zgodny
8.	ENW jest asymptotycznie normalny (DŁUGIE)
12.	lemat Neymana - Pearsona
13.	wykładnicza => monotoniczny iloraz

1) Estymacja Bayesowska

mamy dane, ale i rozkład a priori i wnioskujemy na podstawie tych dwóch rzeczy

$\pi(\theta) = \mathrm{Beta}(\alpha, \beta)$



$\left.\begin{matrix}\text{dane} \\ \pi(\theta)\end{matrix}\right\} \to$ proces uczenia $\to$ rozkład a posteriori

$$\pi(\theta | \underline{x}) = \frac{p_\theta(\underline{x}) \cdot \pi(\theta)}{\int_\Theta p_\theta(\underline{x}) \cdot \pi(\theta)\, d\theta}$$

2) def. est. bayesowskiego

def.: dla próbki $(X_1, \dots, X_n)$ z rozkładu p_θ Estymatorem Bayesowskim parametru θ przy kwadratowej funkcji straty nazywamy

$$\hat{\theta} = \mathbb{E}(\theta | X) = \int_\Theta \theta \cdot \pi(\theta | \underline{x})\, d\theta$$

3) def. MAP

estymatorem maximum a posteriori parametru θ nazywamy

$$MAP(\theta) = \underset{\theta \in \Theta}{\mathrm{argmax}}\ \pi(\theta | \underline{x})$$

4) def. rodzin sprzężonych

rodzinę $\mathcal{R}$ rozkładów a priori nazywamy sprzężoną do $P = \{p_\theta : \theta \in \Theta\}$ jeżeli dla dowolnego rozkładu $r \in \mathcal{R}$ a priori, i każdego $p \in P$, $\pi(\theta | \underline{x})$ ten a posteriori $\in \mathcal{R}$.

np.: Beta sprzężona do ujemnych dwumianowych / dwupunktowych

Gamma — Poissona / wykładnicze

rodziny sprzężone mają przyjemne własności rachunkowe

5) Czemu ludzie ulepszali test Kołmogorowa?

KOŁMOGOROW tylko dla ciągłych
- nie musi być liczne

nie jest wcale dobry, BO MA STOSUNKOWO NISKĄ MOC — często nie odrzuca hip. fałszywej

6) definicja testu JNM

(moc testu to pstwo odrzucania hipotezy fałszywej)

niech $\mathcal{T}$ - rodzina testów na poziomie istotności α do weryfikacji $\begin{cases} H_0: \theta \in \Theta_0 \\ H_1: \theta \in \Theta_1 \end{cases}$

test $\varphi^* \in \mathcal{T}$ nazwiemy testem jednostajnie najmocniejszym, jeżeli $\forall \varphi \in \mathcal{T}$

$$M_{\varphi^*}(\theta) \geq M_{\varphi}(\theta) \qquad \forall \theta \in \Theta_1$$

7) def. testu statystycznego:

nazywamy statystykę $\varphi: \mathcal{X} \to \{0,1\}$

1 - interpretujemy jako odrzucenie H_0
0 - brak podstaw do odrzucenia H_0

$x \in K$ - obszar odrzuceń
$x \in K^c = \mathcal{X} \setminus K$

w praktyce, często będziemy wykorzystywać statystykę testową wtedy

$$\varphi(X) = \begin{cases} 1 & , T(X) \in K_\alpha \text{ - obszar krytyczny} \\ 0 & , T(X) \notin K_\alpha \end{cases}$$

8) pstwo popełnienia błędu I i II rodzaju

jeżeli $\theta \in \Theta_0$ to $\mathbb{P}_\theta(\varphi(X) = 1) = \alpha$ —

jeżeli $\theta \in \Theta_1$ to $\mathbb{P}_\theta(\varphi(X) = 0) = \beta$ - przyjęcie fałszywej hipotezy

nie da rady mieć testu gdzie $\alpha \searrow 0$ i $\beta \searrow 0$.

więc interesują nas testy $\begin{cases} \text{I rodz} \leq \alpha & \text{bd kontrolowany} \\ \text{II rodz} \to \min \end{cases}$

$$1 - \beta = \mathbb{P}_\theta(\varphi(X) = 1) \quad \text{dla } \theta \in \Theta_1 \quad \text{moc testu}$$

9) lemat Neymanna - Pearsona

niech f_0 i f_1 będą gęstościami pstwa względem pewnej σ-skończonej miary

interesuje nas problem weryfikacji $\begin{cases} H_0: f = f_0 \\ H_1: f = f_1 \end{cases}$

$$\varphi(X) \overset{(1)}{=} \begin{cases} 1 & , f_1(X) > k \cdot f_0(X) \\ 0 & , f_1(X) < k \cdot f_0(X) \end{cases} \quad \text{gdzie } k > 0 \text{ i}$$

spełniony jest warunek $\mathbb{E}_{\theta_0}(\varphi(X) = 1) = \alpha$ (2)

ZAŁOŻENIA

TEZA: a) Jeżeli (1) i (2) są spełnione to φ jest najmocn. testem do weryfikacji $\begin{cases} H \\ H \end{cases}$ na poziomie ist. α.

b) Jeżeli φ jest najmocn. testem do weryfikacji $\begin{cases} H \\ H \end{cases}$ na poziomie ist. α to spełnia (1) i (2).

10) test chi-kwadrat

- Statystyka testowa

$$T = \sum_{i=1} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i},$$

gdzie
  - O_i – zarejestrowana liczba obserwacji w i-tym zbiorze
  - E_i – oczekiwana liczba obserwacji w i-tym zbiorze, przy założeniu prawdziwości hipotezy H_0.
- Reguła odrzucania H_0

$$T \geqslant c_\alpha.$$

prostą dzielimy na przedziały, patrzymy ile obserwacji wpadnie do tego przedziału. – N_i

Rozważmy statystykę

$$T = \sum_{i=1}^{k} \frac{(N_i - np_i)^2}{np_i}.$$

Z twierdzenia Pearsona wynika, że

$$T \underset{n\to\infty}{\overset{H_0}{\sim}} \chi^2_{k-1},$$

co oznacza, że odrzucamy hipotezę zerową na poziomie istotności α, jeżeli

$$T \geqslant \chi^2_{k-1,1-\alpha}.$$

- test χ^2 jest asymptotyczny
- nadaje się dla dyskretnych i dla ciągłych

11) test Kołmogorowa
zbudowany na dystrybuancie empirycznej
$X = (X_1, \ldots, X_n)$ próbka z rozkładu ciągłego
weryfikujemy
$\begin{cases} F = F_0 \\ F \neq F_0 \end{cases}$ statystyka $D_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\hat{F}_n(x) - F(x)|$

odrzucamy, gdy $D_n \geqslant$ kwantyl na poziomie $1-\alpha$ rozkładu statystyki testowej

Nietrudno zauważyć, że

$$D_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\widehat{F}_n(x) - F_0(x)\right| = \max\left\{D_n^+, D_n^-\right\}$$

gdzie

$$D_n^+ = \max_{0\leqslant i\leqslant n} \left(\frac{i}{n} - F(X_{i:n})\right),$$

$$D_n^- = \max_{0\leqslant i\leqslant n} \left(F(X_{i:n}) - \frac{i}{n}\right).$$

(ozn. $X_{0:n} = -\infty$).

12) Ulepszenia testu Kołmogorowa

13) Lemat Gliwienki - Cantellego PTSM

$\mathbb{X} = (X_1, \dots, X_n)$ próbka prosta z rozkładu o dystr. F to

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \to \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} |\hat{F}_n(t) - F(t)| = 0 \right) = 1$$

(o ile próbka jest dostatecznie duża, to ja mam przybliżenie GLOBALNE F)

14) test niezależności χ^2

$$\begin{cases} H_0 : \text{cechy } X \text{ i } Y \text{ są niezależne}, \\ H_1 : \text{cechy } X \text{ i } Y \text{ są zależne}. \end{cases}$$

Interesuje nas, czy między tymi cechami zachodzi jakiś związek, czy też są one niezależne.

Uwaga

Test niezależności chi-kwadrat, odrzucając hipotezę o niezależności cech, wskazuje tylko tyle, że istnieje jakiś związek między cechami, ale wcale nie musi on mieć charakteru przyczynowo-skutkowego.

W praktyce, jeśli istnieje związek między X i Y, mogą zachodzić następujące przypadki

- $X \implies Y$
- $Y \implies X$
- $Z \implies X$ i $Z \implies Y$, gdzie Z jest tzw. cechą ukrytą.

15) def. testu nieobciążonego

test φ: $\begin{cases} H_0: \theta \in \Theta_0 \\ H_1: \theta \in \Theta_1 \end{cases}$ nazyw. nieobc. jeżeli

$$\begin{cases} \mathbb{E}_\theta(\varphi(\mathbb{X})) \leq \alpha, & \theta \in \Theta_0 \\ \mathbb{E}_\theta(\varphi(\mathbb{X})) \geq \alpha, & \theta \in \Theta_1 \end{cases}$$

czyli moc nigdy nie spada poniżej poziomu istotności

16) test ilorazu wiarogodności

Niech $\mathbb{X} = (X_1, \dots, X_n)$ będzie próbką z rozkładu należącego do rodziny $\mathcal{P} = \{p_\theta : \theta \in \Theta\}$, gdzie $\Theta \subset \mathbb{R}^k$.

Niech $L = L(\theta; \mathbb{x})$ oznacza funkcją wiarogodności.

Rozważmy następujące zadanie weryfikacji hipotez

$$\begin{cases} H_0 : \theta \in \Theta_0 \\ H_1 : \theta \in \Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0. \end{cases}$$

Określmy następującą funkcję

$$\lambda(\mathbb{x}) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} L(\theta; \mathbb{x})}{\sup_{\theta \in \Theta} L(\theta; \mathbb{x})}.$$

Oczywiście, $0 \leqslant \lambda(\mathbb{x}) \leqslant 1$, $\forall\, \mathbb{x} \in \mathcal{X}$.

Otrzymywanie małych wartości bd oznaczało, że zb parametrów Θ_0 daje mało wiarygodne wyniki

Stąd pomysł na test **ilorazu wiarogodności** (IW) (ang. *likelihood ratio test*) o obszarze krytycznym

$$\{\mathbb{x} \in \mathcal{X} : \lambda(\mathbb{x}) \leqslant \lambda_0\},$$

gdzie λ_0 wyznacza się z warunku

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} \mathbb{P}_\theta\big(\lambda(\mathbb{x}) \leqslant \lambda_0\big) = \alpha.$$

Uwaga: dla rodzin wykładniczych, obszary krytyczne IW oraz JNM się pokrywają

17) def. testu zgodnego

Definicja

Test φ do weryfikacji $H_0 : \theta \in \Theta_0$ względem $H_1 : \theta \in \Theta_1$ nazywamy **testem zgodnym** na poziomie istotności α, jeśli

jak pójdę z próbką do ∞

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\big(\varphi(X_1, \ldots, X_n) = 1\big) \leqslant \alpha \quad \text{dla każdego } \theta \in \Theta_0$$

to poziomu istotności nie stracę

oraz

a tam gdzie powinien odrzucać to

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\big(\varphi(X_1, \ldots, X_n) = 1\big) = 1 \quad \text{dla każdego } \theta \in \Theta_1.$$

prawie z pstwem 1.

18) Jak zrobić z testu ilorazu wiarogodności test asymptotyczny?

Twierdzenie

Załóżmy, że próbka prosta $\mathbb{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ pochodzi z modelu regularnego z parametrem θ i że istnieje jednoznacznie wyznaczony (prawie wszędzie) ENW parametru θ.

Rozkładem granicznym statystyki $T(\mathbb{X}) = -2\ln\lambda(\mathbb{X})$ w zadaniu weryfikacji hipotez

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{względem} \quad H_1 : \theta \neq \theta_0,$$

jest rozkład chi-kwadrat o jednym stopniu swobody, tzn.

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{\theta_0}\big(-2\ln\lambda(\mathbb{X}) \leqslant t\big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t x^{-1/2} e^{-x/2}\, dx.$$

19) Kryt. faktoryzacji

TWIERDZENIE: (kryterium faktoryzacji)
Statystyka T jest dostateczna dla rodziny rozkładów $\mathcal{P} = \{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ $\Leftrightarrow$ łączny rozkład próbki $\mathbb{X} = (X_1, \dots, X_n)$ można przedstawić jako:

$$P_\theta(\mathbb{X}) = g_\theta(T(\mathbb{x})) \cdot h(\mathbb{x})$$

funkcja h - NIE ZALEŻY od θ
g - zależy od θ, ale jest funkcją statystyki.

Dowód: (dla rozkładu dyskretnego)

"$\Rightarrow$" zakładamy dostateczność.
$\mathbb{x} = (x_1, \dots, x_n)$ oznacza realizację próbki $\mathbb{X} = (X_1, \dots, X_n)$
$T(\mathbb{x}) = t$
wtedy $\mathbb{P}_\theta(\mathbb{X} = \mathbb{x}) = \mathbb{P}_\theta(\mathbb{X} = \mathbb{x}, T = t)$. z def. dostateczności mamy:
$\mathbb{P}_\theta(\mathbb{X} = \mathbb{x}) = \mathbb{P}_\theta(\mathbb{X} = \mathbb{x}, T = t) = \mathbb{P}_\theta(T = t) \cdot \mathbb{P}(\mathbb{X} = \mathbb{x} | T = t) =$
$= g_\theta(T(\mathbb{x})) \cdot h(\mathbb{x})$ ↑ nie zależy od θ z dostateczności

"$\Leftarrow$" zakładamy faktoryzację.
wtedy $\forall t : \mathbb{P}(T = t) > 0$ dla wszystkich θ mamy:

(1) $\mathbb{P}_\theta(\mathbb{X} = \mathbb{x} | T = t) = \dfrac{\mathbb{P}_\theta(\mathbb{X} = \mathbb{x}, T = t)}{\mathbb{P}_\theta(T = t)}$

patrzymy na licznik (1)
$$\mathbb{P}_\theta(\mathbb{X} = \mathbb{x}, T = t) = \begin{cases} 0 & \text{, gdy } T(\mathbb{x}) \neq t \\ \mathbb{P}_\theta(\mathbb{X} = x) & \text{, gdy } T(\mathbb{x}) = t \end{cases}$$

w pierwszym przypadku $(1) = 0$ czyli w oczywisty sposób nie zależy od θ
w drugim przypadku, korzystamy z faktoryzacji i
$\mathbb{P}_\theta(\mathbb{X} = x) = g_\theta(t) \cdot h(\mathbb{x})$

to przejście?

teraz zajmujemy się mianownikiem (1)
$\mathbb{P}_\theta(T = t) = \sum_{\mathbb{x} : T(\mathbb{x}) = t} \mathbb{P}_\theta(\mathbb{X} = x) = \sum_{\mathbb{x} : T(\mathbb{x}) = t} g_\theta(t) \cdot h(\mathbb{x})$

finalnie (1) wygląda:
$$\mathbb{P}_\theta(\mathbb{X} = \mathbb{x} | T = t) = \frac{g_\theta(t) \cdot h(\mathbb{x})}{\sum_{\mathbb{x} : T(\mathbb{x}) = t} g_\theta(t) \cdot h(\mathbb{x})} = \frac{h(\mathbb{x})}{\sum_{x : T(\mathbb{x}) = t} h(\mathbb{x})}$$

czyli ponownie p-stwo nie zależy od θ, co dowodzi. $\square$