Zadanie 7.15

Algorytm weryfikacji hipotez:

1. Model matematyczny (z jakiego rozkładu jest próba, czy coś wiemy o parametrach, co chcemy testować).
2. Hipotezy H (zerowa) i K alternatywna.
3. Poziom istotności α.
4. Statystyka testowa $T(\mathbb{X})$.
5. Obszar krytyczny K_α.
6. Decyzja:
    - $T \in K_\alpha \Rightarrow$ odrzucamy H.
    - $T \notin K_\alpha \Rightarrow$ nie mamy podstaw do odrzucenia H.

Zadanie 7.15

Algorytm weryfikacji hipotez:

1. Model matematyczny (z jakiego rozkładu jest próba, czy coś wiemy o parametrach, co chcemy testować).
2. Hipotezy H (zerowa) i K alternatywna.
3. Poziom istotności α.
4. Statystyka testowa $T(\mathbb{X})$.
5. Obszar krytyczny K_α.
6. Decyzja:
   - $T \in K_\alpha \Rightarrow$ odrzucamy H.
   - $T \notin K_\alpha \Rightarrow$ nie mamy podstaw do odrzucenia H.

Zadanie 7.15

Mamy $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. z rozkładu $N(\mu, \sigma)$, gdzie σ znane. Wiemy ponadto, że:

- $n = 16$,
- $\sigma = 5$,
- $\mu_0 = 250$,
- $\bar{X} = 244$,
- $\alpha = 0.05$.

Zadanie 7.15. Automat wytwarza tabliczki czekolady o nominalnej wadze 250g. Wiadomo, że rozkład wagi produkowanych tabliczek jest normalny z odchyleniem standardowym 5g. Kontrola techniczna pobrała próbę losową 16 tabliczek czekolady i otrzymała średnią wagę tabliczki równą 244g. Czy można na tej podstawie stwierdzić, że automat się rozregulował i zaniża wagę tabliczek? Zweryfikować odpowiednią hipotezę na poziomie istotności 0.05.

$N(?, 5)$

$n = 16$ tabliczek

$\bar{X} = 244$ $\quad \bar{X} = \frac{1}{16}(\ldots)$

śr. empiryczna

250 – średnia teoretyczna

Stawiamy parę hipotez:

to ma nam podpowiedzieć jaką parę hipotez sformułować.

$$\begin{cases} H : \mu \geqslant \mu_0 \\ K : \mu < \mu_0 \end{cases} = \begin{cases} H : \mu = \mu_0 \\ K : \mu < \mu_0 \end{cases}$$

UWAGA może być tu =

bo dla większych tymbardziej

te dwie mają pokryć CAŁĄ przestrzeń parametru $(-\infty; +\infty)$

Jeśli pokażemy, że mamy hipotezę alternatywną przy założeniu że $H \mu := \mu_0$, to tym bardzie będzie ona przy $H : \mu \geqslant \mu_0$ (ponieważ $\mu = \mu_0$ jest najbardziej skrajnym przypadkiem do sprawdzenia).

Zadanie 7.15

H_0 : działa poprawnie
Alternatywna: Automat zaniża wagę.

(mamy gwarancję, że automat nie produkuje cięższych tabliczek bo te empiryczne $244 < 250$.

Rozpatrujemy testy do weryfikacji średniej. Wybieramy Model I wersję 3.

Weryfikacja hipotez dotyczących wartości średniej		
Model I. Cecha $X \sim N(\mu,\sigma)$, μ - nieznane, σ - znane. Hipoteza zerowa $H: \mu = \mu_0$. Statystyka testowa $T = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$		
Hipoteza alternatywna $K: \mu \neq \mu_0$ Obszar krytyczny $(-\infty; -z_{1-\alpha/2}] \cup [z_{1-\alpha/2}; +\infty)$	Hipoteza alternatywna $K: \mu > \mu_0$ Obszar krytyczny $[z_{1-\alpha}; +\infty)$	Hipoteza alternatywna $K: \mu < \mu_0$ Obszar krytyczny $(-\infty; -z_{1-\alpha}]$
Model II. Cecha $X \sim N(\mu,\sigma)$, μ - nieznane, σ- nieznane. Hipoteza zerowa $H: \mu = \mu_0$. Statystyka testowa $T = \frac{\overline{X}-\mu_0}{S}\sqrt{n}$		
Hipoteza alternatywna $K: \mu \neq \mu_0$ Obszar krytyczny $\left(-\infty; -t^{[n-1]}_{1-\alpha/2}\right] \cup \left[t^{[n-1]}_{1-\alpha/2}; +\infty\right)$	Hipoteza alternatywna $K: \mu > \mu_0$ Obszar krytyczny $\left[t^{[n-1]}_{1-\alpha}; +\infty\right)$	Hipoteza alternatywna $K: \mu < \mu_0$ Obszar krytyczny $\left(-\infty; -t^{[n-1]}_{1-\alpha}\right]$
Model III. Cecha X ma rozkład dowolny (duża próba). Hipoteza zerowa $H: \mu = \mu_0$. Statystyka testowa $T = \frac{\overline{X}-\mu_0}{S}\sqrt{n}$		
Hipoteza alternatywna $K: \mu \neq \mu_0$ Obszar krytyczny $(-\infty; -z_{1-\alpha/2}] \cup [z_{1-\alpha/2}; +\infty)$	Hipoteza alternatywna $K: \mu > \mu_0$ Obszar krytyczny $[z_{1-\alpha}; +\infty)$	Hipoteza alternatywna $K: \mu < \mu_0$ Obszar krytyczny $(-\infty; -z_{1-\alpha}]$

Statystyka testowa:

$$T(\mathbb{X}) = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$$

Przy naszych danych:

$$T = \frac{244 - 250}{5}\sqrt{16} = -4.8$$

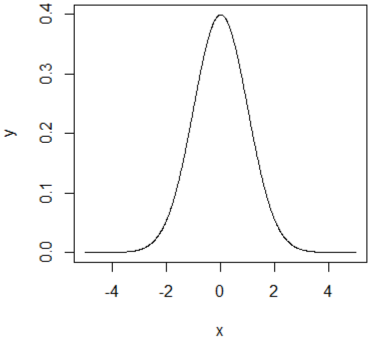
Przedział krytyczny:

$$K_\alpha = (-\infty, -z_{1-\alpha}] = (-\infty, -z_{0.95}] = (-\infty, -1.64]$$

Zatem $T \in K_\alpha \Rightarrow$ odrzucamy hipotezę zerową na rzecz hipotezy alternatywnej.

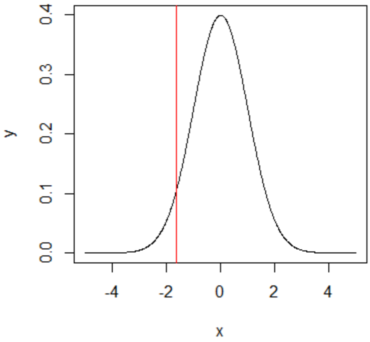
Zadanie 7.15

Przy założeniu hipotezy zerowej $T(\mathbb{X}) \sim N(0,1)$. Zatem dla próbki $X_1, ..., X_n$ gęstość statystyki wygląda następująco:



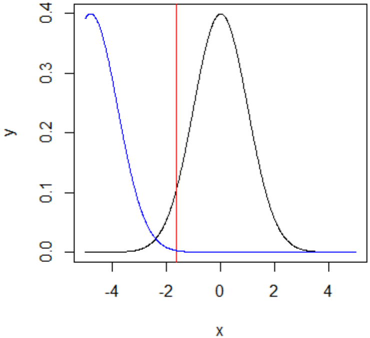
Zadanie 7.15

Odrzucamy hipotezę zerową gdy jesteśmy na lewo od czerwonej linii:



Zadanie 7.15

Nasza wartość -4.8 jest nietypowa dla założenia, że $\mu_0 = 250$ (lecz nie niemożliwa, choć prawdopodobieństwo jej osiągnięcia przy założeniu, że $\mu_0 = 250$ jest mniejsze niż $\alpha = 0.05$). Bardziej prawdopodobne, że nasza wartość pochodzi z rozkładu normalnego np. takiego jak ten wyrażony przez niebieską linię. Jest to rozkład o średniej $\mu < \mu_0$.



Zadanie 7.15

Czy nie trzeba tylko porównywać $\bar{X}$ z μ? To daje pewną intuicję, ale stwierdzenie, czy uzyskaliśmy wartość T typową dla rozkładu z hipotezy zerowej zależy od σ, n czy też α.
Np. wiedząc, że mamy większą sigmę ogony są szersze więc jesteśmy bardziej skłonni przyjmować wartości bardziej odchylone od μ_0 jako pochodzące z rozkładu danego przez hipotezę zerową.

Zadanie 7.1

Mamy próbkę $X_1, ..., X_n$ i.i.d. $N(\mu, \sigma)$, mamy także $\sigma^2 = 1$. Mamy skonstruować test dla następującej pary hipotez:

Zadanie 7.1. Niech $X_1, \ldots, X_n$ oznacza próbkę prostą z rozkładu normalnego $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$ o znanej wariancji $\sigma^2 = 1$.

a) Skonstruować test najmocniejszy na poziomie istotności α do weryfikacji hipotezy $H_0 : \mu = \mu_0$, przy alternatywie $H_1 : \mu = \mu_1$, gdzie $\mu_1 > \mu_0$.

b) Wyznaczyć postać tego testu przyjmując: $\mu_0 = 0$, $\mu_1 = 1$, $n = 6$ oraz $\alpha = 0.05$.

c) Wyznaczyć funkcję mocy otrzymanego testu.

d) Wyznaczyć prawdopodobieństwo popełnienia błędu drugiego rodzaju.

e) Jak liczna powinna być próbka, aby przy zadanym poziomie istotności prawdopodobieństwo popełnienia błędu drugiego rodzaju było równe 0.1?

tu przestrzeń jest dwuelementowa

$\{\mu_0, \mu_1\}$

$$\begin{cases} X(\mu_0, \sigma) & H : \mu = \mu_0 \\ X(\mu_1, \sigma) & K : \mu = \mu_1 \end{cases}$$

a)

Korzystamy z lematu Neymana-Pearsona:

$$\phi(X_1, ..., X_n) = \begin{cases} 1 \text{ gdy } f_1(x_1, ..., x_n) > k f_0(x_1, ..., x_n) \\ 0 \text{ gdy } f_1(x_1, ..., x_n) < k f_0(x_1, ..., x_n) \end{cases}$$

k uzyskujemy z równości $\mathrm{E}_{f_0} \phi(x) = \alpha$. Zatem:

$$f_1(x_1, ..., x_n) > k f_0(x_1, ..., x_n)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cancel{(\sqrt{2\pi})^n}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_1)^2\right) > \frac{k}{\cancel{(\sqrt{2\pi})^n}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2\right)$$

Zadanie 7.1

$$\Leftrightarrow k < \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)^2-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\cancel{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}-2\sum_{i=1}^{n}x_i\mu_1+\sum_{i=1}^{n}\mu_1^2\right.\right.$$

$$\left.\left.-\cancel{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}+2\sum_{i=1}^{n}x_i\mu_0-\sum_{i=1}^{n}\mu_0^2\right)\right)>k$$

$$\Leftrightarrow \exp\left((\mu_1-\mu_0)\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\overbrace{\exp\left(-\frac{n}{2}(\mu_1^2-\mu_0^2)\right)}^{\text{stała}}>k$$

$$\Leftrightarrow \exp\left((\mu_1-\mu_0)\sum_{i=1}^{n}x_i\right)>k' \Leftrightarrow \underbrace{(\mu_1-\mu_0)}_{>0}\sum_{i=1}^{n}x_i>\overset{\ln(k')}{\overset{\|}{k''}} \Leftrightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i>k'''$$

Zadanie 7.1

$\bar{X} > k'''$ trzeba znaleźć to k'''

Znajdźmy k''':

$$\alpha = \mathrm{E}_{f_0}\,\phi(x_1, ..., x_n) = 1 * \mathbb{P}_H(\phi(x_1, ..., x_n) = 1) + 0 * \mathbb{P}_H(\phi(x_1, ..., x_n) = 0)$$

$$= \mathbb{P}_H(\bar{X} > k''') = *$$

Przy założeniu hipotezy zerowej mamy $\bar{X} \sim N(\mu_0, \frac{1}{\sqrt{n}})$.

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

$$* = \mathbb{P}_H((\bar{X} - \mu_0)\sqrt{n} > (k''' - \mu_0)\sqrt{n}) = 1 - \Phi((k''' - \mu_0)\sqrt{n})$$

$$\Phi((k''' - \mu_0)\sqrt{n}) = 1 - \alpha$$

$$(k''' - \mu_0)\sqrt{n} = z_{1-\alpha}$$

$$k''' = \frac{1}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha} + \mu_0$$

Zadanie 7.1

Zatem test jest postaci: postać testu

$$\boxed{\phi(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1 \text{ gdy } \bar{X} > \frac{z_{1-\alpha}}{\sqrt{n}} + \mu_0 \\ 0 \text{ gdy } \bar{X} < \frac{z_{1-\alpha}}{\sqrt{n}} + \mu_0 \end{cases}}$$

b) Dla $\mu_0 = 0$, $\mu_1 = 1$, $n = 6$ i $\alpha = 0.05$ mamy:

$$\phi(X_1, \ldots, X_6) = \begin{cases} 1 \text{ gdy } \bar{X} > 0.67 \\ 0 \text{ gdy } \bar{X} < 0.67 \end{cases}$$

Zadanie 7.1. Niech $X_1, \ldots, X_n$ oznacza próbkę prostą z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma)$ o znanej wariancji $\sigma^2 = 1$.

a) Skonstruować test najmocniejszy na poziomie istotności α do weryfikacji hipotezy $H_0 : \mu = \mu_0$, przy alternatywie $H_1 : \mu = \mu_1$, gdzie $\mu_1 > \mu_0$.

b) Wyznaczyć postać tego testu przyjmując: $\mu_0 = 0$, $\mu_1 = 1$, $n = 6$ oraz $\alpha = 0.05$.

c) Wyznaczyć funkcję mocy otrzymanego testu.

d) Wyznaczyć prawdopodobieństwo popełnienia błędu drugiego rodzaju.

e) Jak liczna powinna być próbka, aby przy zadanym poziomie istotności prawdopodobieństwo popełnienia błędu drugiego rodzaju było równe 0.1?

c) Teraz policzymy funkcję mocy:

$$M(\mu) = \mathrm{E}_\mu \, \phi(X_1, \ldots, X_n) = \mathbb{P}_\mu(\phi(X_1, \ldots, X_n) = 1) = \mathbb{P}_\mu\left(\bar{X} > \frac{z_{1-\alpha}}{\sqrt{n}} + \mu_0\right)$$

$$= \mathbb{P}_\mu((\bar{X} - \mu)\sqrt{n} > z_{1-\alpha} + (\mu_0 - \mu)\sqrt{n}) = 1 - \Phi(z_{1-\alpha} + (\mu_0 - \mu)\sqrt{n})$$

Zatem błąd drugiego rodzaju:

moc testu to z podstawioną hipotezą alternatywną

d) test najmocniejszy to taki, dla

$$\beta = 1 - M(\mu_1) = \Phi(z_{1-\alpha} + (\mu_0 - \mu_1)\sqrt{n})$$

prawdopodobieństwo popełnienia błędu IIgo rodzaju jest najmniejsze przy ustalonym α

Zadanie 7.1

Załóżmy, że mamy poziom istotności $\alpha = 0.05$. Jak duża powinna być próbka, aby błąd drugiego rodzaju $\beta \leqslant 0.1$.

$$\beta = 1 - M(\mu_1) = \Phi(z_{1-\alpha} + (\mu_0 - \mu_1)\sqrt{n})$$

$$z_\beta = z_{1-\alpha} + (\mu_0 - \mu_1)\sqrt{n}$$

$$(\mu_0 - \mu_1)\sqrt{n} = z_\beta - z_{1-\alpha}$$

$$n = \left\lceil \left(\frac{z_\beta - z_{1-\alpha}}{\mu_0 - \mu_1} \right)^2 \right\rceil$$

Zadanie 7.1. Niech $X_1, \ldots, X_n$ oznacza próbkę prostą z rozkładu normalnego $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$ o znanej wariancji $\sigma^2 = 1$.

a) Skonstruować test najmocniejszy na poziomie istotności α do weryfikacji hipotezy $H_0 : \mu = \mu_0$, przy alternatywie $H_1 : \mu = \mu_1$, gdzie $\mu_1 > \mu_0$.

b) Wyznaczyć postać tego testu przyjmując: $\mu_0 = 0$, $\mu_1 = 1$, $n = 6$ oraz $\alpha = 0.05$.

c) Wyznaczyć funkcję mocy otrzymanego testu.

d) Wyznaczyć prawdopodobieństwo popełnienia błędu drugiego rodzaju.

e) Jak liczna powinna być próbka, aby przy zadanym poziomie istotności prawdopodobieństwo popełnienia błędu drugiego rodzaju było równe 0.1?

Zatem:

$$n = \left\lceil \left(\frac{z_{0.1} - z_{0.95}}{0 - 1} \right)^2 \right\rceil = \left\lceil \left(\frac{-1.28 - 1.64}{1} \right)^2 \right\rceil = \lceil 8.56 \rceil = 9$$

Zadanie 7.2

Mamy $X_1, ..., X_n$ i.i.d. $Bern(\theta)$. Mamy skonstruować test dla następującej pary hipotez:

$$\begin{cases} H : \theta = \theta_0 = 0.2 \\ K : \theta = \theta_1 = 0.3 \end{cases}$$

Sprawdzamy warunek z lematu N-P:

dla całej próby

$$f_1(x_1, ..., x_n) > kf_0(x_1, ..., x_n)$$

$$\Leftrightarrow \theta_1^{\sum_{i=1}^n X_i}(1-\theta_1)^{n-\sum_{i=1}^n X_i} > k\theta_0^{\sum_{i=1}^n X_i}(1-\theta_0)^{n-\sum_{i=1}^n X_i}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^{\sum_{i=1}^n X_i}\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)^{n-\sum_{i=1}^n X_i} > k \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n X_i > k'$$

Wiemy, że przy założeniu H mamy $\sum_{i=1}^n X_i \sim Bin(20, 0.2)$ dwumianowy

$$\alpha = \mathrm{E}_H\,\phi(x_1, ..., x_n)\mathbb{P}_H(\phi(x_1, ..., x_n) = 1) = \mathbb{P}_H(\sum_{i=1}^n X_i > k')$$

Zadanie 7.2

$$1 - F_H(k') = 1 - \sum_{i=0}^{k'} \binom{20}{i} 0.2^i 0.8^{20-i}$$

Mamy następujące wartości:

k'	$P(\sum_{i=1}^{n} X_i > k')$
7	0.03214
8	0.00998
9	0.00259

Zatem nie trafiamy w $\alpha = 0.02$! Można ten problem rozwiązać na dwa sposoby.

- Aby test był na poziomie istotności $\alpha = 0.02$, to błąd I rodzaju musi być $< \alpha$, zatem $1 - F_H(k') < \alpha$, czyli $k' = 8$. Wówczas test ma następującą postać:

$$\phi(X_1, ..., X_{20}) = \begin{cases} 1 \text{ gdy } \sum_{i=1}^{n} X_i > 8 \\ 0 \text{ w.p.p} \end{cases}$$

  Test ten jest na poziomie istotności $\alpha = 0.02$, ale jego rozmiar $size_\phi = 0.00998$.

Zadanie 7.2

- Tworzymy test zrandomizowany:

c)

$$\tilde{\phi}(X_1, ..., X_{20}) = \begin{cases} 1 \text{ gdy } \sum_{i=1}^{n} X_i > 8 \\ \gamma \text{ gdy } \sum_{i=1}^{n} X_i = 8 \\ 0 \text{ gdy } \sum_{i=1}^{n} X_i < 8 \end{cases}$$

Gdy $\sum_{i=1}^{n} = 8$, wówczas rzucamy monetą z prawdopodobieństwem orła równym γ. Jeśli wypadnie orzeł to odrzucamy.
Policzmy gamma:

$$\alpha = 0.02 = \mathrm{E}_H\, \tilde{\phi}(X_1, ..., X_{20}) = 1 * \mathbb{P}_H(\sum_{i=1}^{n} X_i > 8) + \gamma \mathbb{P}_H(\sum_{i=1}^{n} X_i = 8)$$

$$\gamma = \frac{\alpha - \mathbb{P}_H(\sum_{i=1}^{n} X_i > 8)}{\mathbb{P}_H(\sum_{i=1}^{n} X_i = 8)} = \frac{0.02 - 0.00998}{0.02216} \approx 0.452$$

Zadanie 7.17

Badamy prędkość propagacji pewnej cieczy. Mamy $n = 15$ obserwacji, odchylenie standardowe jest równe $S = 4.5$. Mamy założenie, że rozkład badanej cechy jest normalny.

Model II. Cecha $X \sim N(\mu, \sigma)$, μ - nieznane, σ- nieznane. Hipoteza zerowa $H : \mu = \mu_0$. Statystyka testowa $T = \frac{\overline{X}-\mu_0}{S}\sqrt{n}$		
Hipoteza alternatywna $K : \mu \neq \mu_0$ Obszar krytyczny $\left(-\infty; -t_{1-\alpha/2}^{[n-1]}\right] \cup \left[t_{1-\alpha/2}^{[n-1]}; +\infty\right)$	Hipoteza alternatywna $K : \mu > \mu_0$ Obszar krytyczny $\left[t_{1-\alpha}^{[n-1]}; +\infty\right)$	Hipoteza alternatywna $K : \mu < \mu_0$ Obszar krytyczny $\left(-\infty; -t_{1-\alpha}^{[n-1]}\right]$

$$\begin{cases} H : \sigma = 4 \\ K : \sigma > 4 \end{cases}$$

Alternatywnie:

$$\begin{cases} H : \sigma^2 = 16 \\ K : \sigma^2 > 16 \end{cases}$$

Statystyka testowa $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ przy założeniu hipotezy zerowej ma rozkład χ^2_{n-1}.
Wartość statystyki:

$$T = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{14 * 20.25}{16} \approx 17.72$$

Zadanie 7.17

Przedział krytyczny:

$$K_\alpha = [\chi^2_{n-1,1-\alpha}, \infty) = [\chi^2_{14,0.95}, \infty) = [23.68, \infty)$$

Nie wpadamy do przedziału krytycznego, zatem nie ma podstaw do tego aby odrzucić hipotezę zerową $\sigma = 4$, zatem odchylenie standardowe prędkości propagacji pewnej cieczy nie jest istotnie większe od 4.

Zadanie 7.21

Mamy następujące dane o ciśnieniu w komorze spalania silnika dla dwóch gatunków paliwa:

pierwszy gatunek	40.32	39.85	41.17	40.62	40.04
drugi gatunek	51.07	49.6	50.45	50.59	50.29

Zakładając, że ciśnienia są z rozkładu normalnego, mamy stwierdzić, czy odchylenia standardowe dla obu gatunków są takie same?
Załóżmy, że pierwsza seria to realizacja próby losowej $X_1, \ldots, X_5$ z rozkładu $N(\mu_1, \sigma_1)$ i druga seria to $Y_1, \ldots, Y_5$ z rozkładu $N(\mu_2, \sigma_2)$. Oczywiście elementy próby $\mathbb{X}$ są niezależne (z treści polecenia). Podobnie dzieje się dla próby $\mathbb{Y}$. Tak samo jest niezależność pomiędzy elementami $\mathbb{X}$ i $\mathbb{Y}$, ponieważ wszystkie pomiary są niezależne. Para hipotez:

$$\begin{cases} H : \sigma_1 = \sigma_2 \\ K : \sigma_1 \neq \sigma_2 \end{cases}$$

Zadanie 7.21

Oczywiście możemy ją alternatywnie przedstawić jako:

$$\begin{cases} H : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ K : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$$

Statystyka testowa:

$$T = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

Przy założeniu hipotezy zerowej ta statystka powinna mieć rozkład $F^{[n_1-1],[n_2-1]}$.
Wartość statystyki:

$$T = \frac{S_1^2}{S_2^2} \approx \frac{0.27}{0.284} \approx 0.94$$

Przedział krytyczny:

$$K_\alpha = (0, F_{\frac{\alpha}{2}}^{[n_1-1,n_2-1]}] \cup [F_{1-\frac{\alpha}{2}}^{[n_1-1,n_2-1]}, \infty) = (0, F_{0.025}^{[4,4]}] \cup [F_{0.975}^{[4,4]}, \infty)$$
$$= (0, 0.1] \cup [9.6, \infty)$$

Zatem wypadamy poza przedział krytyczny więc nie odrzucamy hipotezy zerowej co oznacza, że nie ma podstaw do tego, żeby twierdzić, że te odchylenia są różne.

Zadanie 7.23

Zadanie 7.23. W poniższej tabeli zamieszczono długości skoków (w metrach) losowo wybranych zawodników:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
pierwsza seria	98.0,	97,	98.5,	95.5,	96.5	93.0
druga seria	98.5,	99,	98.0,	98.0,	97.0	94.0
	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6

Zakładając, że rozkład długości skoków jest normalny, stwierdzić, czy w drugiej serii skoczkowie osiągają przeciętnie lepsze rezultaty. Przyjąć poziom istotności 0.05.

μ_1, σ_1 nieznane

μ_2, σ_2 nieznane

Czy $\mu_2 > \mu_1$?

Mamy następujące dane o skoczkach:

pierwsza seria	98	97	98.5	95.5	96.5	93
druga seria	98.5	99	98	98	97	94

Zakładając, że długości skoków są z rozkładu normalnego, mamy stwierdzić, czy w drugiej serii skoczkowie (średnio) się poprawiają? Załóżmy, że pierwsza seria to realizacja próby losowej $X_1, ..., X_6$ z rozkładu $N(\mu_1, \sigma_1)$ i druga seria to $Y_1, ..., Y_6$ z rozkładu $N(\mu_2, \sigma_2)$. Oczywiście elementy próby $\mathbb{X}$ są niezależne (różni skoczkowie, każdy skacze niezależnie od drugiego). Podobnie dzieje się dla próby $\mathbb{Y}$. Pozostaje pytanie, jak wygląda zależność między elementami prób $\mathbb{X}$ i $\mathbb{Y}$?
Oczywiście X_i nie zależy od Y_j dla $i \neq j$, ale X_i zależy od Y_j (to jest ten sam skoczek). Zatem rekomendowany model to Model IV z tabeli dotyczącej dwóch średnich.

Zadanie 7.23

Model IV. Cechy $X \sim N(\mu_1, \sigma_1)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2)$, σ_1, σ_2 - nieznane; obserwacje w parach (X_i, Y_i) są zależne. Hipoteza zerowa $H: \mu_1 = \mu_2$. Statystyka testowa $T = \frac{\bar{Z}}{S_Z}\sqrt{n}$, gdzie $Z_i = X_i - Y_i$		
Hipoteza alternatywna $K: \mu_1 \neq \mu_2$ Obszar krytyczny $\left(-\infty; -t^{[n-1]}_{1-\alpha/2}\right] \cup \left[t^{[n-1]}_{1-\alpha/2}; +\infty\right)$	Hipoteza alternatywna $K: \mu_1 > \mu_2$ Obszar krytyczny $\left[t^{[n-1]}_{1-\alpha}; +\infty\right)$	Hipoteza alternatywna $K: \mu_1 < \mu_2$ Obszar krytyczny $\left(-\infty; -t^{[n-1]}_{1-\alpha}\right]$

Para hipotez:

$$\begin{cases} H: \mu_1 = \mu_2 \\ K: \mu_1 < \mu_2 \end{cases}$$

Statystyka testowa:

$$T = \frac{\bar{Z}}{S_Z}\sqrt{n}, \text{ gdzie } Z_i := X_i - Y_i$$

Przy założeniu hipotezy zerowej ta statystka powinna mieć rozkład $t^{[n-1]}$. Wartość statystyki:

$$T = \frac{\bar{Z}}{S_Z}\sqrt{n} \approx \frac{-1}{1.1}\sqrt{6} \approx -2.24$$

Przedział krytyczny:

$$K_\alpha = (-\infty, -t^{[n-1]}_{1-\alpha}] = (-\infty, -t^{5}_{0.95}] = (-\infty, -2.02]$$

PISAĆ TO

Zatem wpadamy w przedział krytyczny więc odrzucamy hipotezę zerową co oznacza, że przyjmujemy, że $\mu_1 < \mu_2$, więc przeciętnie skoczkowie się poprawiają.

Zadanie 7.1

Mamy $X_1, ..., X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\sigma^2 = 1$. Testujemy

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ vs } H_1 : \mu = \mu_1$$

a) Z lematu Neymana-Pearsona wiemy, że test postaci

$$\varphi(\mathbb{X}) = \begin{cases} 1 & f_1(\mathbb{X}) > kf_0(\mathbb{X}) \\ 0 & f_1(\mathbb{X}) \leqslant kf_0(\mathbb{X}), \end{cases}$$

gdzie $E_{H_0}\varphi(\mathbb{X}) = \alpha$, jest najmocniejszy. Policzmy więc $f_1(\mathbb{X})/f_0(\mathbb{X})$.

$$\begin{aligned} \frac{f_1(\mathbb{X})}{f_0(\mathbb{X})} &= \frac{\frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_1)^2}}{\frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2}} = e^{\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n ((X_i - \mu_0)^2 - (X_i - \mu_1)^2)} \\ &= e^{\frac{1}{2\sigma^2}[n(\mu_0^2 - \mu_1^2) + 2\sum_{i=1}^n X_i(\mu_1 - \mu_0)]} \end{aligned}$$

Zadanie 7.1

Stąd

$$e^{\frac{1}{2\sigma^2}[n(\mu_0^2-\mu_1^2)+2\sum_{i=1}^n X_i(\mu_1-\mu_0)]} > k$$

Równoznacznie

$$n(\mu_0^2-\mu_1^2)+n2\bar{X}(\mu_1-\mu_0) > \tilde{k} = 2\sigma^2 log(k)$$

Skoro μ_0 i μ_1 ustalone i $\mu_1 > \mu_0$ to:

$$\varphi(\mathbb{X}) = \begin{cases} 1 & \bar{X} > \tilde{\tilde{k}} \\ 0 & \bar{X} \leqslant \tilde{\tilde{k}}, \end{cases}$$

gdzie $\tilde{\tilde{k}}$ takie, że $E_{H_0}(\varphi(\mathbb{X})) = \alpha$.Zauważmy, że

$$\alpha = P_{H_0}(\bar{X} > \tilde{\tilde{k}}) = P_{H_0}(\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > \frac{\tilde{\tilde{k}}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n})$$

Stąd $\frac{\tilde{\tilde{k}}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} = z_{1-\alpha}$.

Zadanie 7.1

Test

$$\varphi(\mathbb{X}) = \begin{cases} 1 & \bar{X}\sqrt{6} > 1.64 \\ 0 & \bar{X}\sqrt{6} \leqslant 1.64, \end{cases}$$

c) Zauważmy, że przy H_1 $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma^2)$. Więc

$$\begin{aligned} power(\mu_1) &= P_{H_1}(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}) = P_{H_1}(\bar{X} > z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \mu_0) \\ &= P_{H_1}(\frac{\bar{X} - \mu_1}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha} + \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma}\sqrt{n}) \\ &= 1 - \Phi(z_{1-\alpha} + \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma}\sqrt{n}) \end{aligned}$$

W naszym przypadku

$$power(1) = 1 - \Phi(z_{0.95} - \sqrt{6}) \approx 0.79$$

Zadanie 7.1

d) Błąd drugiego rodzaju to

$$P_{H_1}(\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \leqslant z_{1-\alpha}) = 1 - power(\mu_1) = \approx 0.21.$$

e) Do rozwiązania

$$\Phi(z_{1-\alpha} + \frac{\mu_0-\mu_1}{\sigma}\sqrt{n}) = 0.1$$

A w zasadzie szukamy najmniejszego n takiego, że

$$\Phi(z_{0.95} - \sqrt{n}) \leqslant 0.1$$

Stąd

$$z_{0.95} - \sqrt{n} \leqslant z_{0.1}$$

Więc

$$n \geqslant (z_{0.95} - z_{0.1})^2 = 8.56$$

Stąd $n = 9$.

Zadanie 7.4

Zadanie 7.4. Niech $X_1, \ldots, X_n$ oznacza próbkę prostą z rozkładu normalnego $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$ o znanej wariancji.

a) Wyznaczyć test jednostajnie najmocniejszy do weryfikacji hipotezy $H_0 : \mu \leq \mu_0$, przeciwko hipotezie $H_1 : \mu > \mu_0$, na poziomie istotności $\alpha = 0.05$.

b) Wyznaczyć funkcję mocy tego testu.

Co ciekawe nasz test w Zadaniu 7.1 nie zależał od wartości μ_1 a jedynie od tego, że $\mu_1 > \mu_0$. Tak więc test

$$\varphi(\mathbb{X}) = \begin{cases} 1 & \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha} \\ 0 & \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \leqslant z_{1-\alpha}, \end{cases}$$

będzie jednostajnie najmocniejszy dla

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ vs } H_1 : \mu > \mu_0$$

i również dla

$$H_0 : \mu \leqslant \mu_0 \text{ vs } H_1 : \mu > \mu_0$$

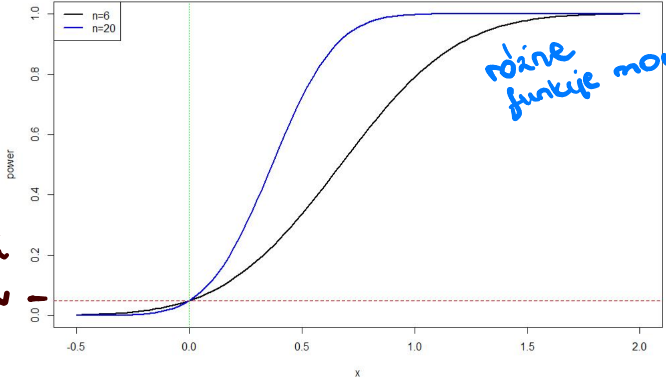
Tak jak poprzednio

$$power(\cancel{\mu_1}) = 1 - \Phi(z_{1-\alpha} + \frac{\mu_0 - \cancel{\mu_1}}{\sigma}\sqrt{n})$$

funkcja mocy od x

Zadanie 7.4

to jest hipoteza zerowa



różne funkcje mocy

poziom istotności α

Zadanie 7.15

Waga tabliczki czekolady $\sim \mathcal{N}(\mu, 25)$. Mamy próbkę $n = 16$ tabliczek. Do wykonania mamy test: czy zaniża?

$$H_0 : \mu = 250 \text{ vs } H_1 : \mu < 250$$

W tym przypadku:

$$\varphi(\mathbb{X}) = \begin{cases} 1 & \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} < z_\alpha \\ 0 & \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \geqslant z_\alpha, \end{cases}$$

Ale nie musimy zawsze definiować φ, w praktyce wystarczy zdefiniować obszar krytyczny

$$R_\alpha = (-\infty, z_\alpha)$$

i sprawdzić czy nasza statystyka testowa $t = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$ do niego należy czy też nie.

Zadanie 7.15

W naszym przypadku

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{244 - 250}{5}\sqrt{16} = -4.8$$

$$R_{0.05} = (-\infty, z_{0.05}) = (-\infty, -z_{0.95}) = (-\infty, -1.64)$$

Widać że $t \in R_\alpha$ a więc odrzucamy hipotezę H_0 na poziomie istotności $\alpha = 0.05$.
Co ciekawe odrzucimy ją też na pewno na poziomie istotności większym niż 0.05 np 0.1.

Zadanie 7.16

Waga proszku $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Mamy próbkę $n = 7$. Do wykonania mamy test:

$$H_0 : \mu = 3 \text{ vs } H_1 : \mu \neq 3$$

Zauważmy, że

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S}\sqrt{n} \sim t_{n-1}$$

dodatkowo wariancji nie znamy

a test jest dwustronny. Stąd

$$R_{0.05} = (-\infty, -t_{0.975}^{[n-1]}) \cup (t_{0.975}^{[n-1]}, \infty)$$

kwantyl $1 - \frac{\alpha}{2}$

W zadaniu $\bar{x} = 2.95$ i $s = 0.064$, a więc

$$t = \frac{2.95 - 3}{0.064}\sqrt{7} = -2.07$$

oraz

$$R_{0.05} = (-\infty, -2.45) \cup (2.45, \infty)$$

obszar krytyczny

A więc $t \notin R_{0.05}$ i nie mamy podstaw aby odrzucić hipotezę zerową.

Zadanie 7.16

Taka jeszcze "ciekawostka". Stwórzmy przedział ufności dla μ:

$$CI_{1-\alpha}(\mu) = (\bar{x} - t_{1-\alpha/2}^{[n-1]} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{1-\alpha/2}^{[n-1]} \frac{s}{\sqrt{n}}).$$

$$CI_{0.95}(\mu) = (2.89081, 3.00919).$$

Zauważmy że

$$3 \in CI_{0.95}(\mu).$$

Zadanie w stylu Zadania 7.2

Mamy $X_1, \dots, X_n \sim pois(\lambda)$ i $n = 5$. Testujemy

$$H_0 : \lambda = 1 \text{ vs } H_1 : \lambda = 2$$

Z lematu Neymana-Pearsona wiemy, że test postaci

$$\varphi(\mathbb{X}) = \begin{cases} 1 & f_1(\mathbb{X}) > kf_0(\mathbb{X}) \\ 0 & f_1(\mathbb{X}) \leqslant kf_0(\mathbb{X}), \end{cases}$$

Tu

$$f(\mathbb{X}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{X_i}}{X_i!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n} X_i}}{\prod_{i=1}^{n} X_i!} e^{-n\lambda}$$

Więc

$$\frac{f_1(\mathbb{X})}{f_0(\mathbb{X})} = 2^{\sum_{i=1}^{n} X_i} e^{-n}$$

$$2^{\sum X_i} e^{-n} > k$$
$$\Downarrow$$
$$\sum X_i \geqslant \tilde{k}$$

Zadanie w stylu Zadania 7.2

W końcu

$$\varphi(\mathbb{X}) = \begin{cases} 1 & \sum_{i=1}^{n} X_i > \tilde{\tilde{k}} \\ 0 & \sum_{i=1}^{n} X_i \leqslant \tilde{\tilde{k}}, \end{cases}$$

Zauważmy, że $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim pois(n)$ gdy H_0 jest prawdziwa. Stąd szukamy $\tilde{\tilde{k}}$ takiego że

$$P_{H_0}(\sum_{i=1}^{n} X_i > \tilde{\tilde{k}}) = \alpha$$

przy H_0 prawdziwej

Weźmy $n = 5$, $\alpha = 0.05$ i zauważmy że dla

$$P_{H_0}(\sum_{i=1}^{n} X_i > 9) = 0.032 \text{ a } P_{H_0}(\sum_{i=1}^{n} X_i > 8) = 0.068.$$

$\sum X_i \sim Poiss(5)$

1 - ppois(9, 5)

Zadanie w stylu Zadania 7.2

Więc randomizujemy nasz test, definiując

$$\varphi(\mathbb{X}) = \begin{cases} 1 & \sum_{i=1}^n X_i > 9 \\ p & \sum_{i=1}^n X_i = 9 \\ 0 & \sum_{i=1}^n X_i \leqslant 8, \end{cases}$$

Skoro $E_{H_0}(\varphi(\mathbb{X})) = 0.05$ i

RANDOMIZACJA

$$\boxed{E_{H_0}(\varphi(\mathbb{X})) = P(\sum_{i=1}^{n} X_i > 9) + pP(\sum_{i=1}^{n} X_i = 9)}$$

to

$$p = \frac{0.05 - P(\sum_{i=1}^n X_i > 9)}{\underbrace{P(\sum_{i=1}^n X_i = 9)}_{\text{dpoiss}(5)}} \approx 0.5$$

Statystyka Matematyczna

Ćwiczenia

Zadanie 7.13

Z porzednich zajęć wiemy, że: Algorytm weryfikacji hipotez:

1. Model matematyczny (z jakiego rozkładu jest próba, czy coś wiemy o parametrach, co chcemy testować).
2. Hipotezy H (zerowa) i K alternatywna.
3. Poziom istotności α.
4. Statystyka testowa $T(\mathbb{X})$.
5. Obszar krytyczny K_α.
6. Decyzja:
   - $T \in K_\alpha \Rightarrow$ odrzucamy H.
   - $T \notin K_\alpha \Rightarrow$ nie mamy podstaw do odrzucenia H.

   Alternatywa dla punktów 5 i 6:
7. Liczymy p-wartość dla statystki T.
8. Sprawdzamy czy p-wartość $< \alpha$.

Zadanie 7.13

p-value (p-wartość) [poziom krytyczny]

Jest to najmniejszy poziom istotności, przy którym, dla danej wartości statystyki testowej odrzucilibyśmy hipotezę zerową.

Zaczynamy od następującej pary hipotez:

$$\begin{cases} H : \mu = 1.6 \\ K : \mu < 1.6 \end{cases}$$

Zadanie 7.13. Niech $X_1, \ldots, X_n$ oznacza próbkę prostą o liczności $n = 20$ z rozkładu normalnego $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$, o znanym odchyleniu standardowym $\sigma = 0.8$.

a) Załóżmy, że średnia z tej próki wynosi 1.54. Obliczyć p-wartość (p-value) testu do weryfikacji hipotezy $H_0 : \mu = 1.6$, przeciwko $H_1 : \mu < 1.6$.

b) Ile wynosiłaby p-wartość, gdyby średnia z próby była równa 1.3?

c) Ile wynosiłaby p-wartość, gdybyśmy testowali rozważaną hipotezę zerową wobec dwustronnej alternatywy $H_1 : \mu \neq 1.6$?

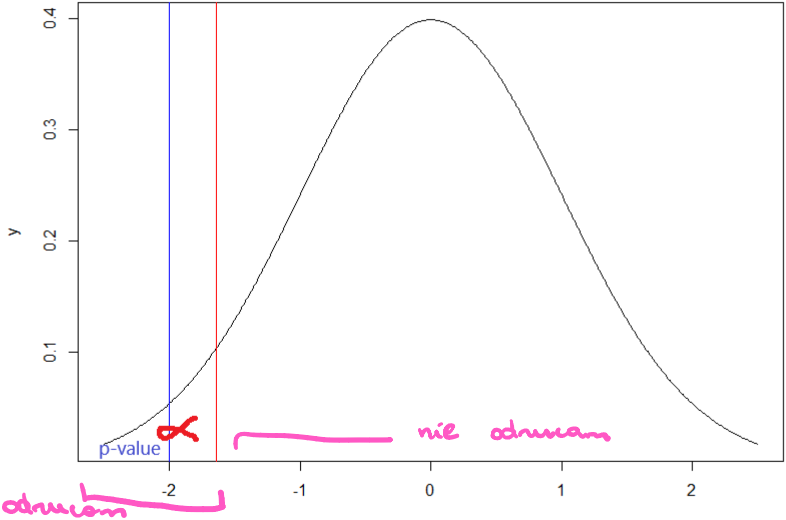
Wiemy, że:

- $n = 20$,
- $\sigma = 0.8$,
- $\bar{X} = 1.54$,

Jeśli hipoteza zerowa jest prawdziwa wówczas:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0, 1)$$

Zadanie 7.13



Zadanie 7.13

I sposób

Liczymy wartość statystyki:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{1.54 - 1.6}{0.8}\sqrt{20} = -0.336$$

Przedział krytyczny:

$$(-\infty, -z_{1-\alpha}] = (-\infty, -1.64]$$

Więc wartość statystyki jest poza przedziałem ufności więc nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy.

P-wartość: II sposób

$$p - val = \mathbb{P}_{\mu_0}(T < -0.336) = \Phi(-0.336) = 1 - \Phi(0.336) = 1 - 0.63 = 0.37$$

Więc > 0.05, nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy.
Teraz sprawdzimy to dla wartości $\bar{X} = 1.3$:

$$T = \frac{1.3 - 1.6}{0.8}\sqrt{20} = -1.67$$

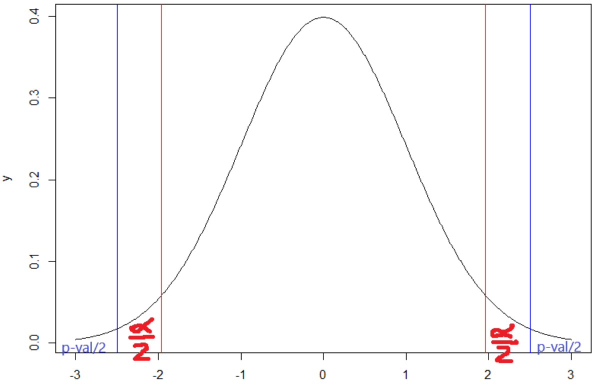
$$p - val = \mathbb{P}_{\mu_0}(T < -1.67) = \Phi(-1.67) = 1 - \Phi(1.67) = 0.0467$$

Raczej odrzucamy.

Zadanie 7.13

Teraz rozpatrujemy hipotezy:

$$\begin{cases} H : \mu = 1.6 \\ K : \mu \neq 1.6 \end{cases}$$



Zadanie 7.13

Wartość statystyki:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{1.3 - 1.6}{0.8}\sqrt{20} = -1.67$$

Przedział krytyczny:

$$(-\infty, -z_{1-\frac{\alpha}{2}}] \cup [z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty) = (-\infty, -1.96] \cup [1.96, \infty)$$

Więc wartość statystyki jest poza przedziałem ufności więc nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy.

P-wartość:

od modułu wart. statystyki

$$p - val = \mathbb{P}_{\mu_0}(|T| > \underline{1.67}) = \mathbb{P}_{\mu_0}(T < -1.67) + \mathbb{P}_{\mu_0}(T > 1.67)$$

$$= \Phi(-1.67) + 1 - \Phi(1.67) = 2\Phi(-1.67) = 0.095$$

Więc > 0.05, nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy.

Zadanie 7.4

Z wykładu wiemy, że jednoparametrowa rodzina wykładnicza:

$$p_\theta(x_1, ..., x_n) = h(x_1, ..., x_n) \exp[C(\theta)T(x_1, .., x_n) - B(\theta)],$$

gdzie $C(\theta)$ jest funkcją ściśle rosnącą, jest rodziną z monotonicznym ilorazem wiarogodności względem statystyki T. Pokazanie tego będzie nam potrzebne, aby były spełnione założenia tw. Karlina-Rubina.

$$\begin{cases} H: \mu \leq \mu_0 \\ K: \mu > \mu_0 \end{cases}$$

$$f_\mu(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{(2\pi\sigma)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma)^{\frac{n}{2}}} \exp(-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2\sigma^2}) \exp(\frac{\mu}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{n\mu^2}{2\sigma^2})$$

Mamy $C(\mu) = \frac{\mu}{\sigma^2}$, $T(\mathbb{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$ i $B(\mu) = \frac{n\mu^2}{2\sigma^2}$. $C(\mu)$ jest ściśle rosnąca, więc możemy zastosować tw. Karlina-Rubina. Zatem postać testu:

liniowa po prostu

$$\phi(X_1, ..., X_n) = \begin{cases} 1 \text{ gdy } \sum_{i=1}^n X_i \geqslant k \\ 0 \text{ gdy } \sum_{i=1}^n X_i < k \end{cases}$$

Zadanie 7.4

Liczymy k:

$$\mathbb{P}_{\mu_0}(\sum_{i=1}^{n} X_i \geqslant k) = \alpha$$

Przy założeniu hipotezy zerowej

Wiemy, że $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu_0, \sqrt{n}\sigma)$. Zatem:

$$\mathbb{P}_{\mu_0}(\sum_{i=1}^{n} X_i \geqslant k) = \mathbb{P}_{\mu_0}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu_0}{\sqrt{n}\sigma} \geqslant \frac{k - n\mu_0}{\sqrt{n}\sigma}\right)$$

$$= 1 - \Phi(\frac{k - n\mu_0}{\sqrt{n}\sigma}) = \alpha$$

$$\frac{k - n\mu_0}{\sqrt{n}\sigma} = z_{1-\alpha}$$

$$k = \sqrt{n}\sigma z_{1-\alpha} + n\mu_0$$

tego przejścia się nauczyć

Zadanie 7.4

Więc:

$$\phi(X_1, ..., X_n) = \begin{cases} 1 \text{ gdy } \sum_{i=1}^n X_i \geqslant \sqrt{n}\sigma z_{1-\alpha} + n\mu_0 \\ 0 \text{ gdy } w.p.p. \end{cases}$$

$$\phi(X_1, ..., X_n) = \begin{cases} 1 \text{ gdy } \bar{X} \geqslant \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha} + \mu_0 \\ 0 \text{ gdy } w.p.p. \end{cases}$$

$$\phi(X_1, ..., X_n) = \begin{cases} 1 \text{ gdy } \tilde{T} = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \geqslant z_{1-\alpha} \\ 0 \text{ gdy } w.p.p. \end{cases}$$

Funkcja mocy:

$$M(\mu) = \mathbb{P}_\mu(\phi(\mathbb{X}) = 1) = \mathbb{P}_\mu(\bar{X} \geqslant \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha} + \mu_0)$$

$$= \mathbb{P}_\mu(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \geqslant \frac{\mu_0 - \mu}{\sigma}\sqrt{n} + z_{1-\alpha}) = 1 - \Phi(\frac{\mu_0 - \mu}{\sigma}\sqrt{n} + z_{1-\alpha})$$

Zadanie 7.5

Analogicznie jak we wcześniejszym zadaniu:

$$f_\lambda(x_1, ..., x_n) = \lambda^n \exp(-\lambda \sum_{i=1}^n x_i) = \exp(-\lambda \sum_{i=1}^n x_i + n \log \lambda)$$

Mamy $C(\lambda) = \lambda$, $T(\mathbb{X}) = -\sum_{i=1}^n X_i$ i $B(\lambda) = -n \log \lambda$. $C(\lambda)$ jest ściśle rosnąca, więc możemy zastosować tw. Karlina-Rubina. Zatem postać testu:

$$\phi(X_1, ..., X_n) = \begin{cases} 1 \text{ gdy } \sum_{i=1}^n X_i \leqslant k \\ 0 \text{ gdy } \sum_{i=1}^n X_i > k \end{cases}$$

Liczymy k:

$$\mathbb{P}_{\lambda_0}(\sum_{i=1}^n X_i \leqslant k) = \alpha$$

Wiemy, że:

$$T(\mathbb{X}) = \sum_{i=1}^n X_i \sim \Gamma(n, \lambda)$$

przy zał. hipotezy zerowej

$$Y = 2\lambda_0 \sum_{i=1}^n X_i \sim \Gamma\left(n, \frac{1}{2}\right) \text{ czyli } \chi^2_{2n}$$

TRICKAS

Zadanie 7.5

Zatem:

$$\mathbb{P}_{\lambda_0}(2\lambda_0 \sum_{i=1}^{n} X_i \leqslant 2\lambda_0 k) = F_{\chi^2_{2n}}(2\lambda_0 k) = \alpha$$

$$2\lambda_0 k = \chi^2_{2n,\alpha}$$

$$k = \frac{1}{2\lambda_0}\chi^2_{2n,\alpha}$$

$$\phi(X_1, ..., X_n) = \begin{cases} 1 \text{ gdy } \sum_{i=1}^{n} X_i \leqslant \frac{1}{2\lambda_0}\chi^2_{2n,\alpha} \\ 0 \text{ gdy } w.p.p. \end{cases}$$

Dla $n = 10$, $\lambda_0 = 3$ i $\alpha = 0.05$ mamy $\chi^2_{20,0.05} = 10.85$ i test ma postać:

$$\phi(X_1, ..., X_n) = \begin{cases} 1 \text{ gdy } \sum_{i=1}^{n} X_i \leqslant 1.81 \\ 0 \text{ gdy } w.p.p. \end{cases}$$

Zadanie 7.11

Chcemy skonstruować test oparty na ilorazie wiarygodności na próbie z rozkładu $N(\mu, 1)$ do weryfikacji hipotezy:

$$\begin{cases} H : \mu = 0 \\ K : \mu \neq 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x^2}$$

$$-\frac{1}{2}(x-\mu)^2$$

Liczymy:

$$\lambda(\mathbb{X}) = \frac{\sup_{\mu=0} L(\mu, x_1, .., x_n)}{\sup_{\mu} L(\mu, x_1, .., x_n)}$$

$$\sup_{\mu=0} L(\mu, x_1, .., x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2}\right)$$

$$\sup_{\mu} L(\mu, x_1, .., x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overset{-\mu}{\bar{x}})^2}{2}\right)$$

$\bar{x}$ średnia to ENW

Zadanie 7.11

Zatem:

$$\lambda(\mathbb{X}) = \exp\left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{2} - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2}\right)$$

$$= \exp\left(-\bar{x}\sum_{i=1}^n x_i + \frac{n\bar{x}^2}{2}\right) = \exp\left(-\frac{n\bar{x}^2}{2}\right)$$

Zatem obszar krytyczny:

$$\{x_1, .., x_n : \exp\left(-\frac{n\bar{x}^2}{2}\right) \leqslant \lambda_0\}$$

Wartość λ_0 obliczamy z:

$$\sup_{\mu=0} \mathbb{P}_\mu \left(\exp\left(-\frac{n\bar{x}^2}{2}\right) \leqslant \lambda_0\right) = \alpha$$

Zadanie 7.11

$$\frac{1}{n^2}\left(\sum x_i\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \sup_{\mu=0} \mathbb{P}_\mu \left(\bar{x}^2 \geqslant -\frac{2}{n}\ln(\lambda_0) \right) = \alpha$$

$$\Leftrightarrow \sup_{\mu=0} \mathbb{P}_\mu \left(\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sqrt{n}}\right)^2 \geqslant -2\ln(\lambda_0) \right) = \alpha$$

$$1 - F_{\chi_1^2}(-2\ln(\lambda_0)) = \alpha$$

$$\chi^2_{1,1-\alpha} = -2\ln(\lambda_0)$$

$$\lambda_0 = \exp\left(-\frac{\chi^2_{1,1-\alpha}}{2}\right)$$

Zadanie 7.9

Mamy takie same założenia jak we wcześniejszym zadaniu. Badamy następującą parę hipotez:

$$\begin{cases} H : \mu = \mu_0 \\ K : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

Taka próbka jest z rozkładu należącego do rodziny wykładniczej:

$$f_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \exp(-\frac{x^2}{2}) \exp(\mu x - \frac{\mu^2}{2})$$

Nasze $T(X) = X$. Zatem z twierdzenia z wykładu test JNMN będzie miał postać:

$$\phi(X_1, ..., X_n) = \begin{cases} 1 \text{ gdy } \sum_{i=1}^n X_i \leqslant c_1 \text{ lub } \sum_{i=1}^n X_i \geqslant c_2 \\ 0 \text{ gdy } w.p.p. \end{cases}$$

ponieważ $\sum_{i=1}^n X_i$ jest statystyką dostateczną pochodzącą z postaci rodziny wykładniczej.

Zadanie 7.9

Obliczamy c_1 i c_2 ze wzorów:

$$\mathrm{E}_{\mu_0}(\phi(\mathbb{X})) = \alpha$$

$$\mathrm{E}_{\mu_0}(\sum_{i=1}^{n} X_i \phi(\mathbb{X})) = \alpha\, \mathrm{E}_{\mu_0}(\sum_{i=1}^{n} X_i)$$

Pierwsze równanie:

$$\mathrm{E}_{\mu_0}(\phi(\mathbb{X})) = \mathbb{P}_{\mu_0}(\phi(\mathbb{X}) = 1) = \mathbb{P}_{\mu_0}(\sum_{i=1}^{n} X_i \leqslant c_1 \cup \sum_{i=1}^{n} X_i \geqslant c_2)$$

$$= \mathbb{P}_{\mu_0}(\sum_{i=1}^{n} X_i \leqslant c_1) + \mathbb{P}_{\mu_0}(\sum_{i=1}^{n} X_i \geqslant c_2)$$

$$= 1 + \Phi\left(\frac{c_1 - n\mu_0}{\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{c_2 - n\mu_0}{\sqrt{n}}\right) = \alpha$$

Zadanie 7.9

Drugie równanie:

RHS
$$\alpha\,\mathrm{E}_{\mu_0}\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) = \alpha n \mu_0$$

Ponadto:

LHS
$$\mathrm{E}_{\mu_0}\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i \phi(\mathbb{X})\Big) = \mathrm{E}_{\mu_0}\Big(\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu_0\Big)\phi(\mathbb{X})\Big) + n\mu_0\,\mathrm{E}_{\mu_0}(\phi(\mathbb{X}))$$

zoi

$$= \mathrm{E}_{\mu_0}\Big(\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu_0\Big)\phi(\mathbb{X})\Big) + n\mu_0\alpha$$

$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)$

Oznaczając $Z_i = X_i - \mu_0$ mamy:

$$\mathrm{E}_{\mu_0}\Big(\sum_{i=1}^{n} Z_i \phi(\mathbb{X})\Big) = 0$$

$Z_i \sim \mathcal{N}(0, \ldots)$

dlatego

Zadanie 7.9

Niech f_Φ będzie gęstością rozkładu normalnego odpowiadającą zmiennej $Z = \sum_{i=1}^n Z_i$ wówczas:

z drugiej strony:

LHS: $$\mathrm{E}_{\mu_0}(\sum_{i=1}^{n} Z_i \phi(\mathbb{X})) = \int_{-\infty}^{\infty} z\phi(\mathbb{X}) f_\Phi(z) dz = *$$

Z postaci testu widzimy, że:

$$\phi(\mathbb{X}) = 1 \Leftrightarrow Z \leqslant c_1 - n\mu_0 \text{ lub } Z \geqslant c_2 - n\mu_0$$

Zatem:

$$* = \int_{-\infty}^{c_1 - n\mu_0} z f_\Phi(z) dz + \int_{c_2 - n\mu_0}^{\infty} z f_\Phi(z) dz$$

żeby było $= 0$

Funkcja podcałkowa to funkcja nieparzysta zatem:

$$c_1 - n\mu_0 = -(c_2 - n\mu_0) \Leftrightarrow c_2 = 2n\mu_0 - c_1$$

Wstawiamy do pierwszego równania:

$$1 + \Phi\left(\frac{c_1 - n\mu_0}{\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{n\mu_0 - c_1}{\sqrt{n}}\right) = \alpha \Leftrightarrow 2\Phi\left(\frac{c_1 - n\mu_0}{\sqrt{n}}\right) = \alpha$$

Zadanie 7.9

$$\frac{c_1 - n\mu_0}{\sqrt{n}} = z_{\frac{\alpha}{2}} \Leftrightarrow c_1 = \sqrt{n} z_{\frac{\alpha}{2}} + n\mu_0$$

Więc:

$$c_1 = -\sqrt{n} z_{1-\frac{\alpha}{2}} + n\mu_0 \text{ i } c_2 = \sqrt{n} z_{1-\frac{\alpha}{2}} + n\mu_0$$

Postać testu:

$$\phi(X_1, ..., X_n) = \begin{cases} 1 \text{ gdy } n\bar{X} \leqslant n\mu_0 - \sqrt{n} z_{1-\frac{\alpha}{2}} \text{ lub } n\bar{X} \geqslant n\mu_0 + \sqrt{n} z_{1-\frac{\alpha}{2}} \\ 0 \text{ gdy } w.p.p. \end{cases}$$

Równoważnie:

$$\phi(X_1, ..., X_n) = \begin{cases} 1 \text{ gdy } \bar{X} \leqslant \mu_0 - \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \text{ lub } \bar{X} \geqslant \mu_0 + \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \\ 0 \text{ gdy } w.p.p. \end{cases}$$

Zadanie 7.15 (uzupełnienie)

Waga tabliczki czekolady $\sim \mathcal{N}(\mu, 25)$. Mamy próbkę $n = 16$ tabliczek. Do wykonania mamy test:

$$H_0 : \mu = 250 \text{ vs } H_1 : \mu < 250$$

Statystyka testowa to

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{244 - 250}{5}\sqrt{16} = -4.8$$

A obszar krytyczny to:

$$R_{0.05} = (-\infty, z_{0.05}) = (-\infty, -z_{0.95}) = (-\infty, -1.64)$$

Widać że $t \in R_\alpha$ a więc odrzucamy hipotezę H_0 na poziomie istotności $\alpha = 0.05$.

Zadanie 7.15 (uzupełnienie)

$H_1: \mu < 250$

Obliczmy wartość p - prawdopodobieństwo otrzymania statystyki tak eksremalnej jak ta co mamy ($t = -4.8$) przy założeniu hipotezy zerowej.Innymi slowy najmniejszy poziom α dla którego możemy odrzucić hipotezę zerową. Przypomnijmy, że:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$p - value = P(T \leqslant -4.8) = \Phi(-4.8) = 7.33 * 10^{-7}$$

Wnioski? Możemy odrzucić H_0 na poziomie np 1%.

Zadanie 7.16 (uzupełnienie)

Waga proszku $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Mamy próbkę $n = 7$. Do wykonania mamy test:

$$H_0 : \mu = 3 \text{ vs } H_1 : \mu \neq 3$$

Zauważmy, że

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S}\sqrt{n} \sim t_{n-1}$$

a test jest dwustronny. Stąd

$$R_{0.05} = (-\infty, -t_{0.975}^{[n-1]}) \cup (t_{0.975}^{[n-1]}, \infty)$$

W zadaniu $\bar{x} = 2.95$ i $s = 0.064$, a więc

$$t = \frac{2.95 - 3}{0.064}\sqrt{7} = -2.07$$

oraz

$$R_{0.05} = (-\infty, -2.45) \cup (2.45, \infty)$$

A więc $t \notin R_{0.05}$ i nie mamy podstaw aby odrzucić hipotezę zerową.

Zadanie 7.16 (uzupełnienie)

Obliczmy wartość p - prawdopodobieństwo otrzymania statystyki tak eksremalnej jak ta co mamy ($t = -2.07$) przy założeniu hipotezy zerowej.Przypomnijmy, że:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S}\sqrt{n} \sim t_6$$

a test jest dwustronny. Stąd

$p-value = P(\{T \leqslant -2.07\} \cup \{T \geqslant 2.07\}) = 2P(T \geqslant 2.07) = 0.084$

Wnioski?

Zadanie 7.14

- Test t-Studenta dwustronny, $df = 15$, $t = -1.6$
  $p - value = 2P(T \leqslant -1.6) = 0.1319$
- Test t-Studenta lewostronny, $df = 11$, $t = -2.4$
  $p - value = P(T \leqslant -2.4) = 0.0187$
- Test t-Studenta prawostronny, $df = 5$, $t = 5$
  $p - value = P(T \geqslant 5) = 0.0037$

Zadanie 7.5

Niech $X_1, ..., X_n \sim \exp(\lambda)$. Mamy wyznaczyć jednostajnie najmocniejszy test dla

$$H_0 : \lambda \leqslant \lambda_0 \text{ vs } H_1 : \lambda > \lambda_0.$$

Skorzystamy przy tym z Tw. Karlin-Rubin.W tym celu musimy pokazać, że mamy tu do czynienia z monotonicznym ilorazem wiarygodności. Tzn że $\frac{p_{\lambda_1}(x)}{p_{\lambda_0}(x)}$ jest funkcją niemalejącą w $T(x)$ gdy $\lambda_0 < \lambda_1$. To jednak wynika z faktu, że rozkład wykładniczy należy do rodziny wykładniczej.Tzn jego gęstość można zapisać w postaci

$$f(x) = h(x)e^{C(\lambda)T(x)+B(\lambda)},$$

gdzie $h(x) = 1$, $C(\lambda) = -\lambda$, $T(x) = x$ i $B(\lambda) = \log(\lambda)$. Przy okazji mamy, że $T(\mathbb{X}) = \sum_{i=1}^{n}$ jest statystyką dosteczną.

Zadanie 7.5

Tak więc z Tw Karlina-Rubina mamy, że test

$$\varphi(\mathbb{X}) = \begin{cases} 1 & \sum_{i=1}^{n} X_i \geqslant c \\ 0 & \sum_{i=1}^{n} X_i < c, \end{cases}$$

jest jednostajnie najmocniejszy. Wystarczy znaleźć c.
Dla przypomnienia (przy założeniu $\lambda = \lambda_0$):

- $X_i \sim Gamma(1, \lambda_0)$
- $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Gamma(n, \lambda_0)$
- $2\lambda_0 \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2_{2n}$

Więc dla $c = \frac{1}{2\lambda_0}\chi^2_{2n,1-\alpha}$, mamy, że $E_{\lambda_0}(\varphi(\mathbb{X})) = \alpha$.

Zadanie 7.10

Mamy próbkę $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Mamy skonstrułować jednostajnie najmocniejszy test nieobciążony dla

$$H_0 : \sigma = \sigma_0 \text{ vs } H_1 : \sigma \neq \sigma_0.$$

Okazuje się, że $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ należe do rodziny wykładniczej a statystyką dostateczną jest $T(\mathbb{X}) = \sum_{i=1}^n X_i^2$.Stąd jednostajnie najmocniejszy test nieobciążony to

$$\varphi(\mathbb{X}) = \begin{cases} 1 & \sum_{i=1}^n X_i^2 \leqslant c_1 \text{ lub } \sum_{i=1}^n X_i^2 \geqslant c_2 \\ 0 & c_1 < \sum_{i=1}^n X_i^2 < c_2, \end{cases}$$

przy czym c_1 i c_2 spełniają warunki:

$$E_{H_0}(\varphi(\mathbb{X})) = \alpha$$

oraz

$$E_{H_0}(T(\mathbb{X})\varphi(\mathbb{X})) = \alpha E_{H_0}(T(\mathbb{X})).$$

Zadanie 7.10

Niech $k_1 = c_1/\sigma_0^2$ i $k_2 = c_2/\sigma_0^2$. Niech $Y = \sum_{i=1}^n X_i^2/\sigma_0^2 \sim \chi_n^2$ przy $H_0 . EY = n$ Stąd

$$E_{H_0}(\varphi(\mathbb{X})) = P(Y \leqslant k_1) + P(Y \geqslant k_2) = \alpha$$

$$E_{H_0}(Y 1_{\{Y \leqslant k_1\}}) + E_{H_0}(Y 1_{\{Y \geqslant k_2\}}) = n\alpha$$

Lub równoważnie:

$$\int_{k_1}^{k_2} f_Y(x)dx = 1 - \alpha$$

oraz $\int_{-\infty}^{k_1} + \int_{k_2}^{+\infty} = n\alpha$

$$\int_{k_1}^{k_2} x f_Y(x)dx = n(1 - \alpha) \qquad n - n\alpha$$

Zauważmy, że

$$x f_Y(x) = y \frac{x^{n/2-1} e^{-x/2}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} = \frac{n x^{n/2} e^{-x/2}}{2^{n/2+1}\Gamma(n/2+1)} = f_{\tilde{Y}}(y),$$

gdzie $\tilde{Y} \sim \chi_{n+2}^2$.

Zadanie 7.8

Zadanie 7.8. Pewna firma kurierska w Warszawie w swojej reklamie ogłasza, że 90% przesyłek, przyniesionych do jej punktu wysyłkowego przed godziną dziewiątą, jest dostarczanych do adresatów w mieście stołecznym do południa.

a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że gdyby faktycznie tylko 80% przesyłek było dostarczanych do południa, to udałoby się to wykryć odpowiednim testem, zbudowanym na próbce o liczności 225, na poziomie istotności 0.01?

b) Jak liczna powinna być próbka, aby w rozważanym przypadku błąd drugiego rodzaju wynosił 0.01?

W zadaniu mamy do rozważenia test

$$H_0 : p = p_0 \text{ vs } H_1 : p \neq p_0.$$

Próbka jest duża $n = 225$ więc ograniczmy się do testu asymptotycznego (tak dla odmiany; najmocniejszy test przy hipotezie prostej to Zad. 7.2).Dokładniej, niech $\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ i

$$T = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \approx \mathcal{N}(0,1).$$

Więc odrzucamy H_0 gdy $T \in R_\alpha$ gdzie

$$R_\alpha = (-\infty, -z_{1-\alpha/2}) \cup (z_{1-\alpha/2}, +\infty).$$

Zadanie 7.8

a) W zadaniu $p_0 = 0.9$ a my wiemy że w rzeczywistości $p = 0.8$.
Pytanie: jakie jest $P_p(T \in R_{0.01})$?

$$\begin{aligned}
P_p(T \in R_{0.01}) &= 1 - P(-z_{0.995} < T < z_{0.995}) \\
&= 1 - P\left(-2.56 < \frac{\hat{p} - 0.9}{\sqrt{0.90.1/225}} < 2.56\right) \\
&= 1 - P(0.8488 < \hat{p} < 0.9512) \\
&= 1 - P\left(190.98 < \sum_{i=1}^{n} X_i < 214.02\right) = 0.96
\end{aligned}$$

Bern(0.8)

Zadanie 7.8

b) $P_p(-z_{0.995} < T < z_{0.995}) = 0.01$

$$\begin{aligned} 0.01 &= P(-2.56 < \frac{\hat{p} - 0.9}{\sqrt{0.90.1/n}} < 2.56) \\ &= P(-1.96 + 0.25\sqrt{n} < \frac{\hat{p} - 0.8}{\sqrt{0.80.2/n}} < 1.96 + 0.25\sqrt{n}) \\ &\approx \Phi(1.96 + 0.25\sqrt{n}) - \Phi(-1.96 + 0.25\sqrt{n}) \end{aligned}$$

Stąd $n = 294$.

Statystyka Matematyczna

Ćwiczenia

Zadanie 7.6

Mamy próbkę $X_1, ..., X_n$ z rozkładu danego gęstością:

$$f_\theta(x) = \frac{3x^2}{\theta^3} I(0, \theta)(x)$$

Badamy następującą parę hipotez:

$$\begin{cases} H : \theta = \frac{1}{3} \\ K : \theta = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Można to zadanie rozwiązać na dwa sposoby.
Pierwszy sposób to skorzystanie z Lematu Neymana-Pearsona. Postać testu:

$$\phi(\mathbb{X}) = \begin{cases} 1 \text{ gdy } f_{\frac{2}{3}}(x_1, ..., x_n) > k f_{\frac{1}{3}}(x_1, ..., x_n) \\ 0 \text{ w.p.p.} \end{cases}$$

Zadanie 7.6

Przekształcamy gęstości:

$$f_{\frac{2}{3}}(x_1, ..., x_n) > kf_{\frac{1}{3}}(x_1, ..., x_n)$$

$$= \frac{3^n \prod_{i=1}^n x_i^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^{3n}} I(0, \frac{2}{3})(x_{n:n}) > k\frac{3^n \prod_{i=1}^n x_i^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^{3n}} I(0, \frac{1}{3})(x_{n:n})$$

$$\iff \frac{1}{8^n} I(0, \frac{2}{3})(x_{n:n}) > kI(0, \frac{1}{3})(x_{n:n})$$

$$\iff I(0, \frac{2}{3})(x_{n:n}) > k' I(0, \frac{1}{3})(x_{n:n})$$

Zatem dla $\frac{1}{3} < x_{n:n} < \frac{2}{3}$ zawsze odrzucamy, podczas gdy dla $0 < x_{n:n} < \frac{1}{3}$ zawsze odrzucamy jeśli $k' < 1$ lub zawsze przyjmujemy gdy $k' > 1$. Zatem nie możemy znaleźć k' takiego, że:

$$\mathrm{E}_{\frac{1}{3}}\,\phi(\mathbb{X}) = \mathbb{P}_{\frac{1}{3}}(\phi(\mathbb{X}) = 1) = \mathbb{P}_{\frac{1}{3}}(I(0, \frac{2}{3})(x_{n:n}) > k' I(0, \frac{1}{3})(x_{n:n}))$$

$$= \mathbb{P}_{\frac{1}{3}}(I(0, \frac{1}{3})(x_{n:n}) > k' I(0, \frac{1}{3})(x_{n:n})) = \alpha$$

Zadanie 7.6

Jedyne wyjście w tym przypadku - randomizacja. Przyjmujemy, że $k' > 1$ np. $k' = 1.8$ i rozpatrujemy następujący test:

$$\phi(\mathbb{X}) = \begin{cases} \alpha \text{ gdy } 0 < X_{n:n} < \frac{1}{3} \\ 1 \text{ gdy } \frac{1}{3} < X_{n:n} < \frac{2}{3} \end{cases}$$

Wówczas:

$$\mathrm{E}_{\frac{1}{3}}\,\phi(\mathbb{X}) = \alpha \mathbb{P}_{\frac{1}{3}}(\phi(\mathbb{X}) = \alpha) = \alpha \mathbb{P}_{\frac{1}{3}}(0 < X_{n:n} < \frac{1}{3}) + 1\mathbb{P}_{\frac{1}{3}}(\frac{1}{3} < X_{n:n} < \frac{2}{3}) \\ = \alpha$$

Policzmy moc tego testu:

$$M = \mathrm{E}_{\frac{2}{3}}\,\phi(\mathbb{X}) = \alpha \mathbb{P}_{\frac{2}{3}}(0 < X_{n:n} < \frac{1}{3}) + 1\mathbb{P}_{\frac{2}{3}}(\frac{1}{3} < X_{n:n} < \frac{2}{3})$$

Widzimy, że:

$$\mathbb{P}_{\frac{2}{3}}(0 < X_{n:n} < \frac{1}{3}) = F_X(\frac{1}{3})^n = \left(\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}\right)^{3n} = \frac{1}{8^n}$$

Zadanie 7.6

A także:

$$\mathbb{P}_{\frac{2}{3}}(\frac{1}{3} < X_{n:n} < \frac{2}{3}) = F_X(\frac{2}{3})^n - F_X(\frac{1}{3})^n = 1 - \frac{1}{8^n}$$

Zatem:

$$M = \alpha\frac{1}{8^n} + 1 - \frac{1}{8^n} = 1 - \frac{1-\alpha}{8^n} = 1 - \frac{0.99}{8^n}$$

Drugi sposób. Nasza przestrzeń parametrów jest równa $\Theta = \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$ zatem hipotezę:

$$\begin{cases} H : \theta = \frac{1}{3} \\ K : \theta = \frac{2}{3} \end{cases}$$

mogę przedstawić jako:

$$\begin{cases} H : \theta \leqslant \frac{1}{3} \\ K : \theta > \frac{1}{3} \end{cases}$$

Zadanie 7.6

I zastosować tw. Karlina-Rubina. Wpierw wykażmy, że nasza rodzina rozkładów ma monotoniczny iloraz wiarogodności, Rozpatrzmy $\theta_1 > \theta_0$:

$$\frac{p_{\theta_0}(x_1, .., x_n)}{p_{\theta_1}(x_1, .., x_n)} = \frac{\frac{3^n \prod_{i=1}^n x_i^2}{(\theta_0)^{3n}} I(0, \theta_0)(x_{n:n})}{\frac{3^n \prod_{i=1}^n x_i^2}{(\theta_1)^{3n}} I(0, \theta_1)(x_{n:n})}$$

$$= \frac{\theta_1^{3n}}{\theta_0^{3n}} \frac{I(0, \theta_0)(x_{n:n})}{I(0, \theta_1)(x_{n:n})}$$

Widzimy, że jest to funkcja nierosnąca funkcją $x_{n:n}$. Zatem test ma postać:

$$\phi(\mathbb{X}) = \begin{cases} 1 \text{ gdy } X_{n:n} \geqslant c \\ 0 \text{ w.p.p.} \end{cases}$$

Zadanie 7.6

Znajdujemy c:

$$\mathbb{P}_{\frac{1}{3}}(X_{n:n} \geqslant c) = 1 - F_{X_{n:n}}(c) = 1 - (F_X(c))^n = \alpha$$

$$(1-\alpha)^{\frac{1}{n}} = F_X(c) = (3c)^3$$

$$c = \frac{(1-\alpha)^{\frac{1}{3n}}}{3}$$

P.d. policzyć moc.

Zadanie 7.7

Mamy próbkę $X_1, ..., X_{n_1}$ z rozkładu $Bern(\theta_1)$ i $Y_1, ..., Y_{n_2}$ z rozkładu $Bern(\theta_2)$. Mamy zweryfikować następującą parę hipotez:

$$\begin{cases} H: \theta_1 = \theta_2 \\ K: \theta_1 \neq \theta_2 \end{cases}$$

Rozpatrujemy następującą statystykę:

$$\bar{X} - \bar{Y}$$

Przy założeniu hipotezy zerowej wiemy, że:

$$\operatorname{E} X_i = \operatorname{E} Y_i = \theta_1$$

$$\operatorname{Var} X_i = \operatorname{Var} Y_i = \theta_1(1 - \theta_1)$$

Z CTG wiemy, że:

$$\sqrt{n_1}(\bar{X} - \theta_1) \xrightarrow{d} N\left(0, \sqrt{\theta_1(1-\theta_1)}\right) \text{ i } \sqrt{n_2}(\bar{Y} - \theta_1) \xrightarrow{d} \sim N\left(0, \sqrt{\theta_1(1-\theta_1)}\right)$$

Zadanie 7.7

Zatem dla dostatecznie dużej próby:

$$\bar{X} \sim N\left(\theta_1, \sqrt{\frac{\theta_1(1-\theta_1)}{n_1}}\right) \text{ i } \bar{Y} \sim N\left(\theta_1, \sqrt{\frac{\theta_1(1-\theta_1)}{n_2}}\right)$$

Zauważmy, że $\bar{X}$ i $\bar{Y}$ są niezależne, zatem:

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(0, \sqrt{\theta_1(1-\theta_1)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}\right)$$

Wariancja może być zapisana jako:

$$\theta_1(1-\theta_1)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) = \frac{\theta_1(1-\theta_1)}{\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}}$$

Zatem:

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\theta_1(1-\theta_1)}{\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}}}} \sim N(0,1)$$

Zadanie 7.7

Zauważmy, że:

$$p^* = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} X_i + \sum_{i=1}^{n_2} Y_i}{n_1 + n_2}$$

przy założeniu hipotezy zerowej zbiega do θ_1. Zatem dla odpowiednio dużej próby

$$\sqrt{p^*(1-p^*)} \approx \sqrt{\theta_1(1-\theta_1)}$$

Więc ostatecznie statystyka testowa:

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}}}} \sim N(0,1)$$

Zadanie 7.12

Mamy dwie próbki z rozkładu Poissona $X_1, ..., X_{100} \sim Poiss(\lambda_1)$ i $Y_1, ..., Y_{100} \sim Poiss(\lambda_2)$. Wiemy, że $\bar{X} = 20$ i $\bar{Y} = 22$.
Para hipotez:

$$\begin{cases} H : \lambda_2 = \lambda_1 \\ K : \lambda_2 \neq \lambda_1 \end{cases}$$

Mamy zbadać parę hipotez testem ilorazu wiarogodności. Nasza przestrzeń parametrów $\Theta = \{\lambda_1, \lambda_2\}$. Z kolei $\Theta_0 = \{\lambda = \lambda_1 = \lambda_2\}$. Policzmy:

licznik
$$\sup_{\lambda_1, \lambda_2 \in \Theta_0} L(\mathbb{X}, \lambda_1, \lambda_2) = \sup_{\lambda} L(\mathbb{X}, \lambda, \lambda)$$

Szukamy argumentu, który zmaksymalizuje nam wartość $L(\mathbb{X}, \lambda_1, \lambda_2)$ przy założeniu, że $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$. Zatem:

$$l(\mathbb{X}, \lambda, \lambda) = \ln\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!}\right)\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda^{y_i} e^{-\lambda}}{y_i!}\right)\right)$$

Zadanie 7.12

$$= \ln\left(\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i} e^{-2\lambda n}}{\prod_{i=1}^{n}(x_i! y_i!)}\right)$$

$$= (\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i) \ln\lambda - 2\lambda n - \ln(\prod_{i=1}^{n}(x_i! y_i!))$$

$$\frac{d}{d\lambda} l(\mathbb{X}, \lambda, \lambda) = (\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i)\frac{1}{\lambda} - 2n = 0$$

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=1}^{n} Y_i}{2n}$$

Druga pochodna:

$$\frac{d^2}{d\lambda^2} l(\mathbb{X}, \lambda, \lambda) = -(\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i)\frac{1}{\lambda^2} < 0$$

Zadanie 7.12

Teraz poszukamy

mianownik

$$\sup_{\lambda_1,\lambda_2\in\Theta} L(\mathbb{X},\lambda_1,\lambda_2) = \sup_{\lambda_1,\lambda_2} L(\mathbb{X},\lambda_1,\lambda_2)$$

Zatem:

$$l(\mathbb{X},\lambda_1,\lambda_2) = \ln\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda_1^{x_i}e^{-\lambda_1}}{x_i!}\right)\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda_2^{y_i}e^{-\lambda_2}}{y_i!}\right)\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\lambda_1^{\sum_{i=1}^n x_i}\lambda_2^{\sum_{i=1}^n y_i}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)n}}{\prod_{i=1}^n (x_i!y_i!)}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \ln\lambda_1 + \sum_{i=1}^{n} y_i \ln\lambda_2 - (\lambda_1+\lambda_2)n - \ln(\prod_{i=1}^{n}(x_i!y_i!))$$

Zadanie 7.12

$$\frac{d}{d\lambda_1} l(\mathbb{X}, \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{1}{\lambda_1} - n = 0$$

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

Druga pochodna:

$$\frac{d^2}{d\lambda_1^2} l(\mathbb{X}, \lambda_1, \lambda_2) = -\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{1}{\lambda_1^2} < 0$$

Analogicznie dla λ_2:

$$\frac{d}{d\lambda_2} l(\mathbb{X}, \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{1}{\lambda_2} - n = 0$$

$$\hat{\lambda}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}$$

$$\frac{d^2}{d\lambda_2^2} l(\mathbb{X}, \lambda_1, \lambda_2) = -\sum_{i=1}^{n} y_i \frac{1}{\lambda_2^2} < 0$$

Zadanie 7.12

Więc:

$$\lambda(\mathbb{X}) = \frac{\sup_\lambda L(\mathbb{X},\lambda,\lambda)}{\sup_\lambda L(\mathbb{X},\lambda_1,\lambda_2)} = \frac{\frac{\hat{\lambda}^{\sum_{i=1}^n x_i+\sum_{i=1}^n y_i} e^{-2\hat{\lambda}n}}{\prod_{i=1}^n (x_i! y_i!)}}{\frac{\hat{\lambda}_1^{\sum_{i=1}^n x_i}\hat{\lambda}_2^{\sum_{i=1}^n y_i} e^{-(\hat{\lambda}_1+\hat{\lambda}_2)n}}{\prod_{i=1}^n (x_i! y_i!)}}$$

$$= \frac{\hat{\lambda}^{\sum_{i=1}^n x_i+\sum_{i=1}^n y_i} e^{-2\hat{\lambda}n}}{\hat{\lambda}_1^{\sum_{i=1}^n x_i}\hat{\lambda}_2^{\sum_{i=1}^n y_i} e^{-(\hat{\lambda}_1+\hat{\lambda}_2)n}}$$

$$= \frac{\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i+\sum_{i=1}^n y_i}{2n}\right)^{\sum_{i=1}^n x_i+\sum_{i=1}^n y_i} e^{-(\sum_{i=1}^n x_i+\sum_{i=1}^n y_i)}}{\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right)^{\sum_{i=1}^n x_i}\left(\frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}\right)^{\sum_{i=1}^n y_i} e^{-(\sum_{i=1}^n x_i+\sum_{i=1}^n y_i)}}$$

$$= \frac{\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i+\sum_{i=1}^n y_i}{2n}\right)^{\sum_{i=1}^n x_i+\sum_{i=1}^n y_i}}{\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right)^{\sum_{i=1}^n x_i}\left(\frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}\right)^{\sum_{i=1}^n y_i}}$$

Zadanie 7.12

Rozpatrujemy statystykę $-2\ln\lambda(\mathbb{X})$.

$$-2\ln\lambda(\mathbb{X}) = -2\left((\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i)\ln\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i}{2n}\right)\right.$$

$$\left.-\sum_{i=1}^{n} x_i \ln(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}) - \sum_{i=1}^{n} y_i \ln(\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n})\right)$$

$$-2(4200\ln(21) - 2000\ln(20) - 2200\ln(22)) \approx 9.53$$

Rozkład statystyki przy założeniu H_0 jest χ^2_1. Przedział krytyczny:

$$(-\infty, \chi^2_{1,0.005}] \cup [\chi^2_{1,0.995}, \infty) = (-\infty, 0.00004] \cup [7.88, \infty)$$

Zatem nasza statystyka znajduje się w przedziale krytycznym, zatem przeciętne wartości są istotnie różne.

Zadanie 8.2

Chcemy sprawdzić, czy wygenerowana próba pochodzi z rozkładu $Bin(3, 0.5)$:

Wygenerowana liczba losowa	0	1	2	3
Liczba uzyskanych parametrów	12	37	38	13

Liczba parametrów szacowanych z próby jest równa 1 (pierwszy parametr jest ustalony). Liczymy statystykę testową:

$$T = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = \frac{(12 - 100 * 0.125)^2}{100 * 0.125} + \frac{(37 - 100 * 0.375)^2}{100 * 0.375}$$
$$+ \frac{(38 - 100 * 0.375)^2}{100 * 0.375} + \frac{(13 - 100 * 0.125)^2}{100 * 0.125}$$
$$= 2\frac{0.25}{12.5} + 2\frac{0.25}{37.5} = 0.04 + 0.013 = 0.053$$

Przedział krytyczny:

$$\kappa_\alpha = [\chi^2_{1-\alpha,k-1-r}, \infty) = [\chi^2_{0.95,2}, \infty) = [5.991, \infty)$$

Jesteśmy poza przedziałem krytycznym zatem nie ma podstaw do odrzucenia

Zadanie 8.8

Chcemy zbadać zależność między płcią, a preferowanym miejscem spędzania wakacji. Tabela:

	góry	jeziora	morze
kobiety	32	32	41
mężczyźni	39	33	23

Statystyka testowa:

$$T = \sum_{i=1}^{rc} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{\left(32 - \frac{105*71}{200}\right)^2}{\frac{105*71}{200}} + \frac{\left(32 - \frac{105*65}{200}\right)^2}{\frac{105*65}{200}} + \frac{\left(41 - \frac{105*64}{200}\right)^2}{\frac{105*64}{200}}$$

$$+ \frac{\left(39 - \frac{95*71}{200}\right)^2}{\frac{95*71}{200}} + \frac{\left(33 - \frac{95*65}{200}\right)^2}{\frac{95*65}{200}} + \frac{\left(23 - \frac{95*64}{200}\right)^2}{\frac{95*64}{200}}$$

Zadanie 8.8

$$T = \sum_{i=1}^{rc} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{(32 - 37.275)^2}{37.275} + \frac{(32 - 34.125)^2}{34.125} + \frac{(41 - 33.6)^2}{33.6}$$

$$+ \frac{(39 - 33.725)^2}{33.725} + \frac{(33 - 30.875)^2}{30.875} + \frac{(23 - 30.4)^2}{30.4}$$

$$= 0.746 + 0.132 + 1.63 + 0.825 + 0.146 + 1.801 = 5.28$$

Przedział krytyczny:

$$\kappa_\alpha = [\chi^2_{1-\alpha,(r-1)(c-1)}, \infty) = [\chi^2_{0.95,2}, \infty) = [5.991, \infty)$$

Jesteśmy poza przedziałem krytycznym zatem nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy.