Zadanie 6.19 c.d.

Na ostatnich ćwiczeniach pokazaliśmy, że:

$$\mathbb{P}(S_n \leqslant k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \theta^i (1-\theta)^{n-i} = B_{1-\theta}(n-k, k+1)$$

$$= \frac{1}{B(n-k, k+1)} \int_0^{1-\theta} t^{n-k-1} (1-t)^k dt$$

Oczywiście $\mathbb{P}(S_n \leqslant k)$ jest zmienną losową zależną od k.
Chcemy aby nasz przedział miał następującą własność:

$$\mathbb{P}(\theta'' \leqslant \theta \leqslant \theta') = 1 - \alpha$$

Na razie mamy:

$$\mathbb{P}(q_{\frac{\alpha}{2}}(\theta) \leqslant S_n \leqslant q_{1-\frac{\alpha}{2}}(\theta)) = 1 - \alpha$$

Jak powiązać te dwa przedziały?

Zadanie 6.19 c.d.

Zdefiniujmy θ' i θ'' jako:

$$\mathbb{P}_{\theta'}(S_n \leqslant k) = \frac{\alpha}{2}$$

$$\mathbb{P}_{\theta''}(S_n \geqslant k) = \frac{\alpha}{2}$$

Wówczas $k \in (q_{\frac{\alpha}{2}}(\theta), q_{1-\frac{\alpha}{2}}(\theta))$ wtedy i tylko wtedy gdy $\theta \in (\theta'', \theta')$.
Dowód:

$$\mathbb{P}_{\theta'}(S_n \leqslant k) = \frac{\alpha}{2}$$

to jest po prostu kwantyl zależny od θ'

Zatem:

dolna gr. przedziału $< k$

$$k = q_{\frac{\alpha}{2}}(\theta')$$

Zakładamy, że $q_{\frac{\alpha}{2}}(\theta) < q_{\frac{\alpha}{2}}(\theta')$ co oznacza, że:

od środka

$$B_{1-\theta'}(n - q_{\frac{\alpha}{2}}(\theta'), q_{\frac{\alpha}{2}}(\theta') + 1) = P_{\theta'}(S_n \leqslant q_{\frac{\alpha}{2}}(\theta')) = P_{\theta}(S_n \leqslant q_{\frac{\alpha}{2}}(\theta))$$

$$< P_{\theta}(S_n \leqslant q_{\frac{\alpha}{2}}(\theta')) = B_{1-\theta}(n - q_{\frac{\alpha}{2}}(\theta'), q_{\frac{\alpha}{2}}(\theta') + 1)$$

Zadanie 6.19 c.d.

Zatem:

z całki w rozkładzie Beta

$$1-\theta' < 1-\theta \iff \boxed{\theta < \theta'}$$

Z drugiej strony:

$$\mathbb{P}_{\theta''}(S_n \geqslant k) = \frac{\alpha}{2}$$

$$\mathbb{P}_{\theta''}(S_n < k) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

Sn to ogólnie jest zmienna dyskretna, więc jeżeli $S_n < 5 \Downarrow S_n \leq 4$

$$\Updownarrow$$

$$\mathbb{P}_{\theta''}(S_n \leqslant k-1) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

Zatem:

$$k = q_{1-\frac{\alpha}{2}}(\theta'') + 1$$

górna gr. przedziału

Zakładamy, że $1 + q_{1-\frac{\alpha}{2}}(\theta'') < q_{1-\frac{\alpha}{2}}(\theta)$ co oznacza, że:

$$B_{1-\theta}(n - q_{1-\frac{\alpha}{2}}(\theta), q_{1-\frac{\alpha}{2}}(\theta) + 1)$$

$$= P_\theta(S_n \leqslant q_{1-\frac{\alpha}{2}}(\theta)) = P_{\theta''}(S_n \leqslant q_{1-\frac{\alpha}{2}}(\theta'')) < P_{\theta''}(S_n \leqslant 1 + q_{1-\frac{\alpha}{2}}(\theta''))$$

$$< P_{\theta''}(S_n \leqslant q_{1-\frac{\alpha}{2}}(\theta)) = B_{1-\theta''}(n - q_{1-\frac{\alpha}{2}}(\theta), q_{1-\frac{\alpha}{2}}(\theta) + 1)$$

Zadanie 6.19 c.d.

Zatem:

$$1 - \theta < 1 - \theta'' \iff \theta'' < \theta$$

Musimy policzyć jeszcze jak bd wyglądać θ' i θ''.

Więc:

$$\mathbb{P}_{\theta'}(S_n \leqslant k) = B_{1-\theta'}(n-k, k+1) = \frac{\alpha}{2}$$

to jest z wł. f. Beta

$$\iff B_{\theta'}(k+1, n-k) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

$$\theta' = B^{-1}_{1-\frac{\alpha}{2}}(k+1, n-k)$$

$$\mathbb{P}_{\theta''}(S_n \geqslant k) = 1 - \mathbb{P}_{\theta''}(S_n < k) = 1 - \mathbb{P}_{\theta''}(S_n \leqslant k-1) = \frac{\alpha}{2}$$

$$\mathbb{P}_{\theta''}(S_n \leqslant k-1) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

$$B_{1-\theta''}(n-k+1, k) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

Zadanie 6.19 c.d.

$$\iff B_{\theta''}(k, n-k+1) = \frac{\alpha}{2}$$

$$\theta'' = B^{-1}_{1-\frac{\alpha}{2}}(k, n-k+1)$$

Zatem przedział ufności:

$$(B^{-1}_{1-\frac{\alpha}{2}}(S_n, n-S_n+1), B^{-1}_{1-\frac{\alpha}{2}}(S_n+1, n-S_n))$$

Zadanie 6.12

ASYMPTOTYCZNE PRZEDZIAŁY UFNOŚCI (wykład 10.)

Mamy próbkę liczności 100 i.i.d. z rozkładu $Gamma(a_0, b)$. Mamy skonstruować asymptotyczny przedział ufności. Skorzystamy z CTG:

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\cdot\sqrt{n} \qquad \frac{\bar{X}-\frac{a_0}{b}}{\frac{\sqrt{a_0}}{b10}} \sim N(0,1)$$

$$Var = \frac{a_0}{b^2}$$

$$\sqrt{\frac{Var}{n}} = \sqrt{\frac{a_0}{b^2\cdot 100}}$$

Zatem:

$$\mathbb{P}\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leqslant \frac{\bar{X}-\frac{a_0}{b}}{\frac{\sqrt{a_0}}{b10}} \leqslant z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$= \mathbb{P}\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{a_0}0.1 \leqslant b\bar{X} - a_0 \leqslant z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{a_0}0.1\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{a_0 - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{a_0}0.1}{\bar{X}} \leqslant b \leqslant \frac{a_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{a_0}0.1}{\bar{X}}\right) = 1-\alpha$$

Odp.: no to ten przedział (;).

Zadanie 6.11

z dołu to ona się raczej jakoś ograniczona jest.

Muszę oszacować GÓRNĄ GRANICĘ θ

Rozważamy próbkę i.i.d. z rozkładu jednostajnego $U(0,\theta)$. Rozważmy estymator $cX_{n:n}$. Obliczmy rozkład $X_{n:n}$:

$$F_{X_{n:n}}(x) = \mathbb{P}(X_{n:n} \leqslant x) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant x)\ldots\mathbb{P}(X_n \leqslant x) = (F(x))^n$$

Zatem gęstość:

$$f_{X_{n:n}}(x) = n(F(x))^{n-1}\underbrace{f(x)}_{}^{\overset{\frac{1}{\theta}}{\shortparallel}} = n\frac{x^{n-1}}{\theta^n}I_{(0,\theta)}(x)$$

lewostronny przedział:

$\mathbb{P}(-\infty < [\,] < t) = 1-\alpha$

Wprowadzamy zmienną $T = \frac{X_{n:n}}{\theta}$:

$$F_T(x) = \mathbb{P}(\frac{X_{n:n}}{\theta} \leqslant x) = \mathbb{P}(X_{n:n} \leqslant \theta x)$$

$$f_T(x) = f_{X_{n:n}}(\theta x)\theta$$

poch. wewnętrzna

$$= n\frac{x^{n-1}\theta^{n-1}\theta}{\theta^n}I_{(0,\theta)}(\theta x)$$

$$= nx^{n-1}I(0,1)(x)$$

hurra! nie zależy od θ

Zadanie 6.11

Policzmy kwantyl na poziomie α:

$$\cancel{\alpha = \int_{q_{1-\alpha}}^{1} nx^{n-1}dx = 1-(q_{1-\alpha})^n}$$

Zatem:

$$q_{1-\alpha} = \sqrt[n]{1-\alpha}$$

$$1-\alpha = \mathbb{P}(\theta \geqslant \frac{X_{n:n}}{a})$$

Więc:

$$1-\alpha = \mathbb{P}(\frac{X_{n:n}}{\theta} \leqslant a)$$

$$\mathbb{P}(\frac{X_{n:n}}{\theta} \leqslant \sqrt[n]{1-\alpha}) = 1-\alpha$$

$$a^n = 1-\alpha$$

$$\mathbb{P}(\frac{X_{n:n}}{\sqrt[n]{1-\alpha}} \leqslant \theta) = 1-\alpha$$

$$a = \sqrt[n]{1-\alpha}$$

Zatem lewostronny przedział jest równy:

$$(\frac{X_{n:n}}{\sqrt[n]{1-\alpha}}, \infty)$$

Zadanie 6.10

Mamy dwie próbki niezależne od siebie, i.i.d. liczności n_1 i n_2 pochodzące z rozkładów $N(\mu_1, \sigma_1)$ i $N(\mu_2, \sigma_2)$. Znaleźć przedział ufności dla $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ Wiemy, że:

$$\frac{(n_1 - 1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2_{n_1 - 1}$$

$$\frac{(n_2 - 1)S_1^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2_{n_2 - 1}$$

Z definicji rozkładu F-Snedecora:

$$\frac{\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2(n_2-1)}}{\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2(n_1-1)}} = \frac{\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}}{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}} \sim F^{[n_2-1, n_1-1]}$$

Zadanie 6.10

Zatem:

$$\mathbb{P}\left(F_{\frac{\alpha}{2}}^{[n_2-1,n_1-1]} \leqslant \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\frac{S_2^2}{S_1^2} \leqslant F_{1-\frac{\alpha}{2}}^{[n_2-1,n_1-1]}\right)$$

tylko nieujemne

Zatem przedział ufności to:

$$\left(F_{\frac{\alpha}{2}}^{[n_2-1,n_1-1]}\frac{S_1^2}{S_2^2}, F_{1-\frac{\alpha}{2}}^{[n_2-1,n_1-1]}\frac{S_1^2}{S_2^2}\right)$$

F-snedecor → BRAK SYMETRII

t-student
normalny
$-1-\frac{\alpha}{2}$, $1-\frac{\alpha}{2}$

Zadanie 6.17

Mamy policzyć następujące prawdopodobieństwo:

$$\mathbb{P}\left(\frac{2z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma\sqrt{n}}{2t_{1-\frac{\alpha}{2}}S\sqrt{n}} \geqslant 1.5\right) = \mathbb{P}\left(\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma}{t_{1-\frac{\alpha}{2}}S} \geqslant 1.5\right)$$

trickas

$$\underset{(0,\infty)}{=} \mathbb{P}\left(S \leqslant \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma}{t_{1-\frac{\alpha}{2}}1.5}\right) = \mathbb{P}\left(\underset{(0,\infty)}{S^2} \leqslant \left(\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma}{t_{1-\frac{\alpha}{2}}1.5}\right)^2\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{S^2(n-1)}{\sigma^2} \leqslant (n-1)\left(\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{t_{1-\frac{\alpha}{2}}1.5}\right)^2\right)$$

$1-\alpha = 0.99$

$\alpha = 0.01$

$\frac{\alpha}{2} = 0.005$

$1-\frac{\alpha}{2} = 0.995$

Zatem mamy prawdopodobieństwo z rozkładu χ^2_{n-1}, które można odczytać z tablic.

χ^2_{11}

jakby wyszło coś innego z tablic to dla ... | ← większy niż
tablice $\mathbb{P} > 0.995$