

## Additionslagen för gränsvärden

Låt  $f$  och  $g$  vara två funktioner definierade på  $(a,b)$  förutom möjligtvis i  $c \in (a,b)$ .

$$\text{Om } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \text{ och } \lim_{x \rightarrow c} g(x) = M$$

$$\text{då gäller } \lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = L + M$$

### Bevis

Antag att  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$  och  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = M$ .

Då för varje  $\epsilon > 0$  så finns enl. definitionen av gränsvärden  $\delta_1 > 0$  och  $\delta_2 > 0$ .

$$\text{i) om } 0 < |x - c| < \delta_1, x \in (a,b) \text{ så } |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\text{ii) om } 0 < |x - c| < \delta_2, x \in (a,b) \text{ så } |g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2}$$

Välj  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ . Då har vi att  $\rightarrow$

$$\rightarrow |f(x) + g(x) - (L + M)| = \underbrace{|f(x) - L|}_{\text{triangelolikheten}} + \underbrace{|g(x) - M|}_{\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}} \leq |f(x) - L| + |g(x) - M| < \left(\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}\right) = \epsilon$$

