4.10 Taylorpolynom

Taylors sats: Låt $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ en funktion sådan att

1) $(n+1)$-derivatan $f^{(n+1)}$ finns på (a,b)

2) $f, f', \dots, f^{(n)}$ är kontinuerliga på $[a,b]$

låt $x_0 \in [a,b]$ för varje $x \in [a,b]$ finns ett tal s mellan x och x_0 sådant att

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{P_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)}}_{E_n(x)}$$

$P_n(x)$ = Taylorpolynomet av grad n till funktionen f kring x_0

om $x_0 = 0$ kallas f maclaurinpolynomet

$E_n(x)$ = Lagranges restterm

fakultet: $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2 \cdot 1$, $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$ osv...

Uppgiftstyper: typ 1 (1, 3, 5, 7) Find the taylor polynomial for $\sqrt{x}$ about $x=4$, order 3

Hitta $P_3(x)$ för $f(x) = \sqrt{x}$ kring $x_0 = 4$

typ 2 (9-13) approximate $e^{-\frac{1}{2}}$ with $P_2(x)$ for $f(x) = e^x$ about $x=0$

Ex 4.10.14 Låt $f(x) = \sin(x)$. Bestäm maclaurinpolynomet av grad 1 och 3 till f.

LF Vi deriverar och tänker på att $x_0 = 0$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sin(x) & f(0) &= \sin(0) = 0 \\
f'(x) &= \cos(x) & f'(0) &= \cos(0) = 1 \\
f''(x) &= -\sin(x) & f''(0) &= -\sin(0) = 0 \\
f'''(x) = f^{(3)}(0) &= -\cos(x) & f'''(0) = f^{(3)}(0) &= -\cos(0) = -1
\end{aligned}
$$

Vi har att $P_1(x) = f(0) + f'(0)(x-0) = 0 + 1 \cdot x = x$

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}(x-0)^3 = 0 + x + 0 + \left(-\frac{x^3}{3!}\right) = x - \frac{x^3}{3!}$$

Svar: $P_1 = x$

$P_3 = x - \frac{x^3}{3!}$

$\boxed{\text{Ex}}$ låt $f(x)=e^x$ Bestäm maclaurinpolynomet av grad n till f och skriv upp lagranges restterm

LF vi deriverar

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^x & f(0) &= e^0 = 1\\
f'(x) &= e^x & f'(0) &= e^0 = 1\\
f''(x) &= e^x & f''(0) &= e^0 = 1\\
&\vdots & &\vdots\\
f^{(n)}(x) &= e^x & f^{(n)}(0) &= e^0 = 1\\
f^{(n+1)}(x) &= e^x & f^{(n+1)}(s) &= e^s
\end{aligned}$$

för varje $x \in \mathbb{R}$ så ger taylors sats att det finns ett s mellan 0 och x sådant att

$$e^x = \underbrace{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}}_{P_n(x)} + \underbrace{\frac{e^s}{(n+1)!} \cdot x^{(n+1)}}_{E_n(x)}$$

Svar: maclaurinpolynomet av grad n till e^x är $P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$

lagranges restterm är $E_n(x) = \frac{e^s}{(n+1)!} \cdot x^{(n+1)}$, $s \in (0, \infty)$

Ex | Vi kan visa med hjälp av instängningssatsen att

$$\lim_{n\to\infty} E_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^s}{(n+1)!} \cdot x^{(n+1)} = 0$$

detta betyder att

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Ex (typ 2) 4.10.13 | Låt $f(x) = e^x$ med hjälp av maclaurinpolynomet av grad 2 till f, uppskatta $e^{\frac{-1}{2}}$

LF Vi vet sedan tidigare exempel att $e^x = \underbrace{1 + x + \frac{x^2}{2!}}_{P_2(x)} + \underbrace{\frac{e^s}{3!} x^3}_{E_2(x)}$, $s \in (0, \infty)$

enligt uppgift så är $x = \frac{-1}{2}$. detta ger $P_2(\frac{-1}{2}) = 1 + (\frac{-1}{2}) + \frac{(\frac{-1}{2})^2}{2!} = 0.625$

$$E_2(\tfrac{-1}{2}) = \frac{e^s}{3!} \cdot (\tfrac{-1}{2})^3 = -\frac{(\frac{1}{2})^3}{3!} e^s \text{, där } s \in (\tfrac{-1}{2}, 0)$$

I princip ska vi nu hitta ett globalt maximum (eller minsta övre begränsning)

av $g(s) = |E_2(\frac{-1}{2})| = \frac{(\frac{1}{2})^3}{3!} \cdot e^s$ på $(\frac{-1}{2}, 0)$

Vi approximerar $g(s)$: $|E_2(\frac{-1}{2})| = \frac{(\frac{1}{2})^3}{3!} \cdot e^s \leq \frac{(\frac{1}{2})^3}{3!} \cdot e^0 < 0.021$

e^s är växande på $(\frac{-1}{2}, 0)$

Vad har vi gjort: $e^{\frac{-1}{2}} = P_2(\frac{-1}{2}) + E_2(\frac{-1}{2})$

$$P_2(\tfrac{-1}{2}) - 0{,}021 \leq e^{\frac{-1}{2}} \leq P_2(\tfrac{-1}{2}) + 0{,}021$$

$$0.604 \leq e^{\frac{-1}{2}} \leq 0.646 \qquad (e^{\frac{-1}{2}} = 0{,}625)$$

Svar: $0{,}604 \leq e^{\frac{-1}{2}} \leq 0{,}625$

Taylors sats löser inte alla dessa problem

Vilka problem kan uppkomma?

- funktioner som inte är tillräckligt deriverbara
- Felet minskar inte när man ökar n, dvs $\lim_{n\to\infty} E_n \neq 0$
- Jobbigt att derivera

Strategi Snack

IDAG (fre): mer exempel på 4.10

mån : rep + lektion
tis : rep
ons : lektion - frågestund
tors : tenta

$\}$ räknestuga 13^{30}-15 (MIT.C.305)

max-min - görbar utan räknare
invers
taylorpolynom - utan räknare

teorifrågor och bevis

arc cos(x) - kanske?

ange definitioner

sant - falsk - teori

Ex låt $f(x) = \sin(x)$ Bestäm $P_1(x)$ och $P_3(x)$ kring $x=0$ och ange lagranges restterm

LF

Vi deriverar:

$f(x) = \sin(x)$ $\quad f(0) = \sin(0) = 0$

$f'(x) = \cos(x)$ $\quad f'(0) = \cos(0) = 1$

$f''(x) = -\sin(x)$ $\quad f''(0) = -\sin(0) = 0$

$f^{(3)}(x) = -\cos(x)$ $\quad f^{(3)}(0) = -\cos(0) = -1$ $\qquad f^{(3)}(s) = -\cos(s)$

$f^{(4)}(x) = \sin(x)$ $\quad f^{(4)}(0) = \sin(0) = 0$

$f^{(5)}(x) = \cos(x)$ $\quad f^{(5)}(0) = \cos(0) = 1$

Vi har att $P_1(x) = 0 + 1(x-0) = x$ $\qquad E_3(x) = \frac{-\cos(s)}{3!} \cdot x^3$, $\qquad x > s > 0$

$P_3(x) = 0 + 1(x-0) + \frac{0}{2!}(x-0)^2 + \frac{-1}{3!}(x-0)^3 = x - \frac{x^3}{3!}$ $\qquad E_5(x) = \frac{\cos(s)}{5!} \cdot x^5$, $\qquad x > s > 0$

Ex Beräkna $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$

LF Vi har $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5)$ och detta ger $\frac{\sin(x)}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5)}{x} = \frac{x\left(1 - \frac{x^2}{3!} + O(x^4)\right)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + O(x^4) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$

Svar: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

Ex Beräkna $\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin(x)}{x}$

LF Vi har att $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5)$ och detta ger

$$\frac{x - \sin(x)}{x} = \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5)\right)}{x} = \frac{\frac{x^3}{3!} - O(x^5)}{x} = \frac{\frac{x^3}{3!} + O(x^5)}{x} = \frac{x\left(\frac{x^2}{3!} - O(x^4)\right)}{x} = \frac{x^2}{3!} - O(x^4) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{0^2}{3!} - 0\cdot 0^4 = 0 - 0 = 0$$

Svar: $\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin(x)}{x} = 0$

Ex Beräkna $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1}$

LF vi vill hitta taylorpolynomet till $\ln(x)$ kring $x_0 = 1$

vi deriverar

$f(x) = \ln(x)$ $\quad f(1) = \ln(1) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f'(1) = \frac{1}{1} = 1$

$f''(x) = \frac{-1}{x^2}$ $\quad f''(1) = \frac{-1}{1} = -1$

$f^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3}$ $\quad f^{(3)}(1) = \frac{2}{1} = 2$ $\quad f^{(3)}(s) = 2 \cdot s^{-3}$

för varje $x > 0$ så ger taylors sats att

$\ln(x) = 0 + 1\cdot(x-1) - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + O((x-1)^3) = (x-1) - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + O((x-1)^3)$

vi har att $\frac{\ln(x)}{x-1} = \frac{(x-1) - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + O((x-1)^3)}{x-1} = \frac{(x-1)\left(1 - \frac{1}{2!}(x-1) + O((x-1)^2)\right)}{x-1} = 1 - \frac{1}{2!}(x-1) + O\cdot(x-1)^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 1 - \frac{1}{2!}\cdot(1-1) + O\cdot(1-1)^2 = 1 - 0 + 0 = 1$

Svar: $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$