L'Hôpitals 1:a regel

antag att f och g är deriverbara på (a,b) och $g'(x) \neq 0$ för alla $x \in (a,b)$

antag också att

i) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0$

ii) $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, där $L \in \mathbb{R}$ eller $L = \pm\infty$

då gäller att $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

L'hôpitals 2:a regel

antag att f och g är deriverbara på (a,b) och $g'(x) \neq 0$ för alla $x \in (a,b)$

antag också

i) $\lim_{x \to a^+} g(x) = \pm\infty$

ii) $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, där $L \in \mathbb{R}$ eller $L = \pm\infty$

då gäller att $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

OBS Dessa två regler gäller då $\lim_{x \to b^-}$, $\lim_{x \to c}$, $\lim_{x \to -\infty}$, $\lim_{x \to \infty}$

Ex

Beräkna $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta}$

LF

Sätt $f(\theta) = \sin(\theta)$ och $g(\theta) = \theta$. Vi har att $\lim_{\theta \to 0} f(\theta) = \lim_{\theta \to 0} \sin(\theta) = \sin(0) = 0$

$\lim_{\theta \to 0} g(\theta) = \lim_{\theta \to 0} \theta = 0$

Vi vet att f, g är deriverbara på $\mathbb{R}$ och $g'(\theta) \neq 0$ för alla $\theta \neq 0$

Vi deriverar $f'(\theta) = \cos(\theta)$ och $g'(\theta) = 1$ och vi får $\lim_{\theta \to 0} \frac{f'(\theta)}{g'(\theta)} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\cos(\theta)}{1} = \frac{1}{1} = 1$

L'hôpitals 1:a regel ger att $\lim_{\theta \to 0} \frac{f(\theta)}{g(\theta)} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta} = 1$

Svar: $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta} = 1$

Ex 4.3.2 Beräkna $\lim_{x\to 2} \frac{\ln(2x-3)}{x^2-4}$

LF

Sätt $f(x) = \ln(2x-3)$ och $g(x) = x^2-4$. Vi har att $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \ln(2x-3) = \ln(4-3) = \ln(1) = 0$

$\lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2} x^2-4 = 2^2-4 = 4-4 = 0$

logaritm lag

Vi vet att f är deriverbar för $x > \frac{3}{2}$ och g är deriverbar

Vi deriverar $f'(x) = \frac{1}{2x-3} \cdot 2 = \frac{2}{2x-3}$ $g'(x) = 2x$

detta ger att $\lim_{x\to 2} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 2} \frac{\left(\frac{2}{2x-3}\right)}{2x} = \lim_{x\to 2} \frac{2}{2x(2x-3)} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x(2x-3)} = \frac{1}{2(2\cdot 2-3)} = \frac{1}{2}$

L'hôpitals första regel ger $\lim_{x\to 2} \frac{\ln(2x-3)}{x^2-4} = \frac{1}{2}$

Ex example 3 beräkna $\lim_{x \to 1^+} \frac{x}{\ln(x)}$

LF

vi är lite heta på L'hôpitals 1:a regel

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x}{\ln(x)} = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \to 1^+} x = 1$$

FEL Man får inte använda L'hôpitals, inte $\frac{0}{0}$

Teckentabell

		1	
x	+	+	+
$\ln(x)$	−	0	+
$\frac{x}{\ln(x)}$	−	ej def	+

enligt teckentabellen så har vi att $\lim_{x \to 1^+} \frac{x}{\ln(x)} = \infty$