Математичне моделювання динаміки просторово-розподілених процесів з дискретними початково-крайовими умовами та неперервними моделюючими функціями

студентів групи МСС-4
Крисинського Олександра,
Козак Дарини,
Таргонського Валерія

Постановка задачі

Розглядається задача:

$L(\partial_s)y(s) = u(s),$

де:
$s = (x, t) = (x_1, ..., x_n, t) \in S_0^T$ - просторово-часова змінна;
$\partial_s = (\partial_x, \partial_t) = (\partial_{x1}, ..., \partial_{xn}, \partial_t)$ - вектор частинних похідних за просторовими змінними та часом;
$L(\partial_s)$ - лінійний диференціальний оператор;
$u(s)$ - функція розподілених у S_0^t просторово-часових зовнішньодинамічних збурень;
$y(s)$ - функція стану, розподілена в області $S_0^t = S_0 \times [0, T]$

При цьому мають місце початкові і крайові умови:

$$L_r^0(\partial_t)y(s)\Big|_{\substack{t=0 \\ x=x_l^0\in S_0}} = Y_{rl}^0$$

$$L_\rho^\Gamma(\partial_x)y(s)\Big|_{s=s_l^\Gamma\in\Gamma\times[0,T]} = Y_{\rho l}^\Gamma$$

Де:

$$r=\overline{1,R_0}, l=\overline{1,L_0}$$

$$l=\overline{1,L_\Gamma} \quad \rho=\overline{1,R_\Gamma}$$

Початково-крайові збурюючі фактори будемо моделювати неперервно визначеними функціями: $u_0(s)(s\in S^0), u_\Gamma(s)(s\in S^\Gamma)$.

Вплив моделюючих факторів на функцію $y(s)$ стану даного процесу враховуватимемо, подаючи її у такому вигляді:

$$y(s) = y_\infty(s) + y_0(s) + y_\Gamma(s)$$

Де:

$$y_\infty(s) = \int_{S_0^T} G(s-s')u(s')ds',$$
$$y_0(s) = \int_{S^0} G(s-s')u_0(s')ds',$$
$$y_\Gamma(s) = \int_{S^\Gamma} G(s-s')u_\Gamma(s')ds',$$

А також: $L(\partial_s)G(s-s') = \delta(s-s')$,
$G(s-s')$ - передатна функція цього процесу (функція Гріна (тобто розв'язок неоднорідного рівняння або системи рівнянь математичної фізики з точковим джерелом)) початкової системи,
$\delta(s-s')$ - функція Дірака (неперервний лінійний функціонал у просторі диференційовних функцій).

Звідси, така функція $y(s)$ задовольняє початкове рівняння за довільних $u_0(s)$ та $u_\Gamma(s)$, обмеження на вибір яких накладають лише початково-крайові умови, які можемо задовольнити за середньоквадратичним критерієм:

$$\Phi_2 \to \min_{u_0(s), u_\Gamma(s)},$$

Де:

$$\Phi_2 = \sum_{r=1}^{R_0} \sum_{l=1}^{L_0} \left(L_r^0(\partial_t) y(s) \Big|_{\substack{t=0 \\ x=x_l^0}} - Y_{rl}^0 \right)^2 + \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \sum_{l=1}^{L_\Gamma} \left(L_\rho^\Gamma(\partial_x) y(s) \Big|_{s=x_l^\Gamma} - Y_{\rho l}^\Gamma \right)^2$$

Розв'язок цієї задачі можна отримати середньоквадратичним обертанням системи інтегральних рівнянь:

$$\int_{S^0} L_r^0(\partial_t)G(s-s')\Big|_{\substack{t=0\\x=x_l^0}} u_0(s')ds' +$$

$$+\int_{S^\Gamma} L_r^0(\partial_t)G(s-s')\Big|_{\substack{t=0\\x=x_l^0}} u_\Gamma(s')ds' = \bar{Y}_{rl} \quad (l=\overline{1,L_0};\ r=\overline{1,R_0}),$$

$$\int_{S^0} L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s-s')\Big|_{s=s_l^\Gamma} u_0(s')ds' +$$

$$+\int_{S^\Gamma} L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s-s')\Big|_{s=s_l^\Gamma} u_\Gamma(s')ds' = \bar{Y}_{\rho l} \quad (l=\overline{1,L_\Gamma};\ \rho=\overline{1,R_\Gamma}),$$

Де:

$$\bar{Y}_{rl} = Y_{rl} - L_r^0(\partial_t)y_\infty(s)\Big|_{\substack{t=0\\x=x_l^0}},$$

$$\bar{Y}_{\rho l} = Y_{\rho l} - L_\rho^\Gamma(\partial_x)y_\infty(s)\Big|_{s=s_l^\Gamma}.$$

Далі скористаємось методикою псевдообертання систем інтегральних рівнянь, для цього попередні співвідношення запишемо у вигляді:

$$\int\limits_{(\cdot)} A(s)\overline{u}(s)ds = \overline{Y},$$

де $A\overline{u} = \overline{Y}$, інтегрування здійснюється по області зміни аргументу s вектор-функції $\overline{u}(s) = col(u_0(s)(s \in S^0), u_\Gamma(s)(s \in S^\Gamma))$ і матричної функції:

$$A(s) = \begin{pmatrix} A_{11}(s) \quad (s \in S^0), & A_{12}(s) \quad (s \in S^\Gamma) \\ A_{21}(s) \quad (s \in S^0), & A_{22}(s) \quad (s \in S^\Gamma) \end{pmatrix},$$

Для елементів цієї матриці:

$$A_{1i} = col((L_r^0(\partial_t)G(s-s')\Big|_{\substack{t=0\\x=x_l^0}}, \ l=\overline{1,L_0}, \ r=\overline{1,R_0}),$$

$$A_{2i} = col((L^\Gamma(\partial_x)G(s-s')\Big|_{s=s_l^\Gamma}, \ l=\overline{1,L_\Gamma}, \ \rho=\overline{1,R_\Gamma}),$$

($s \in S^0$ при $i = 1$, $s' \in S^\Gamma$ при $i = 2$)
Тобто залишається розв'язати задачу:

$$\left\| \int_{(\cdot)} A(s)\bar{u}(s)ds - \bar{Y} \right\|^2 \to \min_{\bar{u}(s)}$$

Оскільки дана задача є лінійно інтегрально перетворювальною системою, то її розв'язок нам відомий:

$$\bar{u}(s) = A^T(s)P^+(\bar{Y} - A_v) + v(s),$$

де

$$P = \int_{(\cdot)} A(s)A^T(s)ds,$$

$$A_v = \int_{(\cdot)} A(s)v(s)ds$$

І $v(s)$ - довільна інтегровна в області зміни своїх аргументів вектор-функція:
$v(s) = col(v_0(s)(s \in S^0), v_\Gamma(s)(s \in S^\Gamma)).$

Отже, звідси отримаємо:

$$u_0(s) = A_0(s) P^+ (\overline{Y} - A_v) + v_0(s),$$
$$u_\Gamma(s) = A_\Gamma(s) P^+ (\overline{Y} - A_v) + v_\Gamma(s),$$

Де:

$$A_0(s) = (A_{11}^T(s),\ A_{21}^T(s)) \ \ (s \in S^0),$$
$$A_\Gamma(s) = (A_{12}^T(s),\ A_{22}^T(s)) \ \ (s \in S\ \ ),$$
$$P = \begin{pmatrix} P_{11}, & P_{12} \\ P_{21}, & P_{22} \end{pmatrix},\ A_v = \begin{pmatrix} A_{v_0} \\ A_{v_\Gamma} \end{pmatrix},$$

$$P_{ij} = \int\limits_{S^0} A_{i1}(s) A_{j1}^T(s) ds + \int\limits_{S^\Gamma} A_{i2}(s) A_{j2}^T(s) ds \ \ (i, j = \overline{1,2}),$$

$$A_{v_0} = \int\limits_{S^0} A_{11}(s) v_0(s) ds + \int\limits_{S^\Gamma} A_{12}(s) v_\Gamma(s) ds,$$
$$A_{v_\Gamma} = \int\limits_{S^0} A_{21}(s) v_0(s) ds + \int\limits_{S^\Gamma} A_{22}(s) v_\Gamma(s) ds.$$

Наведені рівності дозволяють побудувати функцію $y(s)$ стану початкової системи з урахуванням функцій $u_0(s)$, $u_\Gamma(s)$, що задовольняють задані початково-крайові умови із точністю, що обчислюється за формулою:

$$\varepsilon^2 = \min_{u_0(s), u_\Gamma(s)} \Phi = \overline{Y}^T \overline{Y} - \overline{Y}^T P P^+ \overline{Y}$$

При цьому функція $y(s)$ визначається однозначно за умови:

$$\lim_{N \to \infty} \det \left[A^T(s_i) A(s_j) \right]_{i,j=1}^{i,j=N} > 0$$

Інакше, розв'язок розглянутої задачі не буде однозначним.

Проте, дану задачу можна розглянути також за умови її функціонування у необмеженій просторово-часовій області або на необмеженому часовому інтервалі. В такому випадку функція стану набуває вигляду:

$$y(s) = y_\infty(s) + y_0(s) \ \ (s \in S_0 \times [0,T])$$

Або для систем, що перебувають під впливом крайових збурень і не залежать від початкового стану:

$$y(s) = y_\infty(s) + y_\Gamma(s) \ \ (s \in S_0 \times [0,T]).$$

В обох випадках спрощується задача пошуку моделюючих функцій $u_0(s)$, $u_\Gamma(s)$.

Аналогічно, переходимо до розгляну системи інтегральних рівнянь, що тут набуває вигляду:

$$\int_{S^0} A_{11}(s) u_0(s) ds = Y_0 ,$$

$$\int_{S^\Gamma} A_{22}(s) u_\Gamma(s) ds = Y_\Gamma ,$$

Де:

$$Y_0 = \mathrm{col}((Y_{rl}^0 - L_r^0(\partial_t) y_\infty(s)\Big|_{\substack{t=0 \\ x=x_l^0}},\ l = \overline{1, L_0}),\ r = \overline{1, R_0}),$$

$$Y_\Gamma = \mathrm{col}((Y_{\rho l}^\Gamma - L_\rho^\Gamma(\partial_x) y_\infty(s)\Big|_{x=x_l^\Gamma},\ l = \overline{1, L_\Gamma}),\ \rho = \overline{1, R_\Gamma}),$$

Розв'язком буде:

$$u_0(s) \in \Omega_0 = \{u_0(s) : u_0(s) = A_{11}^T(s) P_0^+ (Y_0 - A_{v_0}) + v_0(s)\},$$
$$u_\Gamma(s) \in \Omega_\Gamma = \{u_\Gamma(s) : u_\Gamma(s) = A_{22}^T(s) P_\Gamma^+ (Y_\Gamma - A_{v_\Gamma}) + v_\Gamma(s)\},$$

Де $v_0(s)$, $v_\Gamma(s)$ - довільні, інтегровні в S^0, s^Γ відповідно, функції.

$$P_0 = \int_{S^0} A_{11}(s) A_{11}^T(s) ds,$$
$$P_\Gamma = \int_{S^\Gamma} A_{22}(s) A_{22}^T(s) ds,$$
$$A_{v_0} = \int_{S^0} A_{11}(s) v_0(s) ds,$$
$$A_{v_\Gamma} = \int_{S^\Gamma} A_{22}(s) v_\Gamma(s) ds.$$

Точності моделювання початкових і крайових умов даними моделюючими функціями визначаються за формулами:

$$\varepsilon_0^2 = \min_{u_0(s)\in\Omega_0} \sum_{r=1}^{R_0}\sum_{l=1}^{L_0}(L_r^0(\partial_t)y(s)\Big|_{\substack{t=0\\ x=x_l^0}} - Y_{rl}^0)^2 =$$

$$= \min_{u_0(s)\in\Omega_0}\left\|\int_{S^0} A_{11}(s)u_0(s)ds - Y_0\right\|^2 = (Y_0)^T Y_0 - (Y_0)^T P_0 P_0^+ Y_0,$$

$$\varepsilon_\Gamma^2 = \min_{u_\Gamma(s)\in\Omega_\Gamma} \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma}\sum_{l=1}^{L_\Gamma}(L_\rho^\Gamma(\partial_x)y(s)\Big|_{s=s_l^\Gamma} - Y_{\rho l}^\Gamma)^2 =$$

$$= \min_{u_\Gamma(s)\in\Omega_\Gamma}\left\|\int_{S^\Gamma} A_{22}(s)u_\Gamma(s)ds - Y_\Gamma\right\|^2 = (Y_\Gamma)^T Y_\Gamma - (Y_\Gamma)^T P_\Gamma P_\Gamma^+ Y_\Gamma.$$

І, відповідно, аналогічно, умови однозначності множин моделюючих функцій, набувають вигляду:

$$\lim_{N\to\infty} \det\left[A_{11}^T(s_i) A_{11}(s_j) \right]_{i,j=1}^{i,j=N} > 0,$$
$$\lim_{N\to\infty} \det\left[A_{22}^T(s_i) A_{22}(s_j) \right]_{i,j=1}^{i,j=N} > 0.$$

Інакше, розв'язок не є однозначним.