Подпространства и ранг

Нехаенко П. А.
pavel.ushlepkov@yandex.ru
ЯрГУ им. П. Г. Демидова

29 декабря 2023

Постановка задачи

- Дать определения подпространству, их сумме и пересечению . Определить прямую сумму подпространств и составим необходимое и достаточное условие для её определения.
- Дать определение рангу матрицы. Описать его свойства.
- Определить критерии совместности и определённости системы линейных уравнений.
- Описать подпространство решений системы линейных уравнений.

Подпространства. Их сумма и пересечения.

Определение 1.
Непустое подмножество $L_1 \subset L$ называется линейным подпространством, если L_1 замкнуто относительно операций сложения и умножения на число:
1) для любых $x, y \in L_1$ $x + y \in L_1$.
2) для любого $x \in L_1$ и любого $\alpha \in R$ $\alpha x \in L_1$.

Определение 2.
Сумма и пересечение подпространств L_1, L_2 линейного пространства L определяются следующим образом:

$$L_1 + L_2 := \{x \in L : x = x_1 + x_2,\ x_i \in L_i, i = 1, 2\},$$
$$L_1 \bigcap L_2 := \{x \in L : x_i \in L_i,\ i = 1, 2\}.$$

Теорема 1.
$L_1 + L_2,\ L_1 \bigcap L_2$— линейные подпространства L. Если основное пространство L конечномерно, то имеет место равенство

$$dim(L_1 + L_2) + dim(L_1 \bigcap L_2) = dim(L_1) + dim(L_2). \qquad (1)$$

Определение 3.
Сумма $S = L_1 + L_2$ называется прямой, если для любого $x \in S$ представление $x = x_1 + x_2,\ x_1 \in L_1, x_2 \in L_2$, является единственным.

Теорема 2.
Сумма является прямой, то есть $S = L_1 \bigoplus L_2$, тогда и только тогда, когда выполнено любое из следующих эквивалентных условий.
1. $L_1 \bigcap L_2 = 0$.
2. $dim(L_1 + L_2) = dimL_1 + dimL_2$.
3. Если $f_1, ..., f_l -$ базис $L_1, g_1, ..., g_m -$ базис L_2, то $f_1, ..., f_l, g_1, ..., g_m$ - базис $L_1 + L_2$.
4. Единственность разложения по L_1 и L_2 имеет место для нулевого вектора: если $x_1 + x_2 = 0,\ x_1 \in L_1,\ x2 \in L_2$, то обязательно $x_1 = x_2 = 0$.

Определение 4.
Рангом матрицы A называется ранг системы её столбцов как элементов R^m, то есть размерность линейной оболочки системы столбцов $X_1, ..., X_n$:

$$rg(A) := rg(X_1, ..., X_n) = dim\ lin(X_1, ..., X_n).$$

Теорема 3.

Ранг матрицы равен максимальному порядку r отличного от нуля минора этой матрицы.

(Для нулевой матрицы считаем $r = 0$).

Следствие

Для каждой $A \in M_{m,n}$ $rg(A^T) = rg(A)$

Следствие:

1. Для $\mathbf{A} \in M_{m,n} rg(\mathbf{A}) \leq min(m,n)$.
2. Пусть $\mathbf{A} \in M_n$. $rg(\mathbf{A}) = n \Longleftrightarrow |\mathbf{A}| \neq 0$.
3. Пусть $\mathbf{A} \in M_n$. Матрица A обратима $\Longleftrightarrow rg(\mathbf{A}) = n$.
4. Если $\mathbf{AB}$ существует, то $rg(\mathbf{AB}) \leq min(rg(\mathbf{A}), rg(\mathbf{B}))$.
5. Пусть $\mathbf{B} \in M_n$ и $rg(\mathbf{B}) = n$. Если $\mathbf{AB}$ существует, то $rg(\mathbf{AB}) = rg(\mathbf{A})$. Тоже - для произведения $\mathbf{BA}$.
6. Для $A \in M_{m,k}, \mathbf{B} \in M_{k,n}$ $rg(\mathbf{A}) + rg(\mathbf{B}) \leq rg(\mathbf{BA}) + k$.
7. Для $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_{m,n}:$ $rg(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq rg(\mathbf{A}) + rg(\mathbf{B})$.
8. Если все произведения существуют, то $rg(\mathbf{AB}) + rg(\mathbf{BC}) \leq rg(\mathbf{B}) + rg(\mathbf{ABC})$.

Применение понятия ранга к анализу систем линейных уравнений. Теорема Кронекера – Капелли. Критерий определённости.

С привлечением понятия ранга матрицы нетрудно дать необходимые и достаточные условия совместности и определённости произвольной системы линейных уравнений. Пусть дана система m уравнений с n неизвестными $x_1, ..., x_n$ и матрицей коэффициентов $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in M_{m,n}$:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array} \qquad (2)$$

Пусть $X_1, ..., X_n$ — столбцы матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ — столбец свободных членов. Обозначим через $\mathbf{A}|\mathbf{b}$ расширенную матрицу системы (2). Ясно, что всегда

$$rg(\mathbf{A}) \leq rg(\mathbf{A}|\mathbf{b}) \leq rg(\mathbf{A}) + 1. \tag{3}$$

Теорема 4 (Кронекера – Капелли).
Система (2) является совместной тогда и только тогда, когда

$$rg(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = rg(\mathbf{A}).$$

Теорема 5.
Система линейных уравнений (2) является определённой тогда и только тогда, когда выполняются одновременно два равенства

$$rg(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = rg(\mathbf{A}) = n.$$

Размерность и базис подпространства R^n, задаваемого системой линейных однородных уравнений. Фундаментальная система решений.

Рассмотрим систему линейных однородных уравнений

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (4)$$

с данной матрицей коэффициентов $\mathbf{A} \in M_{m,n}$.
Пусть $L \in R^n$ определяется равенством

$$L := \{x = (x_1, ..., x_n) \ : \ x \text{ удовлетворяет } (4)\}.$$

Мы говорим, что L *задаётся системой уравнений (4) или является подпространством решений этой системы.*
Исследуем задачу определения размерности и базиса L.

Теорема 6.
$dim\ L = n - rg(\mathbf{A})$.

Определение 5.
Множество векторов, образующих базис в L, называется фундаментальная система решений

С каждой матрицей $A \in M_{m,n}$ можно связать два линейных подпространства R^n , которые здесь мы обозначим L_1 и L_2.
1) L_1 — линейная оболочка строк матрицы $\mathbf{A}$. Размерность $dim\ L_1 = rg(\mathbf{A})$. Базис L_1 образует любая система из $r = rg(\mathbf{A})$ линейно независимых строк.
2) L_2 — подпространство решений системы линейных однородных уравнений. Размерность $dimL_2 = n - rg(\mathbf{A})$. Базис L_2 образует фундаментальная система решений данной системы уравнений.

Итоги:

- Даны основные определения, связанных с подпространством и рангом матрицы.
- Описаны свойства ранга матрицы.
- Найдены критерии совместности и определённости системы линейных уравнений, с использованием ранга.
- Было описано подпространство решений системы линейных уравнений и его размерность.

Литература

1. *Невский М. В. Определители* // Лекции по алгебре: Учебное пособие // Ярославль: ЯрГУ, 2002. с. 39 - 48 с.