§ 32.6. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ СОСТОЯНИЙ

Уравнения Колмогорова дают возможность найти все вероятности состояний как функции времени. Особый интерес представляет случай при $t \to \infty$. В этом случае получают *предельные (или финальные) вероятности состояний.* Существование предельных вероятностей означает, что с течением времени в системе наступает *стационарный режим:* она случайным образом меняет свои состояния, но вероятность p_i каждого из них уже не зависит от времени.

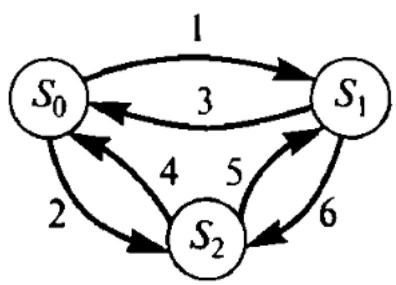
Предельная вероятность p_i — это среднее относительное время пребывания системы в состоянии S_i (сколько процентов времени система проводит в состоянии S_i). Так как предельные вероятности p_i не зависят от времени, то $\frac{dp_i(t)}{dt} = 0 \quad (i = 0, \ldots, n)$, то есть в левой части уравнений Колмогорова получаем 0. Для решения этой системы удобно отрицательные слагаемые перенести из правой части исходной системы в левую.

При составлении $i-$го уравнения системы уравнений Колмогорова для предельных вероятностей нужно рассмотреть состояние S_i, на размеченном графе состояний. В левой части уравнения указана сумма интенсив-

ностей всех выходящих из S_i стрелок, умноженная на предельную вероятность p_i Каждой входящей в S_i, из S_j стрелке (на ней указана интенсивность λ_{ji}) в правой части уравнения соответствует слагаемое $\lambda_{ji}p_j$. В полученной системе уравнений одно уравнение будет выражаться через другие.

Поэтому какое-то одно уравнение этой системы нужно заменить уравнением $p_0 + p_1 + ... + p_n = \sum\limits_{i=0}^{n} p_i = 1.$

Пример 98. Найдем предельные вероятности для следующей системы.



Составим уравнения Колмогорова.

Из состояния S_0 выходят стрелки с интенсивностями 2 и 1. Поэтому в левой части соответствующего уравнения Колмогорова будет $(2+1)p_0$. В состояние S_0 входят стрелка с интенсивностью 3 из состояния S_i (ей соответствует слагаемое $3p_1$, в правой части уравнения Колмогорова) и стрелка с интенсивностью 4 из состояния S_2 (ей соответствует слагаемое $4p_2$ в правой части уравнения Колмогорова).
Получаем уравнение $(2+1)p_0 = 3p_1 + 4p_2$.

Из состояния S_1 выходят стрелки с интенсивностями 3 и 6. Поэтому в левой части соответствующего уравнения Колмогорова будет $(3+6)p_1$. В состояние S_1, входят стрелка с интенсивностью 1 из состояния S_0 (ей соответствует слагаемое $1 \times p_0$ в правой части уравнения Колмогорова) и стрелка с интенсивностью 5 из состояния S_2 (ей соответствует слагаемое $5p_2$ в правой части уравнения Колмогорова).
Получаем уравнение $(3+6)p_1 = 1p_0 + 5p_2$. И т. д.

Система уравнений Колмогорова:

$$\begin{cases} (2+1)p_0 = 3p_1 + 4p_2, \\ (3+6)p_1 = 1p_0 + 5p_2, \\ (4+5)p_2 = 2p_0 + 6p_1, \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} 3p_0 = 3p_1 + 4p_2, \\ 9p_1 = 1p_0 + 5p_2, \\ 9p_2 = 2p_0 + 6p_1, \end{cases}$$

Мы видим, что последнее уравнение есть сумма двух предыдущих уравнений. Поэтому вместо него включим в систему уравнение $p_0 + p_1 + p_2 = 1:$

$$\begin{cases} 3p_0 = 3p_1 + 4p_2, \\ 9p_1 = p_0 + 5p_2, \\ p_0 + p_1 + p_2 = 1. \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} 3p_0 - 3p_1 - 4p_2 = 0, \\ 9p_1 - p_0 - 5p_2 = 0, \\ p_2 = 1 - p_0 - p_1. \end{cases} \quad \to$$

$$\begin{cases} 3p_0 - 3p_1 - 4(1 - p_0 - p_1) = 0, \\ 9p_1 - p_0 - 5(1 - p_0 - p_1) = 0, \\ p_2 = 1 - p_0 - p_1. \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 7p_0 + p_1 = 4, \\ 4p_0 - 14p_1 = 5, \\ p_2 = 1 - p_0 - p_1. \end{cases}$$

К первым двум уравнениям системы применим правило Крамера. Тогда:

$$\triangle = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 4 & 14 \end{vmatrix} = 7 \times 14 - 1 \times 4 = 94;$$

$$\triangle_{p_0} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 14 \end{vmatrix} = 4 \times 14 - 1 \times 5 = 51;$$

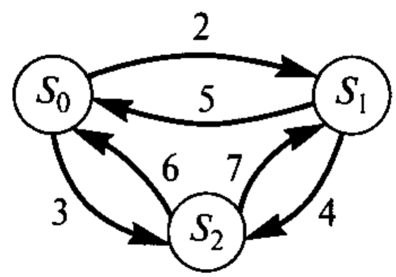
$$\triangle_{p_1} = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 7 \times 5 - 4 \times 4 = 51;$$

$p_0 = \triangle_{p_0}/\triangle = 51/94 \approx 0,543;$
$p_1 = \triangle_{p_1}/\triangle = 19/94 \approx 0,202;$
$p_2 = 1 - p_0 - p_1 = 1 - 0,543 - 0,202 \approx 0,255.$

Полученные результаты говорят о том, что в предельном стационарном режиме система в среднем 54.3% времени будет находиться в состоянии S_0, 20.2% времени будет находиться в состоянии S_1, и 25.5% времени будет находиться в состоянии S_2.

Если в состояниях S_0, S_1 и S_2 система приносит 10, 8 и 6 денежных единиц дохода соответственно, то средняя эффективность системы равна сумме произведений предельных вероятностей состояний и доходов в этих состояниях: $0,543 \times 10 + 0,202 \times 8 + 0,255 \times 6 = 8,576$ денежных единиц.

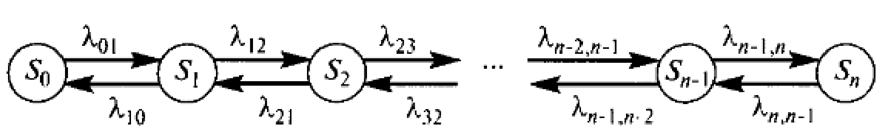
Задача 98. Найти предельные вероятности для следующей системы.



Оценить среднюю эффективность системы, если в состояниях S_0, S_1 и S_2 система приносит 11, 7 и 5 денежных единиц дохода соответственно.

§ 32.7. ПРОЦЕСС ГИБЕЛИ И РАЗМНОЖЕНИЯ

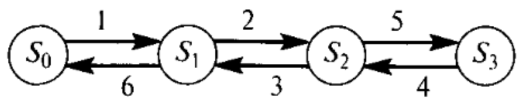
В теории массового обслуживания широкое распространение получил специальный класс случайных процессов — *процесс гибели и размножения.* Его размеченный граф состояний имеет следующий вид:



Здесь λ_{ij} — это интенсивность перехода из состояния S_i, в состояние S_j. Крайние состояния S_0 и S_n имеют только одно соседнее состояние (S_1, и S_{n-1} соответственно). Каждое из других состояний S_i, связано прямой связью с состоянием S_{i+1} (верхняя стрелка с интенсивностью $\lambda_{i,j-1}$) и обратной связью с состоянием (нижняя стрелка с интенсивностью $\lambda_{i,j-1}$), $i = 1, ..., n-1$.

В биологических задачах такие процессы описывают изменение численности особей в популяции. Предполагается, что все потоки простейшие. Вместо запоминания общих громоздких формул для предельных вероятностей p_i, можно очень просто найти p_i, из размеченного графа состояний для конкретной задачи.

Пример 99. Найдем предельные вероятности для процесса гибели и размножения, размеченный граф состояний которого имеет следующий вид:



Двигаемся по этому графу слева направо. Вероятность p_0 — предельная вероятность состояния S_0.

Следующее состояние — S_1. Оно связано с состоянием S_0 двумя стрелками с интенсивностями 1 и 6. Пусть p_1 — предельная вероятность состояния S_1. Имеем $p_1 = \frac{1}{6}p_0$ (интенсивность верхней стрелки пишем в числителе, интенсивность нижней стрелки пишем в знаменателе).

Следующее состояние S_2. Оно связано с состоянием S_1, двумя стрелками с интенсивностями 2 и 3. Пусть p_2 — предельная вероятность состояния S_2. Имеем $p_2 = \frac{2}{3}p_1$, (интенсивность верхней стрелки пишем в числителе, нижней стрелки — в знаменателе) $= \frac{2}{3} \times \frac{1}{9}p_0 = \frac{5}{36}$.

Следующее состояние S_3. Оно связано с состоянием S_2 двумя стрелками с интенсивностями 5 и 4. Пусть p_3 — предельная вероятность состояния S_3. Имеем $p_3 = \frac{5}{4}p_2$ (интенсивность верхней стрелки пишем в числителе, нижней стрелки — в знаменателе) $= \frac{5}{4} \times \frac{1}{9}p_0 = \frac{5}{36}p_0$.

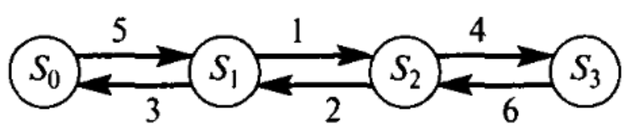
Так как $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1$, то $1 = p_0 + \frac{1}{6}p_0 + \frac{1}{9}p_0 + \frac{5}{36}p_0 = \frac{51}{36}p_0$.

Отсюда $p_0 = \frac{36}{51} \approx 0,706$

Тогда $p_1 = \frac{1}{6}p_0 \approx 0,118, p_2 = \frac{1}{9}p_0 \approx 0,0078, p_3 = \frac{5}{36}p_0 \approx 0,098$.

Эту же схему будем применять при анализе других СМО.

Задача 99. Найти предельные вероятности для процесса гибели и размножения, размеченный граф состояний которого имеет следующий вид:



§ 32.8. ОДНОКАНАЛЬНАЯ СМО С ОТКАЗАМИ

СМО содержит один обслуживающий канал. На вход поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Образование очереди не допускается. Если заявка застала обслуживающий канал занятым, то она покидает систему.

Время обслуживания заявки есть случайная величина, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром μ. Среднее время обслуживания одной заявки $t_{\text{обсл}} = 1/\mu$.

Возможные состояния СМО S_0 (канал свободен) и S_1 (канал занят).

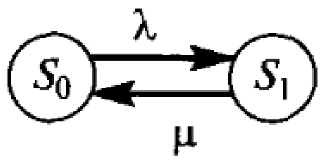
Нас интересуют следующие показатели эффективности работы СМО:

1) абсолютная пропускная способность A (среднее число заявок, которое СМО может обслужить в единицу времени);

2) относительная пропускная способность Q (отношение среднего числа обслуживаемых в единицу времени заявок к среднему числу поступивших за это время заявок);

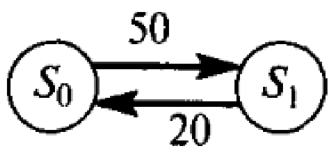
3) вероятность отказа $p_{\text{отк}}$ (вероятность того, что заявка покинет СМО необслуженной).

Размеченный граф состояний одноканальной СМО с отказами имеет следующий вид:



Пример 100. Одноканальная телефонная линия. Заявка-вызов, поступившая в момент, когда линия занята, получает отказ. Простейший поток заявок поступает с интенсивностью $\lambda = 50$ звонков/ч. Время обслуживания заявки есть случайная величина, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения. Средняя продолжительность разговора $t_{\text{обсл}} = 3$ мин. Определим показатели эффективности работы СМО.

Данная телефонная линия — это одноканальная СМО с отказами. Время обслуживания $t_{\text{обсл}} = 3$ мин $=$ $3/60$ ч $=$ 0,05 ч. Тогда интенсивность обслуживания $\mu = 1/t_{\text{обсл}} = 1/0,05 = 20$ звонков/ч. Размеченный граф состояний имеет следующий вид:



Пусть p_0 — предельная вероятность состояния S_0. Состояние S_1, связано с состоянием S_0 двумя стрелками с интенсивностями 50 и 20.

Пусть p_1 — предельная вероятность состояния S_1. Тогда $p_1 = \frac{50}{20}p_0$ (интенсивность верхней стрелки пишем в числителе, интенсивность нижней стрелки пишем в знаменателе) $= 2,5p_0$.

Так как $p_0 + p_1 = 1$, то $1 = p_0 + 2,5p_0 = 3,5p_0$ Отсюда $p_0 = 1/3,5 \approx 0,286$. Тогда $p_1 = 2,5p_0 \approx 0,714$.

Вероятность отказа $p_{\text{отк}}$ — это вероятность того, что линия занята, то есть предельная вероятность состояния S_1. Поэтому $p_{\text{отк}} = p_1 \approx 0,14$.

Относительная пропускная способность $Q = 1 - p_{\text{отк}} = 1 - 0,714 = 0,286$ Это вероятность того, что заявка будет обслужена. Абсолютная пропускная способность $A = \lambda Q = 50 \times 0,286 = 14,3$ звонка/ч, то есть в среднем в час СМО обслуживает 14,3 звонка.

Мы видим, что номинальная пропускная способность телефонной линии $\mu \approx 20$ звонков/ч отличается от абсолютной пропускной способности $A = 14,3$ звонка/ч из-за случайного характера потока звонков и случайности времени обслуживания.

Задача 100. Одноканальная телефонная линия. Заявка-вызов, поступившая в момент, когда линия занята, получает отказ. Простейший поток заявок поступает с интенсивностью $\lambda = 60$ звонков/ч. Время обслуживания заявки есть случайная величина, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения. Средняя продолжительность разговора $t_{\text{обсл}} = 2,5$ мин. Определить показатели эффективности работы СМО.

§ 32.9. МНОГОКАНАЛЬНАЯ СМО С ОТКАЗАМИ (ЗАДАЧА ЭРЛАНГА)

СМО содержит n обслуживающих каналов. На вход поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Образование очереди не допускается. Если заявка застала все обслуживающие каналы занятыми, то она покидает систему. Если в момент поступления требования имеется свободный канал, то он немедленно приступает к обслуживанию поступившего требования. Каждый канал может одновременно обслуживать только одно требование. Все каналы функционируют независимо.

Время обслуживания заявки есть случайная величина, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром μ. Среднее время обслуживания одной заявки $t_{\text{обсл}} = 1/\mu$.

Возможные состояния СМО S_0 (все каналы свободны), S_1, (один канал занят, остальные свободны), S_2 (два канала заняты, остальные свободны),..., S_n (все каналы заняты).

Приведенная интенсивность потока заявок (интенсивность нагрузки канала) $p = \lambda/\mu$.

Нас интересуют следующие показатели эффективности работы СМО:

1) абсолютная пропускная способность (среднее число заявок, которое СМО может обслужить в единицу времени);

2) относительная пропускная способность Q (отношение среднего числа обслуживаемых в единицу времени заявок к среднему числу поступивших за это время заявок);

3) вероятность отказа ротк (вероятность того, что заявка покинет СМО необслуженной);

4) p_0 (вероятность того, что все обслуживающие каналы свободны);

5) p_k (вероятность того, что в системе k требований);

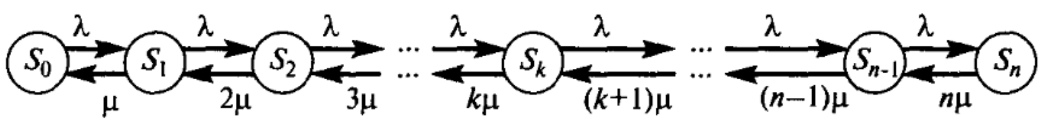
6) среднее число свободных от обслуживания каналов N_0;

7) коэффициент простоя каналов $K_{\text{пр}}$;

8) среднее число занятых обслуживанием каналов $N_{\text{зан}}$;

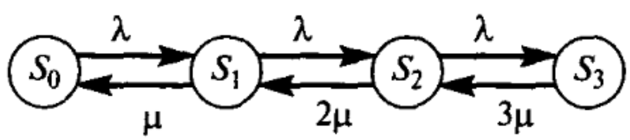
9) коэффициент загрузки каналов $K_{\text{зан}}$.

Размеченный граф состояний многоканальной СМО с отказами имеет следующий вид:



Пример 101. Трехканальная телефонная линия. Заявка-вызов, поступившая в момент, когда все $n = 3$ канала заняты, получает отказ. Простейший поток заявок поступает с интенсивностью $\lambda = 60$ звонков/ч. Время обслуживания заявки есть случайная величина, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения. Средняя продолжительность разговора $t_{\text{обсл}} = 3$ мин. Определим показатели эффективности работы СМО.

Данная телефонная линия — это многоканальная СМО с отказами $t_{\text{обсл}} = 3$ мин $= 3/60$ ч $= 0{,}05$ ч. Тогда интенсивность обслуживания $\mu = 1/t_{\text{обсл}} = 1/0,05 = 20$ звонков/ч. Приведенная интенсивность потока заявок $p = \lambda/\mu = 60/20 = 3$. Размеченный граф состояний имеет следующий вид:



p_0 — предельная вероятность состояния S_0. Состояние S_1, связано с состоянием S_0 двумя стрелками с интенсивностями λ и μ.

Пусть p_1 — предельная вероятность состояния S_1. Имеем $p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0$ (интенсивность верхней стрелки пишем в числителе, интенсивность нижней стрелки пишем в знаменателе) $= \rho p_0 = 3p_0$.
Аналогично $p_2 = \frac{\lambda}{2\mu} p_1 = \frac{\rho}{2} p_1 = \frac{3}{2} \times 3p_0 = 4,5p_0$; $p_3 = \frac{\lambda}{3\mu} p_2 = \frac{\rho}{3} p_2 = \frac{3}{3} \times 4,5p_0 = 4,5p_0$.

Так как $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1$, то $1 = p_0 + 3p_0 + 4,5p_0 + 4,5p_0 = 13p_0$.
Отсюда $p_0 = 1/13 \approx 0,077$ (вероятность того, что все обслуживающие каналы свободны).
Тогда $p_1 = 3p_0 = 0,231, p2 = 4,5p_0 \approx 0,346, p3 = 4,5p_0 \approx 0,346.$. Мы нашли вероятности того, что в системе требований, $k = 0, 1, 2, 3$.

Вероятность отказа $p_{\text{отк}}$ — это вероятность того, что все каналы заняты, то есть предельная вероятность состояния S_3. Поэтому $p_{\text{отк}} = 3 = p_3 \approx 0,346$.

Относительная пропускная способность $Q = 1 - p_{\text{отк}} = 1 - 0,346 = 0,654$. Это вероятность того, что заявка будет обслужена.

Абсолютная пропускная способность $= \lambda Q = 60 \times 0,654 = 39,24$ звонка/ч, то есть в среднем в час СМО обслуживает 39,24 звонка.

Среднее число свободных от обслуживания каналов N_0 есть математическое ожидание числа свободных каналов, то есть число свободных каналов в каждом состоянии надо умножить на предельную вероятность этого состояния и полученные произведения сложить: $N_0 = 3 \times p_0 + 2 \times p_1 + 1 \times p_2 + 0 \times p_3 = 3 \times 0,077 + 2 \times$

$0,231 + 1 \times 0,346 + 0 \times 0,346 = 1,039$.

Коэффициент простоя каналов $K_{\text{пр}} = N_0/n = 1,039/3 \approx 0,346$.

Среднее число занятых обслуживанием каналов $N_{\text{зан}} = /\lambda = \lambda Q/\mu = \rho Q = 3 \times 0,654 = 1,962$. Мы видим, что из-за ошибок округления $n = N_0 + N_{\text{зан}} = 1,039 + 1,962 = 3,001$.

Коэффициент загрузки каналов $K_{\text{зан}} = N_{\text{зан}}/n = 1,962/3 = 0,654$.

Задача 101. Трехканальная телефонная линия. Заявка-вызов, поступившая в момент, когда все $n = 3$ канала заняты, получает отказ. Простейший поток заявок поступает с интенсивностью $\lambda = 50$ звонков/ч. Время обслуживания заявки есть случайная величина, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения. Средняя продолжительность разговора $t_{\text{обсл}} = 2,5$ мин. Определить показатели эффективности работы СМО.

Для снижения вероятности отказа нужно увеличить число каналов обслуживания.

Замечание. Предельную вероятность состояния S_k можно определить по следующей формуле: $p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0,\ k = 0, 1, ..., n$. При больших n можно воспользоваться приближенной формулой:

$$p_k \approx \frac{\Phi\left(\frac{k+0,5-p}{\sqrt{p}}\right) - \Phi\left(\frac{k-0,5-p}{\sqrt{p}}\right)}{0,5 + \Phi\left(\frac{k+0,5-p}{\sqrt{p}}\right)},$$

где $\Phi(\text{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ - функция Лапласа.

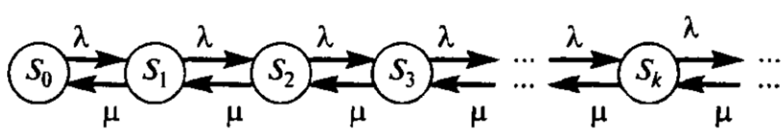
Мастер функций f_x пакета Excel позволяет вычислить функцию Лапласа: $\Phi(\text{x}) = \text{НОРМРАСП}\ (x; 0; 1; 1) - 0,5$.

§ 32.10. ОДНОКАНАЛЬНАЯ СМО С НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОЧЕРЕДЬЮ

СМО содержит один обслуживающий канал. На вход поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Если заявка застала обслуживающий канал занятым, то она встает в очередь и ожидает начала обслуживания.

Время обслуживания заявки есть случайная величина, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром μ. Среднее время обслуживания одной заявки $t_{\text{обсл}} = 1/\mu$.

Возможные состояния СМО S_0 (канал свободен), S_1, (канал занят, очереди нет), S_2 (канал занят, в очереди одна заявка), S_3 (канал занят, в очереди две заявки) и т. д. Размеченный граф состояний одноканальной СМО с неограниченной очередью имеет следующий вид:



При $\rho = \lambda\mu < 1$ существуют предельные вероятности. Найдем их. p_0- предельная вероятность состояния S_0. Состояние S_1, связано с состоянием S_0 двумя стрелками с интенсивностями λ и μ.

Пусть p_1 — предельная вероятность состояния S_1. Как и раньше $p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0$ (интенсивность верхней стрелки пишем в числителе, интенсивность нижней стрелки пишем в знаменателе) $= \rho_0$. Аналогично $p_2 = \frac{\lambda}{\mu} p_1 = \rho \times \rho p_0 = \rho^2 p_0$; $p_3 = \frac{\lambda}{\mu} p_2 = \rho \times \rho^2 p_0 = \rho^3 p_0$. И т.д. $p_k = \rho^k p_0,\ k = 0, 1, 2, ...$

Так как $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + ... = 1$,то $1 = p_0 + \rho p_0 + \rho^2 p_0 + \rho^3 p_0 + ... = p_0(1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + ...)$. В скобках указана сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым элементом $b_1 = 1$ и знаменателем $q = \rho < 1$. Эта сумма равна $\frac{b_1}{1-q} = \frac{1}{1-\rho}$. Тогда $1 = p_0 \times \frac{1}{1-\rho}$, то есть $p_0 = 1 - \rho$. Это вероятность того, что канал свободен.

Тогда вероятность состояния S_k (канал занят, в очереди $k-1$ заявка) равна $p_k = \rho^k{}_0 = \rho^k(1-\rho),\ = 1, 2, 3, ...$

Вероятность того, что канал занят, равна $p_{\text{зан}} = 1 - p_0 = 1 - (1 - \rho) = \rho$.

Найдем среднее число заявок в системе $L_{\text{сист}}$ по формуле математического ожидания: число требований в каждом состоянии S_k надо умножить на предельную вероятность этого состояния и полученные произведения суммировать.

$$L_{\text{сист}} = 0\times p_0+1\times p_1+2\times p_2+3\times p_3+... = 1\times\rho(1-\rho)-2\times\rho^2(1-\rho)+3\times\rho^3(1-\rho)+... = \rho(1-\rho)(1+2\rho+3\rho^2+...) =$$
$$= \rho(1-\rho)\left(\frac{d\rho}{d\rho}+\frac{d\rho^2}{d\rho}+\frac{d\rho^3}{d\rho}+...\right)\rho(1-\rho)\frac{d}{d\rho}(\rho+rho^2+\rho^3+...).$$

Мы предполагаем, что выполнены условия, при которых возможно поменять местами операции дифференцирования и суммирования.

В скобках указана сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым элементом $b_1 = \rho$ и знаменателем $q = \rho < 1$.
Эта сумма равна $\frac{b_1}{1-q} = \frac{\rho}{1-\rho}$.
Отсюда

$$L_{\text{сист}} = \rho(1-\rho)\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right) = \rho(1-\rho)\frac{\frac{d\rho}{d\rho}(1-\rho)-\rho\frac{d(1-\rho)}{d\rho}}{(1-\rho)^2} = \rho(1-\rho)\frac{1-\rho+\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

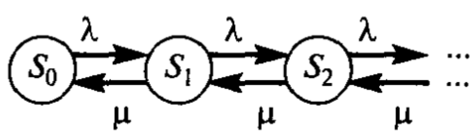
Тогда среднее время пребывания заявки в системе $T_{\text{сист}} = L_{\text{сист}}/\lambda$ (формула Литтла). В $T_{\text{сист}}$ входят время обслуживания заявки и время в очереди.

Найдем $L_{\text{обсл}}$ среднее число заявок, находящихся под обслуживанием.
Канал либо свободен с вероятностью $_0$, либо занят с вероятностью $1-p_0$.
Поэтому $L_{\text{обсл}} = 0\times p_0 + 1\times(1-p_0) = 1-p_0 = \rho$.
Тогда среднее число заявок в очереди $L_{\text{оч}} = L_{\text{сист}} - L_{\text{обсл}} = \frac{\rho}{1-\rho} - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho}$. Отсюда среднее время пребывания заявки в очереди $T_{\text{оч}} = L_{\text{оч}}/\lambda$ (этот результат также называют формулой Литтла).

Пример 102. Магазин с одним продавцом. Предполагается, что простейший поток покупателей поступает с интенсивностью $\lambda = 20$ человек/ч. Время обслуживания заявки — случайная величина, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром $\mu = 25$ человек/ч. Определим:

1) среднее время пребывания покупателя в очереди;
2) среднюю длину очереди;
3) среднее число покупателей в магазине;
4) среднее время пребывания покупателя в магазине;
5) вероятность того, что в магазине не окажется покупателей;
6) вероятность того, что в магазине окажется ровно 4 покупателя.

Данный магазин — одноканальная СМО с неограниченной очередью. Размеченный граф состояний имеет следующий вид:



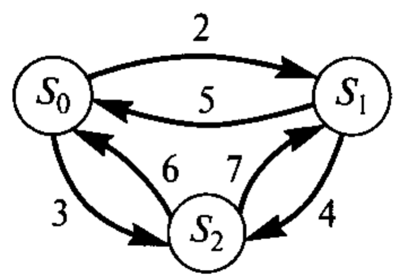
Так как $\rho = \lambda/\mu = 20/25 = 0,8 < 1$, то существуют предельные вероятности.
Вероятность того, что в магазине не окажется покупателей, равна $p_0 = 1-\rho = 1-0,8 = 0,2$.
Вероятность того, что в магазине окажется ровно 4 покупателя, равна $p_4 = \rho^4 p_0 = 0,8^4\times 0,2 \approx 0,082$.
Средняя длина очереди $L_{\text{оч}} = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{0,8^2}{1-0,8} = 3,2$.
Среднее время пребывания покупателя в очереди:
$T_{\text{оч}} = L_{\text{оч}}/\lambda = 3,2/20 = 0,16$ ч $= 0,16\times 60$ мин $= 9,6$ мин.
Среднее число покупателей в магазине $L_{\text{сист}} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0,8}{1-0,8} = 4$.
Среднее время пребывания покупателя в магазине $T_{\text{сист}} = L_{\text{сист}}/\lambda = 4/20 = 0,2$ ч $= 0,2\times 60$мин $= 12$мин.

Задача 102. Магазин с одним продавцом. Предполагается, что простейший поток покупателей поступает с интенсивностью $\lambda = 10$ человек/ч. Время обслуживания заявки есть случайная величина, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром $\mu = 15$ человек/ч. Определить:

1) среднее время пребывания покупателя в очереди;
2) среднюю длину очереди;
3) среднее число покупателей в магазине;
4) среднее время пребывания покупателя в магазине;
5) вероятность того, что в магазине не окажется покупателей;
6) вероятность того, что в магазине окажется ровно 4 покупателя.

Решение задач:

Задача 98. Найти предельные вероятности для следующей системы.



Оценить среднюю эффективность системы, если в состояниях S_0, S_1 и S_2 система приносит 11, 7 и 5 денежных единиц дохода соответственно.

Из состояния S_0 выходят стрелки с интенсивностями 3 и 2. Поэтому в левой части соответствующего уравнения Колмогорова будет $(2 + 3)p_0$. В состояние S_0 входят стрелка с интенсивностью 5 из состояния S_1 (ей соответствует слагаемое $5p_1$, в правой части уравнения Колмогорова) и стрелка с интенсивностью 6 из состояния S_2 (ей соответствует слагаемое $6p_2$ в правой части уравнения Колмогорова).
Получаем уравнение $(2 + 3)p_0 = 5p_1 + 6p_2$.

Из состояния S_1 выходят стрелки с интенсивностями 5 и 4. Поэтому в левой части соответствующего уравнения Колмогорова будет $(5 + 4)p_1$. В состояние S_1, входят стрелка с интенсивностью 2 из состояния S_0 (ей соответствует слагаемое $2 \times p_0$ в правой части уравненияКолмогорова) и стрелка с интенсивностью 7 из состояния S_2 (ей соответствует слагаемое $7p_2$ в правой части уравнения Колмогорова).
Получаем уравнение $(5{+}4)p_1 = 2p_0 + 7p_2$. И т. д.

Система уравнений Колмогорова:

$$\begin{cases} (2+1)p_0 = 3p_1 + 4p_2, \\ (3+6)p_1 = 1p_0 + 5p_2, \\ (4+5)p_2 = 2p_0 + 6p_1, \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} 3p_0 = 3p_1 + 4p_2, \\ 9p_1 = 1p_0 + 5p_2, \\ 9p_2 = 2p_0 + 6p_1, \end{cases}$$

Мы видим, что последнее уравнение есть сумма двух предыдущих уравнений. Поэтому вместо него включим в систему уравнение $p_0 + p_1 + p_2 = 1$:

$$\begin{cases} 3p_0 = 3p_1 + 4p_2, \\ 9p_1 = p_0 + 5p_2, \\ p_0 + p_1 + p_2 = 1. \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} 3p_0 - 3p_1 - 4p_2 = 0, \\ 9p_1 - p_0 - 5p_2 = 0, \\ p_2 = 1 - p_0 - p_1. \end{cases} \quad \to$$

$$\begin{cases} 3p_0 - 3p_1 - 4(1 - p_0 - p_1) = 0, \\ 9p_1 - p_0 - 5(1 - p_0 - p_1) = 0, \\ p_2 = 1 - p_0 - p_1. \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} 7p_0 + p_1 = 4, \\ 4p_0 - 14p_1 = 5, \\ p_2 = 1 - p_0 - p_1. \end{cases}$$

К первым двум уравнениям системы применим правило Крамера. Тогда:

$$\triangle = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 4 & 14 \end{vmatrix} = 7 \times 14 - 1 \times 4 = 94;$$

$$\triangle_{p_0} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 14 \end{vmatrix} = 4 \times 14 - 1 \times 5 = 51;$$

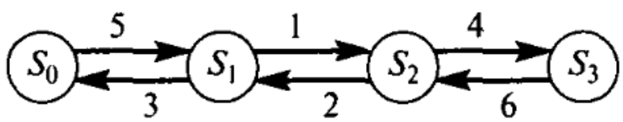
$$\triangle_{p_1} = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 7 \times 5 - 4 \times 4 = 51;$$

$p_0 = \triangle_{p_0}/\triangle = 51/94 \approx 0,543;$
$p_1 = \triangle_{p_1}/\triangle = 19/94 \approx 0,202;$
$p_2 = 1 - p_0 - p_1 = 1 - 0,543 - 0,202 \approx 0,255.$

Полученные результаты говорят о том, что в предельном стационарном режиме система в среднем 54.3% времени будет находиться в состоянии S_0, 20.2% времени будет находиться в состоянии S_1, и 25.5% времени будет находиться в состоянии S_2.

Если в состояниях S_0, S_1 и S_2 система приносит 10, 8 и 6 денежныхединиц дохода соответственно, то средняя эффективность системыравна сумме произведений предельных вероятностей состояний и доходов в этих состояниях: $0,543 \times 10 + 0,202 \times 8 + 0,255 \times 6 = 8,576$ денежных единиц.

Задача 99. Найти предельные вероятности для процесса гибели и размножения, размеченный граф состояний которого имеет следующий вид:



Двигаемся по этому графу слева направо. Вероятность p_0 — предельная вероятность состояния S_0.

Следующее состояние — S_1. Оно связано с состоянием S_0 двумя стрелками с интенсивностями 3 и 5. Пусть p_1 — предельная вероятность состояния S_1. Имеем $p_1 = \frac{5}{3}p_0$ (интенсивность верхней стрелки пишем в числителе, интенсивность нижней стрелки пишем в знаменателе).

Следующее состояние S_2. Оно связано с состоянием S_1, двумя стрелками с интенсивностями 1 и 2. Пусть p_2 — предельная вероятность состояния S_2. Имеем $p_2 = \frac{1}{2}p_1$, (интенсивность верхней стрелки пишем в числителе, нижней стрелки — в знаменателе) $= \frac{5}{3} \times \frac{1}{2}p_0 = \frac{5}{6}$.

Следующее состояние S_3. Оно связано с состоянием S_2 двумя стрелками с интенсивностями 6 и 4. Пусть p_3 — предельная вероятность состояния S_3. Имеем $p_3 = \frac{4}{6}p_2$ (интенсивность верхней стрелки пишем в числителе, нижней стрелки — в знаменателе) $= \frac{4}{6} \times \frac{5}{6}p_0 = \frac{20}{36}p_0$.

Так как $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1$, то $1 = p_0 + \frac{5}{3}p_0 + \frac{5}{6}p_0 + \frac{20}{36}p_0 = \frac{110}{36}p_0$.

Отсюда $p_0 = \frac{36}{110} \approx 0,254$

Тогда $p_1 = \frac{3}{5}p_0 \approx 0,423, p_2 = \frac{5}{6}p_0 \approx 0,211, p_3 = \frac{20}{36}p_0 \approx 0,112.$

Задача 100. Одноканальная телефонная линия. Заявка-вызов, поступившая в момент, когда линия занята, получает отказ. Простейший поток заявок поступает с интенсивностью $\lambda = 60$ звонков/ч. Время обслуживания заявки есть случайная величина, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения. Средняя продолжительность разговора $t_{\text{обсл}} = 2,5$ мин. Определить показатели эффективности
работы СМО.

Данная телефонная линия — это одноканальная СМО с отказами. Время обслуживания $t_{\text{обсл}} = 2.5$ мин $= 2.5/60$ ч = 0,04 ч. Тогда интенсивность обслуживания $\mu = 1/t_{\text{обсл}} = 1/0,04 = 24$ звонков/ч. Размеченный граф состояний имеет следующий вид:

Пусть p_0 — предельная вероятность состояния S_0. Состояние S_1, связано с состоянием S_0 двумя стрелками с интенсивностями 60 и 24.

Пусть p_1 — предельная вероятность состояния S_1. Тогда $p_1 = \frac{60}{24}p_0$ (интенсивность верхней стрелки пишем в числителе, интенсивность нижней стрелки пишем в знаменателе) $= 2,5p_0$.

Так как $p_0 + p_1 = 1$, то $1 = p_0 + 2,5p_0 = 3,5p_0$ Отсюда $p_0 = 1/3,5 \approx 0,286$. Тогда $p_1 = 2,4p_0 \approx 0,714$.

Вероятность отказа $p_{\text{отк}}$ — это вероятность того, что линия занята, то есть предельная вероятность состояния S_1. Поэтому $p_{\text{отк}} = p_1 \approx 0,14$.

Относительная пропускная способность $Q = 1 - p_{\text{отк}} = 1 - 0,714 = 0,286$ Это вероятность того, что заявка будет обслужена. Абсолютная пропускная способность $A = \lambda Q = 60 \times 0,286 = 17,16$ звонка/ч, то есть в среднем в час СМО обслуживает 17,16 звонка.

Мы видим, что номинальная пропускная способность телефонной линии $\mu \approx 25$ звонков/ч отличается от абсолютной пропускной способности $A = 17,16$ звонка/ч из-за случайного характера потока звонков и случайности времени обслуживания.

Задача 101. Трехканальная телефонная линия. Заявка-вызов, поступившая в момент, когда все $n = 3$ канала заняты, получает отказ. Простейший поток заявок поступает с интенсивностью $\lambda = 50$ звонков/ч. Время обслуживания заявки есть случайная величина, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения. Средняя продолжительность разговора $t_{\text{обсл}} = 2,5$ мин. Определить показатели эффективности работы СМО.

Для снижения вероятности отказа нужно увеличить число каналов обслуживания.

Замечание. Предельную вероятность состояния S_k можно определить по следующей формуле:
$p_k = \frac{\rho^k}{k!}p_0,\ k = 0, 1, ..., n$. При больших n можно воспользоваться приближенной формулой:

$$p_k \approx \frac{\Phi\left(\frac{k+0,5-p}{\sqrt{p}}\right) - \Phi\left(\frac{k-0,5-p}{\sqrt{p}}\right)}{0,5 + \Phi\left(\frac{k+0,5-p}{\sqrt{p}}\right)},$$

где $\Phi(\text{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ - функция Лапласа.

Мастер функций f_x пакета Excel позволяет вычислить функцию Лапласа:
$\Phi(\text{x}) = $ НОРМРАСП $(x; 0; 1; 1) - 0,5$.

p_0 — предельная вероятность состояния S_0. Состояние S_1, связано с состоянием S_0 двумя стрелками с интенсивностями λ и μ.

Пусть p_1 — предельная вероятность состояния S_1. Имеем $p_1 = \frac{\lambda}{\mu}p_0$ (интенсивность верхней стрелки пишем в числителе, интенсивность нижней стрелки пишем в знаменателе) $= \rho p_0 = 3p_0$.
Аналогично $p_2 = \frac{\lambda}{2\mu}p_1 = \frac{\rho}{2}p_1 = \frac{3}{2} \times 3p_0 = 4,5p_0$; $p_3 = \frac{\lambda}{3\mu}p_2 = \frac{\rho}{3}p_2 = \frac{3}{3} \times 4,5p_0 = 4,5p_0$.

Так как $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1$, то $1 = p_0 + 3p_0 + 4,5p_0 + 4,5p_0 = 13p_0$.
Отсюда $p_0 = 1/13 \approx 0,077$ (вероятность того, что все обслуживающие каналы свободны).
Тогда $p_1 = 3p_0 = 0,231, p2 = 4,5p_0 \approx 0,346, p3 = 4,5p_0 \approx 0,346$.. Мы нашли вероятности того, что в системе требований, $k = 0, 1, 2, 3$.

Вероятность отказа $p_{\text{отк}}$ — это вероятность того, что все каналы заняты, то есть предельная вероятность состояния S_3. Поэтому $p_{\text{отк}} = 3 = p_3 \approx 0,346$.

Относительная пропускная способность $Q = 1 - p_{\text{отк}} = 1 - 0,346 = 0,654$. Это вероятность того, что заявка будет обслужена.

Абсолютная пропускная способность $= \lambda Q = 60 \times 0,654 = 39,24$ звонка/ч, то есть в среднем в час СМО обслуживает 39,24 звонка.

Среднее число свободных от обслуживания каналов N_0 есть математическое ожидание числа свободных каналов, то есть число свободных каналов в каждом состоянии надо умножить на предельную вероятность этого состояния и полученные произведения сложить: $N_0 = 3 \times p_0 + 2 \times p_1 + 1 \times p_2 + 0 \times p_3 = 3 \times 0,077 + 2 \times 0,231 + 1 \times 0,346 + 0 \times 0,346 = 1,039$.

Коэффициент простоя каналов $K_{\text{пр}} = N_0/n = 1,039/3 \approx 0,346$.

Среднее число занятых обслуживанием каналов $N_{\text{зан}} = /\lambda = \lambda Q/\mu = \rho Q = 3 \times 0,654 = 1,962$. Мы видим, что из-за ошибок округления $n = N_0 + N_{\text{зан}} = 1,039 + 1,962 = 3,001$.

Коэффициент загрузки каналов $K_{\text{зан}} = N_{\text{зан}}/n = 1,962/3 = 0,654$.

Задача 102. Магазин с одним продавцом. Предполагается, что простейший поток покупателей поступает с интенсивностью $\lambda = 10$ человек/ч. Время обслуживания заявки есть случайная величина, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром $\mu = 15$ человек/ч. Определить:

1. среднее время пребывания покупателя в очереди;
2. среднюю длину очереди;
3. среднее число покупателей в магазине;
4. среднее время пребывания покупателя в магазине;
5. вероятность того, что в магазине не окажется покупателей;
6. вероятность того, что в магазине окажется ровно 3 покупателя.

Так как $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} < 1$, то существуют предельные вероятности.

Вероятность того, что в магазине не окажется покупателей, равна $p_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} = 0,333$.

Вероятность того, что в магазине окажется ровно 3 покупателя, равна $p_3 = \rho^3 p_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \frac{1}{3} = \frac{8}{27} \times \frac{1}{3} \approx 0,099$.

Средняя длина очереди $L_{\text{оч}} = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{1-\frac{2}{3}} = \frac{4}{3} = 1,333$.

Среднее время пребывания покупателя в очереди: 0,888 мин.

Среднее число покупателей в магазине $L_{\text{сист}} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 2$.

Среднее время пребывания покупателя в магазине:

$$T_{\text{сист}} = \frac{L_{\text{сист}}}{\lambda} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \text{ ч} = 12 \text{ мин}.$$