Подпространства и ранг

Нехаенко П.А.
pavel.ushlepkovl@yandex.ru
Yaroslavl Demidov state university

Подпространства. Их сумма и пересечения

Определение 1. *Непустое подмножество $L_1 \subset L$ называется линейным подпространством, если L_1 замкнуто относительно операций сложения и умножения на число:*

1) для любых $x, y \in L_1 x + y \in L_1$;

2) для любого $x \in L_1$ и любого $\alpha \in R \alpha x \in L_1$

Иначе говоря, L_1 есть линейное подпространство L, если L_1 само является ли- нейным пространством относительно операций, введённых в более широком множестве L.

Определение 2. Сумма и пересечение подпространств L_1 , L_2 линейного пространства L определяются следующим образом:

$$L_1 + L_2 := \{x \in L : x = x_1 + x_2, x_i \in L_i, i = 1, 2\}, L_1 \bigcap L_2 := \{x \in L : x_i \in L_i, i = 1, 2\}.$$

Определение 3. Сумма $S = L_1 + L_2$ называется прямой, если для любого $x \in S$ представление $x = x_1 + x_2, x_1 \in L_1, x_2 \in L_2$, является единственным. Прямая сумма в этом тексте обозначается $S = L_1 \oplus L_2$ (другое стандартное обозначение: $S = L_1 + L_2$).

Теорема 1. Сумма является прямой, то есть $S = L_1 \oplus L_2$, тогда и только тогда, когда выполнено любое из следующих эквивалентных условий.

1. $L_1 \bigcap L_2 = \{\mathbf{0}\}$.
2. $dim(L_1 + L_2) = dimL_1 + dimL_2$.

3.Если $f_1, ..., f_l$ - базис $L_1, g_1, ..., g_m-$ базис L_2 , то $f_1, ..., f_l, g_1, ..., g_m-$ базис $L_1 + L_2$

4. Единственность разложения по L_1 и L_2 имеет место для нулевого вектора: если $x_1 + x_2 = 0, x_1 \in L_1, x_2 \in L_2$, то обязательно $x_1 = x_2 = 0$

Ранг матрицы. Теорема о ранге. Методы вычисления и свойства ранга матрицы

Определение 4. Рангом матрицы A называется ранг системы её столбцов как элементов R^m, то есть размерность линейной оболочки системы столбцов $X_1, ..., X_n$:

$$rg(\mathrm{A}) := rg(X_1, ..., X_n) = dimlin(X_1, ..., X_n).$$

Проще говоря, ранг матрицы равен максимальному числу линейно независимых столбцов этой матрицы. В этом варианте надо добавить, что ранг нулевой матрицы считается равным 0.

Теорема 2. Ранг матрицы равен максимальному порядку r отличного от нуля минора этой матрицы. (Для нулевой матрицы считаем $r = 0$).
Основной способ вычисления ранга матрицы связан с приведением её к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований над строками, то есть является методом Гаусса.
Другим методом вычисления ранга матрицы является метод окаймления миноров.

Свойства ранга:

1. Для $A \in M_{m,n}$ $rg(\mathrm{A}) \leqslant min(m, n)$.
2. Пусть $A \in M_n$. $rg(\mathrm{A}) = n \iff |\mathrm{A}| \neq 0$.
3. Пусть $\mathrm{A} \in M_n$. Матрица A обратима $\iff$ rg(A) = n.
4. Если AB существует, то rg(AB) $\leqslant min(rg(\mathrm{A}), rg(\mathrm{B}))$.
5. Пусть $B \in M_n$ и $rg(\mathrm{B}) = n$. Если AB существует, то $\mathrm{AB} = rg(\mathrm{A})$.
Тоже - для произведения AB.
6. Для $\mathrm{A} \in M_{m,k}, \mathrm{B} \in M_{k,n}$ $rg(\mathrm{A}) + rg(\mathrm{B}) \leqslant rg(\mathrm{AB}) + k$.
7. Для $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in M_{m,n}$ $rg(\mathrm{A} + \mathrm{B}) \leqslant rg(\mathrm{A}) + rg(\mathrm{B})$.
8. Если все произведения существуют, то $rg(\mathrm{AB}) + rg(\mathrm{BC}) \leqslant rg(\mathrm{B}) + rg(\mathrm{ABC})$.

Применение понятия ранга к анализу систем линейных уравнений. Теорема Кронекера – Капелли. Критерий определённости

С привлечением понятия ранга матрицы нетрудно дать необходимые и достаточные условия совместности и определённости произвольной системы линейных уравнений.
Пусть дана система m уравнений с n неизвестными $x_1, ..., x_n$ и матрицей коэффициентов $\mathrm{A} = (a_{ij}) \in M_{m,n}$:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1. \\ a_{21}x_1 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2. \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array} \tag{1}$$

Пусть $\mathrm{X}_1, \cdots, \mathrm{X}_n$ — столбцы матрицы **A**, **b** — столбец свободных членов. Обозначим через **A|b** расширенную матрицу системы (1). Ясно, что всегда

$$rg(\mathrm{A}) \leqslant rg(\mathrm{A}|\mathbf{b}) \leqslant rg(\mathrm{A}).$$

Сначала ответим на вопрос о совместности системы (1).
Теорема 3. Система (1) является совместной тогда и только тогда, когда

$$rg(\mathrm{A}|\mathbf{b}) = rg(\mathrm{A}).$$

Второе утверждение этого пункта содержит критерий определённости системы (1).
Теорема 4. Система линейных уравнений (1) является определённой тогда и только тогда, когда выполняются одновременно два равенства

$$rg(\mathrm{A}|\mathbf{b}) = rg(\mathrm{A}) = n.$$

Размерность и базис подпространства Rn, задаваемого системой линейных однородных уравнений. Фундаментальная система решений

Рассмотрим систему линейных однородных уравнений

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

с данной матрицей коэффициентов $\mathrm{A} \in M_{m,n}$.
Пусть $L \in R^n$ определяется равенством

$$L := \{x = (x_1, \cdots, x_n) : x \text{ удовлетворяет } (2)\}.$$

Мы говорим, что L задаётся системой уравнений (2) или является подпространством решений этой системы.
Исследуем задачу определения размерности и базиса L.
Теорема 5. $dimL = n - rg(\mathrm{A})$.

С каждой матрицей $\mathrm{A} \in M_{m,n}$ можно связать два линейных подпространства R^n, которые здесь мы обозначим L_1 и L_2.
1) L_1 — линейная оболочка строк матрицы A . Размерность $dimL_1 = rg(\mathrm{A})$. Базис L_1 образует любая система из $r = rg(\mathrm{A})$ линейно независимых строк.
2) L_2 — подпространство решений системы линейных однородных уравнений. Размерность $dimL_2 = nrg(\mathrm{A})$. Базис L_2 образует фундаментальная система решений данной системы уравнений.

Наконец, заметим, что задачи нахождения базиса или размерности подпространств в конечномерных линейных пространствах, отличных от R n (многочленов, матриц и т.д.), решаются с помощью изоморфного перехода в R n с нужным значением n.

References

1. 1. *Невский М. В. Подпространства и ранг // Лекции по алгебре: Учебное пособие // Ярославль: ЯрГУ, 2002. с. 72 - 87 с.*