Случайности не случайны?

В этой главе мы порассуждаем о предопределённости полёта монетки, о топографических картах, о математических катастрофах и о природе случайности. А по пути заглянем в такие разделы математики, как теория мер и теория динамического хаоса.

Разговор о законах подлости, как источнике житейских неурядиц, часто начинается со знаменитого **закона бутерброда**. Он просто формулируется, легко проверяется и широко известен:

Бутерброд всегда падает маслом вниз.

Понятно, что слово «всегда» — это преувеличение, легко представить себе условия, в которых бутерброд упадет, оставив намазанную маслом сторону в сохранности. Что же люди понимают, под этим законом? Скорее всего, что бутерброд падает маслом вниз достаточно часто, чтобы это было заметно. Но чаще ли происходит неблагоприятный исход падения, чем благоприятный? Бутерброды разные, падают при различных обстоятельствах, с разной высоты… Параметров столько, что говорить о закономерностях в такой задаче нет смысла. По-всякому бывает. Бывает, что падает маслом вниз, тогда становится обидно, мы вспоминаем про закон и запоминаем его. А если бутерброд падает неинтересно — маслом кверху, или если он оказался без масла вовсе, так и говорить не о чем — понятно же, что закон шуточный! В конце концов, бутерброд подобен монетке, которую математики используют для получения случайных величин с двумя возможными значениями: «орёл» и «решка». Если монетка «честная», то ей абсолютно неважно, какой стороной падать, и мы говорим, что вероятность падения орла и «решки» одинаковы и равны 1/2. По идее, с бутербродами дела должны обстоять также. Обещаю, мы вернёмся к бутербродам и очень внимательно их изучим, но пока присмотримся к самой, наверное, простой вероятностной системе — к монетке.

Монетку в теоретико-вероятностных экспериментах подбрасывают каким-то особым магическим образом, так чтобы выбор начального положения, начальной скорости и скорости закручивания при подбрасывании никак не влиял на вероятность конкретного исхода. Но очевидно же, что это невозможно! Монетка представляет собой *механическую систему* и подчиняется законам механики, а они не содержат в себе случайных величин. Будущее в законах движения такого простого тела как монетка однозначно определяется прошлым состоянием этого тела. Если монетку будет подбрасывать робот, или демон Лапласа — мифическое существо, обладающее полной информацией о координатах и скоростях любой механической системы, то при неизменных начальных данных будут получаться идентичные результаты. Более того, такому демону можно было бы заказать ту или иную сторону при сколь угодно хитром закручивании монеты. Когда я смотрю на выступления цирковых жонглёров, с невероятной ловкостью и точностью управляющихся с десятком разнообразных предметов, то приходит в голову мысль, что демоны Лапласа существуют и живут среди нас. Вот для кого, кажется, нет никакой случайности, ведь часто акробатические номера выполняются под куполом цирка или на весьма неустойчивой башне из всякой всячины. Случайность может обернуться трагедией, так что её необходимо исключить!

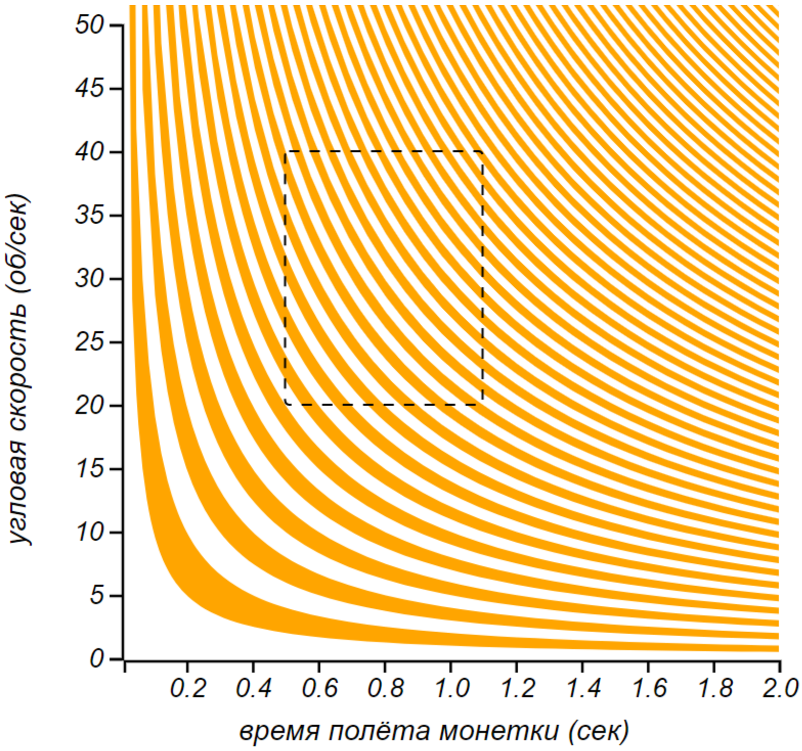
Мы с вами, конечно, не роботы и не демоны, а большинство из нас не умеют жонглировать и тремя апельсинами, но неужели люди подбрасывают монетки настолько неряшливо и непредсказуемо, что законы механики могут приводить к случайностям? Да, и откуда, вообще, берётся случайность в мире, описываемом законами механики? Существуют ли случайности? Многие знакомые мне люди, в том числе, искушенные в науке, уверены, что *настоящих* случайностей не бывает, есть нехватка информации, неточные расчёты, глубинное непонимание человеком механики физического мира, но как бы то ни было, «Бог не играет в кости с Вселенной». Эта фраза, неоднократно высказываемая Альбертом Эйнштейном, стала девизом механистичной картины мира, которая в XXI веке вынуждена уживаться с квантовой механикой, с неустранимой, как кажется, стохастичностью. Но в чём же состоит разница между истинно хаотическими или стохастическими системами, принципиально непредсказуемыми, и системами, в которых просто трудно угадать поведение, которое, всё же, можно рассчитать?

Начнём разбираться с простенькой монеткой и посмотрим, каким может быть источник неопределённости в эксперименте с подбрасыванием. Эта задача подробно рассматривалась в 1986 году Джозефом Келлером[1] и здесь мы приведём простое объяснение возникновению неопределённости в этом нехитром процессе, основанное на рассуждениях из его статьи. В самом первом приближении, то какой стороной упадёт монетка, зависит от времени её полёта t и от угловой скорости ω. Если измерять угловую скорость в оборотах за единицу времени, то число оборотов, совершаемое монеткой, выражается предельно просто $n = t\omega$. Эта зависимость задаёт линии равного числа оборотов в тах (t, ω), а они, в свою очередь, ограничивают области, соответствующие чётному и нечётному числу оборотов.

На такой диаграмме можно показать, каким будет результат подбрасывания монетки, закрученной на известное число оборотов в секунду, и пойманной через известное время подбрасывания. Если попадаем в белую полоску, то выпадет та же сторона, что была сверху при подбрасывании, если в оранжевую — обратная. Линии равного числа оборотов представляют собой гиперболы и видно, что по мере увеличения числа оборотов, чередование областей становится всё более и более частым, а сами области становятся тоньше. Человеческая рука несовершенна и очень небольшой разброс начальных значений перекрывает сразу много областей, делая исход непредсказуемым. В диапазоне действия руки (прямоугольник на диаграмме) достаточно смещения на 5% чтобы перескочить с белой полоски на оранжевую. Остаётся вопрос: а как из этого построения следует «честность» настоящей механической монеты? Как из полученной диаграммы получить вероятность выпадения орла или решки?

---

[1] J. B. Keller. (1986) The probability of heads, American Mathematical Monthly, 93:191-197.



Диаграмма, показывающая чётность количества оборотов, совершаемых монеткой в полёте. Прямоугольником показана область, в которой чаще всего происходит процесс гадания на монетке.

Срочно примите меру!

Окунёмся немного в такую математику, которую не проходят в школе. И хотя от такой математики ожидают чего-то сложного, сейчас она упростит наш взгляд и поможет лучше понять, о чём мы рассуждаем. Во введении говорилось, что математики изучают не числа или геометрические фигуры, как может показаться после изучения школьного курса, они работают с математическими структурами (абстрактными алгебрами, полукольцами, полями, моноидами, топологическими пространствами и прочей абстрактной всячиной), описывают их, как кажется, совершенно не привязываясь к практике, определяют их, изучают их свойства, доказывают теоремы. А потом оттачивают мастерство в поиске подобных структур в самых различных областях знаний, совершая удивительно полезные прорывы, в том числе, в чисто прикладных отраслях. Мы сейчас немного коснёмся такой математики и рассмотрим, как строится базис теории вероятностей, основанный на весьма абстрактном понятии меры.

Мы описали механику монетки и получили области, описывающие множества решений с определёнными свойствами. Области — это плоские фигуры, как правильно перейти от них к вероятностям? Нам нужно измерять наши области, и мы естественным образом приходим к их площади. Площадь — является *мерой* плоской фигуры. Это точный математический термин, обозначающий функцию, ставящую в соответствие множеству некую неотрицательную числовую величину. Примерами мер являются *количества* в перечислимых множествах (количество яблок в мешке, например), а также *длины*, *площади*, *объёмы фигур*.

В математике существует целый раздел, который называется *теорий мер*. Эта теория родилась на рубеже XIX — XX веков (у её истоков стояли Эмиль Борель и Анри Лебег) и открыла математикам широкие возможности для анализа очень сложно устроенных объектов: канторовых и фрактальных множеств. Она легла в основу функционального анализа и современной теории вероятностей. Определение вероятности, как меры, позволяет увидеть все основные свойства вероятности, как для дискретных, так и для непрерывных множеств.

Хотя наша книжка не учебник, но на этом стоит немного остановиться, чтобы взглянуть на понятия тории вероятностей как бы с «высоты птичьего полёта» и почувствовать вкус «большой» математики. Для начала, перечислим основные свойства *любых* мер. Для того, чтобы лучше себе их представить, можно использовать вместо слова «мера» слова «количество» или «длина» либо «площадь».

1. Мера пустого множества равна нулю.
2. Мера всего измеримого множества конечна для конечных мер.
3. Мера подмножества не превышает меры множества
4. Мера объединения двух произвольных множеств равна сумме мер этих множеств за вычетом меры их пересечения (аддитивность).
5. Мера дополнения подмножества равна разности мер всего множества и меры подмножества.

Всякая ли неотрицательная числовая функция может быть мерой? Вовсе нет. Например, возраст ставит человеку в соответствие вполне определённое число. Но возраст двух людей нельзя определить, как сумму их возрастов[2]. И скорость бега не является мерой — два человека бегут не в два раза быстрее. А вот импульс (количество движения) или энергия уже обладают свойствами меры. Вес, количество денег, объём знаний, громкость крика хоть и не всегда легко измеримые вещи, но тоже могут служить мерой на множестве людей.

На интуитивном уровне с понятием вероятности знакомы сейчас, практически, все. Её оценивают политологи и журналисты на ток-шоу, её обсуждают, говоря о глобальном потеплении или завтрашнем дожде, про неё рассказывают анекдоты: «*Какова вероятность встретить на Тверском проспекте динозавра? ,*

Широко распространено понимание определение вероятности, как частоты, с которой могут происходить события при многократных испытаниях или наблюдениях. Это представление согласуется с нашим повседневным опытом, но оставляет ряд сложных вопросов. Например, когда байесовский спам-фильтр выдаёт следующий результат: вероятность

2 Предположение о том, что возраст может бытьмерой приводит к таким парадоксам. Если кошке пять лет, то и правой половине кошки и её левой половине тоже по пять лет, по свойству аддитивности в сумме кошке должно быть уже десять лет. Подобное деление, впрочем, можно продолжить и достичь сколь угодно большого возраста. С другой стороны, аддитивность может привести и к противоположному результату, если учесть, что мера части не превосходит меры целого. Так кошкин хвост должен быть строго моложе самой кошки, а шерстинки на хвосте, соответственно, ещё моложе. Так мы приходим к выводу, что клетки, из которых состоит пятилетняя кошка должны были появится практически только что. Те же рассуждения относятся к таким измеримым величинам как температура, скорость, давление, которые при этом не являются мерами.

того, что сообщение «» является спамом состяавляет 82%, с какой частотой это можно связать? Если ли протестировать это сообщение несколько раз, ничего не изменится, если переставить слова в сообщении, то результат останется тем же, а при изменении текста сообщения мы переходим к другой задаче. О какой же вероятности идёт речь? Другой пример — сеймологи каждый год публикуют прогноз сейсмической опасности в виде вероятности сильного землетрясения в ближайшее время. Однако и здесь неясно можно ли дать частотное толкование такого прогноза. В главе, посвящённой пуассоновским процессам, мы разберёмся с этим примером, а сейчас дадим определение вероятности, данное замечательным русским математиком Андреем Николаевичем Колмогоровым в 30-е годы XX века. Оно, может показаться, менее интуитивым, но оно точное, более общее, чем частотное определение и применимо в очень широком спектре задач.

В современной математике понятие *вероятность* определяется, как мера на особом множестве, которое зовётся *вероятностным пространством*. Это пространство включает в себя как элементарные события, так и их комбинации, получаемые с помощью операций объединения, пересечения и исключения. Пример элементарного события: «выпадение тройки при бросании кости». Пример события, не являющегося элементарным: «выпадение любого чётного числа кроме двойки». Итак, перечислим свойства вероятности:

1. Вероятность невозможного события равна нулю.
2. Вероятность для всего вероятностного пространства равна единице.
3. Если одно событие влечёт за собой также и другое, то вероятность второго не превышает вероятности первого.[3]
4. Вероятность наступления хотя бы одного из двух произвольных событий равна сумме вероятностей каждого из этих событий, минус вероятность того, что события случатся одновременно.
5. Вероятность ненаступления события равна один минус вероятность наступления события.

Присмотритесь к свойствам мер и вероятностей, и станет видно, что мы говорим об одних и тех же свойствах. Дискретным случайным величинам соответствуют конечные счётные множества, в них естественной мерой является обыкновенный подсчёт количества элементов. Соответственно, вероятностью в дискретном вероятностном пространстве служит комбинаторный подсчёт вариантов, знакомый каждому студенту. Для непрерыв-

[3] Здесь отношение «влечёт за собой» для событий эквивалентно «является подмножеством» для множеств и не обязательно означает «является причиной». Грустный, но точный пример: смерть может наступить как следствие старости, болезни, несчастного случая и прочих событий. В утверждении: «старость влечёт за собой смерть», мы используем следующее отношение: событие «смерть» является объединением события «старость» и каких-то других событий: «болезни», «несчастного случая» и т.п. Таким образом, вероятность наступления события «смерть» не меньше вероятности каждой из перечисленных нами неприятностей.

ных случайных величин, вероятность, как мера, больше похожа на длину или на площадь и тут мы говорим о плотностях вероятности.

Аналогия вероятности с мерой на этом не заканчиваются. Что такое среднее значение? Это аналог положения центра масс фигуры, состоящей из точечных масс или сплошного тела с известной плотностью. И вычисляются эти величины одинаково. А как характеризуется разброс случайных величин вокруг среднего: дисперсия? Также как момент инерции характеризует распределение массы вокруг центра масс. И опять, формулы вычисления дисперсии для выборки или распределения совпадают с формулами для момента инерции набора тел или твёрдого тела хитрой формы.

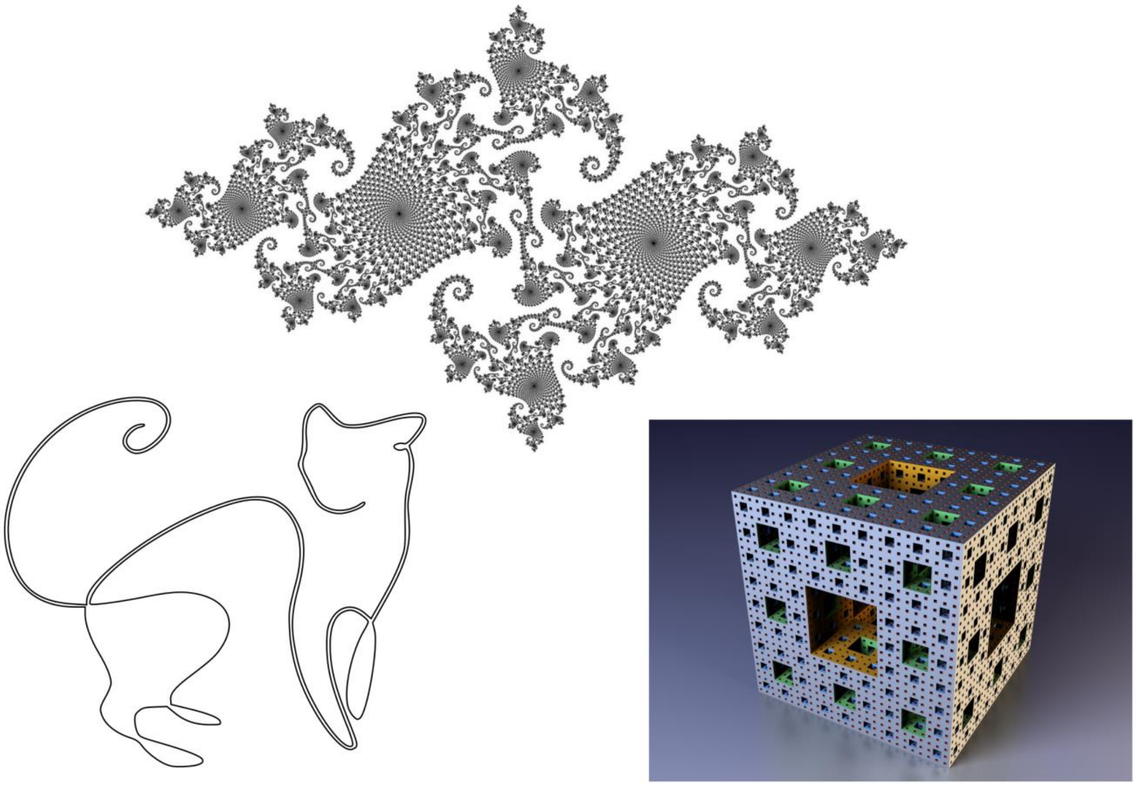
Если заменить в определениях и свойствах вероятности сумму на «максимум», а произведение на «минимум», то можно построить альтернативную теорию, она называется *теорией возможностей*. Так работает математика. Начинаем с абстрактных рассуждений: числа образуют алгебру с операциями сложения и умножения, но на ограниченном числовом интервале можно построить подобную алгебру с операциями минимум и максимум. Строим понятие меры на новой алгебре и выясняем, что она открывает новый взгляд на мир! В отличие от теории вероятностей в такой теории можно построить две согласованные меры — *возможность* и *необходимость*, причём они, в отличие от вероятности, хорошо согласуются как с операциями объединения, так и пересечения событий. Это направление созданное американцем Лотфи Заде, азербайджанцем по происхождению, служит основанием для *нечёткой логики* и используется в системах автоматического распознавания образов и принятия решений.

Не все свойства вероятности вытекают из её определения, как меры: понятия независимости событий и способ вычисления вероятности одновременно двух или нескольких независимых событий как произведения из вероятностей вводятся через *условную вероятность*, которая не вытекает из колмогоровского определения, но согласуются с ним. С условной вероятностью мы познакомимся через одну главу и там разберёмся, что же имеет в виду байесовский спам-фильтр, говоря нам о вероятности.

Невероятно, но факт!

Первое свойство мер кажется тривиальным, но оно интересно своей несимметричностью. Если мера подмножества равна нулю, то из этого не следует, что оно пусто! Например, линия — это очевидно непустое подмножество точек плоскости (и точек в ней бесконечно много), но её мера на плоскости, то есть, площадь, равна нулю. Бывают и более экзотичные примеры — канторовы и фрактальные множества, имеющие сложную структуру, также содержащие бесконечное число точек, зримо «занимающие» некоторую площадь или объём, но, тем не менее, имеющие нулевую меру.

С появлением вычислительной техники, множества с необычными свойствами сошли со страниц математических книг и журналов в область, понятную широкой публике. Понятную не тем, какая математика в них заложена, а своеобразной гармоничностью, красотой и завораживающей глубиной, которой обладают их визуализации. Треугольник Серпинского, множество Мандельброта и тесно связанные с ним множества Жулиа, как и многие другие математические объекты, стали визуальным символом века компьютерной графики, прежде недоступной человеку.



Некоторые красивые объекты нулевой меры: линия на плоскости, спорадическое множество Жулиа, фрактальная губка Менгера в трёхмерном пространстве.

Готовя эту иллюстрацию, я отыскал замечательное изображение несвязного множества Жулиа на прозрачном фоне с высоким разрешением. Вставив его в векторный редактор, я столкнулся с забавной трудностью — было очень нелегко попасть курсором в это изображение, чтобы выделить его. Это изображение такое «рыхлое», что вероятность попадания в закрашенный точку на экране, была заметно меньше попадания в прозрачный фон. В вероятностном пространстве тоже могут существовать подмножества нулевой меры, но это не означает, что события из этих подмножеств невозможны. С четвёртой-пятой попытки я всё же мог выделить изображение, поскольку элементы растра на экране имеют конечный размер. Но что было бы, попади в моё распоряжение настоящее несвязное множество Жулиа с бесконечным разрешением?

Представьте себе, что вы пользуетесь программным генератором случайных чисел, который выдаёт произвольное вещественное число от 0 до 1. Какова вероятность выпадения числа 0? а числа $1/2$ или e/π? Во всех этих случаях ответ будет — ноль! Вернее, самое маленькое доступное компьютеру положительное число, так называемый машинный эпсилон, ведь компьютер оперирует конечным числом знаков после запятой. Подождите, скажете вы, в каком смысле — ноль? Эти же числа не являются невозможными. Давайте проведём эксперимент, в результате мы получим какое-то конкретное число, и когда мы его получим, то «по построению» вероятность его появления не может быть нулевой. Всё верно, но сколько нужно ждать до тех пор, пока не выпадет ровно 0? Практически бесконечно! Дело в том, что отдельное число, как точка на отрезке, имеет нулевую меру и честную нулевую вероятность. Отлична от нуля лишь мера сплошного отрезка, пусть даже очень маленького. Так что мы говорим не о вероятности, а о плотности вероятности, которая при умножении на конечную меру подмножества в вероятностном пространстве, даст конечную величину — вероятность попасть в это подмножество.

Любопытно, но окажись у нас идеальный генератор случайных чисел с бесконечной точностью, вероятность получить с его помощью какое-либо рациональное число (не какое-то конкретное, а вообще любое) тоже будет равна нулю. Множество рациональных чисел не просто бесконечно, оно *всюду плотно*, это значит, что в любой сколь угодно малой окрестности выбранной рациональной точки можно обнаруживать новые и новые рациональные точки. Если мы захотим изобразить это множество графически на числовой оси, то можем смело зарисовывать сплошной прямой всю ось. Однако это множество имеет нулевую меру на множестве всех вещественных чисел! Доказательство того, что рациональные числа образуют плотное подмножество нулевой меры множества вещественных чисел наделало шума в конце XIX века. Если бы пифагорейцам удалось заглянуть в науку будущего, они пришли бы в недоумение, обнаружив, что верные и понятные рациональные числа, как им казалось, единственно возможные, числа, на которых строилась вся их математика, практически не встречаются в природе! Вот уж точно — закон подлости! Среди всех фундаментальных физических констант нет «фундаментально» рациональных чисел. Ряд из них, такие как скорость света, постоянные Планка и Больцмана, а с 2019 года и ... были приняты рациональными или целыми по соглашению. Просто единицы измерения подобраны таким образом, чтобы фиксировать количество значимых цифр в этих константах. Поэтому в таблицах такие величины указаны «точно», но эта точность, в известном смысле, искусственная.

Если кто-то терпеливо проведёт тысячу экспериментов с монеткой и радостно скажет вам, что у него получилось столько же выпадений «орлов», сколько и «решек», можете смело выразить сомнение, либо поздравить его с редкой удачей. Хоть бросание монетки и дискретный случайный процесс, но по мере накопления статистики мощность вероятностного пространства будет расти и мера события: «*число „орлов“ совпадает с числом „решек“*» будет уменьшаться. Можно показать, воспользовавшись формулой Стирлинга, что вероятность этого «самого вероятного» события стремится с ростом числа испытаний к нулю как $1/(\pi n)$. Для сотни бросаний это чуть больше пяти процентов, для десяти тысяч — всего полпроцента. В таких случаях математики говорят: *почти наверняка количество «орлов» не будет равно количеству «решек»*. Как бы странно он не звучал, но «почти наверняка» — это точный математический термин, означающий, что событие является дополнением подмножества вероятностного пространства нулевой меры. Мы ещё вернёмся к этим рассуждениям, в одной из следующих глав, когда зададимся вопросом: насколько каждый из нас может считать себя нормальным.

Проверяем честность реальной монеты

Вернёмся к монетке и к её честности. Колмогоровское определение вероятности дополнило её частотное определение (как относительной частоты случающихся событий, дающее не полное представление о вероятности) и свело его к геометрическому (как к доле «объёма» события в общем «объёме» возможностей). Таким образом, доля площади белых полосок на диаграмме, рассчитанной для вращающейся монетки, отражает вероятность выпадения той же стороны, которой мы её подкинули.

Но вот беда! Площадь каждой полоски на нашей диаграмме бесконечна, если добросовестно рассматривать всю четверть координатной плоскости. Однако аддитивное свойство меры позволит нам аккуратно показать, что это не мешает площадям заштрихованных и белых областей быть одинаковыми. В явном виде уравнения для наших кривых имеют вид $\omega = n/t$. Если площадь под кривой $\omega = 1/t$ равна S, то благодаря свойству аддитивности, площадь под кривой $\omega = n/t$ будет равна $S_n = nS$. В свою очередь, для отдельных полосок получаем: $S_n - S_{n-1} = nS - (n-1)S = S$, а это значит, что разница площадей не зависит от «номера» гиперболы. Это не что-то особенное, относящееся к гиперболам, тот же вывод можно сделать для любой кривой вида $y = nf(x)$, лишь бы функция f была измерима. А раз так, для всей области определения попадания в белую часть диаграммы или в заштрихованную равновероятны, как и ожидается для «честной» монетки.

Рассуждения, которые мы сейчас привели, кажутся достаточно простыми, но они дают весьма общий результат, применимый к любым аддитивным величинам. Абстрактное понятие меры позволило нам сравнивать между собой бесконечные величины, оставаясь в рамках логики и здравого смысла.

Абстракции это хорошо, но можно возразить, что в реальности мы подбрасываем монетки не со всеми возможными параметрами. Как показали эксперименты со скоростной камерой, угловые скорости попадают в диапазон от 20 до 40 оборотов в секунду, а длительность полёта — от половины до одной секунды. Эта область выделена прямоугольником на диаграмме. В этой области суммарная площадь белых полосок чуть больше чем оранжевых, и можно сделать вывод, что вероятность выпадения той же стороны, что была при подбрасывании, составит 50.6%.

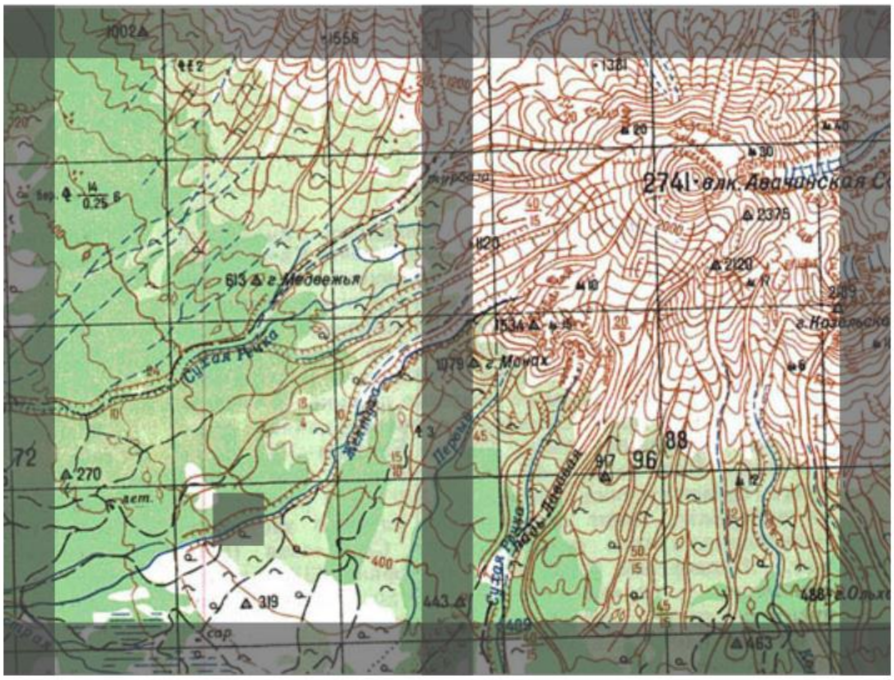
В 2007 году группа Перси Диакониса с соавторами из Стэнфорда опубликовала статью, в которой даётся развёрнутый анализ процесса подбрасывания монетки. Детальное описание механики летящего и вращающегося диска, который, не просто вращается, а ещё и прецессирует (ось вращения сама вращается в полёте), показывает, что при ручном подбрасывании из позиции «орел сверху», вероятность выпадения «орла» на одну сотую больше половины. К смыслу этого результата мы ещё вернёмся.

Закон туриста

Эквивалентность геометрического и частотного определения вероятности раскрывает загадку одного закона подлости, известного в кругу туристов, геологов и всех тех, что пользуется топографическими картами:

То место, куда направляется турист, чаще всего оказывается либо на сгибе карты, либо на краю листа.

Предположим, что нас одинаково часто интересуют объекты, расположенные во всех участках карты. Но нам редко нужны объекты нулевой меры — весь смысл использования карты состоит в обозрении *окрестностей* объекта, то есть, некоторой конечной площади. Пусть нам достаточно будет некоторой малой доли α от площади всей карты S, чтобы разобраться в том, как попасть к объекту. Если объект приблизится к сгибу или краю на какое-то критическое расстояние d, мы сочтём закон туриста выполнившимся. Доля пограничных площадей в общем площади карты даст нам вероятность испытать этот закон подлости на себе. Вот как выглядят неприятные участки карты при $\alpha = 0.5\%$ и одном сгибе.

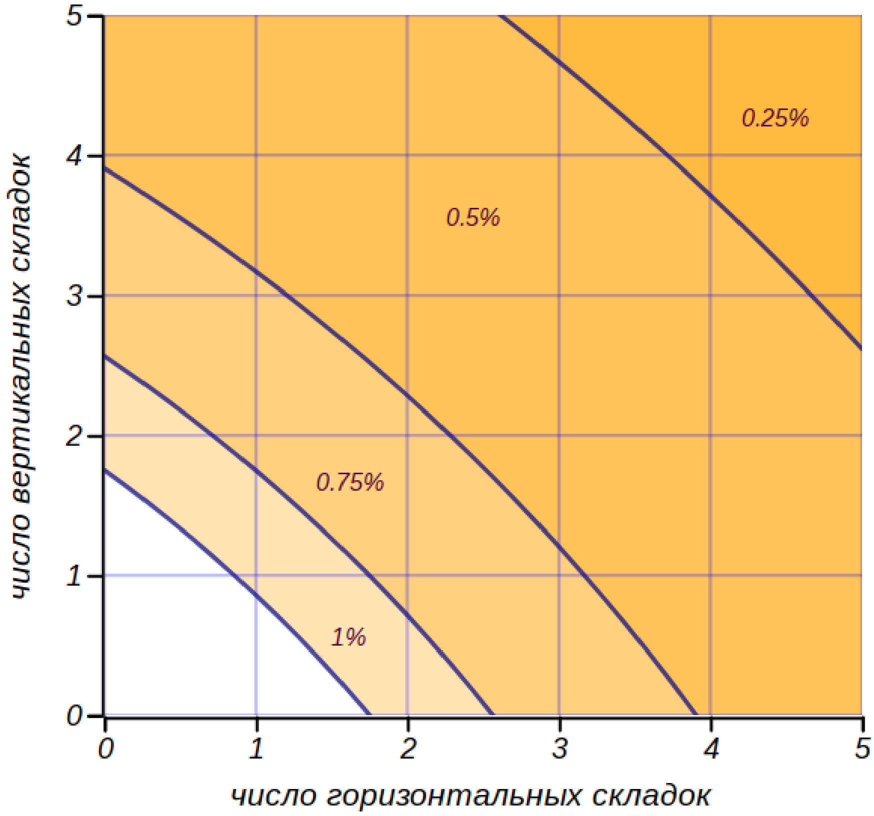


Серым выделены «нехорошие» участки. Отдельно показан участок с полупроцентной площадью для карты шириной в 40 см, она имеет размер, слегка превышающий 3 см.

Для квадратной карты $d = \sqrt{\alpha S}$. Неприятные полоски будут иметь площадь $d\sqrt{S} = S\sqrt{\alpha}$. Четыре полосы, две вертикальные и две горизонтальные, расположатся у края, любой дополнительный изгиб, горизонтальный или вертикальный, добавит ещё одну полоску. А теперь воспользуемся свойством аддитивности мер и вычислим меру объединения всех полосок, как сумму их площадей за вычетом площади пересечений, заметив, что пересекающиеся полоски формируют квадратики площадью $d^2 = \alpha S$. Сложив карту так, чтобы получилось n горизонтальных и m вертикальных изгибов, мы получим суммарную площадь неприятной зоны равную: $(n+2)\sqrt{\alpha}S + (m+2)\sqrt{\alpha}S - (n+2)(m+2)\alpha S$. Отнеся её к площади всей карты, получим неприятную долю общей площади, или вероятность оказаться в этой доле при случайном выборе:

$$p = (n+m+4)\sqrt{\alpha} - (n+2)(m+2)\alpha.$$

На рисунке показаны области, в которых эта доля превышает 50% для различных значений α.

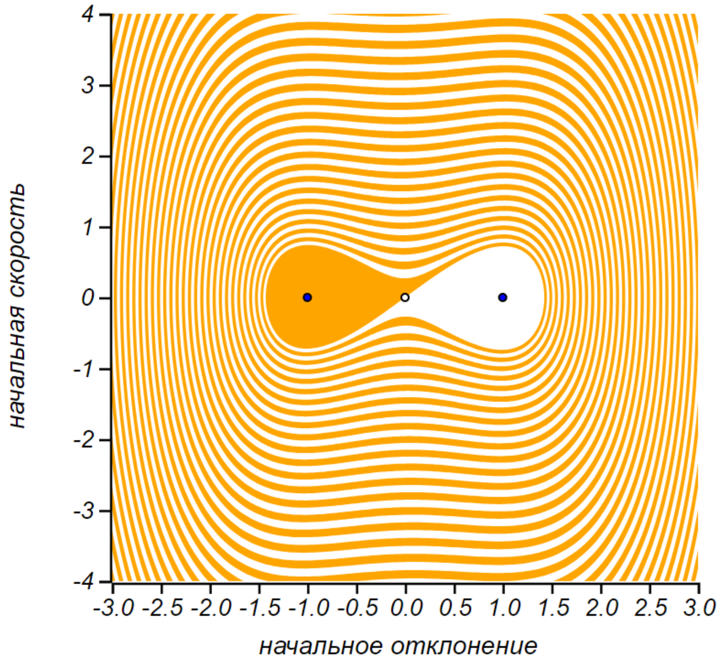


Области, в которых повышена вероятность оказаться на сгибе карты или на её краю. Числами отмечена доля площади рассматриваемой окрестности от площади всей карты.

Получается, что карта, сложенная пополам дважды уже может формально считаться нечестной по отношению к туристу. Чаще всего, карты имеют по три вертикальные и три горизонтальные складки, что даёт вероятность выполнения закона подлости с вероятностью около 60% при $\alpha = 0.5\%$.

Откуда же берётся случайность?

В сувенирных лавках можно найти магнитные маятники для «выбора желаний». Они тоже являются механическими генераторами случайности и их иногда ошибочно называют «хаотическими маятниками». Начав движение с каких-то начальных позиции и скорости, маятник совершает ряд «непредсказуемых» колебаний и, наконец, останавливается в одном из секторов. Однако колебания и здесь не являются непредсказуемыми, просто они очень чувствительны к начальным условиям. Для каждого сектора, в котором может остановиться маятник, существует *область притяжения* в пространстве координат-скорости. Это множество таких начальных условий, при которых маятник обязательно притянется к определённой точке в указанном секторе. Точка остановки маятника называется *аттрактором* — притягивающей точкой. В случае маятника с картинки пространство координат и скоростей четырёхмерно, и так просто области притяжения не показать. Но если ограничиться лишь двумя секторами и свести задачу к одномерной (такой маятник называется *осциллятором Дюффинга*), то пространство начальных значений превратится в плоскость, так что области притяжения можно будет увидеть. Они выглядят как замысловатый символ «Инь-Янь», быстро превращающийся в узкие полоски, разделяющие области притяжения.



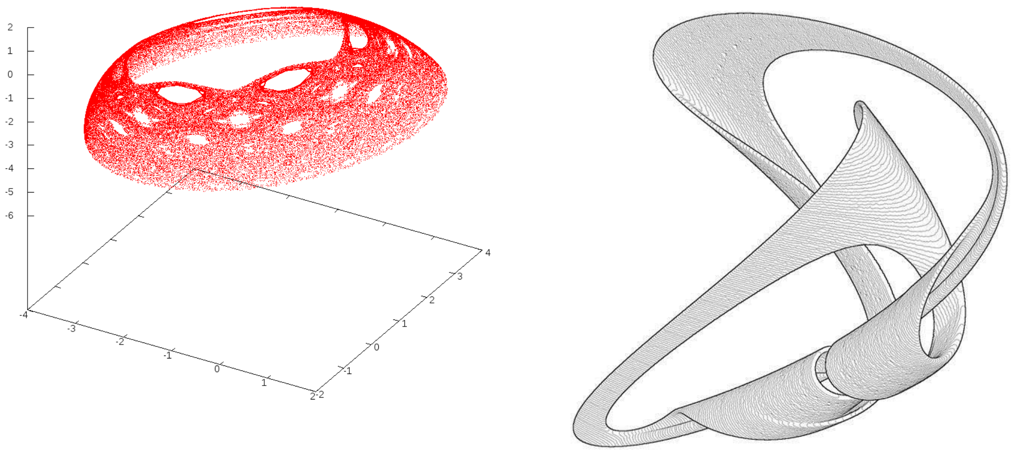
Области притяжения аттракторов для одномерного маятника желаний — осциллятора Дюффинга.

Как и в случае с монетой, немного смещая начальные условия, мы попадаем от одного аттрактора к другому. Так же действует и игральная кость и рулетка, но они не являются сами по себе генераторами случайности. Это не истинно хаотические системы и их поведение можно точно рассчитать.

А что же такое настоящая случайность? Хороший пример истинно стохастической системы — появление автомобилей на дороге. Люди не договариваются, не согласовывают свои планы, каждый элемент ансамбля за пределами дороги действует независимо. И хотя в поведении людей есть определённые закономерности — часы пик утром и вечером, пустые дороги ночью и т.д., мы не обладаем, и никогда не будем обладать достаточной информацией о каждом участнике движения, чтобы предсказать появление любого из них. Также стохастическими являются механика элементарных частиц на квантовом уровне, распад нестабильных атомов, изменения в генетическом коде, по всей видимости, землетрясения и котировки ценных бумаг на бирже. Единственное, что остаётся исследователю, это рассматривать их, как случайные величины и описывать в терминах теории вероятности.

Но есть и другой источник случайностей — *динамический хаос*. Хаотические системы отличаются от стохастических тем, что описываются точными уравнениями и параметрами, не содержащими случайностей. Однако их поведение не просто сложно, а хаотично и истинно непредсказуемо. Если мы начнём колебать маятник желаний, очень аккуратно, с точно контролируемой частотой и амплитудой, то мы обнаружим, что его плавные движения невозможно просчитать надолго. Никакими алгоритмами на сколь угодно точных вычислительных машинах нам не удастся рассчитать точное поведение маятника на произвольно далёкое будущее. Он не остановится на каком-либо секторе, а будет совершать плавные движения, но никогда не вернётся в одну и ту же точку в пространстве координат-скорости дважды. Ещё один пример предельно простой хаотической системы — идеальный шарик, подпрыгивающий в поле тяжести на идеальном столике с пружинкой. Сравнительно простые уравнения Лоренца показали, что мы никогда не сможем предсказывать погоду больше чем на пару-тройку недель — это тоже хаотическая система.

В XX веке теории динамического хаоса, удалось объяснить природу такой непредсказуемости. Простой одномерный маятник желаний, который мы рассматривали, имел две устойчивые стационарные точки — два аттрактора, и одну неустойчивую, от которой система старается уйти, она показана белым кружком. В хаотическом режиме вместо набора аттракторов в системе появляется бесконечное множество неустойчивых стационарных траекторий. Это множество бесконечно, но имеет нулевую меру, и представляет собой очень сложно устроенную несвязную структуру. Попав на одну таких траекторий, в принципе невозможно ей следовать, используя какие-либо конечные алгоритмы. Но самое удивительное, оказалось, что это бесконечное множество неустойчивых траекторий само по себе является притягивающим! Хаотическая система непрерывно перескакивает от окрестности одной неустойчивой траектории к другой, всё время оставаясь в пределах это странного аттрактора. Так эти множества и называются: *странные аттракторы*. Вот как завораживающе красиво выглядит сечение плоскостью странного аттрактора для маятника желаний, подверженного гармоническим колебаниям. Этот объект для одномерного маятника можно описать в трёхмерном пространстве (координата, скорость, фаза вынужденного колебания). Если рассечь аттрактор в этом пространстве плоскостью то можно увидеть его структуру, это называется *сечением Пуанкаре*. Каждая точка здесь — это след траектории, а цвет точек отражает относительную скорость с которой траектории разбегаются друг от друга. Вот ещё пара красивых странных аттракторов:



Слева: сечение Пуанкаре для траектории шарика, подпрыгивающего на подпружиненном столике. Множество точек принадлежит поверхности сферы, соответствующей закону сохранения энергии. Справа: объемная область, которая заключает в себе странный аттрактор, рождающийся при вынужденных колебаниях толстой пластины.

Гладкость хаотической траектории позволяет всё же немного заглядывать в будущее. Это объясняет одно досадное наблюдение: с одной стороны, синоптики, порой, не могут уверенно предсказать погоду на неделю, но с другой, если вы скажете, что завтра будет такая же погода, как и сегодня, то не ошибётесь примерно в трёх случаях из четырёх. Вообще же, анекдоты о синоптиках несправедливы и нужно отдать должное человеческой мысли и упорству, которые позволили предсказывать погоду на современном уровне!

Динамический хаос очень сложен и красив как теория, он порождает изумительные по элегантности образы, но он может быть ещё и полезен. Например, алгоритмы, с помощью которых генерируются случайные числа в компьютерах тоже детерминированы. Для примеров в этой книге, я пользовался генератором псевдослучайных чисел, который не запускал реальный стохастический процесс (альфа-распад, или подсчёт машин на дороге), а вычислял следующее «случайное» число на базе предыдущих, полученных им ранее.

От монеток к бабочкам и самой судьбе

Наблюдения за тем, как малые отклонения вырастают в глобальные изменения системы, приводят к мысли об «эффекте бабочки». Напомню, что под этим эффектом подразумевается цепочка далеко идущих драматичных последствий от некоторого незначительного, на первый взгляд, события. Раздавленная исследователями прошлого бабочка в рассказе Рея Бредбери «И грянул гром» привела к кардинальной перестройке будущего. А одну из своих лекций Эдвард Лоренц, создатель теории динамического хаоса, озаглавил так: *«Может ли взмах крыла бабочки в Бразилии вызвать торнадо в Техасе?»*

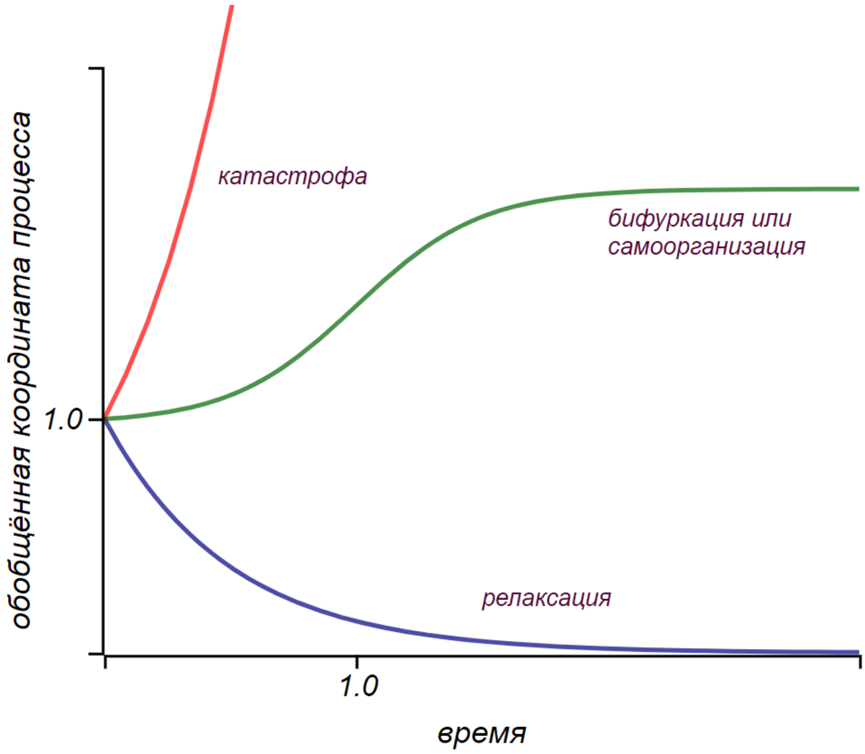
На этот эффект мы неявно ссылаемся, сетуя: *«Не поверни я за угол, всё было бы по-другому!»*, *«Не сел бы он в этот поезд, с ним не случилось бы катастрофы!»* или *«Из-за такой мелочи разругались и разошлись!»* Но мы видим, что в мире сосуществуют истинно стохастический квантовый мир и сверхточные атомные часы, устойчивые гамильтоновы системы в мире звёзд и галактик и хаос колец Сатурна или пояса Койпера, тепловое движения молекул и удивительная точность работы биологических систем или механизмов автомобиля. Нет, взмах крыла бабочки не порождает ураганов, а бесследно исчезает, порождая цепочку вихрей, передающих энергию и информацию всё более и более мелким вихрям, покуда и энергия и информация не исчезнут в хаосе флуктуаций. Надо чётко понимать, что малые отклонения приводят к кардинальной перестройке системы лишь, если она неустойчива или если система находится на пороге *бифуркации* или *катастрофы* — так на языке математики называются глобальные перестройки в поведении системы при малых изменениях параметров. А бифуркации всегда образуют множества нулевой меры в пространстве параметров — это точки или границы. Малые возмущения не приводят к катастрофам *почти всюду*, (это тоже точный термин означающий «везде, кроме множества нулевой меры»), а неустойчивые состояния в природе наблюдаются редко, не проходя «проверку временем».

Если пара распалась «из-за ерунды», ей суждено было распасться в любом случае, она была неустойчивой. Устойчивые пары проходят сквозь войны и голод, а потом, бывает и, распадаются, но не из-за мелочей, а в результате глубоких перемен, могущих произойти с личностью в течение жизни. В цепочке событий, приведших к катастрофе поезда нелегко однозначно выделить ключевое событие (конкретную ошибку или роковую случайность) и, скорее всего, ключевым будет не событие, а систематическое нарушение правил, приводящее систему к неустойчивому состоянию. Если в системе множество параметров, и ряд из них случаен, а наша жизнь устроена именно так, то информация в такой системе имеет свойство теряться, и уже никак не удастся восстановить в какой именно момент в нашей жизни «всё пошло не так». Не терзайте себя сожалениями о случившемся, а присмотритесь к происходящему с вами сейчас, чтобы не пропустить настоящей точки бифуркации.

В этой связи можно вспомнить один из законов мерфологии, названный неким Дрейзеном **законом восстановления**:

Время улучшения ситуации
обратно пропорционально времени ее ухудшения.

В качестве примера приводится следующее наблюдение: *На склеивание вазы уходит больше времени, чем на то, чтобы ее разбить.* Этот закон удивительно точно описывает соотношение между характерными скоростями для процесса *релаксации* устойчивой системы, которую можно описать убывающим экспоненциальным законом $e^{-\lambda t}$ и скоростью развития *катастрофического* процесса в неустойчивой системе, в линейном приближении — экспоненциального роста малого возмущения $e^{\lambda t}$. Эти скорости, действительно, обратно пропорциональны друг другу. Пример с вазой, правда, не является релаксацией, то есть, переходу к наиболее вероятному состоянию. Он ближе к другому процессу, к *самоорганизации*, этот процесс, в первом приближении, описывается *логистическим* законом и ближе по скорости к релаксации, чем к катастрофе.



Типичные нестационарные процессы: катастрофа, релаксация и самоорганизация, имеющие одинаковое характерное время.

***

Иногда, гуляя в снегопад, я удивляюсь тому, что снежинка падает мне на нос. Удивляюсь оттого, что вероятность этого события была ничтожно мала. Если рассудить, она родилась высоко в небе над Тихим океаном, кружилась в беспорядочных турбулентных потоках в облаке, падала, непрерывно меняя направление движения… чтобы попасть на кончик моего носа! А какой ошеломительный путь прошли фотоны от далёкой звезды!? Десятки тысяч лет они неслись сквозь Вселенную, их не поглотила пыль, им не встретился астероид! Родились они в квантовом мире далёкой звезды, а закончили свой путь в квантовом мире белка опсина на сетчатке в моём глазу. Даже считать вероятность этого события нет смысла, она равна нулю, но событие случается, и я вижу мерцающий свет звезды. Теперь понятно, что это всё потому, что площадь моего носа и даже молекулы имеют ненулевую меру, но всё равно удивительно: то, что почти наверняка не должно было произойти, всё же происходит!

О предопределённости или случайности судьбы, об истинности или призрачности нашего знания о природе пусть спорят философы. Я же призываю читателя взглянуть на мир с высоты математических абстракций и восхититься его красотой и согласованностью.