ESERCIZI DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ
Prof. P.Dai Pra

1 Catene di Markov

Esercizio 1.1 Sia P la matrice di transizione di una catena di Markov su un insieme finito S, tale che, per ogni $y \in S$

$$\sum_{x \in S} p_{xy} = 1.$$

Mostrare che la misura uniforme su S è una misura invariante.

Soluzione. Basta osservare che, se $\pi(x) \equiv 1/|S|$, allora

$$\pi = \pi P$$

equivale a

$$\sum_{x \in S} p_{xy} = 1.$$

per ogni $y \in S$.

Esercizio 1.2 Decomporre in classi irriducibili e classificare gli stati delle catene di Markov con matrici di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 2/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soluzione. Per la prima matrice le classi irriducibili sono $\{1, 2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, tutte di periodo uno, la prima e la terza ricorrenti, la seconda transitiva.

La catena di Markov associata alla seconda matrice è irriducibile, e di periodo 2.

Esercizio 1.3 Discutere l'ergodicità e l'esistenza di distribuzioni limite per le catene di Markov dell'esercizio precedente, e determinare tutte le distribuzioni stazionarie.

Soluzione. Per la prima matrice vi sono due classi ricorrenti, quindi esistono infinite distribuzioni stazionarie, che sono

$$\{(3a/7, 4a/7, 0, 1-a) : a \in [0, 1]\}.$$

Per la seconda matrice vi è un'unica distribuzione stazionaria, essendovi un'unica classe, ma essa non è distribuzione limite in quanto la catena non è aperiodica. L'unica distribuzione stazionaria è

$$(3/8, 3/16, 5/16, 1/8).$$

Esercizio 1.4 Si classifichino gli stati e si determinino tutte le distribuzioni stazionarie per le catene di Markov con matrice di transizione

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluzioni.

Prima matrice. Classi: $\{1,3,6\}$ ricorrente di periodo 3. $\{2,4\}$ ricorrente di periodo 1. $\{5\}$ transitiva, periodo 0. Distribuzioni stazionarie

$$\{(a/3, 2(1-a)/3, a/3, (1-a)/3, 0, a/3) : a \in [0,1]\}.$$

Seconda matrice. Classi: $\{1,2\}$ ricorrente, aperiodica. $\{4\}$ ricorrente, aperiodica. $\{3\}$ transitiva, periodo 0. Distribuzioni stazionarie

$$\{(a/3, 2a/3, 0, 1-a) : a \in [0,1]\}.$$

Esercizio 1.5 Si consideri la matrice

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1/2 & 1/2-a \\ b & 0 & 0 & 1-b \end{pmatrix}$$

a) Determinare i valori di a e b per cui tale matrice e' la matrice di transizione di una catena di Markov.

b) Determinare i valori di a e b per cui la catena di Markov associata a tale matrice ha piu' di una distribuzione stazionaria.

Soluzioni.

a. $a \in [0, 1/2]$, $b \in [0,1]$.

b. La catena di Markov associata a tale matrice ha piu' di una distribuzione stazionaria se e solo se $b = 0$, poichè solo in tal caso vi sono due classi ricorrenti.

Esercizio 1.6 Sia P la matrice di transizione di una catena di Markov su S, e π una probabilità su S tale che, per ogni $x, y \in S$ si ha

$$\pi(y)p_{yx} = \pi(x)p_{xy},$$

detta *equazione del bilancio dettagliato.*

a. Mostrare che π è una distribuzione stazionaria.

b. Supponiamo che X_0 abbia distribuzione π, sicchè X_n ha distribuzione π per ogni n. Mostrare che l'equazione del bilancio dettagliato equivale all'affermazione

$$P(X_{n+1} = x | X_n = y) = P(X_n = x | X_{n+1} = y)$$

per ogni x, y per cui $\pi(y) > 0$ (si dice che la catena di Markov è *reversibile* rispetto a π).

Soluzione.

a. Sommando su x

$$\pi(y)p_{yx} = \pi(x)p_{xy},$$

si ottiene proprio $\pi = \pi P$.

b. Basta osservare che, per la Formula di Bayes

$$P(X_n = x | X_{n+1} = y) = \frac{P(X_{n+1} = x | X_n = y)P(X_n = y)}{P(X_{n+1} = x)} = \frac{p_{yx}\pi(y)}{\pi(x)}.$$

Esercizio 1.7 Si consideri la catena di Markov su $S = \{0, 1, \ldots, m\}$ tale che, per ogni $i \in S$, $p_{i,i+1} = 1 - \frac{i}{m}$, $p_{i,i-1} = \frac{i}{m}$ e $p_{ij} = 0$ altrimenti (modello di diffuzione di Ehrenfest). Determinare una probabilità π che soddisfi all'equazione del bilancio dettagliato.

Soluzione. Dev'essere

$$\pi(i)p_{i,i+1} = \pi(i+1)p_{i+1,i},$$

cioè

$$\pi(i+1) = \frac{1 - \frac{i}{m}}{\frac{i+1}{m}}\pi(i) = \frac{m-i}{i+1}\pi(i). \tag{1}$$

Notare che (1) è una formula ricorsiva dalla quale, per induzione, si ricava

$$\pi(i) = \binom{m}{i}\pi(0).$$

Dovendo essere

$$\sum_{i=0}^{m} \pi(i) = 1,$$

è facile vedere che, necessariamente

$$\pi(i) = \frac{1}{2^m}\binom{m}{i}.$$

Esercizio 1.8 Sia $m > 0$ e $S = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, ossia l'insieme $\{0, \ldots, m-1\}$ in cui la somma è intesa modulo m. Si consideri la catena di Markov su S tale che, per ogni $i \in S$, $p_{i,i} = 1/2$, $p_{i,i+1} = p/2$, $p_{i,i-1} = (1-p)/2$, e $p_{ij} = 0$ altrimenti, dove $p \in (0, 1)$.

a. Mostrare che la catena è irriducibile e aperiodica.

b. Trovare l'unica misura invariante π.

c. Per quali valori di p π soddisfa all'equazione del bilancio dettagliato?

Soluzione.

a. Facile.

b. La matrice P soddisfa la condizione dell'esercizio 1.1, per cui l'unica misira stazionaria è quella uniforme.

c. Essendo $\pi(i)$ costante, l'equazione del bilancio dettagliato si riduce a

$$p_{ij} = p_{ji}$$

per ogni i, j, che è verificata se e solo se $p = 1/2$.

Esercizio 1.9 Si consideri la catena di Markov su $S = \mathbb{N}$ tale che $p_{i,i+1} = a_i$, $p_{i,0} = 1 - a_i$, $p_{ij} = 0$ altrimenti, dove $\{a_i : i \geq 0\}$ è una successione in $(0, 1)$. Si definisca $b_0 = 1$ e, per $n > 0$, $b_n = a_0 \cdots a_{n-1}$.

a. Mostrare che la catena è irriducibile e aperiodica.

b. Calcolare $f_{00}^{(k)}$, per $k \geq 1$, in termini dei b_i.

c. Mostrare che 0, e quindi ogni altro stato, è ricorrente se e solo se

$$\lim_{n \to +\infty} b_n = 0.$$

d.* Mostrare che 0, e quindi ogni altro stato, è ricorrente positivo se e solo se

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n < +\infty.$$

Supponiamo ora di scegliere

$$a_i = 1 - Ai^{-\beta}$$

per i sufficientemente grande, dove $\beta > 0$.

e.* Mostrare che se $\beta > 1$ 0 è transiente, e se $\beta < 1$ 0 è ricorrente. Sugg.: usare c. e il fatto che

$$\prod_{i=1}^{n} (1 - Ai^{-\beta}) = \exp\left[\sum_{i=1}^{n} \log(1 - Ai^{-\beta})\right].$$

f.** Mostrare che se $\beta < 1$ allora 0 è ricorrente positivo.

g.** Mostrare che se $\beta = 1$ allora 0 è ricorrente positivo se $A > 1$ ed è ricorrente nullo se $A \leq 1$.

Soluzione.

a. Facile

b.

$$f_{00}^{(k)} = a_0 a_1 \cdots a_{k-2}(1 - a_{k-1}) = b_{k-1} - b_k.$$

c. Segue da b. che

$$sum_{k=1}^{n} f_{00}^{(k)} = 1 - b_n,$$

da cui la conclusione segue facilmente.

d. Sotto la condizione in c., vale l'identità

$$b_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (b_{k-1} - b_k) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_{00}^{(k)}.$$

Allora, per il Teorema di Tonelli:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_{00}^{(k)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{k} f_{00}^{(k)} = \sum_{k=1}^{+\infty} k f_{00}^{(k)}$$

da cui segue la conclusione.

e. Da c. si ha che 0 è ricorrente se e solo se la serie (a termini negativi)

$$\sum_i \log(1 - Ai^{-\beta})$$

diverge. Tale serie ha lo stesso carattere della serie

$$\sum_i i^{-\beta},$$

da cui si vede che 0 è ricorrente se e solo se $\beta \leq 1$.

f. e g. Sia m tale che

$$a_i = 1 - Ai^{-\beta}$$

per $i \geq m$, e sia

$$C = a_0 \cdots a_{m-1}.$$

Allora, per $n > m$

$$b_n = C \prod_{k=m}^{n-1} (1 - Ai^{-\beta}) = C \exp\left[\sum_{k=m}^{n-1} \log(1 - Ai^{-\beta})\right]$$

Dalla serie di Taylor a segni alterni della funzione $\log(1-x)$ si ha che

$$-Ai^{-\beta} \leq \log(1 - Ai^{-\beta}) \leq -Ai^{-\beta} + \frac{1}{2}A^2 i^{-2\beta}. \tag{2}$$

Ricordando la dimostrazione del criterio dell'integrale per serie, se $\alpha > 0$ si ha

$$\sum_{i=m}^{n-1} i^{-\alpha} = \int_m^n x^{-\alpha} dx + O(1) = n^{1-\alpha} + O(1)$$

se $\alpha \neq 1$, e

$$\sum_{i=m}^{n-1} i^{-1} = \int_m^n x^{-1} dx + O(1) = \log n + O(1).$$

Perciò

$$C \exp\left[-An^{1-\beta} + O(1)\right] \leq b_n \leq C \exp\left[-An^{1-\beta} + \frac{1}{2}A^2 n^{1-2\beta} + O(1)\right]$$

se $\beta \neq 1$, e

$$C \exp\left[-A \log n + O(1)\right] \leq b_n \leq C \exp\left[-A \log n + \frac{1}{2}A^2 n^{-1} + O(1)\right].$$

Il criterio in d. permettere allora di concludere usando argomenti standard sulle serie.

Esercizio 1.10 Sia $\{X_n\}_{n\geq 0}$ una successione di variabili casuali i.i.d., con $X_n \sim Be(p)$, dove $p \in (0,1)$. Si ponga $Y_n = (X_n, X_{n+1})$. Notare che $Y_n \in E = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$.

a. Mostrare che $\{Y_n\}$ è una catena di Markov con matrice di transizione

$$\begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & p \\ 1-p & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & p \end{pmatrix}$$

dove gli stati sono presi nell'ordine di cui sopra.

b. Mostrare che tale catena di Markov ammette distribuzione limite, e calcolarla.

c. Sia $T = \min\{n \geq 1 : Y_n = (0,0)\}$. Determinare $E(T|Y_0 = (0,0))$.

Soluzione. a. Dall'indipendenza delle X_n si ha che

$$\begin{aligned} P(Y_{n+1} = (i,j)|Y_0,\ldots,Y_n) &= P(X_{n+1} = i, X_{n+2} = j|X_0,\ldots,X_{n+1}) \\ &= P(X_{n+2} = j)1_{\{i\}}(X_{n+1}). \end{aligned}$$

Allo stesso risultato si perviene calcolando $P(Y_{n+1} = (i,j)|Y_n)$, il che dimostra la Markovianitá. Dalla formula ottenuta é facile verificare che la matrice di transizione di $\{Y_n\}$ é quella indicata.

b. La catena é evidentemente irriducibile e aperiodica, dunque ergodica. La ditribuzione limite si trova risolvendo l'equazione $\pi P = \pi$, ove P é la matrice di transizione. Da questa si ricava

$$\pi(0,0) = (1-p)^2,\ \pi(0,1) = \pi(1,0) = p(1-p),\ \pi(1,1) = p^2.$$

c. Dalla teoria, sappiamo che

$$E(T|Y_0 = (0,0)) = \frac{1}{\pi(0,0)}.$$

Esercizio 1.11 Si consideri la catena di Markov con matrice di transizione

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{99}{100} & 0 & 0 & \frac{1}{100} & 0 \end{pmatrix}$$

a. Classificare gli stati, determinare le distribuzioni invarianti e le eventuali distribuzioni limite.

b. Calcolare, per $k \geq 1$, $f_{54}^{(k)}$.

Soluzione.

a. Classi: $\{1,3,5\}$ transitiva, periodo 3. $\{2,4\}$ ricorrente, periodo 1. Esiste la distribuzione limite, data da

$$(0, 1/2, 0, 1/2, 0).$$

b.

$$f_{54}^{(3k+1)} = \left(\frac{99}{100}\right)^k \frac{1}{100},$$

mentre $f_{54}^{(k)} = 0$ se $k \neq 1$ mod. 3.

Esercizio 1.12 Consideriamo una catena di Markov avente $I\!N$ come spazio degli stati e con le seguenti probabilità di transizione:

$$p_{n,n+1} = \frac{1}{n+1} \quad p_{n,0} = \frac{n}{n+1} \quad p_{n,m} = 0 \text{ altrimenti.}$$

a. Mostrare che la distribuzione data da $\pi(n) = \frac{e^{-1}}{n!}$ è invariante per la catena.

b. È vero che π è l'unica distribuzione invariante?

c. Calcolare $f_{00}^{(k)}$ per $k \geq 1$, e $\sum_{k=1}^{+\infty} f_{00}^{(k)}$.

Soluzione.

a. Dobbiamo mostrare che

$$\pi(m) = \sum_{n=0}^{+\infty} \pi(n) p_{nm} \tag{3}$$

per ogni m. Se $m > 0$ (3) diventa

$$\frac{e^{-1}}{m!} = p_{m-1,m} \frac{e^{-1}}{(m-1)!} = \frac{1}{m} \frac{e^{-1}}{(m-1)!}$$

che è ovviamente verificata. Se $m = 0$ (3) diventa

$$e^{-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1} \frac{e^{-1}}{n!} = e^{-1} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right]$$

che è verificata dato che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right] = 1.$$

b. Si', poichè la catena è irriducibile.

c.

$$f_{00}^{(k)} = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}$$

e

$$\sum_{k \geq 1} f_{00}^{(k)} = 1.$$

Esercizio 1.13 Classificare gli stati e determinare tutte le distribuzioni invarianti della catena di Markov la cui matrice di transizione è

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soluzione. Classi: $\{1, 5\}$ ricorrente, periodo 2; $\{3, 4\}$ ricorrente e aperiodica; $\{2\}$ transitiva e aperiodica. Distribuzioni stazionarie:

$$\{(a/2, 0, 2(1-a)/3, (1-a)/3, a/2) : a \in [0, 1]\}.$$