PÉNDULO DOBLE RÍGIDO

Samuel Vasco - Adrián Avendaño

4 de abril de 2022

INTRODUCCIÓN

Se trata de una derivación de las ecuaciones de movimiento de un péndulo doble en la que consideramos los péndulos como cuerpos rígidos. El presente modelo de cuerpo rígido del péndulo doble permite configuraciones más realistas, ya que los péndulos pueden tener cualquier distribución de masa y pueden conectarse entre sí en cualquier punto. La distribución de la masa se refleja en la inercia rotacional de cada péndulo[1].

Péndulo 1

Sea $\vec{X_1} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ la localización del centro de masa.

$\vec{R_1}$ el vector del pivote 1 al centro de masa del péndulo 1, con longitud R_1.

Sea θ_1 el ángulo en el pivote 1 entre $\vec{R_1}$ y la posición vertical descendente.

ϕ el ángulo del vector a L_1. ϕ es un ángulo constante.

Péndulo 2

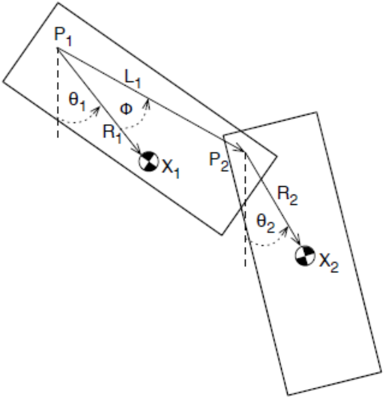
Sea $\vec{X_2} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ la localización del centro de masa.

$\vec{R_2}$ el vector del pivote 1 al centro de masa del péndulo 2, con longitud R_2.

Sea θ_2 el ángulo en el pivote 2 entre $\vec{R_2}$ y la posición vertical descendente.

Sea m_1 e I_1, m_2 e I_2 las masa y el momento de inercia del péndulo 1 y del péndulo 2, respectivamente

MARCO TEÓRICO



CINEMÁTICA

Tenemos las siguientes relaciones sólo a partir de la geometría del péndulo doble, sin utilizar ninguna información de las fuerzas[1].

$$\vec{R_1} = R_1 Sin(\theta_1)\vec{i} - R_1 Cos(\theta_1)\vec{j}$$

$$\vec{R_2} = R_2 Sin(\theta_2)\vec{i} - R_2 Cos(\theta_2)\vec{j}$$

$$\vec{L_1} = L_1 Sin(\theta_1 + \phi)\vec{i} - L_1 Cos(\theta_1 + \phi)\vec{j}$$

$$\vec{X_1} = \vec{R_1}$$

$$x_1 = R_1 Sin(\theta_1)$$

$$x_1 = -R_1 Cos(\theta_1)$$

$$\vec{X_2} = \vec{L_1} + \vec{R_2}$$

$$x_2 = L_1 Sin(\theta_1 + \phi) + R_2 Sin(\theta_2)$$

$$y_2 = -L_1 Cos(\theta_1 + \phi) - R_2 Cos(\theta_2)$$

Tomando las derivadas con respecto al tiempo, podemos encontrar las velocidades

$$\dot{\vec{X}}_1 = \dot{\vec{R}}_1$$

$$\dot{x}_1 = \dot{\theta}_1 R_1 Cos(\theta_1)$$

$$\dot{y}_1 = \dot{\theta}_1 R_1 Sin(\theta_1)$$

$$\dot{\vec{X}}_2 = \dot{\vec{L}}_1 + \dot{\vec{R}}_2$$

$$\dot{x}_2 = \dot{\theta}_1 L_1 Cos(\theta_1 + \phi) + \dot{\theta}_2 R_2 Cos(\theta_2)$$

$$\dot{y}_2 = \dot{\theta}_1 L_1 Sin(\theta_1 + \phi) + \dot{\theta}_2 R_2 Sin(\theta_2)$$

Tomando la segunda derivada con respecto al tiempo, encontramos la aceleración

$$\ddot{\vec{X}}_1 = \ddot{\vec{R}}_1$$

$$\ddot{x}_1 = -\dot{\theta}_1^2 R_1 Sin(\theta_1) + \ddot{\theta}_1 R_1 Cos(\theta_1) \tag{1}$$

$$\ddot{y}_1 = \ddot{\theta}_1 R_1 Sin(\theta_1) + \dot{\theta}_1^2 R_1 Cos(\theta_1) \tag{2}$$

$$\ddot{\vec{X}}_2 = \ddot{\vec{L}}_1 + \ddot{\vec{R}}_2$$

$$\ddot{x}_2 = \ddot{\theta}_1 L_1 Cos(\theta_1 + \phi) + \ddot{\theta}_2 R_2 Cos(\theta_2) - \dot{\theta}_1^2 L_1 Sin(\theta_1 + \phi) - \dot{\theta}_2^2 R_2 Sin(\theta_2) \tag{3}$$

$$\ddot{y}_2 = \ddot{\theta}_1 L_1 Sin(\theta_1 + \phi) + \ddot{\theta}_2 R_2 Sin(\theta_2) + \dot{\theta}_1^2 L_1 Cos(\theta_1 + \phi) + \dot{\theta}_2^2 R_2 Cos(\theta_2) \tag{4}$$

FUERZAS

Sea $\vec{T_1} = T_{1x}\vec{i} + T_{1y}\vec{j}$ el vector fuerza opera sobre el péndulo 1 en el pivote 1.

Sea $\vec{T_2} = T_{2x}\vec{i} + T_{2y}\vec{j}$ el vector fuerza opera sobre el péndulo 1 en el pivote 2. Por la tercera ley de Newton, $\vec{T_2}$ es el vector de fuerza sobre el péndulo 2 en el pivote 2

A partir de las leyes de Newton del movimiento se tiene:

$$m_1\ddot{\vec{X}}_1 = \vec{T_1} + \vec{T_2} - m_1 g\vec{j}$$

$$m_1\ddot{x_1} = T_{1x} + T_{2x} \tag{5}$$

$$m_1\ddot{y_1} = T_{1y} + T_{2y} - m_1 g \tag{6}$$

FUERZAS

$$I_1\theta_1'' = (-\mathbf{R_1}) \times \mathbf{T_1} + (\mathbf{L_1} - \mathbf{R_1}) \times \mathbf{T_2}$$
$$= -(R_1 \sin(\theta_1)T_{1y} + R_1 \cos(\theta_1)T_{1x})$$
$$+ (L_1 \sin(\theta_1 + \phi) - R_1 \sin(\theta_1))T_{2y} + (L_1 \cos(\theta_1 + \phi) - R_1 \cos(\theta_1))T_{2x} \quad (7)$$

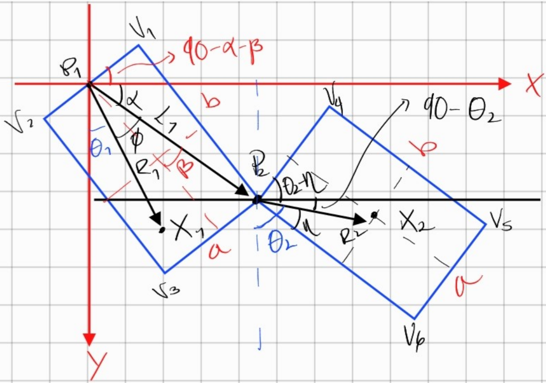
$$m_2\mathbf{X_2}'' = -\mathbf{T_2} - m_2 g\mathbf{j}$$
$$m_2 x_2'' = -T_{2x} \quad (8)$$
$$m_2 y_2'' = -T_{2y} - m_2 g \quad (9)$$
$$I_2\theta_2'' = (-\mathbf{R_2}) \times (-\mathbf{T_2}) = R_2 \sin(\theta_2)T_{2y} + R_2 \cos(\theta_2)T_{2x} \quad (10)$$

ECUACIONES DE MOVIMIENTO

$$
\begin{aligned}
\theta_1'' = -\Big(&2gm_1R_1(I_2+m_2R_2^2)\sin(\theta_1)+L_1m_2\Big(g(2I_2+m_2R_2^2)\sin(\theta_1+\phi)+\\
&R_2\Big(gm_2R_2\sin(\theta_1-2\theta_2+\phi)+2(\theta_2'^2(I_2+m_2R_2^2)+\theta_1'^2L_1m_2R_2\cos(\theta_1-\theta_2+\phi))\sin(\theta_1-\theta_2+\phi)\Big)\Big)\Big)\\
&\Big/\Big(2I_2L_1^2m_2+2I_2m_1R_1^2+L_1^2m_2^2R_2^2+2m_1m_2R_1^2R_2^2+2I_1(I_2+m_2R_2^2)-L_1^2m_2^2R_2^2\cos(2(\theta_1-\theta_2+\phi))\Big)
\end{aligned}
\tag{11}
$$

$$
\begin{aligned}
\theta_2'' = \Big(&m_2R_2\Big(-(g(2I_1+L_1^2m_2+2m_1R_1^2)\sin(\theta_2))+\\
&L_1\Big(gm_1R_1\sin(\theta_2-\phi)+2\theta_1'^2(I_1+L_1^2m_2+m_1R_1^2)\sin(\theta_1-\theta_2+\phi)+\\
&\theta_2'^2L_1m_2R_2\sin(2(\theta_1-\theta_2+\phi))+gm_1R_1\sin(2\theta_1-\theta_2+\phi)+gL_1m_2\sin(2\theta_1-\theta_2+2\phi)\Big)\Big)\Big)\\
&\Big/\Big(2I_2L_1^2m_2+2I_2m_1R_1^2+L_1^2m_2^2R_2^2+2m_1m_2R_1^2R_2^2+2I_1(I_2+m_2R_2^2)-L_1^2m_2^2R_2^2\cos(2(\theta_1-\theta_2+\phi))\Big)
\end{aligned}
\tag{12}
$$

ECUACIONES DE MOVIMIENTO



$$\tan(\eta) = \frac{a}{b} \Rightarrow \boxed{\eta = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)}$$

$$\tan\beta = \frac{a}{2b} \Rightarrow \boxed{\beta = \tan^{-1}\left(\frac{a}{2b}\right)}$$

ECUACIONES DE MOVIMIENTO

$$V_{1x} = \frac{a}{2}Cos(\theta_1 + \phi - \beta)$$

$$V_{1y} = \frac{a}{2}Sin(\theta_1 + \phi - \beta)$$

$$V_{2x} = -\frac{a}{2}Cos(\theta_1 + \phi - \beta)$$

$$V_{2y} = -\frac{a}{2}Sin(\theta_1 + \phi - \beta)$$

$$V_{3x} = \left[b - \frac{a}{2}Cot(\theta_1 + \phi - \beta)\right] Sin(\theta_1 + \phi - \beta)$$

$$V_{3y} = \left[-b + \frac{a}{2}Cot(\theta_1 + \phi - \beta)\right] Cos(\theta_1 + \phi - \beta) - \frac{a}{2Sin(\theta_1 + \phi - \beta)}$$

ECUACIONES DE MOVIMIENTO

$$V_{4x} = L_1 Sin(\theta_1 + \phi) + aCos(\theta_2 - \eta)$$

$$V_{4y} = -L_1 Cos(\theta_1 + \phi) + aSin(\theta_2 - \eta)$$

$$V_{5x} = L_1 Sin(\theta_1 + \phi) + 2R_2 Sin(\theta_2)$$

$$V_{5y} = -L_1 Cos(\theta_1 + \phi) - 2R_2 Cos(\theta_2)$$

$$V_{6x} = L_1 Sin(\theta_1 + \phi) + bSin(\theta_2 - \eta)$$

$$V_{6y} = -L_1 Cos(\theta_1 + \phi) - bCos(\theta_2 - \eta)$$

RUNGE KUTTA

Los métodos de Runge-Kutta son un conjunto de métodos genéricos iterativos, explícitos e implícitos, de resolución numérica de ecuaciones diferenciales[2].

El método de Runge-Kutta de cuarto orden tiene un desarollo de la siguiente formula, para i desde 0 has $N-1$

$$k_1 = h\,f(t_i, y_i)$$

$$k_2 = h\,f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = h\,f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_2 = h\,f(t_i + h, y_i + k_3)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Esta fórmula tiene un error de truncamiento local de $O(h^5)$, y un error global de $O(h^4)$. Para la mejora en el error, se debe dar una mayor cantidad de evaluaciones de la función, resultando en un mayor tiempo de cálculo si la función es complicada[2].

Se presenta a continuación el pseudocódigo del método RK4

RUNGE KUTTA

RK4(a, b, N, α)

h $\leftarrow (b-a)/N$

$t_0 \leftarrow a$

$y_0 \leftarrow \alpha$

Para i desde 0 hasta N-1 hacer

$$t_i \leftarrow a + i * h$$

$$k_1 \leftarrow hf(\mathrm{t_i},\ \mathrm{y_i})$$

$$k_2 \leftarrow hf\left(\mathrm{t_i} + \frac{1}{2}\mathrm{h},\ \mathrm{y_i} + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 \leftarrow hf\left(\mathrm{t_i} + \frac{1}{2}\mathrm{h}, \mathrm{y_i} + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 \leftarrow hf(\mathrm{t_i} + \mathrm{h},\ \ \mathrm{y_i} + k_3\ )$$

$$\mathrm{y_{i+1}} \leftarrow y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Fin Para

Mostrar (t_0, y_0), (t_1, y_1), ... (t_N, y_N)

FIN

REFERENCIAS

[1]Erik Neumann.
Double pendulum as rigid bodies, 2011.

[2]métodos de runge kutta.