# Péndulo doble rígido

**Kevin Cortés G.**
**Samuel Vasco G.**

Universidad de Antioquia
Instituto de Física, FCEN
Laboratorio Avanzado III

Mayo de 2023

# Introducción

En esta derivación se ha modificado el cálculo de las ecuaciones de movimiento del péndulo doble, tratando los péndulos como cuerpos rígidos en lugar de objetos puntuales. Esto ha permitido lograr configuraciones más realistas en el modelo[**?**], aunque en este trabajo se ha optado por utilizar distribuciones uniformes de masa para ambos sólidos y conectarlos en un solo vértice.
Usando el método de Runge Kutta para solucionar las ecuaciones de movimiento del sistema se logra construir una simulación con JavaScript.

**Justificacion**: Esta actividad se realiza como un porte al conocimiento en sistemas mecánicos complejos y al desarrollo de simulaciones de estos sistemas físicos, también al ser una actividad obligatoria del curso de laboratorio avanzado III del pregrado de física de la universidad de Antioquia.

# Marco Teórico

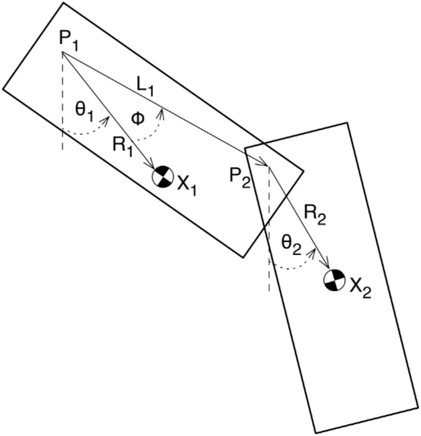


Figura: Modelo de doble péndulo de cuerpos rígidos

# Marco Teórico - Cinemática

El sistema mecánico como se ve en la Fig. 7 satisface las siguientes ligaduras

$$\vec{X_1} = \vec{R_1}$$

$$\vec{X_2} = \vec{L_1} + \vec{R_2}$$

Adicionalmente las componentes de los vectores $\vec{R_1}$, $\vec{L_1}$ y $\vec{X_2}$ se pueden escribir en términos de $R_1$, $L_1$, $R2$ y los ángulos $\theta_1$, $\phi$ y $\theta_2$. Derivando temporalmente estas relaciones obtenemos que las siguientes relaciones cinemáticas

$$\ddot{x_1} = -\dot{\theta_1}^2 R_1 Sin(\theta_1) + \ddot{\theta_1} R_1 Cos(\theta_1)$$

$$\ddot{y_1} = \dot{\theta_1}^2 R_1 Cos(\theta_1) + \ddot{\theta_1} R_1 Sin(\theta_1)$$

$$\ddot{x_2} = -\dot{\theta}_1^2 L_1 Sin(\theta_1 + \phi) + \ddot{\theta_1} L_1 Cos(\theta_1 + \phi) - \dot{\theta}_2^2 R_2 Sin(\theta_2) + \ddot{\theta_2} R_2 Cos(\theta_2)$$

$$\ddot{y_2} = \dot{\theta}_1^2 L_1 Cos(\theta_1 + \phi) + \ddot{\theta_1} L_1 Sin(\theta_1 + \phi) + \dot{\theta}_2^2 R_2 Cos(\theta_2) + \ddot{\theta_2} R_2 Sin(\theta_2)$$

Sea $\vec{T_1} = T_{1x}\hat{i} + T_{1y}\hat{j}$ el vector fuerza opera sobre el péndulo 1 en el pivote 1, y sea $\vec{T_2} = T_{2x}\hat{i} + T_{2y}\hat{j}$ el vector fuerza opera sobre el péndulo 1 en el pivote 2. Por la tercera ley de Newton, $-\vec{T_2}$ es el vector de fuerza sobre el péndulo 2 en el pivote 2. Por tanto las ecuaciones de movimiento de newton están dadas por

$$m_1\ddot{x_1} = T_{1x} + T_{2x}, \tag{1}$$

$$m_1\ddot{y_1} = T_{1y} + T_{2y} - m_1 g, \tag{2}$$

$$m_2\ddot{x_2} = -T_{2x}, \tag{3}$$

$$m_2\ddot{y_2} = -T_{2y} - m_2 g, \tag{4}$$

$$I_1\ddot{\theta_1} = (-\vec{R_1}) \times \vec{T_1} + (\vec{L_1} - \vec{R_1}) \times \vec{R_2},$$

$$I_1\ddot{\theta_1} = -(R_1Sin(\theta_1)T_{1y} + R_1Cos(\theta_1)T_{1x}) + (L_1Sin(\theta_1+\phi) - R_1Sin(\theta_1))T_{2y}$$
$$+(L_1Cos(\theta_1 + \phi) - R_1Cos(\theta_1))T_{2x}, \tag{5}$$

$$I_2\ddot{\theta_2} = (-\vec{R_2}) \times (-\vec{T_2}) = R_2Sin(\theta_2)T_{2y} + R_2Cos(\theta_2)T_{2x}, \tag{6}$$

donde $m_1$, $I_1$ y $m_2$ y $I_2$ son las masas y momentos de inercias (respecto a sus centros de masas) de los solidos rígidos 1 y 2 respectivamente.
Con las ecuaciones [1-4] escribimos las componentes de ambas tensiones en términos de las aceleraciones $\ddot{x_1}$, $\ddot{y_1}$, $\ddot{x_2}$ y $\ddot{x_2}$, evaluamos estas tensiones en [5] y [6], y consecutivamente se evalúan en estas ecuaciones las ecuaciones cinemáticas, obteniendo finalmente las ecuaciones de movimiento en términos de los ángulos $\theta_1$ y $\theta_2$.

$$
\begin{aligned}
\ddot{\theta}_1 = -\Bigg(& 2gm_1R_1(I_2+m_2R_2)Sin(\theta_1)+L_1m_2\Bigg(g(2I_2+m_2R_2^2)Sin(\theta_1+\phi)+R_2\Bigg(gm_2R_2Sin(\theta_1-2\theta_2+ \\
& +\phi)+2(\dot{\theta}_2^2(I_2+m_2R_2^2)+\dot{\theta}_1{}^2L_1m_2R_2Cos(\theta_1-\theta_2+\phi))Sin(\theta_1-\theta_2+\phi)\Bigg)\Bigg)\Bigg) \\
& \Bigg/\Bigg(2I_2L_1^2m_2+2I_2m_1R_1^2+L_1^2m_2^2R_2^2+2m_1m_2R_1^2R_2^2+2I_1(I_2+m_2R_2^2)-L_1^2m_2^2R_2^2Cos(2(\theta_1- \\
& \theta_2+\phi))\Bigg),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\ddot{\theta}_2 = \Bigg(& m_2R_2\Bigg(-(g(2I_1+L_1^2m_2+2m_1R_1^2)Sin(\theta_2))+L_1\Bigg(gm_1R_1Sin(\theta_2-\phi) \\
& +2\dot{\theta}_1{}^2(I_1+L_1^2m_2+m_1R_1^2)Sin(\theta_1+\theta_2-\phi)+\dot{\theta}_2{}^2L_1m_2R_2Sin(2(\theta_1+\theta_2-\phi)) \\
& +gm_1R_1Sin(2\theta_1+\theta_2-\phi)+gL_1m_2Sin(2\theta_1+\theta_2-2\phi)\Bigg)\Bigg)\Bigg) \\
& \Bigg/\Bigg(2I_2L_1^2m_2+2I_2m_1R_1^2+L_1^2m_2^2R_2^2+2m_1m_2R_1^2R_1^2+2I_1(I_2+m_2R_2^2)-L_1^2m_2^2R_2^2Cos(2(\theta_1- \\
& \theta_2+\phi))\Bigg),
\end{aligned}
$$

# Marco Teórico - Configuración del sistema

El esquema del sistema que se pretende simular se ve en la Fig. 3, en esta configuración se supone que ambos solidos tienen una distribución de materia uniforme, es decir, sus centros de masa coincide con sus centros geométricos.

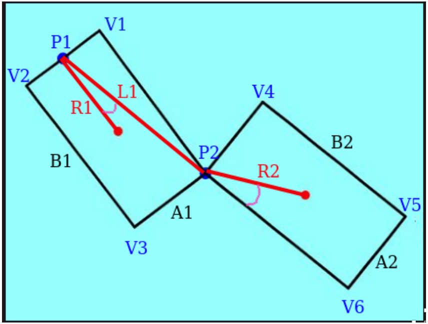


Figura: Configuración del sistema a simular. El ángulo entre las rectas $R_1$ y $L_1$ es $\phi$, y el ángulo entre la recta $R_2$ y la recta $P_2V_6$ es $\alpha$. En $P_1$ ubicamos el sistema de referencia

# Marco Teórico - Ecuaciones para los vértices

Una vez solucionado el sistema de ecuaciones vía método de Runge Kutta, identificamos las coordenadas de los 7 vértices que dan lugar a la simulación.

$$\vec{V_1} = \left(\frac{a_1}{2}cos(\theta), \frac{a_1}{2}sin(\theta)\right), \tag{7}$$

$$\vec{V_2} = -\vec{V_1} = -\left(\frac{a_1}{2}cos(\theta), \frac{a_1}{2}sin(\theta),\right) \tag{8}$$

$$\vec{V_3} = \vec{V_2} + \left(b_1 sin(\theta_1), -b_1 cos(\theta_1)\right), \tag{9}$$

$$\vec{P_2} = \vec{V_3} + \left(a_1 cos(\theta_1), a_1 sin(\theta_1)\right), \tag{10}$$

$$\vec{V_4} = \vec{P_2} + \left(a_2 cos(\theta_2 - \alpha), a_2 sin(\theta_2 - \alpha)\right), \tag{11}$$

$$\vec{V_5} = \vec{P_2} + \left(2R_2 sin(\theta_2), -2R_2 cos(\theta_2)\right), \tag{12}$$

$$\vec{V_6} = \vec{P_2} + \left(b_2 sin(\theta_2 - \alpha), -b_2 cos(\theta_2 - \alpha)\right). \tag{13}$$

# Interfaz ó consola de simulación


Figura: Interfaz y consola de simulación

# Interfaz o consola de simulación

**Pause**: Detiene la simulación sin modificar los valores introducidos por el usuarios.
**Play**: Inicia la simulación en el lapso de tiempo dejado por el usuario y con los parámetros introducidos.
**Reset**: Reinicia la simulación con los valores por default.
**Posición Angular Primer Rectángulo**: Modifica la condición inicial referente a $\theta_1$.
**Ancho Primer Rectángulo**: Modifica la longitud del ancho del rectángulo 1.
**Largo Primer Rectángulo**: Modifica la longitud del largo del rectángulo 1.
**Masa Primer Rectángulo**: Modifica el valor de la masa del rectángulo 1.

# Interfaz o consola de simulación

**Posición Angular Segundo Rectángulo**: Modifica la condición inicial referente a $\theta_2$.
**Ancho Segundo Rectángulo**: Modifica la longitud del ancho del rectángulo 2.
**Largo Segundo Rectángulo**: Modifica la longitud del largo del rectángulo 2.
**Masa Segundo Rectángulo**: Modifica el valor de la masa del rectángulo 2.

# Actividad

Encuentre los valores de los parámetros en los que el sistema se reduce a un péndulo doble de varillas lineales rígidas. Encuentre una configuración de las condiciones iniciales en las que el sistema permanece en reposo, una vez obtenido esto, y finalmente obtenga a partir de los diagramas de fase el orden de magnitud del error de las soluciones numéricas de las ecuaciones de movimiento.

# Bibliografía


- . Neumann, "Double pendulum as rigid bodies", 2011.