

Simulación péndulo doble rígido

Kevin Cortés (Kevin.cortes@udea.edu.co)

Samuel Vasco (Samuel.vasco@udea.edu.co)

Instituto de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales,
Universidad de Antioquia UdeA; Calle 70 No. 52-21, Medellín, Colombia.

Introducción

En esta derivación se ha modificado el cálculo de las ecuaciones de movimiento del péndulo doble, tratando los péndulos como cuerpos rígidos en lugar de objetos puntuales. Esto ha permitido lograr configuraciones más realistas en el modelo[1], aunque en este trabajo se ha optado por utilizar distribuciones uniformes de masa para ambos sólidos y conectarlos en un solo vértice.

Usando el método de Runge Kutta para solucionar las ecuaciones de movimiento del sistema se logra construir una simulación con JavaScript.

Planteamiento del problema

La representación del sistema se ve en la Fig. 1.

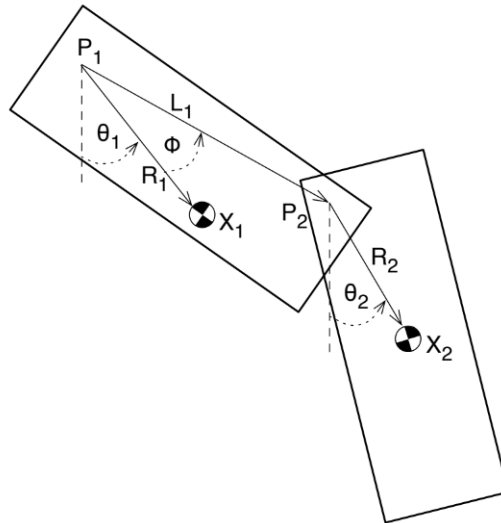


Figure 1: modelo de doble péndulo de cuerpos rígidos

Sea $\vec{X}_1 = x_1\hat{i} + y_1\hat{j}$ la ubicación del centro de masa del primer solido con respecto al punto de pivót de este solido, este ultimo es justamente el sistema de referencia. \vec{R}_1 es el vector del pivote 1 al centro de masa del péndulo 1, con longitud R_1 . Sea θ_1 el ángulo que hay entre centro de masa del péndulo 1 y la vertical descendente respecto al pivote 1, \vec{L}_1 es el vector de posición del pivot 2 con longitud L_2 . Sea ϕ el ángulo que hay entre el centro de masa del solido 1 y el pivót 2, este ángulo es constante, siendo un parámetro del sistema.

Sea $\vec{X}_2 = x_2\hat{i} + y_2\hat{j}$ la localización del centro de masa del solido 2, \vec{R}_2 es el vector que existe entre el pivote 2 y el centro de masa del solido 2 que tiene una longitud R_2 , y θ_2 el ángulo que hay entre centro de masa del péndulo 2 y la vertical descendente respecto al pivote 2.

De la Fig. 1 se puede ver que se cumple la relacion entre vectores

$$\begin{aligned}\vec{X}_1 &= \vec{R}_1 \\ \vec{X}_2 &= \vec{L}_1 + \vec{R}_2\end{aligned}$$

Adicionalmente las componentes de los vectores \vec{R}_1 , \vec{L}_1 y \vec{X}_2 se pueden escribir en términos de R_1 , L_1 , R_2 y los ángulos θ_1 , ϕ y θ_2 .

Derivando temporalmente estas relaciones obtenemos que las siguientes relaciones cinemáticas

$$\ddot{x}_1 = -\dot{\theta}_1^2 R_1 \sin(\theta_1) + \ddot{\theta}_1 R_1 \cos(\theta_1) \quad (1)$$

$$\ddot{y}_1 = \dot{\theta}_1^2 R_1 \cos(\theta_1) + \ddot{\theta}_1 R_1 \sin(\theta_1) \quad (2)$$

$$\ddot{x}_2 = -\dot{\theta}_1^2 L_1 \sin(\theta_1 + \phi) + \ddot{\theta}_1 L_1 \cos(\theta_1 + \phi) - \dot{\theta}_2^2 R_2 \sin(\theta_2) + \ddot{\theta}_2 R_2 \cos(\theta_2) \quad (3)$$

$$\ddot{y}_2 = \dot{\theta}_1^2 L_1 \cos(\theta_1 + \phi) + \ddot{\theta}_1 L_1 \sin(\theta_1 + \phi) + \dot{\theta}_2^2 R_2 \cos(\theta_2) + \ddot{\theta}_2 R_2 \sin(\theta_2) \quad (4)$$

Ahora vamos a obtener las relaciones que surgen de la dinámica del sistema.

Sea $\vec{T}_1 = T_{1x}\hat{i} + T_{1y}\hat{j}$ el vector fuerza opera sobre el péndulo 1 en el pivote 1, y sea $\vec{T}_2 = T_{2x}\hat{i} + T_{2y}\hat{j}$ el vector fuerza opera sobre el péndulo 1 en el pivote 2. Por la tercera ley de Newton, $-\vec{T}_2$ es el vector de fuerza sobre el péndulo 2 en el pivote 2. Por tanto las ecuaciones de movimiento de newton están dadas por

$$m_1 \ddot{x}_1 = T_{1x} + T_{2x}, \quad (5)$$

$$m_1 \ddot{y}_1 = T_{1y} + T_{2y} - m_1 g, \quad (6)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -T_{2x}, \quad (7)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 = -T_{2y} - m_2 g, \quad (8)$$

y de la dinámica rotacional, se tiene que

$$I_1 \ddot{\theta}_1 = (-\vec{R}_1) \times \vec{T}_1 + (\vec{L}_1 - \vec{R}_1) \times \vec{R}_2,$$

$$I_1 \ddot{\theta}_1 = -(R_1 \sin(\theta_1) T_{1y} + R_1 \cos(\theta_1) T_{1x}) + (L_1 \sin(\theta_1 + \phi) - R_1 \sin(\theta_1)) T_{2y} \\ + (L_1 \cos(\theta_1 + \phi) - R_1 \cos(\theta_1)) T_{2x}, \quad (9)$$

$$I_2 \ddot{\theta}_2 = (-\vec{R}_2) \times (-\vec{T}_2) = R_2 \sin(\theta_2) T_{2y} + R_2 \cos(\theta_2) T_{2x}, \quad (10)$$

donde m_1 , I_1 y m_2 y I_2 son las masas y momentos de inercias (respecto a sus centros de masas) de los solidos rígidos 1 y 2 respectivamente.

Con las ecuaciones [5-8] escribimos las componentes de ambas tensiones en términos de las aceleraciones \ddot{x}_1 , \ddot{y}_1 , \ddot{x}_2 y \ddot{y}_2 , evaluamos estas tensiones en [9] y [10], y consecutivamente se evalúan en estas ecuaciones las ecuaciones [1-4], obteniendo finalmente las ecuaciones de movimiento en términos de los ángulos θ_1 y θ_2 .

$$\ddot{\theta}_1 = - \left(2gm_1 R_1 (I_2 + m_2 R_2) \sin(\theta_1) + L_1 m_2 \left(g(2I_2 + m_2 R_2^2) \sin(\theta_1 + \phi) + R_2 \left(gm_2 R_2 \sin(\theta_1 - 2\theta_2 + \phi) + 2(\dot{\theta}_2^2 (I_2 + m_2 R_2^2) + \dot{\theta}_1^2 L_1 m_2 R_2 \cos(\theta_1 - \theta_2 + \phi)) \sin(\theta_1 - \theta_2 + \phi) \right) \right) \right) \\ \left/ \left(2I_2 L_1^2 m_2 + 2I_2 m_1 R_1^2 + L_1^2 m_2^2 R_2^2 + 2m_1 m_2 R_1^2 R_2^2 + 2I_1 (I_2 + m_2 R_2^2) - L_1^2 m_2^2 R_2^2 \cos(2(\theta_1 - \theta_2 + \phi)) \right) \right), \quad (11)$$

$$\ddot{\theta}_2 = \left(m_2 R_2 \left(- (g(2I_1 + L_1^2 m_2 + 2m_1 R_1^2) \sin(\theta_2)) + L_1 \left(gm_1 R_1 \sin(\theta_2 - \phi) + 2\dot{\theta}_1^2 (I_1 + L_1^2 m_2 + m_1 R_1^2) \sin(\theta_1 + \theta_2 - \phi) + \dot{\theta}_2^2 L_1 m_2 R_2 \sin(2(\theta_1 + \theta_2 - \phi)) + gm_1 R_1 \sin(2\theta_1 + \theta_2 - \phi) + gL_1 m_2 \sin(2\theta_1 + \theta_2 - 2\phi) \right) \right) \right) \\ \left/ \left(2I_2 L_1^2 m_2 + 2I_2 m_1 R_1^2 + L_1^2 m_2^2 R_2^2 + 2m_1 m_2 R_1^2 R_2^2 + 2I_1 (I_2 + m_2 R_2^2) - L_1^2 m_2^2 R_2^2 \cos(2(\theta_1 - \theta_2 + \phi)) \right) \right), \quad (12)$$

Las ecuaciones [11] y [12] componen un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales y acopladas, y corresponden a las ecuaciones de movimiento del sistema mecánico en cuestión.

El esquema del sistema que se pretende simular se ve en la Fig. 2, en esta configuración se supone que ambos solidos tienen una distribución de materia uniforme, es

decir, sus centros de masa coincide con sus centros geométricos. Los únicos parámetros en el sistema son a_1, b_1, a_2, b_2, m_1 y m_2 , mientras que los demás parámetros se escriben en términos de estos, veamos

$$\begin{aligned}
 R_1 &= \frac{b_1}{2} \\
 R_2 &= \frac{\sqrt{b_2^2 + a_2^2}}{2} \\
 L_1 &= \frac{\sqrt{4b_1^2 + a_1^2}}{2} \\
 \phi &= \tan^{-1} \left(\frac{a_1}{2b_1} \right) \\
 \alpha &= \tan^{-1} \left(\frac{a_2}{b_2} \right) \\
 I_1 &= \frac{1}{12} m_1 (a_1^2 + b_1^2) \\
 I_2 &= \frac{1}{12} m_2 (a_2^2 + b_2^2)
 \end{aligned}$$

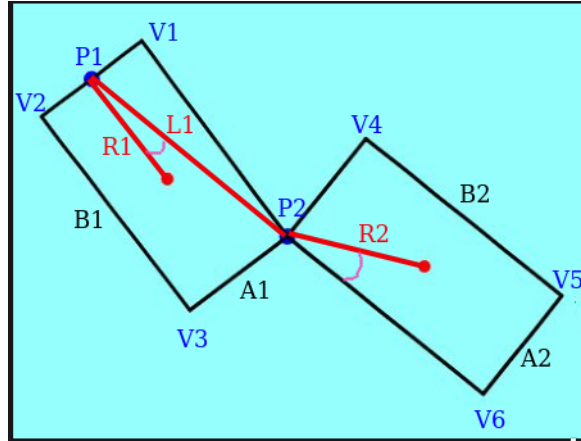


Figure 2: Configuración del sistema a simular. El ángulo entre las rectas R_1 y L_1 es ϕ , y el ángulo entre la recta R_2 y la recta P_2V_6 es α

Una vez solucionado el sistema de ecuaciones [11] y [12] vía método de Runge Kutta, identificamos las coordenadas de los 7 vértices que hacen posible construir la simulación, estas coordenadas están dadas por los siguientes vectores posición respecto al sistema de referencia (pivote 1), veamos

$$\vec{V}_1 = \left(\frac{a_1}{2} \cos(\theta), \frac{a_1}{2} \sin(\theta) \right), \quad (13)$$

$$\vec{V}_2 = -\vec{V}_1 = -\left(\frac{a_1}{2}\cos(\theta), \frac{a_1}{2}\sin(\theta),\right) \quad (14)$$

$$\vec{V}_3 = \vec{V}_2 + \left(b_1\sin(\theta_1), -b_1\cos(\theta_1)\right), \quad (15)$$

$$\vec{P}_2 = \vec{V}_3 + \left(a_1\cos(\theta_1), a_1\sin(\theta_1)\right), \quad (16)$$

$$\vec{V}_4 = \vec{P}_2 + \left(a_2\cos(\theta_2 - \alpha), a_2\sin(\theta_2 - \alpha)\right), \quad (17)$$

$$\vec{V}_5 = \vec{P}_2 + \left(2R_2\sin(\theta_2), -2R_2\cos(\theta_2)\right), \quad (18)$$

$$\vec{V}_6 = \vec{P}_2 + \left(b_2\sin(\theta_2 - \alpha), -b_2\cos(\theta_2 - \alpha)\right), \quad (19)$$

a partir de estas coordenadas para los vértices podemos construir la simulación del sistema mecánico de péndulo doble rígido.

Justificación

Esta actividad se realiza como un porte al conocimiento en sistemas mecánicos complejos y al desarrollo de simulaciones de estos sistemas físicos, también al ser una actividad obligatoria del curso de laboratorio avanzado III del pregrado de física de la universidad de Antioquia.

References

- [1] E. Neumann, “Double pendulum as rigid bodies,” 2011.