EcTRÍA _ T5

Autocorrelación
Naturaleza y causas de la aut.
Consecuencias de la aut.
Contrastes de autocor.
Estimación de modelos con autocor.
Predicción

1. AUTOCORRELACIÓN — Introducción y Concepto.

Autocorrelación $\equiv$ los elementos fuera de la diag. principal de Σ son $\neq 0$ (todos o algunos)

Partimos de $Y = X\beta + u$ donde $V[u] = \sigma_u^2 \Sigma$, $\Sigma \neq I_T$.

Potencialmente, Σ tiene $\underbrace{\frac{T(T+1)}{2}}^{1+2+3+\cdots+T}$ parámetros distintos que habría que estimar (Σ es una matriz ~~cualquier~~ simétrica de orden T).

Es imposible estimar por MCO tantos parámetros.

Es necesario establecer hipótesis acerca del comportamiento del término de error del modelo a lo largo del tiempo.

Ejemplo + sencillo: $u_t \rightarrow AR(1)$

$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$, donde $|\rho| < 1$, para que sea estacionario
$\varepsilon_t \rightarrow$ ruido blanco

Todo proceso autorregresivo de orden finito se puede escribir como
$u_t \rightarrow AR(1) \sim MA(\infty)$

$$u_t = \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \varepsilon_{t-i}$$

Al ser u_t un $AR(1)$ conocemos las autocovarianzas:

$$\gamma_0 = V(u_t) = E[u_t u_t] = \rho\gamma_1 + \sigma_\varepsilon^2 = \rho^2\gamma_0 + \sigma_\varepsilon^2 \Rightarrow \gamma_0 = \boxed{\frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\rho^2} = \sigma_u^2}$$

$$\gamma_1 = E[u_t \cdot u_{t+1}] = \rho\gamma_0 = \rho\sigma_u^2$$

$$\cdots$$

$$\gamma_{T-1} = \rho\gamma_{T-1} = \cdots = \rho^{T-1}\gamma_0 = \rho^{T-1}\sigma_u^2 .$$

Así, la matriz de covarianzas puede escribirse como

$$cov(u) = \sigma_u^2 \Sigma = \sigma_u^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \cdots & \rho^{T-1} \\ \rho & 1 & \rho & \cdots & \rho^{T-2} \\ & & & \ddots & \\ \rho^{T-1} & \rho^{T-2} & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

que depende exclusivamente de 2 parámetros, $\underbrace{\sigma_u^2}_{\text{depende de } \sigma_\varepsilon^2 \text{ y } \rho}$ y ρ.

En la práctica, al ser σ_u^2 y ρ desconocidos, es posible obtener una estimación $\hat{\Sigma}$ de Σ y a continuación calcular $\hat{\beta}_{MCG}$

- descomponiendo $\hat{\Sigma} = VV'$ y transformando el modelo

ó bien - directamente, $\hat{\beta}_{MCG} = (X'\hat{\Sigma}^{-1}X)^{-1}X'\hat{\Sigma}^{-1}Y$.

OJO → $\hat{\beta}_{MCG}$ deja de ser mínima varianza al sustituir Σ por una estimación $\hat{\Sigma}$.

Procedimiento:

1º. Estimar el modelo por MCO y obtener $\hat{u}_t = Y_t - X_t'\hat{\beta}_{MCO}$.

2º. Hacer una regresión de $\hat{u}_t$ sobre $\hat{u}_{t-1}$, y obtener por MCO $\hat{\rho}$ y $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$.

3º. Calcular $\hat{\sigma}_u^2 = \dfrac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{1-\hat{\rho}^2}$ y obtener $\hat{\sigma}_u^2\hat{\Sigma}$.

4º. Calcular $\hat{\beta}_{MCG}$.

Queda claro que $\hat{\beta}_{MCO}$, aunque no es un estimador eficiente, sí resulta muy útil en una 1ª etapa de la estimación de $\hat{\beta}_{MCG}$.

La estimación de $\hat{\beta}_{MCG}$ puede realizarse:

- mediante transformación de variables
- mediante productos matriciales

¿AMPLIAR?

Aun siendo sencillo este ejemplo, pone de manifiesto que hay que contrastar 1º la hipótesis nula de ausencia de autocorr, y en caso de rechazarla hay que estimar el modelo bajo una determinada estructura de autocorrelación.

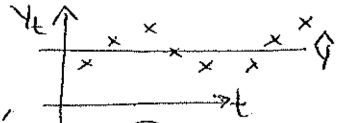
2 _ NATURALEZA Y CAUSAS de la AUTOCORRELACIÓN

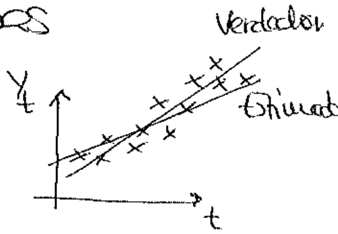
Existe autocorrelación cuando $E[u_t u_s] \neq 0$ para $t \neq s$.

Que el término de error esté correlacionado consigo mismo a través del tiempo no significa que lo esté en cada dos instantes de tiempo, basta que lo esté en algunos periodos, no necesariamente consecutivos.

La autocorrelación puede venir producida por diversas CAUSAS:

a) Existencia de ciclos y tendencias





Autocorrelac. (+) $\Rightarrow$ sobreestimación $\rightarrow$ Rachas
Autocorrelac. (−) $\Rightarrow$ subestimación

- Debido a la inercia de muchas var. macroeconómicas, la var. endógena del modelo presenta ciclos que no son bien explicados por las var. exógenas $\longrightarrow$ van al término de error, que presenta autocorrelación.
- La mayoría de las var. económicas tienen una tendencia, generalmente creciente. Si las var. explicativas no explican adecuadamente este comportamiento $\longrightarrow$ la tendencia va al error $\Rightarrow$ autocorrelación positiva $\Rightarrow$ rachas en los residuos.

b) Variables omitidas

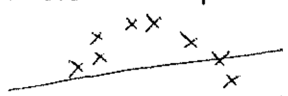
Sp. que el verdadero modelo es $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t$

pero se especifica $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + v_t$

donde $v_t = \beta_3 X_{3t} + u_t$

Si X_{3t} presenta autocorrelación, entonces v_t tb. autocorrelación

c) Relaciones no lineales



Si la verdadera relac. entre la var. endógena y las var. explicativas es no lineal, pero se especifica de manera lineal, entonces dicha especificación generará autocorrelación de u_t.

d) Relaciones dinámicas

La omisión del retardo de la var. endógena haría que el término de error incorporara dicha variable, lo que se reflejaría en cierto comportamiento sistemático en u_t.

3_ CONSECUENCIAS de la AUTOCORRELACIÓN

Partimos de $Y = X\beta + u$, donde $V(u) = \sigma_u^2 \Sigma$, $\Sigma \neq I_T$.
Si ignoramos la autocorrelación, y utilizamos como estimador de β el obtenido por MCO, $\hat{\beta}_{MCO}$, hay que recordar:
$\hat{\beta}_{MCO}$ sigue siendo insesgado
$\hat{\beta}_{MCO}$ ya no es varianza mínima, $V(\hat{\beta}_{MCO}) = \sigma_u^2 (X'X)^{-1} X'\Sigma X (X'X)^{-1}$
El estimador lineal insesgado y de mínima varianza es el de mínimos cuadrados generalizados, $\hat{\beta}_{MCG}$.
$\hat{\beta}_{MCG} = (X'\Sigma^{-1}X)^{-1} X'\Sigma^{-1} Y$.
$Var(\hat{\beta}_{MCG}) = \sigma_u^2 (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}$
$\hat{\beta}_{MCG}$ puede obtenerse premultiplicando el modelo por V^{-1} $(\Sigma = VV^{-1})$ y ~~resolver~~ estimar por MCO el modelo transformado, o bien sustituyendo directamente por su expresión.

Si se utiliza $\hat{\beta}_{MCO}$ en presencia de autocorrelación:
- $Var(\hat{\beta}_{MCO}) \neq \sigma_u^2 (X'X)^{-1}$
- $\sigma_u^2 (X'X)^{-1}$ es una estimación sesgada de la verdadera, sin poder decir cuál es mayor.
- Si se utiliza $Var(\hat{\beta}_{MCO}) = \sigma_u^2 (X'X)^{-1} X'\Sigma X (X'X)^{-1}$, la varianza de $\hat{\beta}_{MCG}$ sigue siendo menor.

$\Rightarrow$ estimaciones sesgadas, y el sesgo puede ser importante.

Si el investigador no confía en el tipo de autocorrelación, puede resultar interesante estimar por MCO y comparar.

Con simulaciones puede verse que, incluso en modelos económetr. sencillos, la varianza de MCG puede ser un 10% de var. MCO. Tb. se muestra como utilizar $\sigma_u^2 (X'X)^{-1}$ como varianza de MCO tb. genera sesgos importantes.

4_ CONTRASTES de AUTOCORRELACIÓN

Existen varios contrastes en los que la hipótesis alternativa incluye distintas especificaciones sobre el tipo de autocorrelac.

Se recomienda realizar primero análisis $\boxed{\text{gráficos}}$.

Gráfico de residuos $\longrightarrow$ buscar rachas $\Rightarrow$ autocorr.

Gráfico $\hat{u}_t$ contra $\hat{u}_{t-1}$ $\longrightarrow$ Puntos 1^er^ y 3^er^ cuadr $\Rightarrow$ autocorr. (+)
(para AR(1)). Puntos 2° y 4° cuadr $\Rightarrow$ autocorr. (−)

Gráfico de f. autocorrelac. simple ~~...~~ y fac parcial.

Entre los contrastes analíticos, destacamos D-W, por ser el más utilizado y continuar con el ejemplo anterior.

Contraste de Durbin-Watson

Parte de la idea de que u_t es AR(1), es decir, el término de error del modelo tiene autocorrelación de 1^er^ orden, $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$, donde ε_t no tiene autocorrelac.

$$\begin{cases} H_0: u_t \text{ no tiene autocorrelación} \\ H_1: u_t \rightarrow AR(1) \end{cases}$$

El estadístico Durbin-Watson utilizado es

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{T} (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=2}^{T} \hat{u}_t^2}$$

Autocorrelac (+) $\Rightarrow$ Rachas $- +$ $\Rightarrow$ d será pequeño
Autocorrelac (−) $\Rightarrow$ Rachas $+ -$ $\Rightarrow$ d será grande

Para T sufc. grande, $d \approx 2(1-\hat{\rho})$, con $\hat{\rho} = \frac{\sum_2^T \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum_2^T \hat{u}_t^2}$ (estim. max verosím)

Para que u_t sea estacionario, $|\rho| < 1 \Rightarrow 0 \leq d \leq 4$.

$d \sim 0 \Rightarrow$ autocorrelac. (+) de 1^er^ orden
$d \sim 2 \Rightarrow u_t$ indep. a lo largo del tiempo
$d \sim 4 \Rightarrow$ autocorrelac. (−) de 1^er^ orden

Observaciones

O1 – d depende de X (muestras ≠ valores ≠). DW obtuvieron cotas tabuladas ~~por~~ válidas para todas las distrib. posibles.

O2 – Cotas válidas sólo cuando hay cte en el modelo y no hay var. predeterminadas

5_ ESTIMACIÓN de MODELOS con AUTOCORRELACIÓN

a) Estimación MCG mediante transformación de variables

En el modelo con autocorrelación autoregresiva de 1er orden, se puede tomar "cuasidiferencias" de las var. endógena y exógenas, utilizando $\hat{\rho}$ estimado por MCO.

$$Y_t = \alpha + X'_t\beta + u_t \qquad Y_{t-1} = \alpha + X'_{t-1}\beta + u_{t-1}$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$Y_t - \rho Y_{t-1} = \alpha(1-\rho) + X'_t\beta - \rho X'_{t-1}\beta + \underbrace{(u_t - \rho u_{t-1})}_{\varepsilon_t}$$

$$Y^*_t = \alpha(1-\rho) + X^{*\prime}_t\beta + \varepsilon_t$$

donde ε_t es independiente en el tiempo $\Rightarrow$ podemos MCO.

La ecuación transformada puede escribirse:

$$Y_t - \rho Y_{t-1} = \alpha(1-\rho) + (X_t - \rho X_{t-1})'\beta + \varepsilon_t$$

ó bien

$$Y_t - \alpha - X'_t\beta = \rho(Y_{t-1} - \alpha - X'_{t-1}\beta) + \varepsilon_t$$

lo que sugiere llevar a cabo el siguiente procedimiento iterativo:

1_ Estimar el modelo por MCO ignorando la autocorrelación
2_ Utilizar los residuos MCO para estimar ρ:
  ↳ mediante una regresión de $\hat{u}_t$ sobre $\hat{u}_{t-1}$
  ↳ a partir del estadístico D-W de la estim. inicial.
3_ Utilizar dichas estimaciones para obtener las variables cuasidiferenciadas Y^*_t y X^*_t.
4_ Estimar por MCO el modelo transformado y obtener $\hat{\beta}$
5_ Utilizar $\hat{\beta}$ para obtener nuevos residuos y un nuevo ρ.

- - - -

Continuar hasta lograr un grado de convergencia fijado.
(Hay que reajustar para obtener el α inicial)

Este procedimiento puede generalizarse para
- más de una var. explicativa
- autocorrelación de orden superior a 1.

~~Admite VAR~~.

b) Estimación de máximo verosimilitud del modelo AR(1)

$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$, donde ε_t es ruido blanco
$\varepsilon_t \longrightarrow N(0, \sigma_\varepsilon^2)$, $\forall t$.

La función de verosimilitud asociada a u (ruido del modelo) tb. es de tipo normal. Maximizarla es equiv. a max su logaritmo.(*)
Derivando este logaritmo con respecto a σ_ε^2 e igualando a 0 se obtiene como condición necesaria de optimalidad

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{\hat{u}'\Sigma^{-1}\hat{u}}{T} = \hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}$$

que proporciona la estimación de σ_ε^2 a partir de $\hat{\varepsilon}_t$.

La sustitución de este estimador en vez del parámetro σ_ε^2 en la f. de verosimilitud genera la función que se conoce como verosimilitud concentrada.

Como método aproximado, puede tratarse de maximizar la func. de verosimilitud condicional, que trata la primera observación como constante.

· Optimizando esta función llegamos a

$$\hat{\rho}_{MV} = \frac{\sum_{2}^{T} \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum_{2}^{T} \hat{u}_t^2} \leftarrow \text{estimación máx-verosímil de } \rho \text{ condicionada}$$

Resultados:

1 – $\hat{\rho}_{MV}$ y $\hat{\sigma}_{\varepsilon\,MV}^2$ son indep. entre sí
indep. de la estimación de (α, β)

2 – $Var(\hat{\rho}_{MV}) = \dfrac{1-\rho^2}{T-1}$, para I.C.

3 – $Var(\hat{\sigma}_\varepsilon^2) = \dfrac{2\sigma_\varepsilon^4}{T-1}$, para I.C.

(*)

$$\varepsilon_t \longrightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{(2\pi)^{T/2}(\sigma_\varepsilon^2)^{T/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\sum \varepsilon_t^2\right\}$$

determin. V^{-1}

$$u_t \longrightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{(2\pi)^{T/2}(\sigma_\varepsilon^2)^{T/2}} \sqrt{1-\rho^2}\, \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} u'\Sigma^{-1}u\right\}$$

$$\log \mathcal{L} = -\frac{T}{2}\ln(2\pi) - \frac{T}{2}\ln(\sigma_\varepsilon^2) + \frac{1}{2}\ln(1-\rho^2) - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} u'\Sigma^{-1}u$$

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \sigma_\varepsilon^2} = -\frac{T}{2}\cdot\frac{1}{\sigma_\varepsilon^2} + \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^4} u'\Sigma^{-1}u = 0 \Leftrightarrow T\sigma_\varepsilon^2 = u'\Sigma^{-1}u \Rightarrow \hat{\sigma}_\varepsilon^2 =$$

6_PREDICCIÓN

Sp. $Y_t = X'_t \beta + u_t$, donde u_t tiene autocorrelación

Denotamos

$u \equiv$ término de error durante el período muestral, $t=1 \dots T$

$u_F \equiv$ término de error en los períodos futuros.

En presencia de autocorrelación, u y u_F no son indep.

$$Var\begin{pmatrix} u \\ u_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$$, donde la estructura de Σ_{ij} depende de la estr. de la autocorr.

En estas condiciones, la predicción óptima es

$$E_T Y_{T+1} = X'_{T+1} \hat{\beta}_{MCG} + \Sigma'_{12} (\Sigma_{11})^{-1} \hat{u}$$

donde $\hat{u} = \hat{u}_{MCG}$ en el período muestral.

Bajo el supuesto de normalidad,

$$E[u_F/u] = \Sigma'_{12} (\Sigma_{11})^{-1} u$$, por lo que

$$E_T Y_{T+1} = X'_{T+1} \hat{\beta}_{MCG} + E[u_F/u]$$

En el caso de que la estructura de la autocorrelación sea de tipo autorregresivo de orden 1,

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$E_T Y_{T+1} = X'_{T+1} \hat{\beta}_{MCG} + \rho \hat{u}_{\cancel{t}T}$$

$$E_T Y_{T+n} = X'_{T+n} \hat{\beta}_{MCG} + \rho^n \hat{u}_{\cancel{t}T}$$

Al mismo resultado se llegaría utilizando la transformación MCG: $Y_{T+1} - \rho Y_T = (X_{T+1} - X_T)' \beta + \varepsilon_{T+1}$ y tomando esperanzas condicionales en el período T.

ECONOMETRÍA – T5

1_ AUTOCORRELACIÓN
- Introd.
- Concepto
- Ejemplo: $u_t \rightarrow AR(1)$

2_ NATURALEZA y CAUSAS
- Naturalez: ∃ alguno
- Causas:
  - Ciclos y tendencias
  - Omisión var
  - Relac. no lineales
  - Relac. dinámicas

3_ CONSECUENCIAS ~~de la~~
- $\hat{\beta}_{MCO}$ y $\hat{\beta}_{MCG}$
- $\hat{\beta}_{MCO}$ con autocorrelac $\Rightarrow$ sesgo y var >.

4_ CONTRASTES de AUTOCORRELACIÓN
- Gráficos:
  - Residuos
  - $\hat{u}_t / \hat{u}_{t-1}$; para AR(1)
  - fas y fap
- Contr. Durbin-Watson

5_ ESTIMACIÓN de modelos con autocorrelación
- Estim. MCG mediante transf. var → mod. cuasidif.
- Estim. MV del AR(1)

6_ PREDICCIÓN
- General
- AR(1)