ECTRÍA – T10 | ECUACIONES SIMULTÁNEAS

1_ESPECIFICACIÓN MODELO DE EC. SIMULTÁNEAS

Modelo econométrico que recoge la existencia de var. endógenas que se determinan mutuamente.
El modelo de ecuaciones simultáneas está formado por tantas ecuac. como var. endógenas se determinan simultáneamente,
Cada var. endógena quedará determinada por las otras var. endógenas, así como por las var. exógenas del modelo y por los términos de error (tanto como var. endógenas se determinan simultánea)).

Ahora entre las var. explicativas hay var. aleatorias (Y_i), por lo que el estimador será sesgado.

En un modelo de ecuaciones simultáneas: (+ complejo)
a) Se recogen interacciones entre las var. (+ complejo) por los mts.
b) La estimación aislada de una de las ec's por los mts habituales, introducirá sesgo en los coeficientes estimados.

La representación genérica es:

$$Y'_t \Gamma + X'_t B + u'_t = 0_g \quad , \quad t = 1 \dots T$$

donde

Y_t, u_t } vectores columna de dim g en cada periodo t. $Y_{n^o var}\, t$

$\gamma_{n^o var.\, n^o ec.}$

$X_t \rightarrow$ vector columna de dim. k

$\Gamma \rightarrow$ matriz $g \times g$ $\Rightarrow$ coef. var. endógenas

$\beta_{n^o var.\, n^o ec.}$

$B \rightarrow$ matriz $k \times g$ $\Rightarrow$ coef. var. exógenas

Para un t concreto, habrá g ecuaciones:

$$\gamma_{11} Y_{1t} + \gamma_{21} Y_{2t} + \dots + \gamma_{g1} Y_{gt} + \beta_{11} X_{1t} + \dots + \beta_{k1} X_{kt} + u_{1t} = 0$$

$$\gamma_{1g} Y_{1t} + \gamma_{2g} Y_{2t} + \dots + \gamma_{gg} Y_{gt} + \beta_{1g} X_{1t} + \dots + \beta_{kg} X_{kt} + u_{gt} = 0$$

$$\underset{1\times g}{(Y_{1t} \cdots Y_{gt})} \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1g} \\ \gamma_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ \gamma_{g1} & \cdots & & \gamma_{gg} \end{pmatrix} + (X_{1t} \cdots X_{kt}) \begin{pmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1g} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{k1} & & \beta_{kg} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{1t} \\ \vdots \\ u_{gt} \end{pmatrix}' = 0$$

Para t concreto: $Y_{1\times g} \cdot \Gamma_{g\times g} + X_{1\times k} B_{k\times g} + U_{1\times g} = 0_{1\times g}$

Propiedades de u_t:

1. $E(u_t) = 0_g$
2. $E(u_t u_s) = 0_{g\times g} \quad \forall t \neq s$ → Ausencia de autocorrelación
3. $Var(u_t) = E(u_t u_t') = \Sigma_{g\times g}, \forall t$ → Σ def(+).

$$\Sigma = Var(u_t) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1g} \\ - & - & \cdot & \cdot \\ \sigma_{1g} & \sigma_{2g} & \dots & \sigma_g^2 \end{pmatrix}$$

admite la existencia de correlac. contemporáneas

$\sigma_{ij} = cte \Rightarrow$ generalización de homosced.

Al existir correlaciones contemporáneas no nulas, se hace necesario considerar las ec's en conjunto, como un modelo.

Un cambio en la perturbación de una ecuación afecta a todas las var. endógenas del modelo → simultaneidad

- Todas las var. endógenas pueden aparecer en todas las ecs.
- Los términos de error están correlacionados contemporáneam.

Por ello, un modelo de ec's simultáneas es ≠ a una colección de modelos uniecuacionales, (tendría que tener estructura de modelo recursivo).

Para el conjunto de periodos temporales:

$$Y_{T\times g}\Gamma_{g\times g} + X_{T\times k}B_{k\times g} + U_{T\times g} = 0_{T\times g}$$

forma estructural

ECTRÍA – T10

ESPECIFICACIÓN:
2 – FORMA ESTRUCTURAL Y REDUCIDA

A la hora de estimar, tenemos g^2 parámetros de Γ
$k \cdot g$ parám. de B
$\frac{g(g+1)}{2}$ parám. $\neq$ en $\Sigma = cov(u)$

$$\underset{T\times g\, g\times g}{Y\Gamma} + \underset{T\times k\, k\times g}{XB} + \underset{T\times g}{u} = 0_{T\times g}$$
Forma estructural

$$= g\left(\frac{3g+1}{2} + k\right) \text{ parám}$$

Podemos normalizar cada ecuación para que una var. endógena tenga un coef -1 $\rightarrow$ dividir por Γ cambiado de signo
Nuevo modelo: $Y = X\beta + v$ $\rightarrow$ Nos ahorramos g parámetros $g\left(\frac{3g-1}{2}\right) + kg$ parám. a estimar

Además, no todas las var. endógenas ~~et~~ aparecen en todas las ecuaciones $\rightarrow$ algunos elementos de Γ y B serán 0.

Podemos escribir el modelo como:
coef. 1 $\leftarrow$ $y_i = Y_i \gamma_i + X_i \beta_i + u_i$ (para cada ec.)
donde $Y_i \equiv$ var. endógenas incluidas como var. explicativas norm.
$\mathrm{Var}(u_i) = \sigma_u^2 I_T$.
Ahora podemos estimar por MCO, pero:
- Var. endógenas como explicativas $\Rightarrow$ MCO sesgado ¡no óptimo!

Volviendo a la expresión
$$Y\Gamma + XB + U = 0 \xrightarrow[|\Gamma| \neq 0]{\Gamma \text{ no singular}} Y = -XB\Gamma^{-1} - U\Gamma^{-1}$$
$$Y = X\Pi + V$$
donde $\Pi = -B\Gamma^{-1}$, $V = -U\Gamma^{-1}$

$Y = X\Pi + V$ $\leftarrow$ forma reducida

$cov(v_t) = \Omega$ def(+)
$E[v_t v_s] = 0$

$u_t \rightarrow$ Normal $\Rightarrow v_t \rightarrow$ Normal $\rightarrow$ Función Verosimilitud.

Todos los parámetros de la forma reducida pueden obtenerse, previa estimación, a partir de los momentos de la ~~....~~ distr. multivariante, lo que no ocurre con la forma estructural.

3. El problema de IDENTIFICACIÓN

El interés de la forma reducida radica en que todas las var. explicativas del modelo así expresado son exógenas. Esta situación es semejante al modelo uniecuacional ⇒ MCO insesgado.

Forma estructural → acorde con la Tª Económica. Utilizar cuando queramos explicar relaciones, para contrastar sobre coef. que tienen interpretación en la Tª Económica.

Forma reducida → Estimaciones insesgadas. Utilizar cuando queramos hacer predicciones

Forma ~~estructural~~ reducida → puede estimarse siempre (gk parám)

¿Forma estructural? → Después de normalizar quedan $g(g-1+k)$ coef. a estimar $+\frac{g(g+1)}{2}$ de Σ a partir de Ω.

El nº de parámetros a recuperar de la forma estructural es mayor que el nº parám. estimados en la forma reducida ⇒ Recuperación imposible.

No todas las var. endógenas aparecen en todas las ecs ⇒ algunos coef. de la forma estructural serán 0 ⇒ el nº de coef. a estimar se reduce.

A pesar de no poder obtener todos los coef. de la forma estructural, sí que se pueden recuperar los coef. de alguna ecuación → ecuación identificada.

Todos los coef. de una ecuación recuperados → ec. identificada
Modo único de recuperación → ec. exactamente identificada
Varias formas, no equiv, de recuperación → ec. sobreidentificada.

$t=1$ EJEMPLOS

$$\begin{cases} Y_1 = 2Y_3 + 2Y_4 + X_1 + X_3 \\ Y_2 = -5Y_3 - X_1 + 2X_2 + 2X_3 - 2X_4 \\ Y_3 = 2Y_4 + 2X_2 + X_3 + 3X_4 \\ Y_4 = Y_2 + 2X_1 + X_3 + 2X_4 \end{cases}$$

$g =$ nº var. endóGenas
$k =$ nº var. expliKativas

$$(Y_1 - 2Y_3 - 2Y_4) + (-X_1 - X_3) = 0$$
$$(Y_2 + 5Y_3) + (X_1 - 2X_2 - 2X_3 + 2X_4) = 0$$
$$(Y_3 - 2Y_4) + (-2X_2 - X_3 - 3X_4) = 0$$
$$(Y_4 - Y_2) + (-2X_1 - X_3 - 2X_4) = 0$$

$g = 4$

$k = 4$

$u'_t / u_t \equiv$ vect. col. dim g

$+(0,0,0,0)$

$$\underbrace{(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)}_{Y'_t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \underbrace{(X_1, X_2, X_3, X_4)}_{} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} = (0000)$$

$Y'_t / Y_t \equiv$ vector col. dim g

$X'_t \equiv X_t$ vec. colum dim k

$$\underset{1\times4}{Y} \cdot \underset{4\times4}{\Gamma} + \underset{1\times4}{X} \cdot \underset{4\times4}{B} = O_{1\times4}$$

FORMA ESTRUCTURAL $\longrightarrow$ $Y_{1\times4} \cdot \Gamma_{4\times4} + X_{1\times4} \cdot B_{4\times4} + U_{1\times4} = O_{1\times4}$

$$Y_{T\times g} \cdot \Gamma_{g\times g} + X_{T\times k} \cdot B_{k\times k} + U_{T\times g} = O_{T\times g}$$

FORMA REDUCIDA $\longrightarrow$ $Y = X\Pi + V$ / $\Pi = -B\Gamma^{-1}$
$V = -U\Gamma^{-1}$

4_ ESTIMACIÓN

Utilizar MC, ordinarios o generalizados (MCO o MCG), según cual sea la estructura de la matriz de covarianzas de su término de error.

Problemas: MC no es insesgado (para forma estructural)
no es asintóticamente insesgado (inconsistente)

5_ ESTIMACIÓN por MC en 2 etapas

El EMC2E puede utilizarse para estimar los coef. de ecuaciones exactamente identificadas o sobreidentificadas. En este último caso, generaría un único estimador, combinac. de los estim. obtenidos por MC Indirectos.

Su estrategia consiste en
1º. Construir una regresión auxiliar para cada var. endógena incluida como explicativa.
Sus variables explicativas son todas las var. predeterminadas del modelo de ec's simultáneas.
Utilizar las estimaciones para generar información muestral, ignorando la muestra disponible, $\hat{Y}_1$

$\hat{Y} = X(X'X)^{-1}X'Y_1$

- Correlacionadas con Y_1
- Incorrelacionadas con el término de error

2º etapa: Las predicciones obtenidas se utilizan en la ecuación de partida ~~....~~ sustituyendo a las var. endógenas que aparecen como explicativas.
Se estima por MCO ⟶ MC2E $\begin{cases} \hat{\gamma}_1 \ MC2E \\ \hat{\beta}_1 \ MC2E \end{cases}$

Se puede demostrar que para obtener MC2E no es preciso estimar las regresiones auxiliares de la 1ª etapa, sino que pueden utilizarse directamente las ec's normales.

- El estimador MC2E es consistente
- es sesgado
- es óptimo de la clase de estim V.I.
- MC2E = MCI en ecuación exact. ident.

6 _ Estimador MV con INFORMACIÓN LIMITADA

~~Sp.~~ Para cada ecuación,

Sp. u_i Normal
Sp. restricciones de los coef. ($\Pi_3 \gamma_1 = 0_{K-K_1}$)
max f. verosimilitud

Este método no precisa de la maximización analítica de dicha verosimilitud.

Partimos de

$$Y_{1t} = \gamma_{21} Y_{2t} + \beta_{11} X_{1t} + \beta_{21} X_{2t} + u_{1t}$$

Partición del rango de valores admisibles de γ_{21}, para cada valor se construye $Y^*_{1t} = Y_{1t} - \gamma_{21} Y_{2t}$

y se estima $Y^*_{1t} = \beta_{11} X_{1t} + \beta_{21} X_{2t} + u_{1t} \longrightarrow SR_1$

Regresión auxiliar de Y^*_{1t} sobre todas las var. predeterminadas $\longrightarrow SR_2$

Idea: Si las restricciones incorporadas en la ecuación ~~incluidas en el modelo~~ son correctas, las sumas residuales deberán ser similares

Elegir el valor γ_{21} que minimice $\dfrac{SR_1 - SR_2}{SR_1} \sim \dfrac{SR_1}{SR_2}$ mínimo

las estimaciones de β son las que proceden de la estim. de Y^*_{1t} cuando se utiliza γ_{21} elegido anteriormente.

Estimador MC2E minimiza $SR_1 - SR_2$.

El estimador máxima verosimilitud con información limitada,
MVIL = MC2E (= MCI) cuando la ec. está exact. ident.

↳ Es consistente
↳ Se distribuye asintóticamente = MC2E ⇒ eficiente

ECTRÍA – T10

7_ Estimación por MINIMOS CUADRADOS en TRES ETAPAS

Cuando existen correlaciones entre los términos de error de las distintas ecuaciones del modelo, se puede ganar eficiencia en la estimación de cada una de ellas si se estiman simultáneamente.

El método de estimación MC3E es válido para ecs exactamente identificadas y sobreidentificadas.

Generaliza el método MC2E considerando las correlac. entre errores.

El procedimiento por el que se va a incorporar dichas correlaciones es tratando la estimación simultánea del modelo como un problema de regresiones aparentemente no relacionadas.

- Si las ec's están identificadas, MC3E es consistente
- Si $\sigma_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$, entonces MC3E = MC2E
- Si todas las ec's exact. identif., MC3E = MC2E asint. eficiente

8_ El método de MV con INFORMACIÓN COMPLETA

Maximiza la función de verosimilitud que se obtiene al suponer que el vector formado por los términos de error de todas las ec's siguen una determinada distrib. multiV.

Este estimador no admite una representación analítica como función de las observaciones muestrales.

Es preciso obtenerlo mediante algoritmos de aproximación, ya que hay que resolver un sistema de ec's no lineales sin solución analítica.

El estimador MVIC es consistente
eficiente

Al ser MC3E asintóticamente eficiente, se recomienda su uso en vez de MVIC, ya que es + sencillo.

9. SISTEMAS RECURSIVOS (Clase de modelos + sencillos)

Son modelos que satisfacen simultáneamente:

a) Γ (matriz coef. var. endógenas), Γ triangular

b) Σ (matriz cov. términos error), Σ diagonal

↳ Términos de error ortogonales → no hay autocorrelación → por separado

↳ El sistema se puede ordenar de modo que la 1ª ec. contenga 1 var. endóg.
la 2ª ec. 2 var. endóg.
⇒ var. endógenas predeterminadas

⇒ tratar por separado

Los modelos recursivos siempre están exactamente identificados.

Nº parám. a estimar $= \frac{g(g+1)}{2} + gk$ → coincide con f. reducida.

En un modelo recursivo, el estimador MVIC = MCO ec por ec
↳ eficiente insesgado.

10. COMPARACIÓN entre estimadores

Muestras finitas, propiedades desconocidas.
Propiedades asintóticas

- Si ∃ restricciones sobre los coef. de las ec. del sistema, hay que estimar simultáneamente, para no conducir a estim. sesgadas.
- Si ∃ restricciones sobre la matriz de cov, MVIC + efic. que MC3E
  ↳ Utilizar MVL.
- Estimadores simultáneos frente a estimadores ec por ec.
  Correlac. entre errores ⇒ estimac. simultánea eficiente
  Pero el error de estimación supone pérdida de eficiencia
  si hay error de especif., al estimar simultánea, error se propaga.
- MCO de la forma reducida es insesgada. Para predecir, mejor.
- Si ∃ ec. sobreidentificada, MC3E + eficiente que MCO reducida
- No es necesariamente cierto que MCO de la forma reducida sean menos eficientes que MC2E.

ECUACIONES SIMULTÁNEAS

Entre las var. explicativas hay var. endógenas, que se determinan mutuamente.

La matriz Σ de var-cov de u admite correlaciones contemporáneas

$\Rightarrow$ analizar en conjunto

$\Rightarrow$ ~~demuestr~~ efecto simultáneo.

$$Y_{T\times g}\Gamma_{g\times g} + X_{T\times k}B_{k\times g} + U_{T\times g} = 0_g \quad \begin{cases} T \to \text{tiempo} \\ g \to \text{nº ec. simultáneas} \end{cases}$$

Forma estructural $\longrightarrow$ $Y\Gamma + XB + U = 0$

↳ + acorde con la Tª económica

↳ utilizar para explicar relaciones y contrastar coef. con signif. económico

↳ Imposible estimar todos los parám

Forma reducida $\longrightarrow$ $Y = X\Pi + V$ $\begin{cases} \Pi = B\Gamma^{-1} \\ V = U\Gamma^{-1} \end{cases}$

↳ tiene estim. insesgadas

↳ utilizar para predicciones

↳ se pueden estimar todos sus coef (no coinciden con la forma estructural)

Ec. identificada $\to$ se pueden recuperar todos los coef

Ec. sobreidentificada $\to$ ∃ varias formas no equiv. de recuperación

MC2E = MCI en ec. exact. identif.

= MVIL

= MC3E

$$g\frac{(g+1)}{2} + gK$$

ECONOMETRÍA — T10   reducida, (sesgado o inconsist.)

1_ ECUACIONES SIMULTÁNEAS

- Concepto
- Modelo para cada t $Y'_{1\times g}\Gamma_{g\times g}+X'_{1\times k}B_{k\times g}+U'_{1\times g}=0_g$
- Problemas (estim. sesgadas, simultaneidad)

2_ ESPECIFICACIÓN : F. ESTRUCTURAL y F. REDUCIDA

- Forma estructural : $Y\cdot\Gamma + X\cdot B + U = 0_{T\times g}$
  - Modelo
  - Nº parámetros $g\cdot g + k\cdot g + g(g+1)/2$
  - Utilización → interpret.
- Forma reducida : $Y = X\Pi + V$
  - Modelo
  - Nº parámetros
  - Utilización → predecir . MCO sesgado.

3_ Problema de la IDENTIFICACIÓN

- Problema : recuperación de coeficientes
- Ec. identificada | • exacta • sobre

4_ ESTIMACIÓN

- MCO ó MCG

5_ EMC2E

- Utilización → estimar coef.
- Método
- Propiedades { • sesgado, consist, óptimo para VI. • ec's exact. ident. = EMCI .

6_ EMVIL

- Utilización (u normal + restric. coef).
- Método
- Propiedades { • ec's exact. id. = EMC2E ↳ consistente • distrib. asint ⇒ eficiente

7_ EMC3E

- Utilización → correlac. entre error.
- Método → generalit. 2E.
- Propiedades [• ec's ident ⇒ consist. • no autocorr ⇒ 2E • ec's exact. id ⇒ EMC2E asint. ef.

8_ EMVIC

- Utilización → distrib. multiv.
- Método → algoritmo aprox.
- Propiedades [– consistente, eficiente – + complejo → 3E

9_ SISTEMAS RECURSIVOS

- Concepto Γ triangular, Σ diagonal.
- Tratamiento por separado
- Propiedades [• solución ! • MVIC = MCO por separado

10_ COMPARACIÓN entre estimadores

- Propiedades asintóticas.
- ∃ restric. coef. → simultáneos
- ∃ restric. Σ → MVIC mejor MC3E, pero MVIL.
- Autocorr. → simultáneos
- Predicción → MCO reducido
- Ec's sobreidentif → MC3E mejor MCO reducido
- Incomparabilidad eficiencia MC2E y MCO