

# Prácticas de la asignatura Series Temporales

## Séptima Entrega

### 1 Modelos de heterocedasticidad condicional

A partir de la década de los 80, muchos investigadores se han dedicado al estudio de modelos no lineales. En particular aquí veremos los modelos de heterocedasticidad condicional. Estos modelos se iniciaron para el estudio de series de datos financieros y ambientales. Este tipo de datos tienen una característica común: la frecuencia de la toma de datos era muy elevada: horarios, diarios, etc... Los modelos ARIMA no son capaces de captar determinados efectos que se producen en estos datos. En particular, suelen ser series con muy poca estructura en la media, por ejemplo, ruido blanco, AR(1) o un AR(2), y se producen cambios de varianza en bloques de datos. Vemos este efecto en varios conjuntos de datos. Tenemos cuatro series que corresponden a los índices de mercado de cuatro países, Germany DAX (Ibis), Switzerland SMI, France CAC, and UK FTSE. Abrimos un workfile para estas cuatro series:

New → Workfile → Daily (5 days week) → 1:1:1991 a 2:16:1998

e importar el conjunto de datos:

File → Import → Read Text Lotus Excel

y les damos los nombres dax, smi, cac y ftse. Si vemos el gráfico de las cuatro series, veremos que todas tienen un comportamiento muy parecido. Definimos el rendimiento de la serie como:

$$r_t = 100 * (\log(x_t) - \log(x_{t-1}))$$

Generamos los cuatro rendimientos de las series de nombres,

$$rdax = 100 * d(\log(dax), 1)$$

$$rsmi = 100 * d(\log(smi), 1)$$

$$rcac = 100 * d(\log(cac), 1)$$

$$rftse = 100 * d(\log(ftse), 1)$$

Si volvemos a ver los rendimientos de estas cuatro series podemos comprobar que las series presentan estos cambios de varianza repentinos. Vemos el correlograma de los rendimientos de esta serie. Podemos comprobar como no tenemos evidencia de correlación en la serie. Si pasamos a ver el histograma de los datos:

View → Descriptive Statistics → Histogram and Stats

se comprueba que el contraste de Jarque-Bera no acepta la normalidad y el coeficiente de kurtosis es muy elevado. Generamos el cuadrado de la serie rdax al que llamamos rdax2:

$$rdax2 = rdax^2$$

y vemos su correlograma. Comprobamos como existe correlación en el cuadrado de la serie.

Los modelos que veremos a continuación suponen que la varianza condicional no es constante y que depende de los datos anteriores. Esto no ocurre para los modelos ARIMA. Los modelos más sencillos son los introducidos por Engle en el 1982 que se conocen con el nombre de modelos ARCH que suponen dependencia autorregresiva del pasado. Bollerslev (1986) incorpora términos de media móvil lo que lleva a los modelos GARCH.

## 2 Modelos ARCH

Veamos primero los modelos ARCH que estan dados por:

$$\begin{aligned}\phi(B) z_t &= c + \theta(B) e_t \\ e_t &= \sigma_t \epsilon_t \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \dots + \alpha_r e_{t-r}^2\end{aligned}$$

donde  $\epsilon_t$  es iid  $N(0,1)$  e independiente de  $\sigma_t$ . Se puede demostrar que:

$$\begin{aligned}E[e_t] &= E[\sigma_t \epsilon_t] = E[\sigma_t] E[\epsilon_t] = 0 \\ E[e_t^2] &= \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_r}\end{aligned}$$

Ademas, la varianza condicional de las innovaciones,  $e_t$ , verifica que:

$$E[e_t^2 | e_{t-1}, \dots] = E[\sigma_t^2 \epsilon_t^2 | e_{t-1}, \dots] = \sigma_t^2$$

que depende del tiempo  $t$ .

Vamos a la serie rdax. Cómo hemos visto que la serie no tiene correlación veremos los residuos despues de estimar una constante en el modelo:

Quick → Estimate Equation → rdax c

Vemos que la constante es significativa ( $\hat{c} = 0.065204$  con pvalor=0.0064). Pasemos a ver el correlograma de los residuos y de los residuos al cuadrado:

View → Residual Tests → Correlogram Q statistics  
View → Residual Tests → Correlogram squared residuals

Debemos comprobar que la correlación que observamos es la que teniamos antes de estimar la constante. Vemos como en la fap y en la fas aparecen como significativas los dos primeros retardos. Vamos a ver que ocurre si estimamos un ARCH(2):

Procs → Especify/Estimate → Method : ARCH → ARCH = 2 → GARCH = 0

Aparece la siguiente información:

Parámetro	Estim.	std. error	t-stat	P-valor
C	0.0677	0.024	2.814	0.0049
Parámetro	Estim.	std. error	t-stat	P-valor
C	0.866	0.014	58.18	0.0000
ARCH(1)	0.0867	0.014	6.128	0.0000
ARCH(2)	0.090	0.022	4.022	0.0001

Todo parece correcto. Veamos cual es la varianza condicional:

View → Conditional SD graph

y pasamos a ver la bondad del ajuste:

View → Residual Tests → Correlogram Q-statistics

Lo que vemos es el correlograma de los residuos estandarizados, es decir, de  $\epsilon_t = \frac{e_t}{\sigma_t}$ . Si vemos el correlograma de los residuos estandarizados al cuadrado veremos como no queda correlación:

View → Residual Tests → Correlogram Squared residuals

También vemos el histograma de los residuos estandarizados:

View → Residual Tests → Histogram, normality tests

y vemos su gráfico:

View → Actual, fitted, residual → Standardized residual graph

Se puede comprobar la presencia de un atípico al principio de la serie muy grande. Es el dato correspondiente al 2:19:1991. Creamos una variable impulso en este dato para incluirlo en la estimación:

*Genr* : *at* = 0

*Genr* : *at* = 1, sample: 2 : 19 : 1991 2 : 19 : 1991

Lo incluimos en la estimación:

Procs → Specify/Estimate → rdax c at *Method* : *ARCH* → *ARCH* = 2 → *GARCH* = 0

Obtenemos los siguientes resultados:

Parámetro	Estim.	std. error	t-stat	P-valor
C	0.074	0.02	3.32	0.0009
AT	-7.65	0.28	-26.56	0.0000
Parámetro	Estim.	std. error	t-stat	P-valor
C	0.766	0.025	30.19	0
ARCH(1)	0.11	0.017	6.89	0
ARCH(2)	0.12	0.025	5.02	0

Vemos el correlograma de los residuos y de los residuos al cuadrado:

View → Residual Tests → Correlogram Q-statistics

View → Residual Tests → Correlogram Squared residuals

y comprobamos como los residuos al cuadrado tienen correlación.

### 3 GARCH(p,q)

Veamos los modelos GARCH, más en particular el modelo GARCH(1,1) que es el más utilizado en las aplicaciones empíricas. El modelo GARCH varía la ecuación de la varianza condicional para obtener:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

Es fácil ver que:

$$E[e_t^2] = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \beta_1}$$

Vemos que ocurre cuando estimamos un GARCH(1,1) a estos datos junto con el atípico y la constante:

Procs → Especify/Estimate → rdax c at *Method* : ARCH → ARCH = 1 → GARCH = 1

Aparece la siguiente información:

Parámetro	Estim.	std. error	t-stat	P-valor
C	0.076	0.020	3.69	0.0002
at	-7.71	0.18	-41.97	0
Parámetro	Estim.	std. error	t-stat	P-valor
C	0.021	0.004	5.23	0.0000
ARCH(1)	0.073	0.009	8.120	0.0000
GARCH(1)	0.906	0.010	85.54	0.0000

Todo parece correcto. Veamos cual es la varianza condicional:

View → Conditional SD graph

y pasamos a ver la bondad del ajuste:

View → Residual Tests → Correlogram Q-statistics

Si vemos el correlograma de los residuos estandarizados al cuadrado veremos como no queda correlación:

View → Residual Tests → Correlogram Squared residuals

También vemos el histograma de los residuos estandarizados:

View → Residual Tests → Histogram, normality tests

y vemos su gráfico:

View → Actual, fitted, residual → Standardized residual graph

El estadístico de Jarque-Bera todavía rechaza la normalidad de los residuos. Esto es muy frecuente y a veces, en lugar de suponer que los residuos son  $N(0,1)$ , se asume que tienen otra distribución como la  $t$  de Student o alguna otra. Este efecto también puede ser causado por la presencia de atípicos.

Cómo ejercicio se deja la estimación de modelos para las otras tres series.

## 4 Función de transferencia

Tenemos dos variables  $x_t$  e  $y_t$  tales que:

1. Los valores  $x_t$  influyen en los valores  $y_{t+k}$ ,  $k > 0$ , es decir, los valores actuales de la serie  $x_t$  influye en los valores futuros de la variable  $y_t$ . Además, la situación reciproca no se verifica.
2. La relación entre las dos variables permacece constante a lo largo del tiempo.
3. Asumimos que la respuesta  $y_t$  se puede aproximar por una combinación lineal de los valores precedentes de la variable  $x_t$ , es decir,  $y_t$  se puede escribir como  $y_t = y_t^* + n_t$ , donde  $y_t^*$  es la parte explicada por  $x_t$ , y se verifica que:

$$y_t^* = v_0 x_t + v_1 x_{t-1} + v_2 x_{t-2} + \dots$$

Los valores  $\{v_0, v_1, v_2, \dots\}$  se denominan función de transferencia. La parte de  $y_t$  no explicada linealmente por  $x_t$ , se denomina proceso de inercia,  $n_t$ , que se descompone en dos partes:

$$n_t = f_t + a_t$$

donde  $f_t$  es la parte predecible y  $a_t$  es ruido blanco. Finalmente, obtenemos:

$$y_t = y_t^* + f_t + a_t$$

La parametrización de la función de transferencia está dada por:

$$y_t^* = \sum_{i=0}^{\infty} v_i x_{t-i}$$

El proceso de ajuste de una función de transferencia es el siguiente:

1. Estimar la siguiente regresión para un valor alto  $p$ :

$$y_t = v_0 x_t + v_1 x_{t-1} + \dots + v_p x_{t-p} + n_t \quad (1)$$

2. Comprobar si el ruido es estacionario o no.
  - (a) Si es estacionario, identificar un modelo para el ruido.
  - (b) Estimar los parámetros conjuntamente.
3. Si no lo es, tomamos diferencias en la relación (1), estimamos el modelo de regresión y volvemos a comprobar si el ruido es estacionario.
4. Repetimos el proceso hasta que el ruido sea estacionario.
5. Ajustamos un modelo lineal al ruido y estimamos conjuntamente la función de transferencia y los parámetros del modelo del ruido.

Vemos como estimar la función de transferencia en Eviews. Para ello utilizamos dos series,  $x_t$ , que es un indicador de ventas e  $y_t$  es una serie formada por ventas de una empresa. El número de datos es de 150. En primer lugar realizamos la regresión para  $p = 6$ , para comprobar si los residuos que obtenemos son o no estacionarios.

Quick → Estimate Equation →  $y \ c \ x \ x(-1) \ x(-2) \ x(-3) \ x(-4) \ x(-5) \ x(-6)$

Vemos la serie de residuos y comprobamos que la serie es aparentemente no estacionaria. Definimos dos series,  $dy=d(y,1)$  y  $dx=d(x,1)$ . Entonces ajustamos el siguiente modelo:

Procs → Especify/Estimate →  $dy \ c \ dx \ dx(-1) \ dx(-2) \ dx(-3) \ dx(-4) \ dx(-5) \ dx(-6)$

Lo que vemos es que los residuos se parecen a un  $AR(2)$ , por lo que ajustamos el modelo:

Procs → Especify/Estimate →  $dy \ c \ dx \ dx(-1) \ dx(-2) \ dx(-3) \ dx(-4) \ dx(-5) \ dx(-6) \ ar(1) \ ar(2)$