

Tres medidas complementarias de desigualdad

por
LUIS JOSÉ IMEDIO OLMEDO
ELENA BÁRCENA MARTÍN
y
ENCARNACIÓN M. PARRADO GALLARDO

Departamento de Economía Aplicada (Estadística y Econometría, 68)
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad de Málaga

RESUMEN

En este trabajo se realiza un análisis comparativo de los índices de Bonferroni, de De Vergottini y de Gini, desde el punto de vista estadístico y normativo. Estas medidas, todas ellas lineales, presentan un conjunto de características comunes y una clara analogía formal, pero, al mismo tiempo, evidentes divergencias. Como consecuencia incorporan juicios de valor diferentes y, en cierto modo, complementarios en la medición de la desigualdad y del bienestar. Esto se pone de manifiesto en la medición de la desigualdad y el bienestar en España con datos de la Encuesta de Condiciones de Vida 2006.

Palabras clave: Gini, Bonferroni, De Vergottini, Medias parciales, Medidas lineales de desigualdad, Transferencias.

Clasificación AMS: 90A30.

1. INTRODUCCIÓN

Al tratar de ordenar un conjunto de distribuciones de renta, según su desigualdad relativa, el procedimiento más utilizado consiste en comparar sus respectivas curvas de Lorenz. Dadas dos distribuciones, si entre dichas curvas existe una relación de dominancia, la desigualdad relativa de la distribución dominante es menor. Este criterio induce una relación de orden parcial, al no ser comparables las distribuciones cuyas curvas de Lorenz se cruzan en algún punto interior del intervalo $[0, 1]$. En tal caso, se utilizan criterios de dominancia más débiles⁽¹⁾ o, sobre todo en el trabajo empírico, medidas escalares de desigualdad. Cada una de estas medidas proporciona una ordenación completa del conjunto de distribuciones de renta admisibles, al asignar un número real, que sintetiza su nivel de desigualdad, a cada distribución. Sin embargo, índices diferentes pueden dar lugar a distintas ordenaciones, ya que cada uno de ellos incorpora su propio criterio al agregar la información contenida en la distribución. Por ello, en el análisis de la desigualdad, es habitual la utilización de un conjunto de índices a fin de tener en cuenta distintos juicios de valor en su medición.

Las posibilidades de elección de índices de desigualdad son muy amplias⁽²⁾. Aunque en ocasiones se utilizan de forma conjunta índices cuyo fundamento teórico es muy dispar⁽³⁾, puede ser conveniente el empleo de varios índices que difieran y se complementen en el ámbito normativo, pero que, al mismo tiempo, presenten cierta homogeneidad original⁽⁴⁾.

En este trabajo tratamos de poner de manifiesto que los índices propuestos por Bonferroni (1930) y De Vergottini (1940), junto al índice de Gini (1912), satisfacen las condiciones anteriores. Presentan un conjunto de características comunes y una clara analogía formal, pero, al mismo tiempo, existen evidentes divergencias entre

(1) Véase, por ejemplo, Shorrocks y Foster (1987), Dardanoni y Lambert (1988) o Zoli (1999).

(2) Los más utilizados en las aplicaciones, además de las medidas estadísticas tradicionales que cuantifican la dispersión, son los índices de la familia de Atkinson (1970), los de Entropía Generalizada (Shorrocks, 1980) y los índices de Gini generalizados o S-Gini (Donaldson y Weymarck (1980, 1983), Kakwani (1980), Yitzhaki (1983)).

(3) Una práctica frecuente consiste en combinar el índice de Gini (1912) con índices de Atkinson y/o índices de entropía. Newbery (1970) analiza las diferencias, en cuanto a fundamentación, entre el índice de Gini y los de Atkinson. Las medidas de entropía proceden de la teoría de la información.

(4) De este modo, al aplicarlos a un problema concreto, las posibles discrepancias en los resultados, según el índice, no serán imputables a su diferente fundamentación. En Imedio y Bárcena (2007) se hacen algunas consideraciones en este sentido.

ellos, lo que implica que incorporen juicios de valor diferentes y, en cierto modo, complementarios en la medición de la desigualdad y del bienestar.

Los índices de Bonferroni (B) y de De Vergottini (V) han tenido una presencia muy limitada en los numerosos trabajos, teóricos y/o empíricos, que en las últimas décadas se han dedicado al estudio de la desigualdad en las distribuciones de renta. Todo lo contrario sucede con el índice de Gini (G), sin duda la medida de desigualdad más utilizada. Se hace referencia a B en Nygard y Sandström (1981), recomendando su uso para el estudio de la cola izquierda de la distribución y para la evaluación de la intensidad de la pobreza. En fechas más recientes, los trabajos de Tarsitano (1990), Giorgi (1998), Giorgi y Crescenzi (2001), Chakravarty y Muliere (2003) y Aaberge y otros (2004), ponen de manifiesto su interés para el análisis de las distribuciones de renta. En Imedio (2007) se hace un estudio estadístico y normativo de B, comparándolo en ambos sentidos con G, mientras que en Chakravarty (2007) se interpreta como medida de privación social. Las referencias a V son realmente escasas. En Piesch (2005) se estudian algunas de sus propiedades estadísticas, sin abordar cuestiones éticas.

A lo largo del trabajo se realiza un análisis de B y V. Ambos se definen comparando la media de una distribución con las medias parciales de las distribuciones truncadas, a la derecha y a la izquierda, determinadas por los distintos niveles de renta. Las propiedades de los dos índices se analizan de forma simultánea para poner de manifiesto sus similitudes y diferencias. Estas propiedades se comparan, a su vez, con las de G. Los tres índices pertenecen a la familia de las medidas lineales de desigualdad (Mehran, 1976), por lo que pueden obtenerse ponderando las diferencias relativas entre las rentas y la renta media, a través de la distribución. Las diferencias entre sus respectivos esquemas de ponderación generan sus distintas actitudes en la valoración de la desigualdad y del bienestar.

En el ámbito normativo, aunque los tres índices muestran una preferencia por la igualdad y satisfacen, por lo tanto, el Principio de Transferencias de Pigou-Dalton (PTPD), cada uno de ellos incorpora una sensibilidad particular frente a las transferencias progresivas que puedan tener lugar en los diferentes tramos de la distribución. A este respecto se analizan sus respuestas frente al llamado Principio de Sensibilidad Posicional de las Transferencias (PSPT).

El artículo sigue el siguiente esquema. En la sección segunda, se establece el marco de análisis y se definen las curvas de Lorenz, de Bonferroni y de De Vergottini, comparando tanto el tipo de información que proporcionan, como su distinta forma de evaluar la desigualdad local mediante la diferencia entre cada una de ellas y su correspondiente en caso de equidistribución. En la sección tercera se definen los índices G, B y V a partir de las curvas anteriores, se obtienen e interpretan diferentes expresiones de ellos y se establecen sus principales propiedades. En

la sección cuarta se obtienen las expresiones de los índices para distribuciones discretas; ello permite su cálculo a partir de microdatos y, a la vez, se muestran de forma explícita las diferencias, y la simetría, que presentan sus respectivos esquemas de ponderación de las rentas. Los aspectos normativos se abordan en la sección quinta. En ella se estudian las características de sus funciones de evaluación social y se analiza la respuesta de los índices frente a las transferencias. También se proporciona una interpretación de B y de V mediante sendos procesos de transferencias que permiten transformar en igualitaria una distribución dada. La sección sexta, utilizando como fuente la Encuesta de Condiciones de Vida del año 2006 para España, incluye una ilustración empírica. En la última sección se sintetizan los resultados obtenidos y se incluyen algunos comentarios.

2. LAS CURVAS DE LORENZ, DE BONFERRONI Y DE DE VERGOTTINI

Supondremos que la distribución de la renta en una población está representada por la variable aleatoria X , cuyo recorrido es el intervalo $[x_m, x_M]$, $x_M > x_m \geq 0$, siendo F

su función de distribución(5) y $\mu = E(X) = \int_{x_m}^{x_M} x dF(x) < +\infty$ su renta media.

La curva de Lorenz asociada, $L(p)$, $p=F(x)$, se define mediante:

$$L: [0, 1] \rightarrow [0, 1], L(p) = \frac{1}{\mu} \int_{x_m}^x s dF(s) = \frac{1}{\mu} \int_0^p F^{-1}(t) dt, 0 \leq p \leq 1, \quad [1]$$

siendo $F^{-1}(t) = \inf\{s: F(s) \geq t\}$, $0 \leq t \leq 1$, la inversa generalizada de F , continua por la izquierda, que proporciona la renta correspondiente al percentil t de la distribución. Para cada $p=F(x)$, $L(p)$ es la proporción del volumen total de renta que acumula el conjunto de unidades con renta menor o igual que x . Es evidente que para $0 \leq p \leq 1$ es $L(p) \leq p$, siendo $L(p)=p$ en caso de equidistribución y $L(p)=0$, $0 \leq p < 1$, $L(1)=1$, si la concentración es máxima. Para cualquier distribución, X , la curva de Lorenz es

(5) En ocasiones, para facilitar la obtención de resultados teóricos, se supondrá la continuidad de F . En tal caso, $f(x)=F'(x)$ es la función de densidad de la distribución.

creciente, convexa y, dada la renta media, la función de densidad de X se obtiene a partir de la curvatura(6) de $L(p)$.

Se pueden considerar sencillas transformaciones de la curva de Lorenz que dan lugar a interpretaciones alternativas de la información contenida en ella.

Bonferroni (1930), al definir su índice de desigualdad, considera la curva:

$$B : [0, 1] \rightarrow [0, 1], B(p) = \begin{cases} \frac{L(p)}{p}, & 0 < p \leq 1, \\ \frac{x_m}{\mu}, & p = 0. \end{cases} \quad [2]$$

se verifica $B(p) \leq 1$, $0 \leq p \leq 1$. Para una distribución igualitaria se tiene que $B(p)=1$, $0 \leq p \leq 1$, mientras que cuando la concentración es máxima, $B(p)=0$ si $0 \leq p < 1$ y $B(1)=1$.

En De Vergottini (1940) se utiliza la función:

$$V : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, V(p) = \begin{cases} \frac{1-L(p)}{1-p}, & 0 \leq p < 1, \\ \frac{x_M}{\mu}, & p = 1. \end{cases} \quad [3]$$

es inmediato que $V(p) \geq 1$, $0 \leq p \leq 1$. En caso de equidistribución es $V(p)=1$, mientras que si la concentración es máxima, $V(p)=1/(1-p)$, $0 \leq p < 1$.

Las funciones $B(p)$ y $V(p)$ se conocen en la literatura como curva de Bonferroni y curva de De Vergottini, respectivamente. Sus valores son medias condicionadas relativas, de acuerdo con su significado.

En efecto, dado un nivel de renta $x \in [x_m, x_M]$, las rentas medias de las distribuciones truncadas que resultan al restringir la variable X a los intervalos $[x_m, x]$ y

(6) Estas propiedades son consecuencia de las siguientes igualdades

$$\frac{dL(p)}{dp} = \frac{x}{\mu} = \frac{F^{-1}(p)}{\mu} > 0, \quad \frac{d^2L(p)}{dp^2} = \frac{1}{\mu f(x)} = \frac{1}{\mu f(F^{-1}(p))} > 0, \quad 0 < p = F(x) < 1,$$

$$L'(0^+) = \frac{x_m}{\mu}, \quad L'(1^-) = \frac{x_M}{\mu}, \quad L''(0^+) = \frac{1}{\mu f(x_m)}, \quad L''(1^-) = \frac{1}{\mu f(x_M)}.$$

$[x, x_M]$, respectivamente, vienen dadas por:

$$m(x) = E(X/X \leq x) = \frac{1}{F(x)} \int_{x_m}^x s dF(s) = \mu \frac{L(p)}{p}, \quad 0 < p = F(x) \leq 1, \quad [4]$$

$$M(x) = E(X/X \geq x) = \frac{1}{1 - F(x)} \int_x^{x_M} s dF(s) = \mu \frac{1 - L(p)}{1 - p}, \quad 0 \leq p = F(x) < 1. \quad [5]$$

como consecuencia, se verifica:

$$B(p) = \frac{m(x)}{\mu}, \quad 0 < p = F(x) \leq 1, \quad B(0) = \frac{x_m}{\mu}, \quad [6]$$

$$V(p) = \frac{M(x)}{\mu}, \quad 0 \leq p = F(x) \leq 1, \quad V(1) = \frac{x_M}{\mu}. \quad [7]$$

es decir, si $p=F(x)$ es la proporción de unidades cuya renta es menor (resp. mayor) o igual que x , $B(p)$ (resp. $V(p)$) es el cociente entre la renta media de ese grupo y la media de la población. En particular, fijada una línea de pobreza, z , si $p_z=F(z)$ es la proporción de pobres, $B(p_z)$ (resp. $V(p_z)$) es la renta media de los pobres (resp. no pobres) expresada como fracción de la renta media de la población.

Las curvas de Bonferroni y de De Vergottini, al igual que la de Lorenz, proporcionan una representación gráfica de la desigualdad y aunque cada una de ellas queda determinada por cualquiera de las otras dos, la información que ofrecen es diferente. Los valores de $L(p)$ son participaciones en la renta total, mientras que los de $B(p)$ y $V(p)$ se refieren a niveles relativos de renta⁽⁷⁾.

Como se indicó, $L(p)$ es para cualquier distribución una función creciente y convexa. Sin embargo, la forma de las curvas $B(p)$ y $V(p)$ depende de las características de la distribución subyacente, F . Ambas funciones son crecientes, dado que

(7) La forma en que se presenta la información mediante la curva de Bonferroni es la utilizada por las oficinas de estadística cuando al analizar las distribuciones de renta facilitan, por ejemplo, las rentas medias de determinados cuantiles como fracciones de la media de la población.

$$B'(p) = \frac{1}{\mu p^2} \int_0^p \frac{t dt}{f(F^{-1}(t))} > 0, \quad V'(p) = \frac{1}{\mu(1-p)^2} \int_p^1 \frac{(1-t) dt}{f(F^{-1}(t))} > 0,$$

pero su comportamiento en cuanto a concavidad/convexidad depende del que presente F , como se deduce de las expresiones de sus derivadas segundas, que vienen dadas por(8):

$$B''(p) = -\frac{1}{\mu p^3} \int_0^p \frac{t^2 f(F^{-1}(t)) dt}{(f(F^{-1}(t)))^3}, \quad V''(p) = -\frac{1}{\mu(1-p)^3} \int_p^1 \frac{(1-t)^2 f(F^{-1}(t)) dt}{(f(F^{-1}(t)))^3}.$$

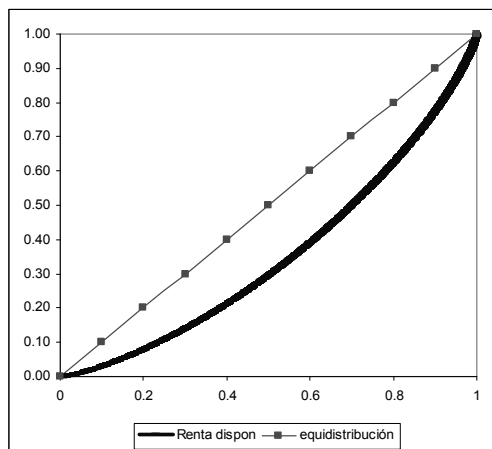
con lo cual, si F es convexa (resp. cóncava), en cuyo caso f es creciente (resp. decreciente) y la mayoría de la población tiene rentas altas (bajas), $B(p)$ y $V(p)$ son cóncavas (resp. convexas). Si en una distribución la función de densidad, f , es campaniforme y asimétrica a la derecha, F es convexa/cóncava, de modo que $B(p)$ y $V(p)$ son cóncavas/convexas. Cuando la función de distribución es cóncava/convexa, las rentas más bajas y las más altas son las más frecuentes, existiendo una tendencia hacia la polarización, en cuyo caso $B(p)$ y $V(p)$ son convexas/cóncavas. Es decir, las formas de las curvas de Bonferroni y de De Vergottini, a diferencia de lo que sucede con la curva de Lorenz, proporcionan información sobre la distribución asociada.

La Figura 1 muestra las gráficas de las curvas $L(p)$, $B(p)$ y $V(p)$ asociadas a la distribución de renta disponible en España para 2005, utilizando los datos de la Encuesta de Condiciones de Vida 2006.

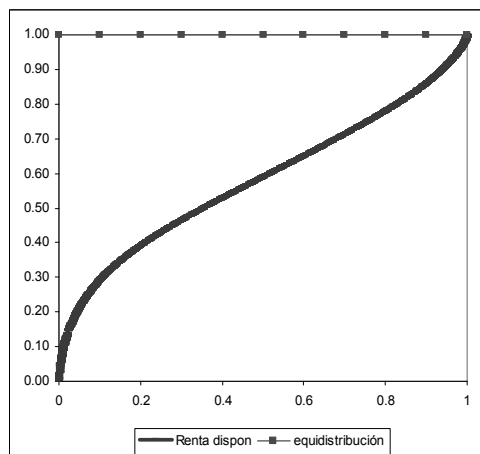
(8) Siempre que $\lim_{p \rightarrow 0^+} (p^2/f(F^{-1}(p))) = 0$, en el caso de $B(p)$ y $\lim_{p \rightarrow 1^-} ((1-p)^2/f(F^{-1}(p))) = 0$,

para $V(p)$. La demostración de estas condiciones y de las expresiones para las derivadas de ambas curvas es sencilla, aunque algo laboriosa. Está a disposición de quienes la soliciten a los autores del trabajo.

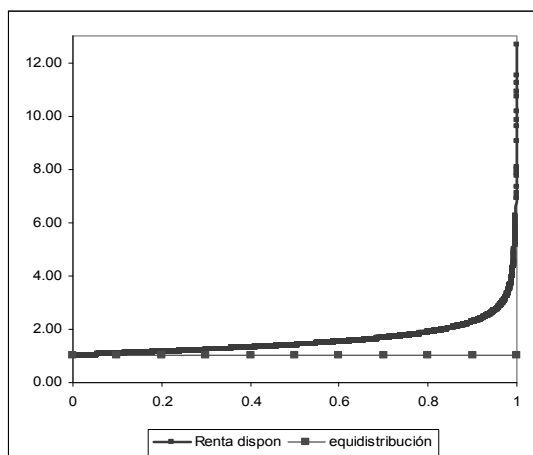
Figura 1
CURVA DE LORENZ, $L(p)$



CURVA DE BONFERRONI, $B(p)$



Fuente: Encuesta de Condiciones de Vida 2006

Figura 1**CURVA DE DE VERGOTTINI, $V(p)$** 

Fuente: Encuesta de Condiciones de Vida 2006

Cuando cada una de las curvas anteriores se compara, en un percentil $x=F^{-1}(p)$, $0 \leq p \leq 1$, con su correspondiente en caso de equidistribución, se obtiene una valoración de la desigualdad acumulada hasta ese percentil. Si la curva utilizada es la de Lorenz

$$D_L(p) = p - L(p), \quad p=F(x), \quad [8]$$

es la diferencia entre la participación que tendría el conjunto de individuos con renta menor o igual que x , en el volumen total de renta, si la distribución fuese igualitaria, y su participación real en la distribución considerada. $D_L(p)$ toma valores entre 0 y 1, es creciente en $(0, F(\mu))$, decreciente en $(F(\mu), 1)$ y presenta su máximo en $F(\mu)$, siendo $D_L(F(\mu)) = F(\mu) - L(F(\mu))$ el llamado coeficiente de Schutz(9).

(9) Es un índice relativo de desigualdad, igual a la mitad de la desviación absoluta media de la distribución. Mide la proporción de la renta total que tendría que ser transferida desde las rentas situadas por encima de la media a las situadas por debajo de la misma, para obtener un reparto igualitario.

Si la desigualdad se representa mediante la curva de Bonferroni, la función

$$D_B(p) = 1 - B(p) = \frac{\mu - m(x)}{\mu}, \quad p=F(x), \quad [9]$$

mide la diferencia relativa entre la renta media de la población y la renta media de quienes están situados por debajo del nivel de renta x . Es una función decreciente en $[0, 1]$ cuyos valores están comprendidos entre 0 y $1 - x_m/\mu$.

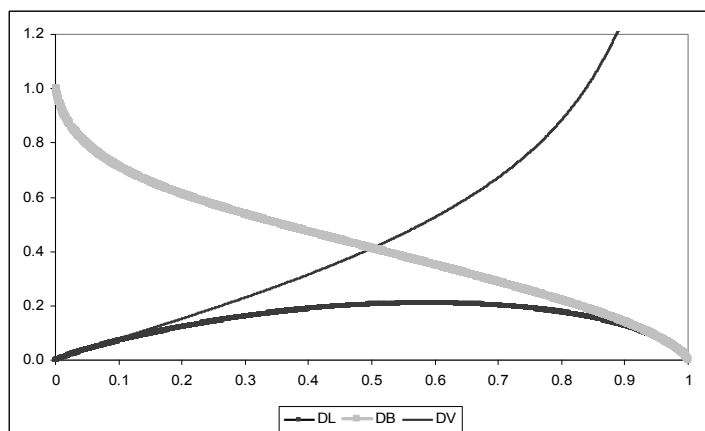
Utilizando la curva de De Vergottini,

$$D_V(p) = V(p) - 1 = \frac{M(x) - \mu}{\mu}, \quad p=F(x), \quad [10]$$

es la diferencia entre la renta media de quienes perciben rentas mayores o iguales que x y la renta media de la población, expresada como fracción de ésta última. Es una función creciente en $[0, 1]$ cuyos valores están entre 0 y $x_M/\mu - 1$.

En la Figura 2 se representan las funciones D_L , D_B y D_V para la distribución de la renta disponible para España en 2005.

Figura 2
FUNCIONES D_L , D_B Y D_V PARA LA DISTRIBUCIÓN DE LA RENTA
DISPONIBLE EN ESPAÑA EN 2005



Fuente: Encuesta de Condiciones de Vida 2006

Por lo tanto, no es indiferente el seleccionar una curva en concreto para realizar la medición de la desigualdad local. Con la elección se introducen juicios de valor al asignar más o menos importancia a la desigualdad existente en los diferentes tramos de la distribución. Mediante $D_L(p)$, $D_B(p)$ y $D_V(p)$ se valora en mayor medida la desigualdad local en la parte intermedia, cola inferior y cola superior de la distribución, respectivamente. En la sección siguiente, a partir de estas funciones se definen tres índices en los que subyacen estos criterios en la valoración de desigualdad.

3. LOS ÍNDICES DE GINI, DE BONFERRONI Y DE DE VERGOTTINI. DEFINICIÓN Y PROPIEDADES

Una de las medidas de desigualdad a las que se ha dedicado más atención en la literatura, tanto en el trabajo teórico como aplicado, es el coeficiente de Gini (1912), G . Una forma habitual de definirlo es a partir de la curva de Lorenz, $L(p)$, asociada a una distribución de rentas, mediante la expresión:

$$G = 2 \int_0^1 (p - L(p)) dp = 2 \int_0^1 D_L(p) dp = 1 - 2 \int_0^1 L(p) dp. \quad [11]$$

su valor es el doble del área del recinto limitado por la curva de Lorenz de la distribución considerada y la correspondiente al caso de reparto igualitario. Es un índice normalizado, $G \in [0, 1]$, siendo $G=0$ si existe equidistribución y $G=1$ si la concentración es máxima.

A partir de las curvas $B(p)$ y $V(p)$ se definen los índices de Bonferroni y de De Vergottini, respectivamente.

Definición 1 (Bonferroni, 1930). Si $B(p)$ es la curva de Bonferroni asociada a una distribución de renta, se define el índice de Bonferroni, B , como:

$$B = 1 - \int_0^1 B(p) dp = \int_0^1 D_B(p) dp. \quad [12]$$

Definición 2 (De Vergottini, 1940). Si $V(p)$ es la curva de De Vergottini asociada a una distribución, se define el índice de De Vergottini, V , como:

$$V = \int_0^1 V(p) dp - 1 = \int_0^1 D_V(p) dp. \quad [13]$$

por lo tanto, B (resp. V) es el área comprendida entre la curva de Bonferroni (resp. De Vergottini) y la línea de equidistribución. Si la distribución es igualitaria es $B(p)=V(p)=1$, $0 < p < 1$, y $B=V=0$. Si la concentración es máxima, es $B=1$, mientras que $V(p)=1/(1-p)$, $0 < p < 1$, por lo que la integral de la expresión [13] no es convergente. En consecuencia, $B \in [0,1]$ mientras que el índice V no está acotado superiormente(10).

Proposición 1. B (resp. V) es el valor esperado de las diferencias, en términos relativos, entre la renta media de la distribución y las rentas medias de los conjuntos de individuos con rentas por debajo (resp. por encima) de cada uno de los posibles niveles.

Demostración. A partir de las definiciones de ambos índices y de las igualdades [9] y [10], resulta:

$$B = \int_{x_m}^{x_M} D_B(F(x)) dF(x) = \int_{x_m}^{x_M} \frac{\mu - m(x)}{\mu} dF(x), \quad [14]$$

$$V = \int_{x_m}^{x_M} D_V(F(x)) dF(x) = \int_{x_m}^{x_M} \frac{M(x) - \mu}{\mu} dF(x). \quad [15]$$

El índice de Gini se puede obtener como media ponderada tanto de la función $D_B(F(x))$, como de $D_V(F(x))$, utilizando como ponderaciones $k_1(x) = 2F(x)$ y $k_2(x) = 2(1 - F(x))$, respectivamente:

$$\int_{x_m}^{x_M} D_B(F(x)) k_1(x) dF(x) = \int_{x_m}^{x_M} D_V(F(x)) k_2(x) dF(x) = 2 \int_0^1 (p - L(p)) dp = G. \quad [16]$$

por lo tanto, los tres índices se pueden expresar a partir de las medias parciales que resultan al truncar la distribución por encima, o por debajo, de cada nivel de renta. El siguiente resultado proporciona una relación entre sus valores numéricos.

(10) No existe una cota superior válida para cualquier distribución de renta. Para una distribución dada cuya renta máxima sea x_M , $V \in [0, (x_M/\mu) - 1]$.

Proposición 2. Para cualquier distribución de rentas se satisface(11):

$$(i) \quad G \leq B \leq \sqrt{G}.$$

$$(ii) \quad \frac{\mu}{x_M - \mu} V^2 \leq G \leq V.$$

El comportamiento de los tres índices frente a los cambios de escala y de origen es idéntico.

Proposición 3. G , B y V son índices relativos de desigualdad, mientras que μG , μB y μV son índices absolutos. Son, por lo tanto, índices de compromiso(12).

Demostración. La primera afirmación es inmediata dado que la curva de Lorenz es invariante frente a cambios de escala. Por otra parte, si a partir de la variable X se realiza un cambio de origen y se considera la variable $X+a$, $a>0$ ó $-\mu < a < 0$, su curva de Lorenz asociada es:

$$L_{X+a}(p) = \frac{1}{\mu_{X+a}} (\mu L_X(p) + ap).$$

Por lo tanto, las curvas de Bonferroni y de De Vergottini correspondientes a $X+a$ son:

$$B_{X+a}(p) = \frac{1}{\mu_{X+a}} (\mu B_X(p) + a), \quad V_{X+a}(p) = \frac{1}{\mu_{X+a}} (\mu V_X(p) + a).$$

Teniendo en cuenta las definiciones de los índices, se verifica:

$$G_{X+a} = 1 - 2 \int_0^1 L_{X+a}(p) dp = \frac{\mu_X}{\mu_{X+a}} G_X,$$

$$B_{X+a} = 1 - \int_0^1 B_{X+a}(p) dp = \frac{\mu_X}{\mu_{X+a}} B_X,$$

(11) La demostración de este resultado está a disposición de quienes la soliciten a los autores.

(12) Un índice relativo, I , es de compromiso si μI es un índice absoluto. Un índice absoluto, J , es de compromiso si J/μ es un índice relativo (Blackorby y Donaldson, 1980).

$$V_{X+a} = \int_0^1 V_{X+a}(p) dp - 1 = \frac{\mu_X}{\mu_{X+a}} V_X .$$

Las igualdades anteriores implican que μG , μB y μV son índices absolutos, invariantes frente a cambios de origen. De esas igualdades se concluye también que si $a > 0$, entonces $G_{X+a} < G_X$, $B_{X+a} < B_X$ y $V_{X+a} < V_X$. Sucede lo contrario si $-\mu < a < 0$.

Una propiedad característica del índice de Gini, que en ocasiones se utiliza como definición, es:

$$G = \frac{1}{\mu} \text{Cov}(X, F(X)) .$$

es decir, G se puede obtener a partir de la covarianza entre la renta de los individuos y sus respectivos rangos en la distribución. Los índices de Bonferroni y de De Vergottini satisfacen una propiedad análoga.

Proposición 4. Se verifican las igualdades:

$$B = -\frac{1}{\mu} \text{Cov}(X, \ln(F(X))) ,$$

$$V = -\frac{1}{\mu} \text{Cov}(X, \ln(1 - F(X))) .$$

esto es, el índice de Bonferroni (resp. De Vergottini) se puede expresar a partir de la covarianza entre la renta y el logaritmo natural de la función de distribución (resp. supervivencia).

Demostración. Por definición,

$$\text{Cov}(X, \ln(F(X))) = E(X \ln(F(X))) - E(X)E(\ln(F(X))) ,$$

$$\text{Cov}(X, \ln(1 - F(X))) = E(X \ln(1 - F(X))) - E(X)E(\ln(1 - F(X))) .$$

integrando por partes y utilizando que, como consecuencia de la regla de L'Hôpital, $\lim_{p \rightarrow 0^+} \ln(p)L(p) = 0$, $\lim_{p \rightarrow 0^+} p \ln(p) = 0$ y $\lim_{p \rightarrow 1^-} (L(p) - p) \ln(1 - p) = 0$, se tiene:

$$\text{Cov}(X, \ln(F(X))) = \mu \int_0^1 L'(p) \ln(p) dp - \mu \int_0^1 \ln(p) dp = \mu \left(\int_0^1 \frac{L(p)}{p} dp - 1 \right) = -\mu B,$$

$$\text{Cov}(X, \ln(1-F(X))) = \mu \int_0^1 L'(p) \ln(1-p) dp - \mu \int_0^1 \ln(1-p) dp = \mu \int_0^1 \frac{L(p) - p}{1-p} dp = -\mu V.$$

En la siguiente proposición se prueba que los tres índices pertenecen a la familia de las medidas lineales de desigualdad definidas por Mehran(13) (1976). Es decir, pueden obtenerse ponderando las diferencias de Lorenz, $p - L(p)$, o las diferencias relativas de renta $(F^{-1}(p) - \mu)/\mu$, a lo largo de la distribución.

Proposición 5. Los índices G , B y V son medidas de desigualdad en el sentido de Mehran.

Demostración. A partir de las igualdades [11], [12] y [13] que definen los índices, se tiene:

$$G = \int_0^1 (p - L(p)) \pi_G(p) dp, \pi_G(p) = 2, 0 \leq p \leq 1,$$

$$B = \int_0^1 (p - L(p)) \pi_B(p) dp, \pi_B(p) = \frac{1}{p}, 0 < p \leq 1,$$

$$V = \int_0^1 (p - L(p)) \pi_V(p) dp, \pi_V(p) = \frac{1}{1-p}, 0 \leq p < 1.$$

integrando por partes, de las igualdades anteriores resulta:

$$G = \frac{1}{\mu} \int_0^1 (F^{-1}(p) - \mu) \Pi_G(p) dp, \Pi_G(p) = 2p - 1, 0 \leq p \leq 1,$$

(13) Son índices del tipo $I = \frac{1}{\mu} \int_0^1 (F^{-1}(p) - \mu) k(p) dp = \int_0^1 (p - L(p)) dk(p)$, siendo $k(p)$ una función que no depende de la función de distribución F y que cumple la condición de normalización $\int_0^1 k(p) dp = 0$.

$$B = \frac{1}{\mu} \int_0^1 (F^{-1}(p) - \mu) \Pi_B(p) dp, \Pi_B(p) = 1 + \ln p, 0 < p \leq 1,$$

$$V = \frac{1}{\mu} \int_0^1 (F^{-1}(p) - \mu) \Pi_V(p) dp, \Pi_V(p) = -1 - \ln(1-p), 0 \leq p < 1$$

siendo

$$\int_0^1 \Pi_G(p) dp = \int_0^1 \Pi_B(p) dp = \int_0^1 \Pi_V(p) dp = 0.$$

Según lo anterior, para obtener el índice de Bonferroni la desigualdad acumulada hasta $p=F(x)$, representada mediante las diferencias de Lorenz, se pondera con la función $\pi_B(p)=1/p$, estrictamente decreciente y estrictamente convexa. Ello implica que al aumentar el nivel de renta, se asigna un peso cada vez menor a dichas diferencias y la tasa de decrecimiento de la ponderación es creciente. En el índice de De Vergottini, la ponderación $\pi_V(p)=1/(1-p)$ es estrictamente creciente y estrictamente convexa, por lo que al aumentar el nivel de renta se asigna un peso cada vez mayor a las diferencias de Lorenz y la tasa de crecimiento de la ponderación aumenta con el nivel de renta. El índice de Gini asigna un peso constante a la desigualdad local acumulada a lo largo de toda la distribución.

Cuando los índices se obtienen como medias ponderadas de las desviaciones relativas de las rentas respecto a la media de la distribución, las funciones $\Pi_G(p)$, $\Pi_B(p)$ y $\Pi_V(p)$ son estrictamente crecientes. Sin embargo, la primera es una función lineal y su tasa de crecimiento es constante, la segunda es estrictamente cóncava y cumple $\lim_{p \rightarrow 0^+} \Pi_B(p) = -\infty$, mientras que la tercera es estrictamente convexa y

$\lim_{p \rightarrow 1^-} \Pi_V(p) = +\infty$. En consecuencia, G, B y V evalúan de distinta forma la desigualdad existente a lo largo de la distribución. El índice B asigna mayor importancia a la desigualdad existente en la cola izquierda de la distribución (rentas bajas), mientras que el comportamiento de V en este aspecto es el contrario, dando mayor importancia a la desigualdad existente en la cola derecha (rentas altas). El índice de Gini incorpora, en este aspecto, una postura intermedia.

Para el cálculo de los índices a partir de datos micro son necesarias sus expresiones en el caso discreto. Se obtienen en la siguiente sección.

4. EXPRESIONES DE LOS ÍNDICES PARA DISTRIBUCIONES DISCRETAS

Consideremos una población homogénea fija de n individuos, $n \geq 2$. Una distribución de renta en esta población está representada mediante un vector $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ cuyas componentes, sin pérdida de generalidad, supondremos ordenadas de modo no decreciente, $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$. El conjunto de todas las distribuciones de renta en esa población lo representaremos por D^n . Si $\vec{x} \in D^n$, x_i , $1 \leq i \leq n$, es la renta del individuo i -ésimo y $\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ es la renta media de la población. La renta media de los i individuos más pobres, m_i , y la renta media de los $n-i+1$ individuos más ricos, M_i , son:

$$m_i = \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i x_j, \quad M_i = \frac{1}{n-i+1} \sum_{j=i}^n x_j, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Las versiones discretas de [9] y de [10] para las funciones diferencia $D_B(F(x))$ y $D_V(F(x))$, son:

$$D_{B,n}(F(x_i)) = \frac{\mu - m_i}{\mu}, \quad D_{V,n}(F(x_i)) = \frac{M_i - \mu}{\mu}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

El índice de Bonferroni es, por definición(14), la media del conjunto de valores $\{D_{B,n}(F(x_i))\}_{1 \leq i \leq n}$:

$$B_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_{B,n}(F(x_i)) = \frac{1}{n\mu} \sum_{i=1}^n (\mu - m_i)$$

expresado como combinación lineal de las rentas ordenadas, es:

$$B_n = \frac{1}{n\mu} \sum_{i=1}^n \lambda_{B,i} x_i, \quad \lambda_{B,i} = 1 - \sum_{j=i}^n 1/j, \quad \lambda_{B,i+1} = \lambda_{B,i} + 1/i, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_{B,i} = 0. \quad [18]$$

(14) Bonferroni (1930) propuso para la versión discreta del índice $B'_n = nB_n/(n-1)$, lo que supone promediar el conjunto de valores $\{D_{B,n}(F(x_i))\}_{1 \leq i \leq n-1}$. En este trabajo, como en Nygard y Sandström (1981) y Chakravarty (2007), se utiliza B_n para que su función de bienestar asociada dependa de la renta máxima de la distribución.

Análogamente, la media del conjunto de valores $\{D_{V,n}(F(x_i))\}_{1 \leq i \leq n}$ es el índice de De Vergottini:

$$V_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_{V,n}(F(x_i)) = \frac{1}{n\mu} \sum_{i=1}^n (M_i - \mu), \quad [19]$$

o bien:

$$V_n = \frac{1}{n\mu} \sum_{i=1}^n \lambda_{V,i} x_i, \lambda_{V,i} = \sum_{j=1}^i 1/(n-j+1) - 1, \lambda_{V,i+1} = \lambda_{V,i} + 1/(n-i), \sum_{i=1}^n \lambda_{V,i} = 0. \quad [20]$$

Como es sabido, el índice de Gini viene dado por(15):

$$G_n = \frac{1}{n\mu} \sum_{i=1}^n \lambda_{G,i} x_i, \lambda_{G,i} = (2i-1)/n - 1, \lambda_{G,i+1} = \lambda_{G,i} + 2/n, \sum_{i=1}^n \lambda_{G,i} = 0. \quad [21]$$

Las expresiones anteriores permiten calcular los índices con microdatos. A la vez, son interesantes porque ponen de manifiesto que en el esquema de ponderación utilizado para la obtención de cada índice, el peso que se asigna a la renta de cada individuo depende de la posición que éste ocupa en la distribución y es mayor cuanto mejor esté situado. Es decir, las sucesiones $\{\lambda_{B,i}\}_{1 \leq i \leq n}$, $\{\lambda_{V,i}\}_{1 \leq i \leq n}$ y $\{\lambda_{G,i}\}_{1 \leq i \leq n}$ son estrictamente crecientes, aunque presentan patrones de crecimiento diferentes. En B el crecimiento al pasar de cada posición a la siguiente es cada vez menor; en V sucede lo contrario, mientras que en G el crecimiento es constante.

Por otra parte, se verifican las relaciones:

$$\lambda_{B,i} + \lambda_{V,n-i+1} = 0, \quad 1 \leq i \leq n,$$

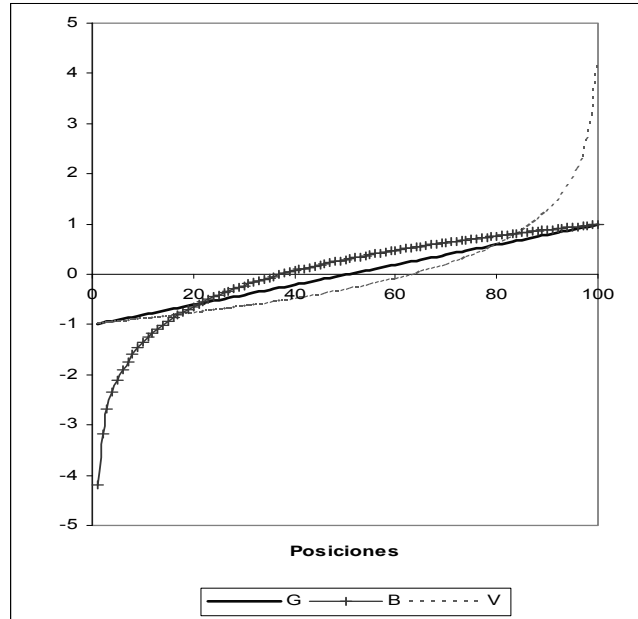
$$\lambda_{G,i} + \lambda_{G,n-i+1} = 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

la primera implica que los pesos asignados a las rentas en B y en V son, en cierto sentido, simétricos. Es decir, B asigna a la renta mínima, x_1 , un coeficiente igual, en valor absoluto, al asignado por V a la renta máxima, x_n ; lo mismo sucede al considerar x_2 y x_{n-1} , x_3 y x_{n-2} , etc. En el índice de Gini los pesos son simétricos

(15) Véase, por ejemplo, Chakravarty (1990), Cap. 3.

respecto de la mediana. En la Figura 3 se representan las sucesiones $\{\lambda_{B,i}\}_{1 \leq i \leq n}$, $\{\lambda_{V,i}\}_{1 \leq i \leq n}$ y $\{\lambda_{G,i}\}_{1 \leq i \leq n}$ para una población de tamaño 100.

Figura 3
PONDERACIONES EN LOS ÍNDICES



Es inmediato que si la distribución es igualitaria, $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = x_n = \mu$, los tres índices son nulos, $G_n = B_n = V_n = 0$. Si la concentración es máxima y en la distribución sólo hay una renta positiva, $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0$, $x_n = n\mu$, los valores de G_n , de B_n y de V_n dependen, como sucede en otras medidas de desigualdad, del tamaño de la población:

$$G_{n,\text{máx}} = \lambda_{G,n} = \frac{n-1}{n} < 1,$$

$$B_{n,\text{máx}} = \lambda_{B,n} = \frac{n-1}{n} < 1,$$

$$V_{n,m\acute{a}x} = \lambda_{V,n} = \sum_{j=1}^n 1/(n-j+1) - 1 = \sum_{j=2}^n 1/j.$$

mientras que G_n y B_n varían en $[0, 1)$, el valor máximo de V_n no está acotado superiormente, crece al hacerlo el tamaño de la población. Sin embargo, fijado n , el cociente $\bar{V}_n = V_n/V_{n,m\acute{a}x}$ es un índice normalizado, $\bar{V}_n \in [0, 1]$.

A diferencia del índice de Gini, B y V no satisfacen el Principio de Población de Dalton; es decir, no son invariantes frente a un número finito de réplicas de la población inicial(16). Ello implica que no son consistentes con el criterio de ordenación parcial inducido por la curva de Lorenz (Foster, 1985).

Aunque, por construcción, los índices de Bonferroni y de De Vergottini tienen, como el de Gini, un origen estadístico y todos ellos constituyen lo que en la literatura se conoce como “medidas objetivas de desigualdad”, es generalmente aceptado a partir del trabajo de Dalton (1920) y, sobre todo, desde la aportación de Atkinson (1970), que en cualquier medida de dispersión de rentas subyace alguna noción de bienestar social. En la sección siguiente se abordan algunos de sus aspectos normativos.

5. CONSIDERACIONES NORMATIVAS

En este trabajo, la relación entre funciones de bienestar social (FBS) e índices de desigualdad se establece mediante el enfoque AKS (Atkinson (1970), Kolm (1976), Sen (1973)), a través del concepto de renta equivalente igualmente distribuida(17) (REID). En tal caso, si I es un índice relativo de desigualdad, el bienestar asociado a una distribución $\bar{x} \in D^n$, $W(\bar{x})$, viene dado por:

$$W(\bar{x}) = \mu_{\bar{x}} [1 - I(\bar{x})] = \mu_{\bar{x}} - \mu_{\bar{x}} I(\bar{x}), \quad [22]$$

donde $\mu_{\bar{x}} I(\bar{x})$ cuantifica el coste de la desigualdad; esto es, la pérdida de bienestar debida a la desigualdad.

(16) Para el perfil de rentas $\{0, a\}$, $a > 0$, es $B_2 = 1/2$, $V_2 = 1/2$ y $\bar{V}_2 = 1$. Sin embargo, para el perfil $\{0, 0, a, a\}$ resulta $B_4 = 7/12$, $V_4 = 7/12$, $\bar{V}_4 = 7/13$.

(17) Dada una FBS, W , su REID es el nivel de renta, x_e , que si fuese percibido por todos y cada uno de los individuos de la población, la distribución igualitaria resultante proporcionaría el mismo bienestar que la distribución existente. Es decir, $W(x_1, x_2, \dots, x_n) = W(x_e, x_e, \dots, x_e)$.

A partir de la expresión [18], es inmediato que, en este contexto, la FBS correspondiente al índice de Bonferroni viene dada por:

$$W_B(\vec{x}) = \mu_{\vec{x}} [1 - B(\vec{x})] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1 - \lambda_{B,i}) x_i = \sum_{i=1}^n w_{B,i} x_i, \quad [23]$$

siendo

$$w_{B,i} = \frac{1}{n} (1 - \lambda_{B,i}) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n 1/j, \quad 1 \leq i \leq n, \quad \sum_{i=1}^n w_{B,i} = 1.$$

Análogamente, teniendo en cuenta [20], la FBS asociada al índice de De Vergotini normalizado es:

$$W_{\bar{V}}(\vec{x}) = \mu_{\vec{x}} [1 - \bar{V}(\vec{x})] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1 - \lambda_{V,i}/\lambda_{V,n}) x_i = \sum_{i=1}^{n-1} w_{\bar{V},i} x_i \quad [24]$$

donde

$$w_{\bar{V},i} = \frac{1}{n} (1 - \lambda_{V,i}/\lambda_{V,n}) = \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-i} 1/j \right) / \left(\sum_{j=2}^n 1/j \right), \quad 1 \leq i \leq n-1, \quad \sum_{i=1}^{n-1} w_{\bar{V},i} = 1.$$

Como se observa en la expresión anterior, $W_{\bar{V}}(\vec{x})$ no depende de la renta máxima de la distribución, x_n .

La REID asociada al índice de Gini, expresión [21], viene dada por:

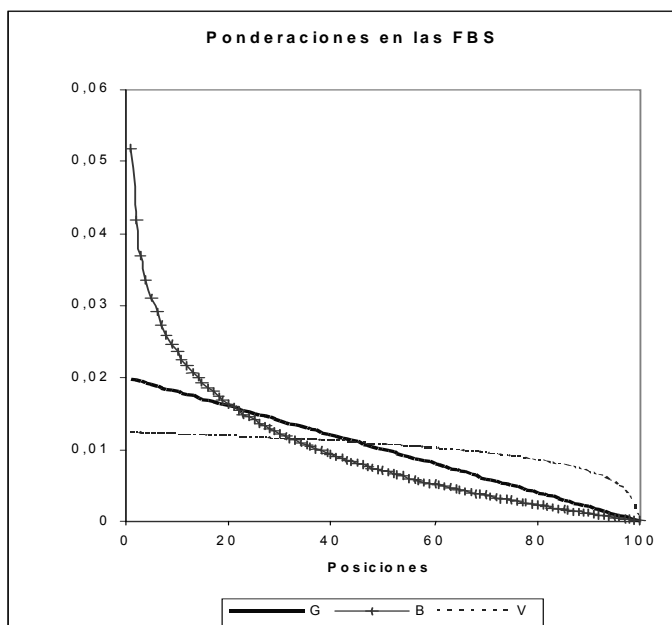
$$W_G(\vec{x}) = \mu_{\vec{x}} [1 - G(\vec{x})] = \sum_{i=1}^n w_{G,i} x_i, \quad [25]$$

siendo

$$w_{G,i} = \frac{1}{n} (1 - \lambda_{G,i}) = \frac{1}{n^2} (2(n-i) + 1), \quad 1 \leq i \leq n, \quad \sum_{i=1}^n w_{G,i} = 1.$$

Las FBSs asociadas a B, \bar{V} y G son de la forma $W(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n w_i x_i$, siendo $\{w_i\}_{1 \leq i \leq n}$ una sucesión decreciente de números reales positivos tales que $\sum_{i=1}^n w_i = 1$. Por lo tanto, todas ellas presentan características comunes: son aditivas y lineales en las rentas, ponderándolas según la posición que asignan a los individuos en la distribución. Sin embargo, las sucesiones $\{w_{B,i}\}_{1 \leq i \leq n}$, $\{w_{\bar{V},i}\}_{1 \leq i \leq n}$ y $\{w_{G,i}\}_{1 \leq i \leq n}$ siguen distintos patrones de decrecimiento, como consecuencia de las características de los esquemas de ponderación de las rentas en sus índices asociados. En la primera sucesión, la tasa de decrecimiento disminuye al aumentar el rango; en la asociada al índice \bar{V} sucede lo contrario, mientras que en la asociada al índice de Gini, el decrecimiento es constante al pasar de cada posición a la siguiente. En la Figura 4 se ponen de manifiesto estas propiedades utilizando como ejemplo una población de tamaño 100.

Figura 4
PONDERACIONES EN LAS FBSs



El gráfico anterior indica que al obtener el bienestar asociado a una distribución de rentas mediante las FBSs correspondientes a estos tres índices, W_B es la que asigna mayor (resp. menor) peso a las rentas bajas (resp. altas), W_V sigue el criterio contrario en la ponderación de las rentas, mientras que W_G incorpora una postura intermedia entre ambas.

Las tres FBSs son funciones continuas, crecientes, distributivamente homogéneas(18) y estrictamente S-cóncavas(19). Esta última propiedad implica que los índices de desigualdad, o sus FBSs, muestran aversión a la desigualdad o preferencia por la igualdad, lo que equivale a que satisfagan el Principio de Transferencias de Pigou-Dalton (PTPD). Este principio exige que al realizar una transferencia de renta desde un individuo hacia otro más pobre, sin que varíen sus posiciones relativas en la distribución (transferencia progresiva), la desigualdad disminuya y, al permanecer fija la renta media, el bienestar aumente.

Las igualdades [17] y [19] proporcionan una interpretación interesante de los índices de Bonferroni y de De Vergottini en términos de transferencias progresivas. Ambos pueden obtenerse a través de un proceso gradual de transferencias de renta para conseguir un reparto igualitario, $0 < y_1 = y_2 = \dots = y_n$, a partir de la distri-

bución inicial $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$, siendo $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i$.

Proposición 6. Para un perfil de rentas dado, el índice de Bonferroni (resp. De Vergottini) se puede interpretar como la proporción de la renta total que sería necesario transferir de forma gradual, iniciando el proceso con las rentas menores (resp. mayores), hasta alcanzar la equidistribución.

Demostración. Para igualar las dos rentas menores de la distribución, $x_1 \leq x_2$, de manera que su nuevo valor común fuese $y_1 = y_2 = m_2$, sería necesario transferir desde x_2 a x_1 una renta igual a $m_2 - x_1 = m_2 - m_1$. Realizada esta transferencia, para eliminar las diferencias entre $y_1 = y_2 = m_2$ y x_3 , de manera que $y_1 = y_2 = y_3 = m_3$ habría que transferir a cada una de las dos primeras una renta igual a $m_3 - m_2$ y reducir x_3 en una cuantía $2(m_3 - m_2)$. Reiterando el proceso, en la i -ésima redistribución se reduciría la renta x_{i+1} en $i(m_{i+1} - m_i)$ y en la última redis-

(18) Satisfacen $W(c\bar{x} + a\bar{1}^n) = cW(\bar{x}) + a$, $\bar{x} \in D^n$, $c > 0$, $\bar{1}^n = (1, 1, \dots, 1)$ y a un número real tal que $c\bar{x} + a\bar{1}^n \in D^n$. Esta propiedad caracteriza a los índices de compromiso (Chakravarty, 1990, cap. 2).

(19) Verifican la condición $W(\Lambda\bar{x}) > W(\bar{x})$, $\bar{x} \in D^n$, siendo Λ cualquier matriz biestocástica de orden n .

tribución la cantidad de renta que se transfiere desde x_n a cada una de las anteriores $y_1 = \dots = y_{n-1} = m_{n-1}$, para conseguir finalmente la equidistribución, sería $(n-1)(\mu - m_{n-1})$. A lo largo de este proceso la cantidad total de renta transferida es

$$\sum_{i=1}^{n-1} i(m_{i+1} - m_i) = \sum_{i=1}^n (\mu - m_i). \text{ Al dividir entre la renta total, } n\mu, \text{ se obtiene el índice B.}$$

El razonamiento para la interpretación de V es análogo, utilizando las medias truncadas M_i e iniciando el proceso con las dos rentas mayores de la distribución, $x_{n-1} \leq x_n$. Para conseguir que $y_n = y_{n-1} = M_{n-1}$ hay que transferir desde x_n a x_{n-1} una renta igual a $x_n - M_{n-1} = M_n - M_{n-1}$. Al reiterar el proceso, resulta que la renta total

$$\text{transferida es } \sum_{i=1}^{n-1} i(M_{n-i+1} - M_{n-i}) = \sum_{i=1}^n (M_{i+1} - \mu).$$

El comportamiento de B, V y G difiere frente a principios que incorporan criterios redistributivos más exigentes que el PTPD. Es el caso del denominado Principio de Sensibilidad Posicional de la Transferencia (PSPT) (Mehran, 1976 y Zoli, 1999). Según este principio, fijada una diferencia de rangos entre quienes tiene lugar una transferencia progresiva, el efecto de la misma es mayor en la medida en que los individuos involucrados estén situados en la parte inferior de la distribución. Para el PSPT lo relevante es la proporción de individuos situados entre el donante y el receptor así como la posición que ambos ocupen en la distribución. Formalmente, sea I un índice de desigualdad que satisface el PTPD y $\nabla I_{i+h,i}(\delta)$ su disminución al realizar una transferencia progresiva de renta, de cuantía δ , desde el individuo que ocupa la posición $i+h$ al situado en el lugar i . El índice I verifica el PSPT si se cumple:

$$j > i \Rightarrow \nabla I_{i+h,i}(\delta) \leq \nabla I_{j+h,j}(\delta), \text{ para cualquier par de individuos } i, j.$$

Si $\bar{x} \in D^n$ y se realiza una transferencia progresiva de cuantía $\delta > 0$, entre los individuos $i+h$ e i , la nueva distribución, $\bar{x}^* \in D^n$, es:

$$x_i^* = x_i + \delta, \quad x_{i+h}^* = x_{i+h} - \delta, \quad x_k^* = x_k, \quad k \neq i, i+h.$$

A partir de las expresiones [19], [20] y [21], la disminución del valor de cada índice, como consecuencia de la transferencia, viene dada por:

$$B_{\bar{x}} - B_{\bar{x}^*} = \nabla B_{i+h,i}(\delta) = \frac{\delta}{n\mu} \sum_{k=i}^{i+h-1} \frac{1}{k} > 0,$$

$$V_{\bar{x}} - V_{\bar{x}^*} = \nabla V_{i+h,i}(\delta) = \frac{\delta}{n\mu} \sum_{k=i+1}^{i+h} \frac{1}{n-k+1} > 0,$$

$$G_{\bar{x}} - G_{\bar{x}^*} = \nabla G_{i+h,i}(\delta) = \frac{2\delta h}{n^2\mu} > 0.$$

por otra parte, si $j > i$, a partir de lo anterior, se tiene:

$$\nabla B_{i+h,i}(\delta) - \nabla B_{j+h,j}(\delta) > 0,$$

$$\nabla V_{i+h,i}(\delta) - \nabla V_{j+h,j}(\delta) < 0,$$

$$\nabla G_{j+h,j}(\delta) - \nabla G_{i+h,i}(\delta) = 0.$$

La siguiente proposición recoge los resultados obtenidos sobre los principios de transferencias.

Proposición 7. Se verifican las siguientes propiedades:

- (i) Los índices B, V y G satisfacen el PTPD.
- (ii) El índice B satisface el PSPT.
- (iii) En el índice V el efecto de una transferencia progresiva, fijada la diferencia de rangos entre el donante y el receptor, es mayor cuanto más ricos sean los individuos involucrados.
- (iv) La variación del índice de Gini ante una transferencia como la descrita anteriormente es proporcional a la diferencia de rangos de los individuos entre los que tiene lugar, con independencia de dónde éstos estén situados.

6. ILUSTRACIÓN EMPÍRICA

En esta sección, utilizando como fuente la Encuesta de Condiciones de Vida(20) (ECV) del año 2006 para España, se ponen de manifiesto empíricamente los diferentes criterios que subyacen en los tres índices objeto de estudio y en sus correspondientes FBSs, al medir la desigualdad y el bienestar. Para ello, tomando como referencia la distribución de la renta disponible de los hogares españoles para el año 2005(21), se evalúa el efecto de dos partidas de renta que se reparten de distinta forma a lo largo de la distribución, en el sentido de que cada una de ellas tiene una incidencia más acusada en un determinado rango de rentas. La diferencia entre los resultados obtenidos, según el índice, refleja la influencia de los juicios de valor que éste incorpora. Las partidas de renta consideradas son las transferencias sociales (excepto las prestaciones por vejez y supervivencia), y el impuesto sobre la renta junto a las cotizaciones sociales. Se consideran, por lo tanto, tres distribuciones:

- La renta disponible del hogar.
- La renta disponible antes de incluir las transferencias sociales, excepto las prestaciones por vejez y supervivencia (renta antes de prestaciones).
- La renta disponible total del hogar antes de deducir el impuesto sobre la renta y las cotizaciones sociales (renta antes de impuestos).

Como una misma renta puede dar lugar a diferentes niveles de vida en función del tamaño y composición del hogar, las rentas se han ajustado mediante la escala de equivalencia de la OCDE modificada(22). Con ello se obtiene la renta equivalente del hogar, Y_i , definida como la renta del hogar, X_i , dividida por el número de miembros equivalentes, $m(n_i)$: $Y_i = X_i/m(n_i)$.

La partida de prestaciones sociales y la de los impuestos directos afectan de forma diferente a los distintos tramos de la distribución. Las prestaciones sociales

(20) ECV, en terminología inglesa "European Statistics on Income and Living Conditions" (EU-SILC), supone una fuente de referencia sobre estadísticas comparativas de la distribución de ingresos y la exclusión social en el ámbito europeo. Comienza en 2004 (algunos países comienzan más tarde y otros en 2003) y los ficheros de microdatos (tanto transversales como longitudinales) se generan con una periodicidad anual. El objetivo general de la ECV es la producción sistemática de estadísticas comunitarias sobre la renta y las condiciones de vida, que incluyan datos transversales y longitudinales comparables y actualizados sobre la renta, el nivel y composición de la pobreza y la exclusión social, a escala nacional y europea.

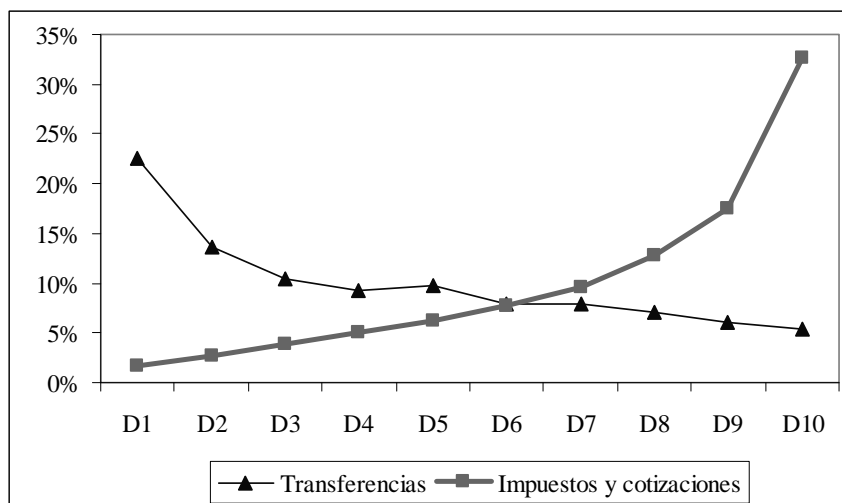
(21) Dado que los montantes relativos a ingresos son anuales y pertenecen al año anterior de la entrevista, los ingresos de la encuesta de 2006 se refieren al año 2005.

(22) Esta escala asigna valor 1 al primer adulto del hogar, 0,5 a los adultos restantes y 0,3 a cada menor de 14 años.

inciden más sobre la cola izquierda de la distribución. Los impuestos directos se concentran, en mayor medida, en su cola derecha. La Figura 5 muestra las distribuciones porcentuales, por decilas, de ambas partidas.

Figura 5

DISTRIBUCIÓN DE LAS TRANSFERENCIAS Y DE LOS IMPUESTOS DIRECTOS POR DECILAS



La Tabla 1 recoge los valores de los índices B, G y \bar{V} , para las tres distribuciones de renta consideradas y su variación porcentual como consecuencia de la percepción de las prestaciones sociales y del pago de los impuestos directos.

Tabla 1

DESIGUALDAD EN ESPAÑA, PARA LA RENTA DISPONIBLE, RENTA ANTES DE PRESTACIONES Y RENTA ANTES DE IMPUESTOS SOBRE LA RENTA

<i>Desigualdad</i>	<i>Renta antes de prestaciones</i>	<i>Renta disponible</i>	<i>Variación</i>	<i>Renta antes de impuestos</i>	<i>Renta disponible</i>	<i>Variación</i>
B	0,4452	0,4196	-5,75%	0,4400	0,4196	-4,62%
G	0,3150	0,2984	-5,27%	0,3190	0,2984	-6,47%
\bar{V}	0,0633	0,0616	-2,59%	0,0669	0,0616	-7,80%

Tanto las prestaciones sociales como los impuestos directos tienen un efecto igualador, reducen la desigualdad, como se refleja en los valores de los tres índices. Sin embargo, sus porcentajes de disminución varían según la forma en que cada una de esas partidas incide en los distintos tramos de la distribución. En el caso de las transferencias, dirigidas en mayor medida a las rentas bajas, B presenta la disminución porcentual más acusada y \bar{V} , que asigna mayor ponderación a la desigualdad local existente en las rentas altas, disminuye en un porcentaje mucho menor (un 2,59% frente a un 5,75%). La recaudación de los impuestos directos se concentra en la cola derecha de la distribución. Por ello, su efecto igualador al pasar a la distribución de renta disponible es mucho más acusado si se evalúa mediante un índice más sensible a los cambios que se producen en las rentas altas (\bar{V} se reduce en un 7,80%), que si se realiza con el índice B, que sólo disminuye un 4,62%. Cuando la reducción de la desigualdad que producen transferencias e impuestos directos se evalúa con el índice de Gini, G, se obtiene, en ambos casos, un valor intermedio.

Lo anterior demuestra que para una misma partida de renta puede considerarse que su efecto sobre la desigualdad es más o menos acusado dependiendo de dónde sitúe el evaluador social su interés. Es decir, al medir la desigualdad es esencial tener en cuenta las características del índice utilizado.

Este tipo de consideraciones se traslada a las FBSs asociadas a los índices. En la Tabla 2 figuran los valores de estas funciones y su variación, para las distribuciones de rentas consideradas, expresando las rentas medias en euros.

Tabla 2.

BIENESTAR EN ESPAÑA, PARA LA RENTA DISPONIBLE, RENTA ANTES DE PRESTACIONES Y RENTA ANTES DE IMPUESTOS SOBRE LA RENTA.

<i>Bienestar</i>	<i>Renta antes de prestaciones</i>	<i>Renta disponible</i>	<i>Variación</i>	<i>Renta antes de impuestos</i>	<i>Renta disponible</i>	<i>Variación</i>
W_B	7.024,03	7.695,72	9,56%	8.711,24	7.695,72	-11,66%
W_G	8.673,16	9.303,38	7,27%	10.592,38	9.303,38	-12,17%
$W_{\bar{V}}$	11.859,64	12.442,34	4,91%	14.514,64	12.442,34	-14,28%

En este caso, la percepción de las prestaciones, por su efecto sobre la renta media, supone un aumento del bienestar. El mayor incremento porcentual (un 9,56%) tiene lugar cuando la evaluación se realiza con W_B , FBS que asigna mayor ponderación a las rentas bajas, y el menor (sólo un 4,91%) cuando se utiliza $W_{\bar{V}}$.

El pago de los impuestos directos produce el efecto contrario⁽²³⁾, implica una reducción del bienestar como consecuencia de la disminución de la renta media. Ahora, la mayor disminución porcentual se presenta en $W_{\bar{V}}$ y la menor en W_B , de acuerdo con los criterios normativos que subyacen en ellas. De nuevo, la incidencia de ambas partidas sobre el bienestar medido con W_G se sitúa en una posición intermedia.

Las diferencias entre los juicios de valor que incorporan los índices B, G y \bar{V} , y su carácter complementario, al centrar cada uno de ellos su interés, de modo preferente, en distintos tramos de la distribución, han quedado establecidas al ir analizando sus propiedades. Mediante el análisis de las distribuciones consideradas en esta sección se pone de manifiesto no sólo dichas diferencias, sino también la posibilidad de valorar el efecto de las políticas distributivas de una manera más amplia mediante la utilización conjunta de medidas de desigualdad que incorporen distintos criterios normativos.

CONCLUSIONES

Al analizar el comportamiento de las medidas de desigualdad de Bonferroni y de De Vergottini se pone de manifiesto que entre ellos existe una relación simétrica, que se inicia en sus respectivas definiciones. Comparten un conjunto de propiedades, algunas de las cuales también las presenta el índice de Gini. Así, las tres medidas son índices de compromiso y pueden expresarse a partir de la covarianza entre las rentas de los individuos y una función de sus rangos en la distribución. Pertenecen, además, a la familia de medidas lineales propuesta por Mehran (1976), lo que implica que pueden expresarse ponderando la desigualdad local acumulada en cada percentil de renta. Sin embargo, mientras que G asigna una ponderación uniforme a lo largo de la escala de rentas a las diferencias de Lorenz, el índice B las pondera mediante un peso decreciente con el nivel de renta, dando, por lo tanto, mayor importancia a la desigualdad local existente en las rentas bajas. Por el contrario, el índice V asigna mayor peso a la desigualdad existente en la cola derecha de la distribución.

La diferencia de criterios que incorporan los tres índices en la valoración de la desigualdad a lo largo de la distribución, es la base de su distinto comportamiento y de sus discrepancias en el ámbito normativo. Sin repetir los resultados obtenidos, se puede decir que B y V se comportan de modo muy diferente, pero simétrico. En términos coloquiales se podría afirmar que sus propiedades, estadísticas y normati-

(23) Para un estudio detallado de la incidencia de los impuestos directos sobre el bienestar véase Imedio (1995).

vas, son análogas intercambiando el papel que, en cada índice, desempeñan las rentas bajas y altas. En el índice G subyace una postura intermedia.

Por ello, en las aplicaciones, la utilización conjunta de B, V y G puede ser adecuada para evaluar la desigualdad relativa de una distribución o para comparar distribuciones, según diferentes criterios distributivos. Las tres medidas incorporan una preferencia por la igualdad, pero mientras que una de ellas es más sensible a la desigualdad existente en las rentas bajas y satisface el PSPT, otra lo es a los cambios que puedan tener lugar en las rentas altas y cumple la propiedad “contraria” a ese principio. En la tercera, G, subyace una postura intermedia y el efecto de una transferencia progresiva entre dos individuos es proporcional a la diferencia entre sus rangos, sin entrar en otras consideraciones. Si con estos índices se tratase de ordenar un conjunto de distribuciones de rentas, podría suceder que se obtuviesen ordenaciones diferentes según el índice, resultado que sería muy revelador, teniendo en cuenta las propiedades de cada uno de ellos.

REFERENCIAS

- AABERGE, R., U. COLOMBINO Y S. STROM (2004): «Do more equal slices shrink the cake? An empirical evaluation of tax-transfer reform proposals in Italy». *Journal of Population Economics*, 17: 767-785.
- ATKINSON, A. B. (1970): «On the measurement of inequality». *Journal of Economic Theory*, 2: 244-263.
- BLACKORBY, C. Y D. DONALDSON (1978): «Measures of relative equality and their meaning in terms of social welfare». *Journal of Economic Theory*, 18: 59-80.
- BONFERRONI, C. E. (1930): «Elementi di statistica generale». Libreria Seber, Firenze.
- CHAKRAVARTY, S. R. (1990): «Ethical social index numbers». Springer-Verlag, New York.
- CHAKRAVARTY, S. R. (2007): «A deprivation-based axiomatic characterization of the absolute Bonferroni index of inequality». *Journal of Economic Inequality*, 5-3: 339-351.
- CHAKRAVARTY, S. R. Y P. MULIERE (2003): «Welfare indicators: A review and new perspectives. Measurement of inequality». *Metron-International Journal of Statistics*, 61: 1-41.
- DALTON, H. (1920): «The measurement of inequality of incomes», *Economic Journal*, 30: 348-361.

- DARDANONI, V. Y P. J. LAMBERT (1988): «Welfare rankings of income distributions: a role for the variance and some insights for tax reforms». *Social Choice and Welfare*, 5: 1-17.
- DE VERGOTTINI, M. (1940): «Sul signifacoto di alcuni indici di concentrazione». *Giornale degli economisti e annali di economia*, 11: 317-347.
- DONALDSON, D. Y J. A. WEYMARK (1980): «A single parameter generalization of the Gini indices of inequality». *Journal of Economic Theory*, 22: 67-86.
- DONALDSON, D. Y J. A. WEYMARK (1983): «Ethically flexible indices for income distributions in the continuum». *Journal of Economic Theory*, 29: 353-358.
- EUROSTAT (2008), «Cross-sectional EU-SILC 2006 microdata». Release 01-03-08, European Commission, Eurostat.
- FOSTER, J. E. (1985): «Inequality measurement». en *Fair Allocation* (ed. H. P. Young), *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, vol. 33.
- GINI, C. (1912): «Variabilità e mutabilità». *Studi Economico-giuridici*, Università di Cagliari, vol 3-2: 1-158.
- GIORGI, G. M. (1998): «Concentration index, Bonferroni». *Encyclopedia of Statistical Sciences*, Wiley, New York: 141-146.
- GIORGI, G. M. Y M. CRESZENCI (2001): «A look a the Bonferroni inequality measure in a reliability framework». *Statistica*, 41: 571-573.
- IMEDIO OLMEDO, L. J. (1995): «Algunas consideraciones sobre imposición y bienestar social». *Hacienda Pública Española*, 135-4: 83-95.
- IMEDIO OLMEDO, L. J. (2007): «Algunas consideraciones sobre el índice de Bonferro-ni». *Estadística Española*, Vol. 49, 164: 103-135.
- IMEDIO OLMEDO, L. J. Y E. BÁRCENA MARTÍN (2007): «Dos familias numerables de medidas de desigualdad». *Investigaciones Económicas*, XXX(1): 191-217.
- KAKWANI, N. C. (1980): «On a class of poverty measures». *Econometrica*, 48: 437-446.
- KOLM, S. C. (1976): «Unequal inequalities, I, II». *Journal of Economic Theory*, 12:416-442; 13: 82-111.
- MEHRAN, F. (1976): «Linear measures of inequality». *Econometrica*, 44: 805-809.
- NEWBERY, D. M. (1970): «A theorem of the measurement of inequality». *Journal of Economic Theory*, 2: 264-266.
- NYGARD, F. Y A. SANDSTRÖM (1981): «Measuring income inequality». Almqvist and Wicksell International, Stockholm.

- PIESCH, W. (2005): «Bonferroni-index und De Vergottini-index». Diskussionspapiere aus dem Institut für Volkswirtschaftslehre der Universität Hohenheim, 520.
- SEN, A. K. (1973): «On economic inequality», Clarendon Press, Oxford.
- SHORROCKS, A. F. (1980): «The class of additively decomposable inequality measures». *Econometrica*, 48: 613-625.
- SHORROCKS, A. F. Y J. E. FOSTER (1987): «Transfer sensitive inequality measures» *Review of Economic Studies*, 54(3): 485-497.
- TARSITANO, A. (1990): «The Bonferroni index of income inequality». en C. Dagum y M. Zenga (eds.), *Income and Wealth distribution, Inequality and Poverty*, Springer-Verlag, Heidelberg: 228-242.
- YITZHAKY, S. (1983): «On an extension of the Gini index». *International Economic Review*, 24: 617-628.
- ZOLI, C. (1999): «Intersecting generalized Lorenz curves and the Gini index». *Social Choice and Welfare*, 16: 183-196.

THREE COMPLEMENTARY INEQUALITY MEASURES

ABSTRACT

This paper studies the Bonferroni, De Vergotini and the Gini inequality measures, both normatively and statistically. These measures, all of them linear, are formally analogous and, at the same time, they have an evident divergence. These three indices belong to the same family and introduce different and, in some sense, complementary value judgments in the measurement of inequality and welfare. The three inequality and associated welfare measures are calculated for Spain using the data from the European Statistics on Income and Living Conditions 2006.

Key words: Gini, Bonferroni, De Vergottini, partial means, linear inequality measures, transfers.

AMS Classification: 90A30.