ESTAD _ T11 . 1. DISTRIB. NORMAL.

2. CARACTERÍSTICAS e IMPORTANCIA de la Normal en la Teoría y Práctica Estadística.

~~3. CONVERGENCIAS a la NORMAL.~~ NO entra

4. DISTRIBUCIÓN LOGNORMAL

5.

Falta

---

1. DISTRIBUCIÓN NORMAL

La distribución normal es la distribución más importante del Cálculo de Probabilidades y de la Estadística.

Descubierta por De Moivre (1773) como aproximación de la binomial, pero ~~el~~ el impulso se lo dan (1809) Gauss y Laplace (1812) estudiando el comportamiento de los errores de medición, sobre todo en astronomía.

Distribución normal < + habitual / patrón

Podemos empezar hablando de la distrib. Normal tipificada para luego generalizar a una $N(\mu, \sigma)$.

~~a) Di~~

a) Distrib. $N(0,1)$

Función de densidad $\rightarrow$ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ $\quad -\infty < x < +\infty$

F. de distribución $\rightarrow$ $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$

Esta integral no se resuelve de manera inmediata, por lo que los resultados están tabulados.

Además, cualquier $N(\mu, \sigma)$ se puede tipificar, de manera que $\xi \rightarrow N(\mu, \sigma) \Rightarrow \frac{\xi - \mu}{\sigma} \rightarrow N(0,1)$, por lo que la distrib. $N(0,1)$ se utiliza siempre.

Función característica $\rightarrow \varphi(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$

Esperanza $\longrightarrow \mu = 0$

Varianza $\longrightarrow \sigma^2 = 1$

b) Distribución $N(\mu, \sigma)$ $\rightarrow$ familia de distrib.

Una v.a. de tipo continuo, ξ, sigue una distrib. normal de parámetros μ y σ si:

F. densidad $\longrightarrow f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ $\quad -\infty < x < +\infty$.

donde $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$
$\pi, e \leftarrow$ nºs irracionales

Efectivamente, es f. densidad porque:

1- $f(x) > 0$ por propia definición (exponencial siempre >0)

2- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \longrightarrow$

Cambio de variable: $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$ $\quad \| \quad x \to \pm\infty \Rightarrow z \to \pm\infty$.
$dz = \dfrac{1}{\sigma} dx$

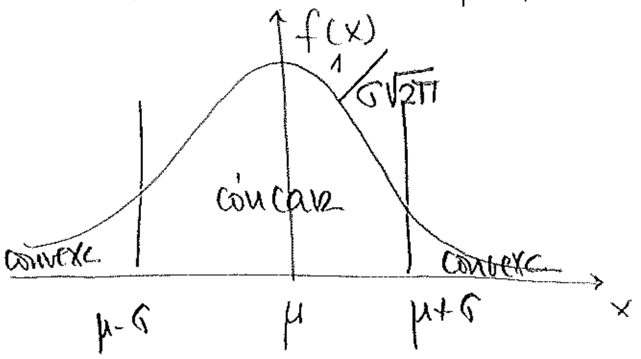
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-z^2/2} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-z^2/2} dz =$$

Cambio variable: $t = z^2 \rightarrow z = \sqrt{t}$ $\quad \| \quad z = 0 \Rightarrow t = 0$
$dt = 2z\,dz \rightarrow dz = \dfrac{dt}{2z} = \dfrac{dt}{\sqrt{2t}}$ $\quad \| \quad z \to +\infty \Rightarrow t \to \infty$

$$\ldots = \frac{\cancel{2}}{\sqrt{\cancel{2}\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot \frac{dt}{\sqrt{\cancel{2}t}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma(1/2)}{1^{1/2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} = 1.$$

La representación gráfica de la función de densidad es:



1_ Continua en $\mathbb{R}$

2_ Simétrica respecto de $x=\mu$

3_ Asíntota horizontal : $y=0$

4_ Creciente para $x<\mu$
Decrec. para $x>\mu$

5_ $x=\mu$ es máximo con $f(\mu)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$

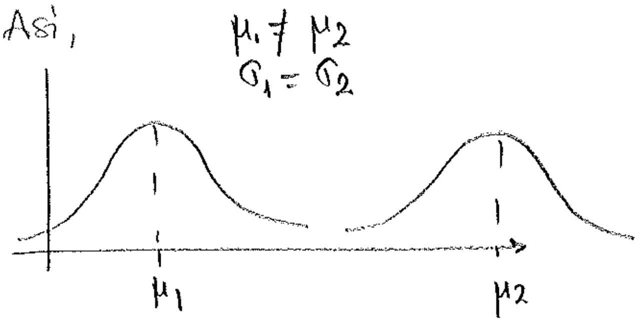
6_ Tiene dos puntos de inflexión en $x = \mu \pm \sigma$

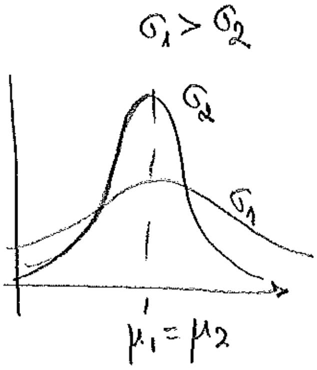
La función de densidad de una distrib. $N(\mu,\sigma)$ tiene forma de campana, donde los parámetros juegan un papel importante:

$\mu \longrightarrow$ eje de simetría y máximo valor de $f(x)$

$\sigma \longrightarrow$ grado de apuntamiento / aplastamiento de la curva

Así,





etc.

Al ser el nº de ~~normales~~ distrib pertenecientes a la familia normal infinito, es muy útil tipificarlas y utilizar la distrib. normal tipificada. Para ello hay que demostrar que la variable tipificada de una distrib. normal tb. sigue una distrib. normal.

Propiedad: $\xi \to N(\mu, \sigma) \Rightarrow \xi^* = \dfrac{\xi - \mu}{\sigma} \to N(0,1)$.

Dem: $F_{\xi^*}(z) = P(\xi^* \leq z) = P\left(\dfrac{\xi - \mu}{\sigma} \leq z\right) = P(\xi \leq \mu + \sigma z) =$

$= F_{\xi}(\mu + \sigma z)$

$f_{\xi^*}(z) = F'_{\xi}(\mu + \sigma z) = f_{\xi}(\mu + \sigma z) \cdot \sigma =$

$= \cancel{\sigma} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\cancel{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu + \sigma z - \mu}{\sigma}\right)^2} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\cancel{\sigma} z}{\cancel{\sigma}}\right)^2}$

que es la función de densidad de una normal con $\mu = 0$, $\sigma = 1$.

Proposición: $\xi^* \to N(0,1) \Rightarrow \xi = \sigma \xi^* + \mu \to N(\mu, \sigma)$

Dem: de manera análoga.

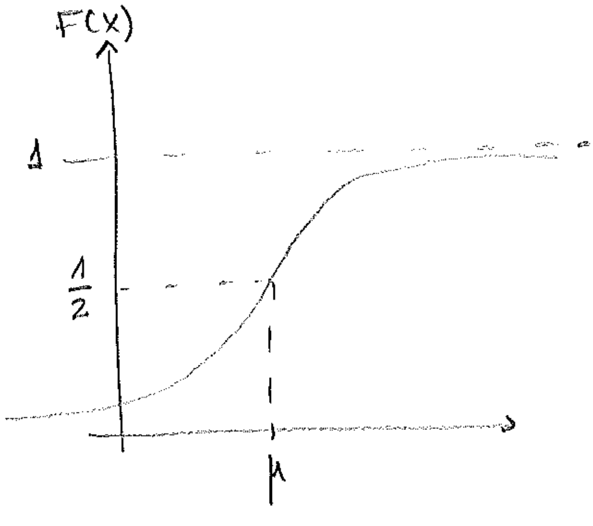
Por lo que se puede trabajar indistintamente con una $N(\mu, \sigma)$ y una $N(0,1)$.

2 _ CARACTERÍSTICAS

Función de distribución

$F(x) = P(\xi \leq x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right)^2} dt$, $-\infty < t < +\infty$.

cuya representación gráfica es:



La integral sólo se puede calcular con mt. numéricos aproximados.

Aunque se puede tabular, el nº de tablas sería ∞, por lo que se utilizan las tablas de la $N(0,1)$ tipificando la variable.

Función característica

• Para $\xi^* \to N(0,1)$

$$\varphi_{\xi^*}(t) = E[e^{it\xi^*}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \cdot f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{itx} \cdot e^{-x^2/2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2 - 2itx)}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2 - 2itx + i^2t^2) + \frac{1}{2}i^2t^2} =$$

$$= \frac{e^{\frac{i^2t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int e^{-\frac{1}{2}(x-it)^2}\,dx \overset{i^2=-1}{=} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \cdot 2\int^{\infty} e^{-1/2\,(x-it)^2}\,dx =$$

$x - it = v$
$dx = dv$

$p = 1/2$
$q = 1/2$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-it)^2}\,dx = 2\int_0^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} \cdot \frac{dz}{2\sqrt{z}} =$$

$=$

C. Variable:
$z = (\cancel{x} - it)^2 \to x - it = \sqrt{z}$
$dz = 2(x - it)\,dx$

$=$

$$\text{luego} \quad = \cancel{2}\int_0^{\infty} \frac{1}{\cancel{2}} z^{-1/2} \cdot e^{-\frac{1}{2}z}\,dz = \frac{\Gamma(1/2)}{(1/2)^{1/2}} =$$

$$= \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{2}$$

Luego $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{i^2t^2}{2}} \cdot \sqrt{2\pi} \overset{i^2=-1}{=} e^{-t^2/2}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

• Para ξ

$$\varphi_\xi(t) = E[e^{it\sigma\xi^*}] =$$

$$= e^{it\mu} \cdot e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2} = e^{it\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

$$\int_0^{\infty} x^{2p-1} e^{-qx^2} = \frac{\Gamma(p)}{2q^p}$$

⇒ Esperanza : $E[\xi] = \mu$

- Para $\xi^* \rightarrow N(0,1)$

$$\mu = E[\xi^*] = \frac{1}{i}\left|\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \frac{1}{i}\cdot 0 = 0$$

$$\varphi(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

$$\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t} = -\cancel{\frac{1}{2}}\,\cancel{2}t\cdot e^{-1/2t^2}$$

- Para $\xi \rightarrow N(\mu,\sigma)$

$$E[\xi] = E[\mu + \sigma\xi^*] = \mu + \sigma E[\xi^*] = \mu.$$

⇒ Varianza : $V[\xi] = E[\xi^2] - \mu^2 = 1 - 0 = 1$

- Para $\xi^* \rightarrow N(0,1)$

$$E[\xi^{*2}] = \alpha_2 = \frac{1}{i^2}\left|\frac{\partial^2\varphi(t)}{\partial t^2}\right|_{t=0} =$$

$$\frac{\partial\varphi^2(t)}{\partial t^2} = -1\cdot e^{-\frac{1}{2}t^2} - t\left(-t e^{-1/2t^2}\right) = t^2 e^{-1/2t^2} - e^{-1/2t^2} =$$

$$= (t^2-1)e^{-1/2t^2}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{i^2}\left(-1e^0\right) = \frac{-1}{-1} = 1$$

- Para $\xi \rightarrow N(\mu,\sigma)$ $\qquad \xi = \mu + \sigma\xi^*$

$$V[\xi] = V[\mu + \sigma\xi^*] = V[\mu] + \sigma^2 V[\xi^*] = \sigma^2.$$

En la distrib. Normal son también interesantes los momentos de orden 3 y de orden 4, ~~fue~~ con los que se pueden obtener los coef. de asimetría y curtosis de la distribución.

Coef. de asimetría : $\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = 0 \rightarrow$ todos los $\mu_{impar} = 0$

~~por~~ porque la distrib. normal es simétrica.

Coef. de curtosis : $\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = 0$ para $N(0,1)$

El hecho de que la forma de la distrib. normal sea campaniforme, unido a que los coef. de asimetría y curtosis sean 0 sirve ~~po~~ como base para contrastar si algunas distribuciones pueden ajustarse a una ley normal (contrastes de normalidad).

PROPIEDADES

P1 → Propiedad aditiva o reproductiva.

La suma de normales independientes es también normal.

P1.1 $\xi_i \rightarrow N(\mu_i, \sigma_i)$ indep $\overset{c.l.}{\Longrightarrow} \gamma = a_1\xi_1 + \dots + a_k\xi_k + b$

$\gamma \rightarrow N\left(b + \sum a_i\mu_i, \sqrt{\sum a_i^2\sigma_i^2}\right)$

Dem: Calculamos la función característica basándonos en que las variables son independientes.

$$\varphi_\gamma(t) = E\left[e^{it\gamma}\right] = E\left[e^{it(a_1\xi_1 + \dots + a_k\xi_k + b)}\right] =$$

$$= E\left[e^{itb} \cdot e^{i(a_1\xi_1 + \dots + a_k\xi_k)t}\right] = E\left[e^{itb} \cdot \prod_{j=1}^{k} e^{ita_j\xi_j}\right] =$$

$$\overset{indep}{=} E\left[e^{itb}\right] \cdot \prod_{j=1}^{k} E\left[e^{ita_j\xi_j}\right] = e^{itb} \prod_{j=1}^{k} \varphi_{\xi_j}(ta_j) =$$

$$\overset{\text{f. caract. } N(\mu_j, \sigma_j)}{=} e^{itb} \prod_{j=1}^{k} e^{ita_j\mu_j - \frac{1}{2}t^2a_j^2\sigma_j^2} = e^{i\left(b + \sum_{j=1}^{k} a_j\mu_j\right)t - \frac{t^2}{2}\sum_{j=1}^{k} a_j^2\sigma_j^2}$$

que corresponde a la f. característica de una normal con media $\mu = b + \sum_{j=1}^{k} a_j\mu_j$

y ~~desv. típica~~ varianza $\sigma^2 = \sum_{j=1}^{k} a_j^2\sigma_j^2 \Longrightarrow \sigma = \sqrt{\sum a_j^2\sigma_j^2}$

Cramér ha demostrado el teorema inverso ⟶ Si la distrib. de la suma de n v.a. indep es normal, entonces cada una de las v.a. es normal.

Por otra parte, la distrib. normal nunca puede obtenerse exactamente como suma de v.a. no normales (los teorema de convergencia hablan siempre de distrib. aproximada).

P1.2 $\xi_i \longrightarrow N(\mu_i, \sigma_i)$ indep $\Rightarrow$

$$\gamma = \xi_1 + \dots + \xi_k \quad , \gamma \longrightarrow N\left(\sum \mu_i , \sqrt{\sum \sigma_i^2}\right)$$

caso particular con $a_i = 1$, $b = 0$

P1.3 $\xi_i \longrightarrow N(\mu, \sigma)$ indep $\Rightarrow$

$$\gamma = \xi_1 + \dots + \xi_n \quad , \quad \gamma \longrightarrow N(n\mu , \sigma\sqrt{n})$$

caso particular con $\mu_i = \mu_j$, $\forall i \neq j$; $\sigma_i = \sigma_j$ $\forall i \neq j$.

P1.4 $\xi_i \longrightarrow N(\mu, \sigma_i)$ indep $\Rightarrow$

$$\gamma = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \longrightarrow N\left(\mu , \sqrt{\frac{\sum \sigma_i^2}{n}}\right)$$

Caso particular con $a_i = \frac{1}{n}$, $b = 0$, $\mu_i = \mu_j$ $\forall i \neq j$.

P1.5 $\xi_i \longrightarrow N(\mu, \sigma)$ indep $\Rightarrow$

$$\gamma = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \longrightarrow N\left(\mu , \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Caso particular con $a_i = \frac{1}{n}$, $b = 0$, $\mu_i = \mu_j$ $\forall i \neq j$, $\sigma_i = \sigma_j$ $\forall i \neq j$.

4. DISTRIB. LOGNORMAL

La distrib. logquomial o de Mac Alister está estrechamente relacionada con la distrib. normal, ya que su función de densidad coincide con la f. densidad de una v.a. cuya transf. logarítmica sigue una distrib. normal.

Sea $\xi \rightarrow N(\mu, \sigma)$ tq $-\infty < \mu < +\infty$ y $\sigma > 0$.

Diremos que η, v.a. continua no negativa, sigue una distrib. logquormal de parámetros μ y σ si la v.a. $\xi = \ln \eta$ es $N(\mu, \sigma)$.

Abreviadamente, $\eta \rightarrow \log N(\mu, \sigma)$. $\boxed{\eta = e^{\xi}}$

Función de densidad: A partir de la propia definición

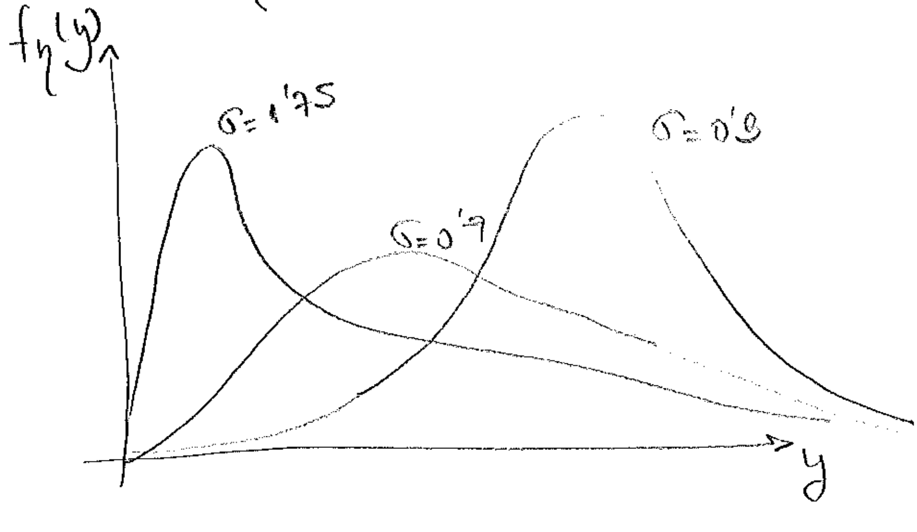
$$F_\eta(y) = P(\eta \leq y) = P(e^{\xi} \leq y) = P(\xi \leq \ln y) = F_\xi(\ln y)$$

Derivando,

$$f_\eta(y) = F'_\xi(\ln y) \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{y} f_\xi(\ln y) \overset{\text{normal}}{=}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{y\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln y - \mu}{\sigma}\right)^2} & y > 0 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

también llamada f. Cobb-Douglas



Para $\mu = 0$

Se observa que para $\sigma \searrow$ la f. se parece a Normal.

$\sigma < 0'2 \sim$ ~~N(0,1)~~ Normal.

Función de distribución

Teniendo en cuenta que $F_\eta(y) = F_\xi(\ln y)$ y que

$\frac{\xi - \mu}{\sigma} \rightarrow \xi^* = N(0,1)$, se tiene:

$$F_\eta(y) = F_\xi(\ln y) = P(\xi \leq \ln y) = P\left(\frac{\xi-\mu}{\sigma} \leq \frac{\ln y - \mu}{\sigma}\right) =$$

$$= F_{\xi^*}\left(\frac{\ln y - \mu}{\sigma}\right) \equiv \text{f. distribución normal } (0,1).$$

mirar tablas.

Esperanza

f. generatriz de momentos de una normal de orden 1 y $t=1$.

$$E[\eta] = \alpha_1 = E[e^\xi] = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$$

$$E[\eta] = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$$

Varianza

f. generatriz de momentos de orden 2 y $t=1$

$$E[\eta^2] = e^{2\mu + \frac{1}{2}(2\sigma)^2} = e^{2\mu + 2\sigma^2}$$

luego $V(\eta) = E[\eta^2] - (E[\eta])^2 = e^{2\mu + 2\sigma^2} - \left(e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}\right)^2 =$

$$= e^{2\mu + 2\sigma^2} - e^{2\mu + \sigma^2} = e^{2\mu + \sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right).$$

Propiedad reproductiva: El producto de lognormales indep es lognormal.

$\eta_i \rightarrow \log N(\mu_i, \sigma_i)$ indep.

$\gamma = \eta_1 \cdot \ldots \cdot \eta_n$, $\gamma \rightarrow \log N\left(\mu = \sum \mu_i, \sigma = \sqrt{\sum \sigma_i^2}\right)$.

propiedad que se puede extender a $\prod \eta_i^{a_i}$