ESTADÍSTICA – T1

1. FENÓMENOS ALEATORIOS
- Fenómeno / experimento
- Determinista vs Aleatorio
- Suceso y probabilidad
- Estocástico vs Aleatorio

2. ESPACIOS de PROBABILIDAD (E, Ω, P)
- Espacio muestral | e. probabilizable
- Espacio de los sucesos
- Probabilidad

3. AXIOMAS y PROPIEDADES
- Axiomática de Kolmogorov | Ax1 – $P(S)$; Ax2 – $P(E)$; Ax3 – $P(\bigcup_{i=1} \ )$

- Teoremas relacionados
  - T1 – $P(\emptyset)$
  - T2 – $P(\bigcup_{i=1} \ )$
  - T3 – $P(A \cup B)$
  - T4 – $S_1 \subset S$
  - T5 – $P(S) \leq 1$
  - T6 – $P(S^c)$

4. CASO DISCRETO y CASO CONTINUO.
- Caso discreto
  - Finito
    - general
    - equiprobable
  - Infinito numerable
- Caso continuo

1

ESTAD_T1. FENÓMENOS ALEATORIOS. ESPACIOS de PROBABILIDAD.

AXIOMAS.
PROPIEDADES } MPF: Casas
CASO DISCRETO.
CASO CONTINUO } Fernández - Abascal

---

1. FENÓMENOS ALEATORIOS

Nota: Se considera experimento a la observación de un fenómeno real, por lo que por comodidad se utilizan indistintamente.

Fenómeno determinista → aquel que, cuando se reproduce en las mismas condiciones, podemos predecir con certeza cuál va a ser el resultado.

Fenómeno aleatorio → el que, en cada manifestación, aunque se produzca bajo idénticas condiciones, el resultado no se puede predecir, y sólo es conocido después de su realización.

Los fenómenos deterministas se desarrollan en ambiente de certeza, mientras que los fenómenos aleatorios se desarrollan en ambiente de incertidumbre (X) MATIZAR

(X) Hay que distinguir entre ambiente de riesgo y ambiente de incertidumbre.

ESTAD_ T1

Para intentar acotar el grado de incertidumbre que producen los fenómenos aleatorios surge la probabilidad, como medida del grado de incertidumbre consustancial a cada suceso aleatorio (*), de manera que al no poder conocer de antemano y con certeza cuál va a ser el resultado del fenómeno aleatorio, al menos se intenta cuantificar qué posibilidades tiene de presentarse cada una de sus opciones.

Sin embargo, no todos los fenómenos en los que interviene el azar son susceptibles de "probabilización". Así, distinguimos entre fenómenos estocásticos, los que son susceptibles de "probabilización" y se desarrollan en ambiente de riesgo (**) de los fenómenos aleatorios, que no se pueden "probabilizar" y se desarrollan en ambiente de incertidumbre.

(*) Suceso aleatorio ó EVENTO → cada uno de los posibles resultados asociados a un fenómeno aleatorio.

(**) Riesgo se considera incertidumbre probabilizable.

2. ESPACIOS de PROBABILIDAD

El modelo matemático que explica el comportamiento de los resultados de los experimentos aleatorios está compuesto por tres elementos (E, Ω, P), donde:

$E \to$ espacio muestral

$\Omega \to$ espacio de los sucesos (σ-álgebra)

$P \to$ medida de probabilidad.

Espacio muestral, $E \to$ cjto de todos los posibles resultados elementales de un experimento aleatorio.

S {
- Suceso elemental $\to$ cada uno de los elementos de E
- Suceso compuesto $\to$ cjto de sucesos elementales, a su vez subcjto de E.

Suceso seguro ó cierto $= E$

Suceso imposible $= \emptyset$

Espacio de los sucesos, Ω

El nº de sucesos que pueden plantearse en un experimento aleatorio es superior al nº de sucesos elementales de E (no figuran específicamente en E, pero son subcjtos del espacio muestral) y son generados desde E mediante las operaciones de unión, intersección y complementariedad.

Algebraicamente, tienen una estructura de σ-álgebra.

ESTAD_ T1

Sea E el espacio muestral integrado por los sucesos elementales. Ω recoge todos los posibles sucesos de un experimento aleatorio, y es una colección de subconjuntos de E, llamados sucesos aleatorios ~~...~~

Ω tiene la estructura de σ-álgebra si verifica las siguientes condiciones:

→ 1_ $E \in \Omega$ (el espacio muestral pertenece a Ω)

→ 2_ $S \in \Omega \Rightarrow S^c \in \Omega$

→ 3_ Sea $S_1, \dots, S_n, \dots$ una colección infinita numerable de elementos de Ω, entonces

- $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \in \Omega$
- $\bigcap_{i=1}^{\infty} S_i \in \Omega$

Al par (E, Ω) se le da el nombre de espacio probabilizable ó espacio medible.

Medida de probabilidad, P

P es una función de conjunto que atribuye probabilidades a los sucesos de Ω.

$$P: \Omega \longrightarrow [0,1]$$
$$S \longmapsto P(S)$$

Para que la medida P sea probabilidad ha de ~~....~~ verificar los tres axiomas de Kolmogorov.

A la tripleta (E, Ω, P) se le conoce como espacio de probabilidad.

ESTAD _ T1

3_ AXIOMAS y PROPIEDADES

La definición axiomática de la probabilidad es una definición basada en un conjunto de axiomas que establecen los requisitos mínimos para dar una definición de probabilidad.

Ventaja → permite llegar a un desarrollo riguroso y matemático de la probabilidad.

Fue introducida por el matemático ruso A.N. Kolmogorov en 1933, que pone en relación la teoría de la probabilidad con la de conjuntos y con la de la medida.

Dado el espacio muestral E y la σ-álgebra sobre E, Ω } Una función de conjunto $P: \Omega \longrightarrow [0,1]$ es una probabilidad si satisface:

Ax1: $P(S) \geq 0, \forall S \in \Omega$.

Ax2: $P(E) = 1$

Ax3: Dada una sucesión numerable de sucesos incompatibles $S_1 \ldots S_n \ldots \in \Omega / S_i \cap S_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$

se verifica que

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(S_i)$$

La terna (E, Ω, P) se llama espacio probabilístico ó espacio de probabilidad.

Definición de axioma:

ESTAD _ T1

Teoremas relacionados con ~~el Cálcul~~ la def. de Probab

→ T1 → $P(\emptyset) = 0$

Dem: Sea $S_1, \dots, S_n, \dots$ sucesión numerable tq $S_i = \emptyset$
se verifica que son incompatibles.
Por Ax3, $P(\emptyset) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \emptyset\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\emptyset) \Longleftrightarrow P(\emptyset) = 0$
la suma infinita de una cantidad es igual a ella misma si y sólo si esta cantidad es 0.

→ T2 → ~~∀~~ $S_1 \dots S_n$, colección finita de sucesos incompatibles $S_i \cap S_j = \emptyset$. La probab. de su unión es igual a la suma de las probab. individuales.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(S_i)$$

Dem: Ampliamos la colección a $\underbrace{S_1 \dots S_n}_{\text{los mismos}}, \underbrace{S_{n+1}, \dots}_{= \emptyset}$

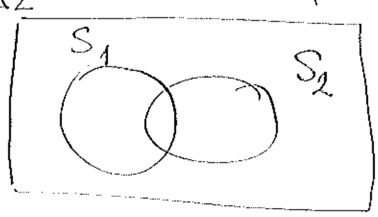
Por Ax3, $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(S_i)$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i \cup \emptyset\right) = \sum_{i=1}^{n} P(S_i) + \underbrace{\sum_{i=n+1}^{\infty} P(\emptyset)}_{= 0}$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(S_i).$$

→ T3 → $P(S_1 \cup S_2) = P(S_1) + P(S_2) - P(S_1 \cap S_2)$.

Dem: Descomponemos la unión en unión disjunta.



$$S_1 \cup S_2 = (S_1 - S_2) \cup (S_1 \cap S_2) \cup (S_2 - S_1)$$

$$P(S_1 \cup S_2) \overset{T2}{=} P(S_1 - S_2) + P(S_1 \cap S_2) + P(S_2 - S_1)$$

Ahora bien, $S_1 = (S_1 - S_2) \cup (S_1 \cap S_2)$ unión disjunta

$P(S_1) = P(S_1 - S_2) + P(S_1 \cap S_2) \Rightarrow P(S_1 - S_2) = P(S_1) - P(S_1 \cap S_2)$

$S_2 = (S_2 - S_1) \cup (S_1 \cap S_2)$ unión disjunta

$P(S_2) = P(S_2 - S_1) + P(S_1 \cap S_2) \Rightarrow P(S_2 - S_1) = P(S_2) - P(S_1 \cap S_2)$

Por lo que $P(S_1 \cup S_2) = P(S_1) - \cancel{P(S_1 \cap S_2)} + \cancel{P(S_1 \cap S_2)} + P(S_2) - P(S_1 \cap S_2)$

qed

→ T4 – $S_1 \subset S \Rightarrow P(S_1) \leq P(S)$

Dem: $S = S_1 \cup (S - S_1)$ unión disjunta

$T2 \Rightarrow P(S) = P(S_1) + P(S - S_1)$

$Ax1 \Rightarrow P(S - S_1) \geq 0 \Rightarrow P(S) \geq P(S_1)$ cqd.

→ T5 – $P(S) \leq 1$

Dem: Todo suceso está contenido en el espacio muestral, por lo que combinando T4 y AX2 se llega al resultado.

$$\left.\begin{array}{l} S \subset E \\ P(E) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow P(S) \leq P(E) = 1. \longrightarrow 0 \leq P(S) \leq 1$$

→ T6 – $P(S^c) = 1 - P(S)$

Por definición, $E = S \cup S^c$, unión disjunta.

$T2 \Rightarrow P(E) = 1 = P(S) + P(S^c)$

$\Rightarrow P(S^c) = 1 - P(S)$.

¿+ teoremas?

4_ Caso discreto y Caso continuo

a) CASO DISCRETO (resultados posibles correspondencia con $\mathbb{N}$)

a.1 → Espacio muestral finito

$E = \{w_1, \dots, w_n\}$ El espacio muestral está formado por un conjunto de sucesos elementales. Entonces, cualquier suceso de Ω se puede expresar como la unión de dichos sucesos elementales.

Por tanto, con definir las probabilidades de los sucesos elementales queda perfectamente definida la probab. en un espacio muestral finito:

1) $P(w_i) \geq 0 \quad , \forall i = 1 \dots n$ ← Ax1

2) $P(w_1) + \dots + P(w_n) = 1$ ← Ax2

Por lo que para cq suceso de Ω, su probabilidad será

$$P(S) = \sum_{w_i \in S} P(w_i) \quad , \forall S \in \Omega .$$

El axioma 3, se queda en el teorema 2.

a.2 → Espacio muestral finito equiprobable

caso particular de a.1. en el que $p(w_1) = \dots = p(w_n)$

Como $p(w_1) + \dots + P(w_n) = 1 \Rightarrow P(w_i) = \frac{1}{n} \quad , i = 1 \dots n .$

$P(S) = \frac{k}{n}$, k nº elementos S.

Regla de Laplace

$P(S) = \frac{CF}{CP}$, aplicable sólo para espacios muestrales finitos y equiprobables a.3 → Espacio muestral infinito numerable

$E = \{w_1, \dots, w_n, \dots\}$

Cualquier suceso $S \in \Omega$ puede expresarse como unión de sucesos elementales contenidos en S.

$$S = \bigcup_{w_i \in S} \{w_i\} \longrightarrow P(S) = \sum_{w_i \in S} P(w_i)$$

donde las probab. de los sucesos elementales verifican:

1) $P(w_i) \geq 0, \ \forall \ w_i \in \Omega$ ← Ax 1

2) $\sum_{i=1}^{\infty} P(w_i) = 1$ ← Ax 2

No tiene sentido la equiprobabilidad.

b) Espacio muestral continuo

El espacio muestral no es numerable, forman un cjto continuo de valores.

Sp. intervalo (0, 1), los sucesos serán subintervalos (a, b) y la σ-álgebra contendrá todas las uniones, intersecciones y complementarios de dichos subintervalos.

La probabilidad de un subintervalo se define como ~~la~~ su longitud. $P(a,b) = \frac{P(a,b)}{P(\Omega)} = \frac{b-a}{d-c}$

Esta probabilidad generaliza la regla de Laplace, entendiéndose la equiprobabilidad para subintervalos de igual tamaño.

De forma análoga podemos definir probabilidades a partir de otro tipo de medidas: superficies, volúmenes, etc.

¡Borel!

Álgebra de Borel → Mínima σ-álgebra sobre $\mathbb{R}$ que contiene a los subcjtos cerrados de $\mathbb{R}$, a los intervalos abiertos o cerrados, a los intervalos de la forma $(a, b]$ y $(-\infty, b]$.