ESTAD_T19. DISTRIBUCIONES EN EL MUESTREO ASOCIADAS CON POBLACIONES NORMALES.

DISTRIBUCIONES de la MEDIA, VARIANZA y DIFERENCIA de MEDIAS.
ESTADÍSTICOS ORDENADOS.
DISTRIB. del MAYOR y del MENOR VALOR.
DISTRIB. del RECORRIDO.

1_ DISTRIB. en el muestreo asociadas a POBL. NORMALES

Población →

Muestra →

Estadístico →

Distrib. estadístico en el muestreo →

Caso normal: $\xi \rightarrow N(\mu, \sigma) \rightarrow$ mas(n) $X = \{X_1 \dots X_n\}$

$T_1(X) = \bar{X}$ → media muestral

$T_2(X) = S_X^2$ → varianza muestral

$T(X, Y) = \bar{X} - \bar{Y}$ → diferencia de medias.

Vamos a estudiar la distrib. de probab. de estos estadísticos muestrales, diferenciando los casos de
- varianza conocida / varianza desconocida
- varianzas iguales / varianzas ≠.

2 – DISTRIB. de la MEDIA, VARIANZA y DIF. de MEDIAS

~~2.1. DISTRIB. de la MEDIA~~

2.1. VARIANZA POBLACIONAL CONOCIDA:

- $\xi: N(\mu,\sigma)$ / σ conocida $\xrightarrow{\text{mas}(n)}$ $X=\{x_1\dots x_n\}$.

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum x_i$$

$\bar{x} \longrightarrow N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$ porque: – la c.l. de normales es normal.

– $E[\bar{x}]=\mu$

– $V[\bar{x}]=\sigma^2/n$.

$$\varphi_{\bar{x}}(t)=e^{it\mu-\frac{1}{2}t^2\cdot\frac{\sigma^2}{n}}$$

- $\xi_1: N(\mu_1,\sigma_1)$ / σ_1 conocida $\xrightarrow{\text{mas}(n)}$ $X=\{x_1\dots x_n\}$
  $\xi_2: N(\mu_2,\sigma_2)$ / σ_2 conocida $\xrightarrow{\text{mas}(m)}$ $Y=\{y_1\dots y_m\}$ INDEP.

$$\left.\begin{array}{l}\bar{x}\longrightarrow N(\mu_1,\sigma_1/\sqrt{n})\\ \bar{y}\longrightarrow N(\mu_2,\sigma_2/\sqrt{m})\end{array}\right\}\quad \bar{x}-\bar{y}\longrightarrow N\left(\mu_1-\mu_2, \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}\right)$$

$$\varphi_{\bar{x}-\bar{y}}(t)=e^{(\mu_1-\mu_2)it-\frac{1}{2}t^2\left(\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}\right)}.$$

- $\bar{x}$ y S^2 son indep.

$$\frac{nS^2}{\sigma^2}\longrightarrow \chi^2_{n-1}$$

Dem:

∴ $\bar{x}\longrightarrow N(\mu,\sigma/\sqrt{n})$ / $\varphi(t)=e^{it\mu-\frac{1}{2}\cdot t^2\cdot\frac{\sigma^2}{n}}$

$$\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\longrightarrow N(0,1) \implies \left(\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2\longrightarrow \chi^2_{(1)}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2\longrightarrow \chi^2_n$$

$$\sum(x_i-\bar{x})^2=\sum(x_i-\mu)^2-n(\bar{x}-\mu)^2$$

$$\frac{nS^2}{\sigma^2}=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{\sigma^2}=\sum\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2-n\left(\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma}\right)^2\longrightarrow\chi^2_n-\chi^2_1\longrightarrow\chi^2_{n-1}$$

Al ser $\bar{x}$ y nS^2 indep,

$$\varphi_{\frac{nS^2}{\sigma^2}}(t)=(1-2it)^{-\frac{n-1}{2}}$$

2.2. VARIANZA POBLACIONAL DESCONOCIDA:

- $\xi: N(\mu, \sigma)$ σ desconocida $\xrightarrow{\text{mas}(n)} X = \{x_1 \dots x_n\}$.

$\bar{x} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ ¡σ descon.!

$\frac{nS^2}{\sigma^2} \to \chi^2_{n-1}$

$$\Rightarrow t_{n-1} = \frac{N(0,1)}{\sqrt{\frac{\chi^2_{n-1}}{n-1}}} = \frac{(\bar{x}-\mu)/\cancel{\sigma}/\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{n S^2}{\cancel{\sigma^2}}/n-1}}$$

por lo que: $\frac{\sqrt{n-1}}{S}(\bar{x}-\mu) \longrightarrow t_{n-1}$

Teniendo en cuenta la relac. entre la varianza muestral y la cuasiv. muestral: $nS^2 = (n-1)S_1^2 \to S^2 = \frac{n-1}{n} S_1^2$

$$\frac{\sqrt{n}}{S_1}(\bar{x}-\mu) \longrightarrow t_{n-1}$$

- $\xi_1: N(\mu_1, \sigma) / \sigma$ desc $\xrightarrow{\text{mas}(n)} X = \{x_1 \dots x_n\}$ $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i$, S_x^2
- $\xi_2: N(\mu_2, \sigma) / \sigma$ desc. $\xrightarrow{\text{mas}(m)} Y = \{y_1 \dots y_m\}$ $\bar{y} = \frac{1}{m}\sum y_j$, S_y^2

$\bar{x}-\bar{y} \to N\left((\mu_1-\mu_2), \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}+\frac{\sigma^2}{m}}\right)$

$\frac{nS_x^2}{\sigma^2} \to \chi^2_{n-1}$

$\frac{mS_y^2}{\sigma^2} \to \chi^2_{m-1}$

$\longrightarrow \frac{nS_x^2+mS_y^2}{\sigma^2} \to \chi^2_{n+m-2}$

$$t_{n+m-2} = \frac{N(0,1)}{\sqrt{\frac{\chi^2_{n+m-2}}{n+m-2}}}$$

$$t_{n+m-2} = \frac{\left[(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_1-\mu_2)\right] / \sqrt{\frac{\cancel{\sigma}(m+n)\cancel{\sigma^2}}{nm}}}{\sqrt{\frac{nS_x^2+mS_y^2}{\cancel{\sigma^2}} / (n+m-2)}} = \frac{\sqrt{\frac{nm}{n+m}}(\bar{x}-\bar{y})}{\sqrt{\frac{nS_x^2+mS_y^2}{n+m-2}}}$$

3_ ESTADÍSTICOS ORDENADOS

ξ v.a. continua ~~o discreta~~ ¿discreta de tipo ordinal?

$\xi \xrightarrow{mas(n)} X = \{x_1 \ldots x_n\}$

Sean

$u_1 = \min\{x_1 \ldots x_n\}$

$- - - -$

$u_n = \max\{x_1 \ldots x_n\}$

$u_1 \leq u_2 \leq \ldots \leq u_n \longrightarrow$ muestra ordenada

$u_i \longrightarrow$ estadístico ordenado de orden i

ξ v.a. continua $\Rightarrow P(\xi = u_i) = 0$, pero se puede escribir:

$$P(u_i < \xi \leq u_i + \delta u_i) = \frac{n!}{(i-1)!\,1!\,(n-i)!} P(-\infty < \xi \leq u_i)^{i-1} P(u_i < \xi \leq u_i + \delta u_i)^{1} P(u_i + \delta u_i < \xi < +\infty)^{n-i}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & i-1 & & 1 & & n-i & \\ -\infty & & u_i & & u_i+\delta u_i & & +\infty \\ & F(u_i) & & F(u_i+\delta u_i)-F(u_i) & & 1-F(u_i+\delta u_i) & \end{array}$$

$P(-\infty < \xi \leq u_i) = F(u_i)$

$P(u_i < \xi \leq u_i + \delta u_i) = F(u_i + \delta u_i) - F(u_i)$

$P(u_i + \delta u_i < \xi < +\infty) = 1 - F(u_i + \delta u_i)$

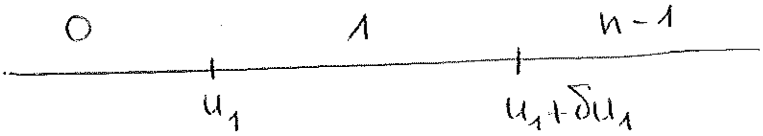
Luego: $P(u_i < \xi \leq u_i + \delta u_i) = \dfrac{n!}{(i-1)!\,1!\,(n-i)!} F(u_i)^{i-1} \left[F(u_i+\delta u_i) - F(u_i)\right] \cdot (1 - F(u_i + \delta u_i))^{n-i}$

tomando límites a: $g(u_i) = \lim\limits_{\delta u_i \to 0} \dfrac{P(u_i < \xi \leq u_i + \delta u_i)}{\delta u_i}$

$$g(u_i) = \frac{n!}{(i-1)!\,1!\,(n-i)!} F(u_i)^{i-1} \cdot f(u_i) \cdot (1 - F(u_i))^{n-i}$$

expresión que se puede particularizar para cualquier estadístico ordenado ó función de estadísticos ordenados.

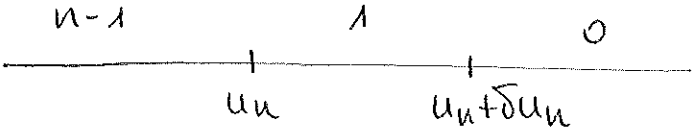
MÍNIMO:



$$P(u_1 < \xi \leq u_1+\delta u_1) = \cancel{k}\cdot F(u_1)^0 \left[F(u_1+\delta u_1) - F(u_1)\right] (1-F(u_1))^{n-1}$$

$$g(u_1) = \frac{n!}{0!\,1!\,(n-1)!}\; 1 \cdot f(u_1)\,(1-F(u_1))^{n-1} = n f(u_1)\left[1-F(u_1)\right]^{n-1}$$

MÁXIMO:

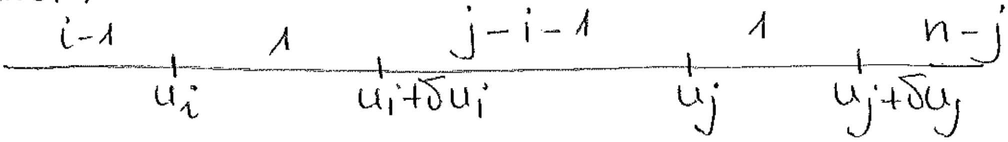


$$g(u_n) = \frac{n!}{(n-1)!\,1!\,0!} \cdot F(u_n)^{n-1} \cdot f(u_n) \cdot \left[1-F(u_n)\right]^0 =$$

$$= n f(u_n) \cdot F(u_n)^{n-1}$$

RECORRIDO:

Primero vemos la distribución conjunta de dos estadísticos ordenados:



$$P(u_i < \xi \leq u_i+\delta u_i;\, u_j < \xi \leq u_j+\delta u_j) = \frac{n!}{(i-1)!\,(j-i-1)!\,(n-j)!} \cdot P(-\infty < \xi \leq u_i)^{i-1} \cdot$$

$$\cdot P[u_i < \xi \leq u_i+\delta u_i]^1 \cdot P[u_i+\delta u_i < \xi \leq u_j]^{j-i-1} \cdot P[u_j < \xi \leq u_j+\delta u_j]^1 \cdot$$

$$\cdot P[u_j+\delta u_j < \xi < +\infty]^{n-j} =$$

$$= \frac{n!}{(i-1)!\,(j-i-1)!\,(n-j)!} F(u_i)^{i-1}\left[F(u_i+\delta u_i) - F(u_i)\right]^1 \cdot \left[F(u_j) - F(u_i+\delta u_i)\right]^{j-i-1} \cdot$$

$$\cdot \left[F(u_j+\delta u_j) - F(u_j)\right]^1 \cdot \left[1 - F(u_j+\delta u_j)\right]^{n-j}$$

Tomando límites: $g(u_i, u_j) = \lim\limits_{\substack{\delta u_i \to 0 \\ \delta u_j \to 0}} \dfrac{P(\quad)}{\delta u_i\, \delta u_j}$

$$g(u_i,u_j) = \frac{n!}{(i-1)!\,(j-i-1)!\,(n-j)!} \cdot F(u_i)^{i-1} \cdot f(u_i) \cdot [F(u_j)-F(u_i)]^{j-i-1} \cdot f(u_j)[1-F(u_j)]^{n-j}$$

Para llegar a la distrib. del recorrido partimos de la función de densidad conjunta del mínimo y el máximo, sustituimos u_n por u_1+R, y obtenemos la función de densidad del recorrido como función de densidad marginal.

$$g(u_1,u_n) = \frac{n!}{0!\,(n-2)!\,0!} \cdot F(u_1)^{1-1} \cdot f(u_1)[F(u_n)-F(u_1)]^{n-2} \cdot f(u_n)[1-F(u_n)]^{0}$$

$$= n(n-1) \cdot f(u_1) \cdot [F(u_n)-F(u_1)]^{n-2} \cdot f(u_n)$$

$u_n = R + u_1$

$$g(u_1,R) = n(n-1) \cdot f(u_1) \cdot [F(u_1+R)-F(u_1)]^{n-2} \cdot f(u_1+R)$$

$$g(R) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u_1,R)\,du_1 =$$

$$= n(n-1)\int_{-\infty}^{+\infty} f(u_1) \cdot f(u_1+R)\,[F(u_1+R)-F(u_1)]^{n-2}\,du_1$$

y la función de distrib:

$$G(R) = n(n-1)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{R} f(u_1) f(u_1+R)[F(u_1+R)-F(u_1)]^{n-2}\,du_1\,dR$$

$$= n\int_{-\infty}^{+\infty}[F(u_1+R)-F(u_1)]^{n-1} \cdot f(u_1)\,du_1$$

$x_i \rightarrow N(\mu, \sigma)$

$\bar{x} \rightarrow N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$

$\bar{X} \rightarrow t_{n-1}$

dif ($=$).

$\dfrac{nS_x^2}{\sigma^2} \rightarrow \chi^2_{n-1}$ (n-p). $\sum (x_i - \bar{x})^2$

$\sum (x_i - \mu)^2 \rightarrow \chi^2_n$ (conoc)

$$S^2 \begin{cases} \mu \text{ con} & \chi^2_n \\ \mu \text{ desc.} & \chi^2_{n-1} \end{cases}$$