

Capítulo 5

PROCESOS MA y ARMA

Herman Wold (1908-1992)

Estadístico y econométra sueco. Desarrolló la representación general de procesos estacionarios. Estudió los problemas de identificación y causalidad en econometría y las funciones de demanda. Inventó los mínimos cuadrados parciales (PLS) como método de estimación. Fue profesor de estadística en la Universidad de Uppsala desde 1942 hasta 1970 y en la de Gothenburg desde 1970 hasta 1975. Fue presidente de la Econometric Society.

5.1 Introducción

En el capítulo anterior hemos estudiado una clase de procesos lineales, los procesos autorregresivos, que se caracterizan por tener muchos coeficientes de autocorrelación distintos de cero y que decrecen con el retardo. En este sentido suele decirse que los procesos AR son procesos con memoria (fás) relativamente larga, ya que el valor actual tiene correlación lineal con todos los anteriores, aunque con coeficientes decrecientes. Esta propiedad se traduce en que podemos escribir el proceso como una función lineal de todas las innovaciones que han generado el proceso, con pesos que tienden a cero con el retardo. Estos procesos no pueden representar series donde el valor actual este sólo correlado con uno, dos o unos pocos valores anteriores, de manera que la función de autocorrelación simple tenga sólo unas pocas autocorrelaciones distintas de cero. Una familia de procesos que tienen esta propiedad de "memoria muy corta" son los procesos de media móvil, que estudiaremos en este capítulo. Estos procesos MA, se generan a partir de un número finito de innovaciones. Después generalizaremos estos resultados para procesos ARMA, que combinan las propiedades de los AR y MA y dan lugar a una familia muy amplia y flexible de procesos estocásticos útiles para representar muchas series temporales.

5.2 EL proceso de media móvil de orden uno (MA(1))

Se define el proceso de media móvil de orden uno, MA(1), como el generado por una combinación lineal de las dos últimas innovaciones, de acuerdo con la ecuación:

$$\tilde{z}_t = a_t - \theta a_{t-1} \quad (5.1)$$

donde $\tilde{z}_t = z_t - \mu$, siendo μ la media del proceso y a_t es un proceso de ruido blanco con varianza σ^2 . Este proceso puede escribirse con la notación de operadores:

$$\tilde{z}_t = (1 - \theta B) a_t.$$

El proceso MA(1) es la suma de los dos procesos estacionarios, a_t y $-\theta a_{t-1}$ y, por tanto, siempre será estacionario, para cualquier valor del parámetro, a diferencia de los procesos AR.

En las aplicaciones de este proceso supondremos que $|\theta| < 1$, de manera que la innovación pasada tenga menos peso que la presente. Entonces, decimos que el proceso es *invertible* y tiene la propiedad de que el

efecto de los valores pasados de la serie decrece con el tiempo. Para justificar esta propiedad, sustituycamos a_{t-1} en (5.1) como función de z_{t-1} , el resultado es:

$$\tilde{z}_t = a_t - \theta(\tilde{z}_{t-1} + \theta a_{t-2}) = -\theta \tilde{z}_{t-1} - \theta^2 a_{t-2} + a_t$$

y repitiendo esta operación para a_{t-2} , a_{t-3} , ..., etc, se obtiene:

$$\tilde{z}_t = - \sum_{i=1}^{t-1} \theta^i \tilde{z}_{t-i} - \theta^t a_0 + a_t \quad (5.2)$$

Se observa que si $|\theta| < 1$, el efecto de \tilde{z}_{t-k} tiende hacia cero con k y el proceso se denomina invertible. Si $|\theta| \geq 1$ se daría la situación paradójica en que el efecto de las observaciones pasadas aumentaría con la distancia y, aunque el proceso seguiría siendo estacionario, parece poco adecuado para representar series reales. En adelante, supondremos que el proceso es invertible. Entonces, como $|\theta| < 1$, existe el operador inverso $(1 - \theta B)^{-1}$ y podemos escribir:

$$(1 + \theta B + \theta^2 B^2 + \dots) \tilde{z}_t = a_t \quad (5.3)$$

y vemos que un proceso MA(1) con $|\theta| < 1$ equivale a un AR(∞) con coeficientes que decrecen en progresión geométrica.

La varianza del proceso se calcula a partir de (5.1). Elevando al cuadrado y tomando esperanzas se obtiene:

$$\sigma_z^2 = \sigma^2 (1 + \theta^2) \quad (5.4)$$

y vemos que la varianza del proceso aumenta con θ^2 .

5.2.1 Función de autocorrelación simple y parcial

Para obtener la función de autocorrelación simple de un proceso MA(1) comenzaremos calculando las covarianzas. La de primer orden se calcula multiplicando la ecuación (5.1) por \tilde{z}_{t-1} y tomando esperanzas:

$$\gamma_1 = E(\tilde{z}_t \tilde{z}_{t-1}) = E(\tilde{z}_{t-1} a_t) - \theta E(a_{t-1} \tilde{z}_{t-1}).$$

En esta expresión el término $E(\tilde{z}_{t-1} a_t)$ es cero, ya que \tilde{z}_{t-1} depende de a_{t-1} y a_{t-2} , pero no de a_t . Para calcular $E(a_{t-1} \tilde{z}_{t-1})$, sustituyendo \tilde{z}_{t-1} por su expresión, resulta $E(a_{t-1}(a_{t-1} - \theta a_{t-2})) = \sigma^2$, con lo que :

$$\gamma_1 = -\theta \sigma^2.$$

Para las covarianzas de orden más alto, multiplicando la ecuación (5.1) por \tilde{z}_{t-j} , donde $j > 1$, y tomando esperanzas, se obtiene que

$$\gamma_j = 0, \quad j > 1.$$

y utilizando la expresión (5.4) de la varianza del proceso, $\sigma_z^2 = \gamma_0$, concluimos que los coeficientes de autocorrelación son:

$$\rho_1 = \frac{-\theta}{1 + \theta^2}, \quad \rho_k = 0 \quad k > 1 \quad (5.5)$$

y la *fas* tendrá únicamente un valor distinto de cero en el primer retardo. Observemos que como $|\theta| < 1$ el coeficiente de autocorrelación en un MA(1) invertible es siempre menor que 0.5.

La función de autocorrelación simple (*fas*) de un proceso MA(1) tiene propiedades similares a la función de autocorrelación parcial (*fap*) de un proceso AR(1): sólo existe un coeficiente distinto de cero. Esta dualidad entre el AR(1) y el MA(1) se presenta también en la función de autocorrelación parcial, *fap*. En efecto, según (5.3), al escribir un proceso MA(1) en forma autorregresiva hay un efecto directo de z_{t-k} sobre z_t de magnitud θ^k , cualquiera que sea k . Por tanto, la *fap* tendrá todos los coeficientes no nulos y que decrecen geométricamente con k . Esta es la estructura de la *fas* de un AR(1) y, por tanto, concluimos que la *fap* de un MA(1) tiene una estructura similar a la *fas* de un AR(1).

Ejemplo 5.1

Los datos originales de la serie que vamos a estudiar estan en el fichero tempmundo.dat, son mensuales y cubren el periodo 1881-2002. Los datos representan la desviación entre la temperatura promedio del mes con relación a la media de ese mes en el periodo de 25 años 1951-1975, y se han construido para estudiar el calentamiento de la tierra. En lugar de estudiar esta serie, y_t , que no es estacionaria, vamos a estudiar la serie $z_t = y_t - y_{t-1}$, que representa las variaciones de temperatura media en la tierra entre un mes y el siguiente. El gráfico de esta serie de variaciones de temperatura aparece en la figura 5.1. Se observa que la serie es estacionaria y parece mostrar correlación negativa. La figura 5.2 muestra la función de autocorrelación donde se observa un sólo coeficiente diferente de cero. La función 5.3 muestra la fap y se observa un decrecimiento geométrico lo que sugiere un modelo MA(1) para esta serie.

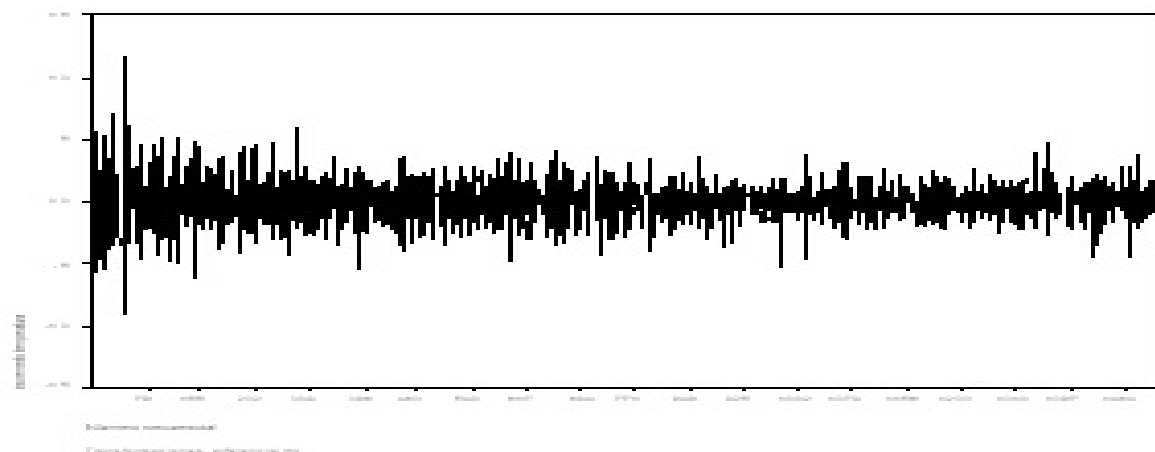


Figura 5.1: Variaciones mensuales sobre las medias de los meses de las temperaturas en la tierra en el periodo 1881-2002

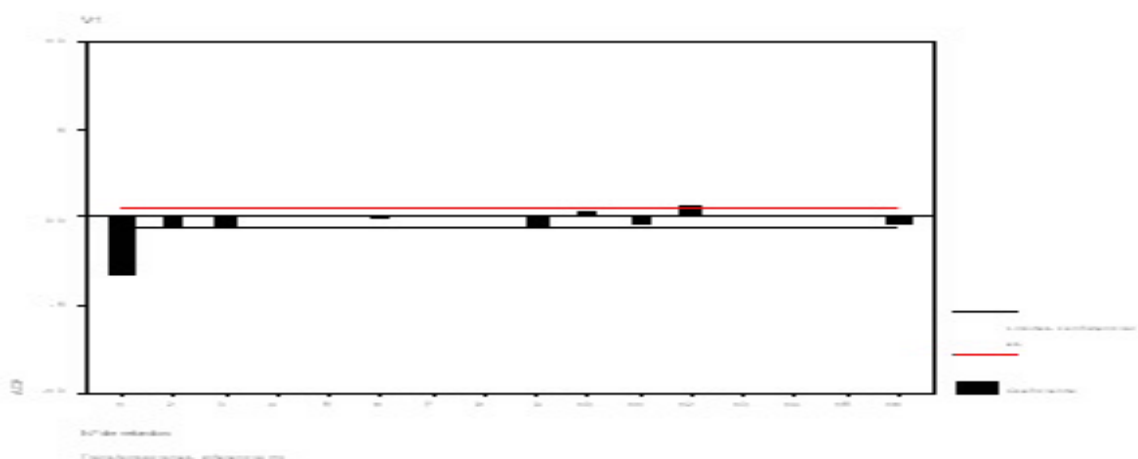


Figura 5.2: Funcion de autocorelación para la serie de desviaciones de la temperatura de la tierra

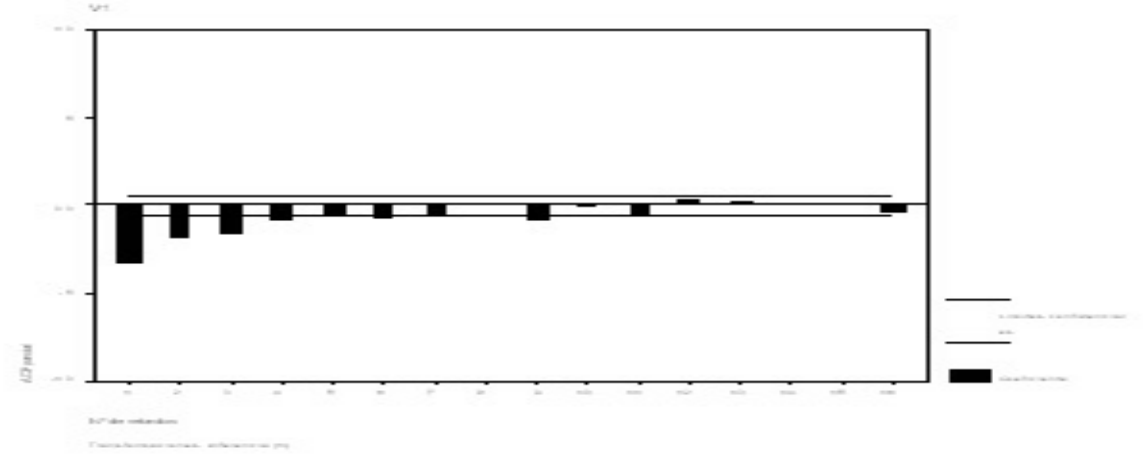


Figura 5.3: Funcion de autocorrelación parcial para la serie de desviaciones de la temperatura de la tierra

5.3 El Proceso MA(q)

Generalizando la idea de un MA(1), un proceso MA(q) tiene la representación general

$$\tilde{z}_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q) a_t \quad (5.6)$$

que suele escribirse:

$$\tilde{z}_t = \theta_q(B) a_t, \quad (5.7)$$

Un proceso MA(q) es siempre estacionario. Diremos que el proceso es *invertible* si las raíces de $\theta_q(B) = 0$ son, en módulo, mayores que la unidad.

Multiplicando (5.6) por \tilde{z}_{t-k} para $k \geq 0$ y tomando esperanzas se obtienen las autocovarianzas:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= (1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2) \sigma^2 \\ \gamma_k &= (-\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k} \theta_q) \sigma^2 \quad k = 1, \dots, q \\ \gamma_k &= 0 \quad k > q \end{aligned}$$

resultando que un proceso MA(q) tiene exactamente los q primeros coeficientes de la función de autocovarianzas distintos de cero. La función de autocorrelación será.

$$\rho_k = \frac{\sum_{i=0}^{i=q-k} \theta_i \theta_{k+i}}{\sum_{i=0}^{i=q} \theta_i^2}, \quad k = 1, \dots, q$$

donde $\theta_0 = -1$, y $\theta_k = 0$ para $k \geq q + 1$.

Para calcular la función de autocorrelación parcial de un MA(q) expresaremos el proceso como un AR(∞):

$$\theta_q^{-1}(B) \tilde{z}_t = a_t$$

y llamando $\theta_q^{-1}(B) = \pi(B)$, donde:

$$\pi(B) = 1 - \pi_1 B - \dots - \pi_k B^k - \dots$$

y los coeficientes de $\pi(B)$ se obtienen imponiendo que $\pi(B) \theta_q(B) = 1$. Suponer que el proceso es invertible implica que las raíces de $\theta_q(B) = 0$ están fuera del círculo unidad, y la serie $\pi(B)$ será convergente. Igualando

las potencias de B a cero, se obtiene que los coeficientes π_i verifican la relación siguiente:

$$\pi_k = \theta_1 \pi_{k-1} + \dots + \theta_q \pi_{k-q}$$

donde $\pi_0 = -1$ y $\pi_j = 0$ para $j < 0$. La solución de esta ecuación en diferencias será de la forma $\sum A_i G_i^k$, donde ahora los G_i^{-1} son las raíces del operador de media móvil. Obtenidos los coeficientes π_i de la representación AR(∞), podemos escribir el proceso MA como:

$$\tilde{z}_t = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i \tilde{z}_{t-i} + a_t$$

Esta expresión permite concluir que la *fap* de un MA será no nula para todo retardo, ya que existe un efecto directo de \tilde{z}_{t-i} sobre \tilde{z}_t para todo i . La *fap* de un proceso MA tendrá pues la misma estructura que la *fas* de un proceso AR del mismo orden.

Concluimos que existe una dualidad entre procesos AR y MA, de manera que la *fap* de un MA(q) tiene la estructura de la *fas* de un AR(q) y la *fas* de un MA(q) tiene la estructura de la *fap* de un AR(q). La figura 5.4 presenta estas funciones para procesos MA(1) y MA(2).

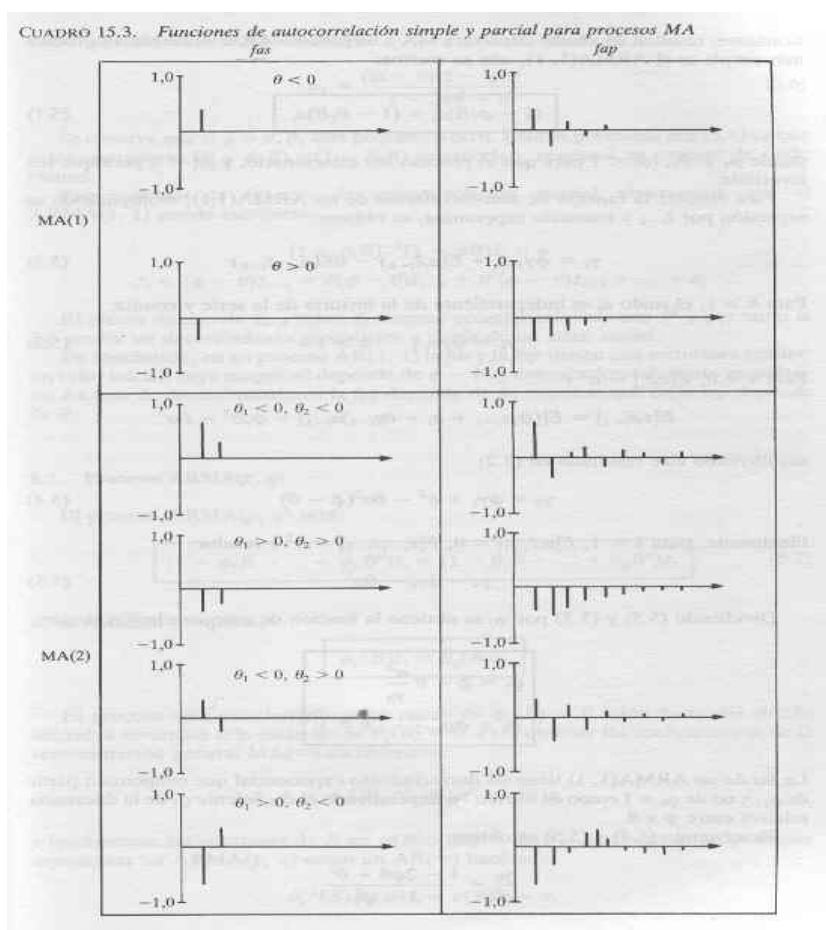


Figura 5.4: Funciones de autocorrelación simple y parcial de procesos MA

5.4 Procesos MA(∞). La descomposición de Wold

Los procesos autorregresivos y de media móvil estudiados en las secciones anteriores son casos particulares de una representación general de procesos estacionarios obtenida por Wold (1938). Este autor demostró

que todo proceso estocástico débilmente estacionario de media finita, z_t , que no contenga componentes deterministas, puede escribirse como una función lineal de variables aleatorias incorreladas, a_t , como:

$$z_t = \mu + a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \dots = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i a_{t-i} \quad (\psi_0 = 1) \quad (5.8)$$

donde $E(z_t) = \mu$, y $E[a_t] = 0$; $Var(a_t) = \sigma^2$; $E[a_t a_{t-k}] = 0$, $k > 1$. Llamando $\tilde{z}_t = z_t - \mu$, y utilizando el operador de retardo, podemos escribir:

$$\tilde{z}_t = \psi(B)a_t \quad (5.9)$$

siendo $\psi(B) = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots$ un polinomio indefinido en el operador de retardo B . Llamaremos a (5.9) la representación lineal general de un proceso estacionario no determinista. Se demuestra en el apéndice 5.1 que para que la secuencia infinita anterior defina un proceso estocástico sin ambigüedad debe verificarse que $\sum_{i=0}^{\infty} |\psi_i| < \infty$.

La varianza de z_t en (5.8) será:

$$Var(z_t) = \gamma_0 = \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 \quad (5.10)$$

y para que el proceso tenga varianza finita la serie $\{\psi_i^2\}$ debe ser convergente. Las covarianzas se obtienen con

$$\gamma_k = E(\tilde{z}_t \tilde{z}_{t-k}) = \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \psi_{i+k}$$

que proporcionan para $k = 0$ la fórmula (5.10) para la varianza. Las correlaciones son:

$$\rho_k = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \psi_{i+k}}{\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2}$$

Esta representación es importante porque nos garantiza que cualquier proceso estacionario admite una representación lineal. En general las variables a_t forman un proceso de ruido blanco, es decir están incorreladas con media cero y varianza constante, pero si, como ocurre para ciertos procesos, tienen una distribución normal, entonces el proceso $\{a_t\}$ es de variables independientes y la variable \tilde{z}_t tiene una distribución normal. Entonces la estacionaridad débil coincide con la estricta.

La figura 5.5 presenta una interpretación física del teorema de Wold. La serie \tilde{z}_t , puede considerarse el resultado de pasar un proceso de impulsos $\{a_t\}$ de variables incorreladas a través del filtro lineal $\psi(B)$ que determina la ponderación de cada «impulso» en la respuesta

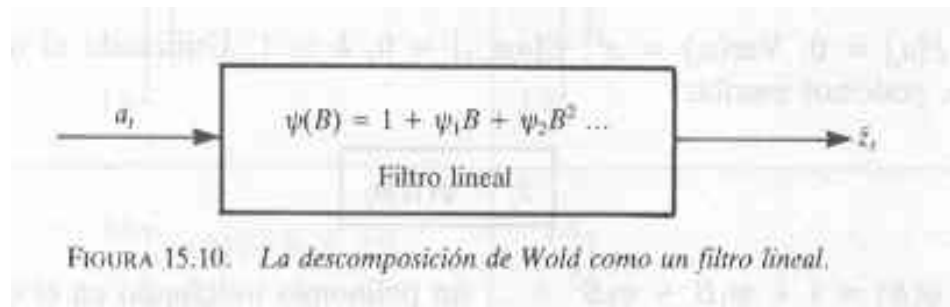


Figura 5.5: La descomposición de Wold como un filtro lineal.

Una consecuencia de este teorema es que todo proceso estacionario admite también una representación autorregresiva, que puede ser de orden infinito. Esta representación es la inversa de la de Wold, como un

proceso de media movil infinito, y escribiremos

$$\tilde{z}_t = \pi_1 \tilde{z}_{t-1} + \pi_2 \tilde{z}_{t-2} + \dots + a_t,$$

que en notación de operadores se reduce a

$$\pi(B) \tilde{z}_t = a_t.$$

La representacion $AR(\infty)$ es la dual de la $MA(\infty)$ y se verifica

$$\pi(B)\psi(B) = 1,$$

con lo que igualando las potencias de B a cero podemos obtener los coeficientes de una representación a partir de los de la otra.

5.5 Los Procesos AR y MA y el proceso general

Los procesos AR son casos particulares de la representación de Wold. Por ejemplo, el proceso $AR(1)$

$$(1 - \phi B) \tilde{z}_t = a_t \quad (5.11)$$

puede escribirse, como vimos en el capítulo 4, multiplicando por el operador inverso $(1 - \phi B)^{-1}$

$$\tilde{z}_t = (1 + \phi B + \phi^2 B^2 + \dots) a_t$$

que representa al proceso $AR(1)$ como un caso particular de la forma $MA(\infty)$ del proceso lineal general, con coeficientes ψ_i que decaen en progresión geométrica. La condición de estacionaridad, serie de coeficientes $|\psi_i|$ convergente, equivale ahora a que $|\phi| < 1$.

Para procesos AR de orden más alto resulta más cómodo obtener los coeficientes de la representación $MA(\infty)$ imponiendo la condición de que esta representación es el resultado de invertir el AR, con lo que el producto de ambas formas debe ser la unidad. Por ejemplo, para un $AR(2)$ la condición será:

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) (1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots) = 1$$

e imponiendo la anulación de las potencias de B se obtienen los coeficientes:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \phi_1 \\ \psi_2 &= \phi_1 \psi_1 + \phi_2 \\ \psi_i &= \phi_1 \psi_{i-1} + \phi_2 \psi_{i-2}, \quad i \geq 2 \end{aligned}$$

donde $\psi_0 = 1$. Análogamente, para un $AR(p)$ los coeficientes ψ_i de la representación general se calculan mediante:

$$(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p) (1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots) = 1$$

y para $i \geq p$ deben verificar la condición:

$$\psi_i = \phi_1 \psi_{i-1} + \dots + \phi_p \psi_{i-p}, \quad i \geq p$$

La condición de estacionaridad implica que las raíces de la ecuación característica del proceso $AR(p)$, $\phi_p(B) = 0$, deben estar fuera del círculo unidad. Escribiendo el operador $\phi_p(B)$ como:

$$\phi_p(B) = \prod_{i=1}^p (1 - G_i B)$$

donde G_i^{-1} son las raíces de $\phi_p(B) = 0$, se verifica que, desarrollando en fracciones parciales:

$$\phi_p^{-1}(B) = \sum \frac{k_i}{(1 - G_i B)}$$

será convergente si $|G_i| < 1$.

En resumen, los procesos AR pueden considerarse casos particulares de la representación del proceso lineal general que se caracterizan porque: (1) todos los ψ_i son distintos de cero; (2) existen restricciones sobre las ψ_i , que dependen del orden del proceso. En general verifican la secuencia $\psi_i = \phi_1 \psi_{i-1} + \dots + \phi_p \psi_{i-p}$, con condiciones iniciales que dependen del orden del proceso.

Los procesos de media móvil de orden q , MA(q), son casos particulares del proceso lineal general en los que únicamente los q primeros coeficientes ψ_i son no nulos. Estos procesos serán estacionarios.

Esta relación entre los coeficientes ψ_i y los del proceso permiten concluir que los coeficientes ψ_i tienen la misma estructura que los coeficientes de autocorrelación simple. En efecto, para un AR(p) hemos visto que satisfacen la ecuación de un proceso, como ocurría con las autocorrelaciones, y para un MA el número de coeficientes no nulos de ambos tipos es el orden del proceso.

5.6 El proceso ARMA(1, 1)

Los procesos AR y MA son aproximaciones al proceso lineal general MA (∞) desde puntos de vista complementarios: los AR suponen estructura MA (∞), pero imponen restricciones sobre las pautas de decrecimiento de los coeficientes ψ_i ; los MA suponen un número de términos finito, pero a cambio no imponen restricciones sobre sus valores. Desde el punto de vista de la estructura de autocorrelación, los AR permiten muchos coeficientes distintos de cero, pero con una pauta de decrecimiento fija, mientras que los MA permiten unos pocos coeficientes distintos de cero con valores arbitrarios. Los procesos ARMA intentan combinar estas ventajas y permiten representar de forma *escueta* (utilizando pocos parámetros) procesos cuyos primeros q coeficientes son cualesquiera, y los siguientes decrecen según leyes simples.

Matemáticamente, los procesos ARMA resultan de añadir estructura MA a un proceso AR o viceversa. El proceso más simple es el ARMA(1, 1), que se escribe:

$$\tilde{z}_t = \phi_1 \tilde{z}_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

o, con notación de operadores,:

$$(1 - \phi_1 B) \tilde{z}_t = (1 - \theta_1 B) a_t \quad (5.12)$$

donde $|\phi_1| < 1$ para que el proceso sea estacionario, y $|\theta_1| < 1$ para que sea invertible. Además supondremos que $\phi_1 \neq \theta_1$. Si ambos parámetros fuesen idénticos tendríamos que, multiplicando ambos miembros por el operador $(1 - \phi_1 B)^{-1}$, resulta que $\tilde{z}_t = a_t$, y el proceso sería ruido blanco. En la formulación de los modelos ARMA supondremos siempre que no hay raíces comunes en los operadores AR y MA.

Para obtener la función de autocorrelación de un ARMA(1,1), multiplicando (5.12) por \tilde{z}_{t-k} y tomando esperanzas, se obtiene:

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + E(a_t \tilde{z}_{t-k}) - \theta_1 E(a_{t-1} \tilde{z}_{t-k}) \quad (5.13)$$

Para $k > 1$, el ruido a_t está incorrelado con la historia de la serie. Para comprobarlo basta expresar el proceso como un MA(∞) invirtiendo la parte AR

$$\tilde{z}_t = (1 - \phi_1 B)^{-1} (1 - \theta_1 B) a_t = a_t + (\phi_1 - \theta_1) a_{t-1} + \phi_1 (\phi_1 - \theta_1) a_{t-2} + \dots$$

y al ser a_t ruido blanco estará incorrelado con los valores a_{t-i} y, por tanto, con \tilde{z}_{t-i} . En consecuencia:

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} \quad k > 1 \quad (5.14)$$

Para $k = 0$, $E[a_t \tilde{z}_t] = \sigma^2$ y

$$E[a_{t-1} \tilde{z}_t] = E[a_{t-1} (\phi_1 \tilde{z}_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1})] = \sigma^2 (\phi_1 - \theta_1)$$

sustituyendo estos resultados en (5.13), para $k = 0$

$$\gamma_0 = \phi \gamma_1 + \sigma^2 - \theta_1 \sigma^2 (\phi_1 - \theta_1). \quad (5.15)$$

Tomando en (5.13) $k = 1$, resulta que $E[a_t \tilde{z}_{t-1}] = 0$, $E[a_{t-1} \tilde{z}_{t-1}] = \sigma^2$ y se obtiene:

$$\gamma_1 = \phi_1 \gamma_0 - \theta_1 \sigma^2 \quad (5.16)$$

y resolviendo (5.15) y (5.16) se obtiene:

$$\gamma_0 = \sigma^2 \frac{1 - 2\phi_1 \theta_1 + \theta_1^2}{1 - \phi_1^2}$$

Para obtener los coeficientes de autocorrelación, dividiendo (5.16) por esta expresión:

$$\rho_1 = \frac{(\phi_1 - \theta_1)(1 - \phi_1 \theta_1)}{1 - 2\phi_1 \theta_1 + \theta_1^2} \quad (5.17)$$

Observemos que si $\phi_1 = \theta_1$, esta autocorrelación es cero, porque, como indicamos antes, los operadores $(1 - \phi_1 B)$ y $(1 - \theta_1 B)$ se cancelan y resultará un proceso de ruido blanco. En el caso frecuente en que ambos coeficientes son positivos y $\phi_1 > \theta_1$ es fácil comprobar que la correlación aumenta con $(\phi_1 - \theta_1)$. El resto de los coeficiente de autocorrelación se obtienen dividiendo (5.14) por γ_0 , que resulta en:

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} \quad k > 1$$

que indica que a partir del primer coeficiente la *fas* de un ARMA(1, 1) tiene un decrecimiento exponencial determinado por el parámetro ϕ_1 de la parte AR. La diferencia con un AR(1) es que este decrecimiento comienza a partir de ρ_1 , y no de $\rho_0 = 1$, y este primer valor de la autocorrelación de primer orden depende de la diferencia relativa entre ϕ_1 y θ_1 . Observemos que si $\phi_1 \simeq 1$ y $\phi_1 - \theta_1 = \varepsilon$, pequeño, podemos tener muchos coeficientes distintos de cero pero todos de pequeño tamaño.

Para calcular la *fap* escribiremos el ARMA(1, 1) en la forma AR(∞)

$$(1 - \theta_1 B)^{-1} (1 - \phi_1 B) \tilde{z}_t = a_t$$

y utilizando que $(1 - \theta_1 B)^{-1} = 1 + \theta_1 B + \theta_1^2 B^2 + \dots$, y operando, se obtiene:

$$\tilde{z}_t = (\phi_1 - \theta_1) \tilde{z}_{t-1} + \theta_1 (\phi_1 - \theta_1) \tilde{z}_{t-2} + \theta_1^2 (\phi_1 - \theta_1) \tilde{z}_{t-3} + \dots + a_t$$

El efecto directo de \tilde{z}_{t-k} sobre \tilde{z}_t decrece geométricamente con θ_1^k y por tanto la *fap* tendrá un decrecimiento geométrico a partir de un valor inicial.

En conclusión, en un proceso ARMA(1,1) la *fas* y la *fap* tienen una estructura similar: un valor inicial, cuya magnitud depende de $\phi_1 - \theta_1$, y después decrecimiento geométrico. La tasa de decrecimiento en la *fas* depende de ϕ_1 , mientras que en la *fap* depende de θ_1 . La figura 5.6 presenta las funciones de autocorrelación simple y parcial para distintos procesos ARMA (1,1).

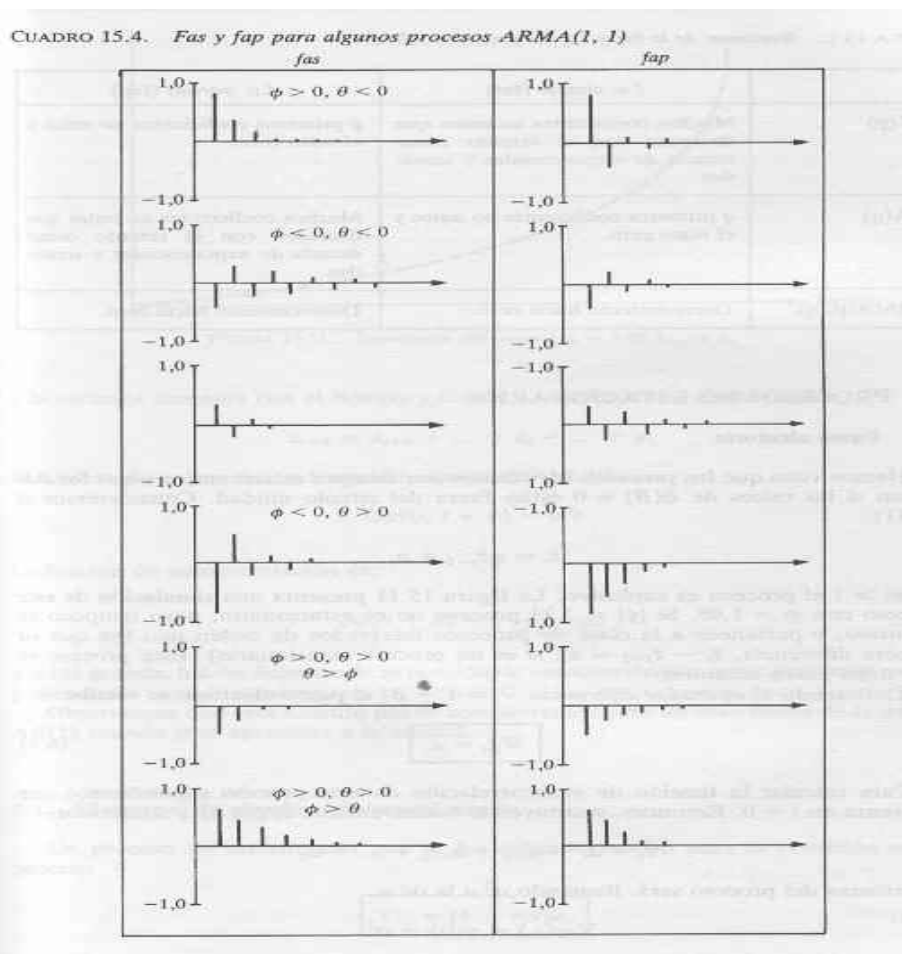


Figura 5.6: Funciones de autocorrelación simple y parcial para procesos ARMA(1,1)

5.7 Procesos ARMA(p,q)

El proceso ARMA(p, q) será:

$$(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p) \tilde{z}_t = (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q) a_t \quad (5.18)$$

o, en notación compacta,

$$\phi_p(B) \tilde{z}_t = \theta_q(B) a_t$$

El proceso será estacionario si las raíces de $\phi_p(B) = 0$ esta fuera del círculo unidad, e invertible si lo están las de $\theta_q(B) = 0$. Supondremos, además, que no hay raíces comunes que pueden cancelarse entre los operadores AR y MA.

Para obtener los coeficientes ψ_i de la representación general MA(∞) escribiremos:

$$\tilde{z}_t = \phi_p(B)^{-1} \theta_q(B) a_t = \psi(B) a_t$$

e igualaremos las potencias de B en $\psi(B) \phi_p(B)$ a las de $\theta_q(B)$. Análogamente, podemos representar un ARMA(p, q) como un AR(∞) haciendo:

$$\theta_q^{-1}(B) \phi_p(B) \tilde{z}_t = \pi(B) \tilde{z}_t = a_t$$

y los coeficientes π_i resultarán de $\phi_p(B) = \theta_q(B) \pi(B)$. Multiplicando (5.18) por \tilde{z}_{t-k} y tomando esperanzas,

$$\gamma_k - \phi_1 \gamma_{k-1} - \dots - \phi_p \gamma_{k-p} = E[a_t \tilde{z}_{t-k}] - \theta_1 E[a_{t-1} \tilde{z}_{t-k}] - \dots - \theta_q E[a_{t-q} \tilde{z}_{t-k}]$$

para $k > q$ todos los términos de la derecha se anulan, y dividiendo por γ_0 :

$$\rho_k - \phi_1 \rho_{k-1} - \dots - \phi_p \rho_{k-p} = 0$$

es decir:

$$\phi_p(B) \rho_k = 0 \quad k > q \quad (5.19)$$

y concluimos que los coeficientes de autocorrelación para $k > q$ seguirán un decrecimiento determinado únicamente por la parte autorregresiva. Los primeros q coeficientes dependen de los parámetros MA y AR y de ellos p proporcionarán los valores iniciales para el decrecimiento posterior (para $k > q$) según (5.19). Por tanto, si $p > q$ toda la *fas* mostrará un decrecimiento dictado por (5.19). En resumen, la *fas*:

1. tendrá $q - p + 1$ valores iniciales con cualquier estructura;
2. decrecerá a partir del coeficiente $q - p$ como una mezcla de exponenciales y sinusoides, determinada por la parte autorregresiva.

Puede comprobarse que la *fap* tendrá una estructura similar.

Conclusión

La *fas* y *fap* de los procesos ARMA es el resultado de la superposición de sus propiedades AR y MA: en la *fas* ciertos coeficientes iniciales que dependen del orden de la parte MA y después un decrecimiento dictado por la parte AR. En la *fap* valores iniciales dependientes del orden del AR y seguidos del decrecimiento debido a la parte MA. Esta estructura compleja hace que el orden de un proceso ARMA sea difícil de identificar en la práctica.

La figura 5.7 resume estas características

TABLA 15.1. Resumen de la *fas* y *fap* de procesos ARMA

	<i>f.a. simple (fas)</i>	<i>f.a. parcial (fap)</i>
AR(p)	Muchos coeficientes no nulos que decrecen con el retardo como mezcla de exponenciales y senoídes.	p primeros coeficientes no nulos y el resto cero.
MA(q)	q primeros coeficientes no nulos y el resto cero.	Muchos coeficientes no nulos que decrecen con el retardo como mezcla de exponenciales y senoídes.
ARMA(p, q)	Decrecimiento hacia cero.	Decrecimiento hacia cero.

Figura 5.7: Resumen de la *fas* y *fap* de procesos ARMA

5.8 Los procesos ARMA y la suma de procesos estacionarios

Una razón que explica porque los procesos ARMA son frecuentes en la práctica es que si sumamos procesos AR el resultado es un proceso ARMA. Consideremos el caso más simple donde sumamos a un proceso AR(1) de media cero un ruido blanco. Sea

$$z_t = y_t + v_t \quad (5.20)$$

donde $y_t = \phi y_{t-1} + a_t$ sigue un proceso AR(1) y v_t es un ruido blanco independiente de a_t . El proceso z_t será el resultado de observar un proceso AR(1) con cierto error de medida. La varianza de este procesos será:

$$\gamma_z(0) = E(z_t^2) = E[(y_t^2 + v_t^2 + 2y_tv_t)] = \gamma_y(0) + \sigma_v^2 \quad (5.21)$$

Esta ecuación indica que el proceso tiene una varianza que es la suma de las varianzas de los componentes. La autocovarianzas del proceso son:

$$\gamma_z(k) = E(z_t z_{t-k}) = E[(y_t + v_t)(y_{t-k} + v_{t-k})] = \gamma_y(k) = \phi^k \gamma_y(0), \quad k \geq 1$$

donde hemos llamado $\gamma_y(k)$ a las autocovarianzas del proceso y_t y utilizado que en un AR(1) $\gamma_y(k) = \phi \gamma_y(k-1)$. En particular, sustituyendo en la ecuación anterior para $k = 1$ la varianza $\gamma_y(0)$ por su expresión (5.21), se obtiene:

$$\gamma_z(1) = \phi \gamma_z(0) - \phi \sigma_v^2 \quad (5.22)$$

mientras que para $k \geq 2$

$$\gamma_z(k) = \phi \gamma_z(k-1) \quad (5.23)$$

Si comparamos la ecuación (5.22) con la (5.16) y la (5.23) con la (5.14) concluimos que el proceso z_t sigue un modelo ARMA(1,1). El parámetro θ y la varianza de las innovaciones de este proceso ARMA(1,1) dependen de la relación entre las varianzas de los dos procesos que se suman. En efecto, llamando $\lambda = \sigma_v^2 / \gamma_y(0)$ al cociente de varianzas entre los dos procesos que sumamos, según la ecuación (5.22) la primera autocorrelación es

$$\rho_z(1) = \phi - \phi \frac{\lambda}{1 + \lambda}$$

mientras que por (5.23) las restantes verifican, para $k \geq 2$,

$$\rho_z(k) = \phi \rho_z(k-1).$$

Si λ es muy pequeño, el proceso será muy próximo a un AR(1). Si λ no es muy pequeño, tendremos el ARMA(1,1) y cuando $\lambda \rightarrow \infty$ de manera que el ruido blanco sea dominante tenemos un proceso de ruido blanco.

Los resultados anteriores se generalizan para cualquier proceso AR(p) y se verifica

$$AR(p) + AR(0) = ARMA(p, p).$$

Por otro lado es fácil comprobar que si sumamos procesos MA obtenemos nuevos procesos MA. En efecto, si en (5.20) los dos procesos son MA(1) sólo podrán existir covarianzas distintas de cero en el proceso suma, z_t , para retardo uno. En general se demuestra que

$$MA(q_1) + MA(q_2) = MA(\max(q_1, q_2)).$$

Se demuestra también que

$$AR(p_1) + AR(p_2) = ARMA(p_1 + p_2, q = \max(p_1, p_2))$$

y

$$AR(p) + MA(q) = ARMA(p, p + q).$$

Estos resultados sugieren que siempre que observemos procesos que sean suma de otros y alguno de ellos tenga estructura AR es esperable observar procesos ARMA.

Ejercicios

5.1 Dado el proceso de media cero $z_t = (1 - .7B)a_t$: (a) calcular la función de autocorrelación; (b) escribirlo como un proceso $AR(\infty)$.

5.2 Demostrar que los procesos $MA(1)$ $z_t = a_t - 0.5a_{t-1}$ y $z_t = a_t - 2a_{t-1}$ tienen la misma estructura de autocorrelación pero uno es invertible y otro no.

5.3 Demostrar que los dos procesos $z_t = a_t + 0.5a_{t-1}$ y $z_t = 0.5a_t + a_{t-1}$ son indistinguibles ya que tienen la misma varianza y la misma estructura de autocorrelación.

5.4 Dado el proceso $MA(2)$ $z_t = a_t - 1.2a_{t-1} + 0.35a_{t-2}$: (a) comprobar si es invertible; (b) calcular su estructura de autocorrelación; (c) escribirlo como un proceso $AR(\infty)$.

5.5 Dado el modelo $z_t = 5 + 0.9z_{t-1} + a_t + 0.4a_{t-1}$: (a) calcular su estructura de autocorrelación; (b) escribirlo en la forma $MA(\infty)$; (c) escribirlo en la forma $AR(\infty)$.

5.6 Dado el proceso $(1 - B + 0.21B^2)z_t = a_t - 0.3a_{t-1}$: (a) comprobar si es estacionario e invertible; (b) obtener la función de autocorrelación simple; (c) obtener su representación $AR(\infty)$; (d) obtener su representación $MA(\infty)$.

5.7 Demostrar que si sumamos dos procesos $MA(1)$ se obtiene un nuevo proceso $MA(1)$ con coeficiente de autocorrelación que es una combinación lineal de los coeficientes de autocorrelación de los dos procesos, con pesos proporcionales a las varianzas.