Contraste de raíces unit...

AR(1) $\rightarrow Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$

donde $E[Y_t] = \phi_1 E[Y_{t-1}]$ $\longrightarrow \mu = \phi_1 \mu \Leftrightarrow (1-\phi_1)\mu = 0$

$V[Y_t] = \phi_1^2 V[Y_{t-1}] + \sigma_\varepsilon^2$ $\longrightarrow \sigma_Y^2 = \phi_1^2 \sigma_Y^2 + \sigma_\varepsilon^2$

Si fuera estacionario

$E[Y_t] = \mu$, de $\forall t$.

$V[Y_t] = \sigma_Y^2$, de $\forall t$.

$$\sigma_Y^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi_1^2}$$

¡Problema! $\phi_1 = 1 \Rightarrow \sigma_Y^2 \longrightarrow +\infty$. No estac.

Paseo aleatorio : $Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$, no estac.

donde

$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = \varepsilon_t$, ruido blanco

Inicialmente, podemos estimar el modelo y contrastar $\phi_1 = 1$, pero en ese caso el estad. no se distribuye según una Normal. $\Rightarrow$ contraste no válido

Dickey y Fuller idearon un procedimiento.

a) AR(1) sin t.i.

Modelo original

$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$

$H_0: \phi_1 = 1$

$H_1: \phi_1 < 1$ ($\Rightarrow$ modelo estac.)

Modelo diferenciado

$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = (\phi_1 - 1) Y_{t-1} + \varepsilon_t$

$\Delta Y_t = \gamma Y_{t-1} + \varepsilon_t$.

$H_0: \gamma = 0$

$H_1: \gamma < 0$

contraste unilateral

Bajo H_0 cierta, el estadístico t no sigue una t de Student, por lo que D y F tabularon los valores críticos.

Decisión : Si $t > t_{tabulado} \Rightarrow$ acepto $H_0 \Rightarrow$ NO estacionario

Si $t < t_{tabulado} \Rightarrow$ rechazo $H_0 \Rightarrow$ SI estacionario

b) AR(1) con t. indep y con tendencia $\begin{cases} Y_t = \alpha + \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t \\ Y_t = \alpha + \beta t + \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t \end{cases}$

Los estadísticos siguen asintóticamente una Normal

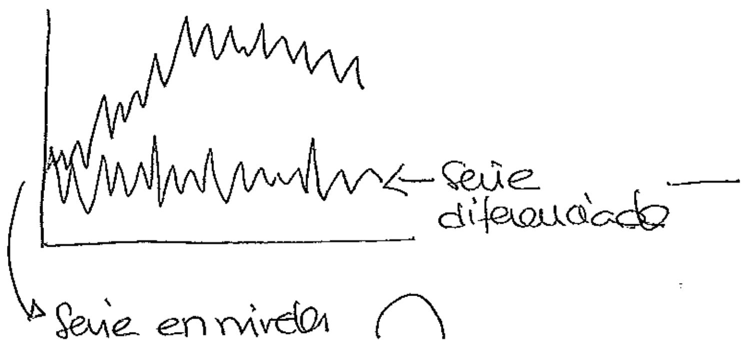
* CAMBIOS ESTRUCTURALES Y DF

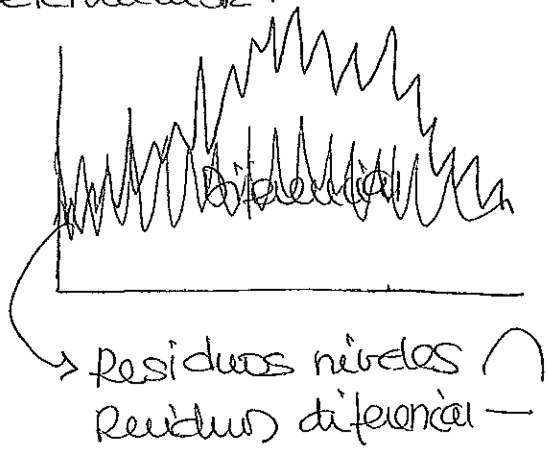
En presencia de cambio estructural se tiende a aceptar sesgadamente la ~~presencia~~ existencia de una raíz unitaria.

Causas:

a) Error por observación.

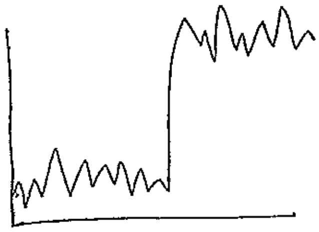
AR(1) estacionario en nivel y diferencias y residuos una vez eliminada la tendencia determinista.





b) Error por aplicación del test DF.

Proceso generador real → AR(1) estacionario con cambio de ¿tendencia? de escalón



El escalón provoca una estimación incorrecta con raíz unitaria. (en realidad no lo es)

Soluciones:

- Aplicar DF ó DFA en las submuestras
- Utilizar la propuesta de Perron en dos pasos

COINTEGRACIÓN

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$$

Y_t es $I(1)$
X_t es $I(1)$
→ u_t es $I(1)$ → no pasa nada
→ u_t es $I(0)$ ⟹ COINTEGRADOS

Problema de la regresión espuria → En realidad, Y_t y X_t no están relacionadas, pero al tener fuerte tendencia similar, el modelo de regresión da un R^2 muy alto.

Contrastes de cointegración

1º. ¿X_t es $I(1)$? ¿Y_t es $I(1)$? | ≠ órdenes ⟹ cointegración imposible.

Seguir solamente si X_t e Y_t son $I(1)$

2º. Estimar el modelo por MCO.

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$$

¡la elección de la var. regresora puede influir en el resultado!

3º. Realizar un contraste de raíz unitaria de los residuos $\hat{u}$

$$\hat{u}_t = Y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_t$$

H_0: Residuos son $I(1)$ → no están cointegrados
H_1: Residuos son $I(0)$ → sí están cointegrados

Cuando las series están cointegradas, $\hat{\beta}$ es superconsistente pero los contrastes de significatividad no son adec.

Relación de la cointegración con los modelos de corrección de error (MCE)

MCE → Representación

ENGLE y GRANGER: Consumo de bienes no duraderos sobre renta

1º. Consumo $I(1)$
Renta $I(1)$

2º. MCO del consumo sobre la renta.

3º. Con los residuos: $\Delta \hat{\varepsilon}_t = \gamma \hat{\varepsilon}_{t-1} + u_t$

$H_0: \gamma = 0$ ⟹ rechazo H_0 ⟹ Residuos son $I(0)$.

4º. MCE
parám ≠ 0
si/no < 0
✓

ECONOMETRÍA – T14

1_ MODELO LINEAL con REGR. NO ESTACIONARIAS

+ Estacionariedad:
  - Definición | se / sa
  - Modelos estacionarios | AR / MA
  - Análisis de la estacionariedad
    + En nivel → d
    + En pendiente → λ
+ Regr. no estac.

2_ CONTRASTES de RAICES UNITARIAS

- AR(1) →
  + Descripción del problema
  + Problema de la distrib. de los estimadores
  + Contraste de Dickey y Fuller
    ↳ generaliz. modelo con cte. y con tendencia
- AR(p)
- ARMA(p, q)
- Varias raíces unitarias

3_ CAMBIOS ESTRUCTURALES y CONTR. RAÍCES UNITARIAS

- Problema
- Error por observación
- Error por aplicación del test DF

4_ DEFINICIÓN de COINTEGRACIÓN

- Concepto
- Equilibrio a l/p.

5_ ~~REG~~ COINTEGRACIÓN en el modelo UNIEC.

- $Y_t = \alpha + \beta X_t + U_t$
- Problema de la regr. espúria

5 ~~6~~_ CONTR. de COINTEGRACIÓN

- Procedimiento
- Estim. con cointegración | $\hat{\beta}$ superconsistente / contr. no r(i.i.d.)
- Modelos de corrección de error

6 ~~7~~_ ENFOQUE de ENGLE y GRANGER

- Consumo de Brodur. y la renta disp. en EEUU
- Procedimiento

ECTRIA TesoroPúblico 902 13 50 30 www.tesoro.es T14 (1)

Modelo lineal con rgr. no estacionario
Contraste de raíces unitarias
Cambios estructurales y contr. raíc.unit.
Definición de cointegración
Cointegración en el modelo uniec.
Enfoque de Engle - Granger.

T14

- ceu

NOMBRE
FECHA
GRUPO

1. PROBLEMA de la NO ESTACIONARIEDAD

Creo que no

Previo: Modelo estacionario
- en sentido estricto: ~~Fdd~~ inv. a cambio orígen
- en sentido amplio: $E[Y_t]=\mu$, $\forall t$; $Var[Y_t]<\infty$; cov sólo dependen lapso

~~Para que AR sea estac, raíces fuera círculo unidad~~
~~MA(q) siempre es estacionario~~

En general, las series económicas que se manejan son de carácter no estacionario. Para poder aplicar la metodología de los modelos ARIMA hay que realizar transformaciones.
No estacionarios en media → tomar diferencias de 1^er^ orden d veces
No estacionarios en varianza → transformación Box-Cox.

Analizamos la no estacionariedad en media:

El examen visual de la trayectoria de la serie a lo largo del tiempo puede ser útil.
- Si la serie oscila sin alejarse mucho ~~de un~~ en torno a un valor → estacionario en media
- Si la serie ~~muestra~~ es no estacionaria en nivel pero sí en pendiente → tomar 1 diferencia
- Si la serie no es estacionaria en nivel, ni en pendiente → tomar al menos 2 diferencias.

Otra herramienta útil es el examen de la FACE (Función de Auto Correlación Estimada)
En general, puede considerarse que si los coef. de la FACE no decaen rápidamente, será un indicio de que el proceso es no estacionario (y los 1º valores son próx. a 1).
El procedimiento consiste en tomar una diferencia, observar la FACE de la serie diferenciada ... hasta obtener una FACE que decaiga rápidamente a partir de un retardo determinado.
En la práctico, suele bastar $d=1$ ó $d=2$.

Hay un problema; si en el modelo alguna de las raíces de la parte autorregresiva está próxima a la unidad, sería difícil distinguirla de una raíz unitaria.
Dada la importancia del tema, sería muy conveniente disponer de contrastes estadísticos formales que nos permitan contrastar la estacionariedad de la serie → contrastes de raíces unitarias.

2. CONTRASTES de RAÍCES UNITARIAS

Consideramos un AR(1) → $Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$ / $\varepsilon_t \equiv$ ruido blanco

Características:
$E[Y_t] = \phi_1 E[Y_{t-1}]$
$Var[Y_t] = \phi_1^2 Var(Y_{t-1}) + \sigma_\varepsilon^2$

Si fuera estacionario
$E[Y_t] = \mu \;, \forall t$
$Var[Y_t] = \sigma_Y^2$, cte.

Entonces:
$$\boxed{\begin{array}{l}(1-\phi_1)\mu = 0 \\ \sigma_Y^2 = \dfrac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi_1^2}\end{array}}$$
Para que sea estac.

Denominador se hace 0 cuando $\phi_1 = 1$ (raíz unitaria)

El proceso quedaría (paseo aleatorio) $Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$, del que se obtiene un proceso estacionario tomando primeras diferencias 1 vez

$$Y_t - Y_{t-1} = \Delta Y_t = \varepsilon_t$$

donde $\Delta Y_t = (1-L)^1 Y_t$ es estacionario con media 0 y var. σ_ε^2

Si $|\phi_1| < 1$ → AR(1) estacionario, no hay problema.

Inicialmente, podríamos pensar en estimar el modelo y contrastar $\phi_1 = 1$.

Si $|\phi_1| < 1$, $\hat{\phi}_1 (EMC) = \hat{\phi}_1 (EMV) \xrightarrow[\text{distr. asint.}]{} \text{Normal}$

Si $\phi_1 = 1$, $\hat{\phi}_1 \not\xrightarrow[\text{asint.}]{} \text{Normal}$, no se puede acudir al contraste convencional.

Dickey y Fuller idearon un procedimiento:

(AR(1)) Sin término indep.

Formando diferencias

Partimos de $Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$

Restando Y_{t-1} a los dos lados, $Y_t - Y_{t-1} = \underbrace{(\phi_1 - 1)}_{\gamma} Y_{t-1} + \varepsilon_t$

$$\Delta Y_t = \gamma \cdot Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

El contraste de $\phi_1 = 1$ en el modelo original equivale a contrastar $\gamma = 0$; aquí utilizaremos los estadísticos t habituales:

(Ho cierta)

Cuando $\phi_1 = 1$, ~~este~~ el estadístico t ya no sigue una t-Student, por lo que está tabulado.

Aunque su distrib. no es simétrica, sólo se presentan los valores críticos de una cola puesto que:

Modelo original — MIRAR URIEL — Modelo diferenciado

$\left\{\begin{array}{l} H_0: \phi_1 = 1 \\ H_1: \phi_1 < 1 \text{, estacionariedad} \end{array}\right. \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} H_0: \gamma = 0 \\ H_1: \gamma < 0 \end{array}\right.$

Rechazo Ho | Acepto Ho

Si se compara el valor de t con las tabulaciones:

$t > \tau$ tablas $\Rightarrow$ acepto Ho $\rightarrow$ no estacionario

$t < \tau$ tablas $\Rightarrow$ rechazo Ho $\rightarrow$ sí estacionario.

Este contraste se puede generalizar a modelos con término independiente $Y_t = \alpha + \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$

y con tendencia $Y_t = \alpha + \beta t + \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$

El procedimiento es el mismo, pero en este caso las tabulaciones de los estadísticos sí seguirán asintóticamente una distrib. Normal.

AR(p)

Los contrastes de Dickey y Fuller se pueden generalizar de forma directa al caso AR(p), en donde habría que sumar y restar ~~por~~ los p ϕ_i.

La hipótesis nula es la misma, (Ho: $\gamma = 0$).

El estadístico del contraste es el ratio t correspondiente al parámetro γ y se utiliza la misma tabulación.

También se puede incluir tendencia determinista y/o término constante.

ARMA (p,q)

En el caso más general en que Y_t siga un proceso ARMA (p,q) se puede aproximar por un AR (p^*) donde p^* aumenta en relación directa con el tamaño muestral.

La práctica habitual consiste en estimar el modelo elegido con un nº suficiente de retardos que garanticen que el término de perturbación no esté autocorrelacionado, pero sin que la pérdida de grados de libertad sea excesiva. A partir de aquí se puede contrastar la significatividad del último retardo, y excluirlo si es necesario, entonces estimar el nuevo modelo, contrastar la significatividad del último retardo, etc. → (penúltimo original)

Varias raíces unitarias

Podemos sospechar que existen varias raíces unitarias. Como las series económicas de orden de integrabilidad superior a 2 son muy infrecuentes, podemos inicialmente contrastar I(2) frente a I(1).

Contrastar dos raíces unitarias es equivalente a contrastar una raíz en ΔY_t, que se puede llevar a cabo con los contrastes vistos anteriormente.

$H_0: \Delta Y_t$ es $I(1) \sim Y_t$ es $I(2)$ — Acepto ⇒ Y_t es $I(2)$

$H_1: \Delta Y_t$ es $I(0) \sim Y_t$ es $I(1)$ — Rechazo ⇒ $H_0: Y_t$ es $I(1)$; $H_1: Y_t$ es $I(0)$

FALTA:

Cambios estructurales y contrastes de raíces unitarias

CARRERA		
APELLIDOS	NOMBRE	
ASIGNATURA	FECHA	GRUPO

4. DEFINICIÓN de COINTEGRACIÓN — Modelo uniecuacional

Modelo uniecuacional

En un modelo de regresión del tipo $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$,

con término independiente y ruido, además de var. regresora y regresando.

Partimos de la idea de dos variables no estacionarias, mientras que los residuos de la regresión sí lo sean, debido en gran medida, a que su evolución temporal es común.

En general, si tanto el regresando como el regresor son I(1) las perturbaciones serán generalmente I(1), pero puede ocurrir que sean I(0), esto se producirá cuando la combinación lineal que son las perturbaciones sea estable en torno a un valor (cero) debido a que las tendencias de ambas series se compensan o cancelan (tienen una tendencia común) $\Longrightarrow$ Se dice que las series están cointegradas.

En el modelo $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$

suponiendo que Y_t, X_t son I(1), si la c.l.:

$u_t = Y_t - \alpha - \beta X_t$

es I(0), entonces X_t e Y_t están cointegradas y al vector $(1, -\alpha, -\beta)$ ó $(-\alpha, -\beta)$ se le denomina vector de cointegración.

Cuando dos series están cointegradas, existe una c.l. de ellas que es estacionaria, aunque ellas no lo son.

El concepto de cointegración se puede relacionar con el concepto de equilibrio a largo plazo, ya que la cointegración de dos series temporales se puede interpretar como la existencia de una relación de equilibrio entre ellas, que provoca que a largo plazo su evolución no sea totalmente arbitraria, sino que esté sometida a una restricción a la que llamamos relación de cointegración.

5. CONTRASTES de COINTEGRACIÓN

Engle y Granger 1987

Dadas dos series I(1), Y_t y X_t ¿están cointegradas?

NO → al realizar la regresión incurriremos en el problema de la regresión espuria.

SI → la estimación nos describirá la evolución conjunta de estas variables a largo plazo.

El análisis de cointegración de las series X_t e Y_t supondría los siguientes pasos:

1. Análisis del orden de integrabilidad de las series.
   Si una es I(0) y otra I(1)
   Si las dos son I(0)
   } → imposible cointegración

   Si las dos son I(1), seguimos.

2. Estimación del modelo
$$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t \quad \text{por MCO.}$$

3. Con los residuos de la estimación
$$\hat{u}_t = Y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_t$$
   realizamos un contraste de raíz unitaria { DW, DF, DFga

   Se utilizan los valores críticos tabulados para la ocasión

   H_0: Residuos son I(1) → no están cointegradas
   H_1: Residuos son I(0) → sí están cointegradas

Cuando las series están cointegradas, las estimaciones por mínimos cuadrados ordinarios ~~son~~ nos proporcionan un buen estimador de β (es superconsistente), pero los contrastes de significatividad habituales no son adecuados.

¡OJO! La elección de var. regresora puede influir en el resultado del contraste de cointegración.

Este análisis puede generalizarse al caso de más de una var. independiente → si analizamos n series pueden existir hasta n-1 casos de cointegración

Otro aspecto importante del análisis de cointegración es la relación que mantienen con los modelos de corrección de error (MCE)

MCE → Representación del modelo tomando diferencias, donde las variaciones (o ajustes) de la var. dependiente son función de las desviaciones del equilibrio anterior.

Si las var. están integradas, entonces la ecuación está equilibrada. Si no están integradas, la ecuación está desequilibrada.

Ejemplo de Engle y Granger (1987).

Estudiaron la posible cointegración entre el consumo de bienes no duraderos y la renta disponible en EEUU.

1º. Contrastar si el Consumo es I(1) → no rechazo
" si el Consumo es I(2) → sí rechazo
} es I(1)

Renta tb. es I(1)

2º. Regresión de Consumo en función de la Renta, con los residuos estimados, hacen la regresión ~~sob~~

$\Delta\hat{e}_t = r\hat{e}_{t-1} + u_t$

$H_0: r=0$ → rechazo H_0 ⇒ Residuos son I(0)

las series sí están cointegradas.

3º. Estiman MCE, donde los parámetros son signif. $\neq 0$, y los signos son los adecuados (< 0 para la corrección).