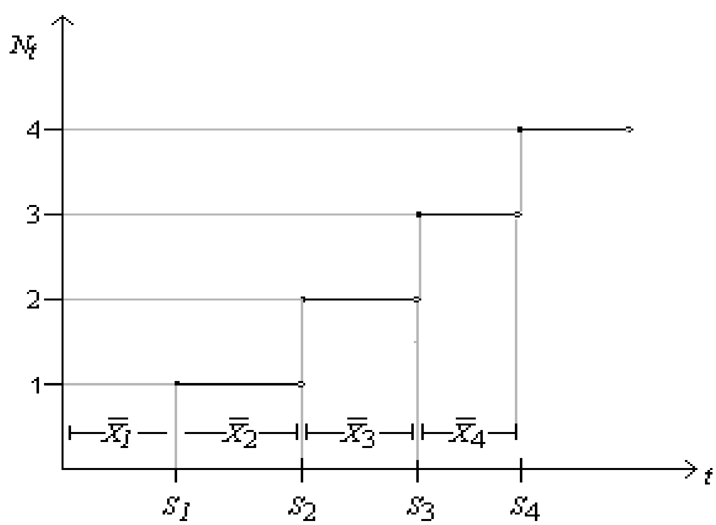
Tema 4. Proceso de Poisson. Procesos de Nacimiento y Muerte

Marzo 2006

1. Proceso de Conteo

Un proceso estocástico $\{N_t\}_{t\geq 0}$ es un proceso de conteo si N_t representa el total de sucesos ocurridos hasta el tiempo t. Sean Ω un espacio muestral, P una probabilidad, $\omega \in \Omega$ y $t \geq 0 \rightarrow N_t(\omega)$ es el número de llegadas en el intervalo $[0,t]$ para la realización $\omega, \quad t \rightarrow N_t(\omega)$ es una función escalón.



Definición: El Proceso $\{N_t\}_{t\geq 0}$ es Proceso de Conteo

1. $N_0 = 0$.
2. $N_t \in \mathbb{N} \quad \Leftrightarrow \quad N_t \geq 0$
3. $s < t \quad \rightarrow \quad N_s \leq N_t$
4. $N_t - N_s$ es el número de llegadas en el intervalo $[s,t]$.

De todos los procesos de este tipo, el más importante es el Proceso de Poisson, que limita los saltos de la función a saltos iguales.

Definición: Sea $o(h)$ el infinitésimo de orden h, f es $o(h)$ si $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = 0$, esto es: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad$ tal que si $\quad |h| < \delta \quad \to \quad \left|\frac{f(h)}{h}\right| < \varepsilon$

Ejemplos:

1. La función $f(x) = x \equiv o(h)$

2. La función cuadrática $f(x) = x^2 \equiv o(h)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{h^2}{h} = \lim_{h\to 0} h = 0$$

3. La función $f(x) = x^r$ con $r > 1$ es $o(h)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{h^r}{h} = \lim_{h\to 0} h^{r-1} = 0$$

4. Las funciones f, g son $o(h)$, con c, d constantes, entonces la función: $cf + dg$ es $o(h)$

$$\lim_{h\to 0} cf(h) + dg(h) = 0$$

5. Sean $c_1, \ldots, c_n$ constantes, las funciones $f_1, \ldots, f_n$ son $o(h)$, entonces la función:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(h) \quad \text{es} \quad o(h)$$

6. Si X es variable aleatoria con distribución $\exp(\lambda)$ y $h > 0$ entonces X tiene la Propiedad de Markov:

$$P[X \leq t + h/X > t] = P[X \leq h]$$

como:

$$\begin{aligned} P[X \leq h] &= 1 - e^{-\lambda h} = 1 - [1 - \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2!} + ...] \\ &= \lambda h - (\lambda h)^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-\lambda h)^{n-2}}{n!} = \lambda h + o(h) \end{aligned}$$

entonces

$$P[X \leq t + h/X > t] = \lambda h + o(h)$$

2. Proceso de Poisson (de tasa o intensidad $\lambda > 0$)

Es un proceso de conteo $\{N_t\}_{t\geq 0}$ que verifica:

1. Es de incrementos independientes y estacionarios
2. $P[N_h = 1] = \lambda h + o(h)$
   $P[N_h \geq 2] = o(h)$
   por tanto $P[N_h = 0] = 1 - \lambda h + o(h)$

Proposición: Sea Y la variable aleatoria que describe el número de llegadas (sucesos) en cualquier intervalo de longitud t en un proceso de Poisson $\{N_t\}_{t\geq 0}$ de tasa λ, entonces Y es variable aleatoria Poisson de parámetro λt.

Demostración

Sea $P_n(t) = P\{N_t = n\} \quad \forall n \in N$

Sea $n = 0$

$$
\begin{aligned}
P_0(t+h) &= \text{(Incrementos Independientes)} \\
&= P\{0 \text{ llegadas en } [0,t] \cap 0 \text{ llegadas en } [t, t+h]\} \\
&= P_0(t).P(N_{t+h} - N_t = 0) \quad \text{(Incrementos Estacionarios)} \\
&= P_0(t).P(N_h = 0) = P_0(t).[1 - \lambda h + o(h)] \\
\lim_{h\to 0} \frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} &= -\lambda P_0(t) + P_0(t). \lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} \\
\text{luego} & \\
\text{con} & \quad \left\{ \begin{array}{rl} \frac{d}{dt}P_0(t) = & -\lambda P_0(t) \\ P_0(0) = & 1 \text{ (condiciones iniciales)} \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

Solución de la ecuación diferencial de variables separables

$$
\left\{ \begin{array}{ll} P_0'(t) & = -\lambda.P_0(t) \\ P_0(0) & = 1 \end{array} \right. \qquad \text{de donde } P_0(t) = e^{-\lambda t}
$$

Sea ahora $n > 0$, entonces en el intervalo $t + h$ ocurren n llegadas (sucesos), esto es $\{N_{t+h} = n\}$ si:

1. suceden n en $[0,t]$ y 0 en $[t, t+h]$,
2. suceden $n - 1$ en $[0,t]$ y 1 en $[t, t+h]$,
3. suceden $(n - k)$ en $[0,t]$ y k en $[t, t+h]$ con $k = 2, \ldots, n$.

Acumulando las probabilidades asociadas

$$\begin{aligned}
P_n(t+h) &= P_n(t)[1-\lambda h + o(h)] + \lambda h P_{n-1}(t) + o(h) \\
\text{entonces} & \\
\frac{P_n(t+h)-P_n(t)}{h} &= -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \frac{o(h)}{h} \\
\text{tomando límites } h \to \infty & \\
\frac{dP_n(t)}{dt} &= -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) \\
\text{esto es la ecuación diferencial} &
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} P'_n(t) = & -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) \\ P_n(0) = & 0 \end{cases}$$

cuya solución es $$P_n(t) = \frac{e^{-\lambda t}.(\lambda t)^n}{n!} \qquad \square$$

Corolario 1: El número medio de llegadas en el intervalo $[0,t]$ es λt, y el número medio de llegadas en el intervalo $[0,1]$ es λ.

Corolario 2: Estimación de λ.

Por la Ley de los Grandes Números

$$\frac{N_n}{n} = \frac{N_1 + N_2 - N_1 + ...N_n - N_{n-1}}{n}$$

si $n \to \infty$ entonces $E[N_i] = \lambda$

luego $\lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{t} = \lambda$

Además por el Teorema Central del Límite si $\lambda t \to \infty$ entonces:

$$N_t \quad \to N(\lambda t, \lambda t)$$

Válido para $\lambda t > 10$.

Corolario 3:

$$P\left\{N_{t+s} - N_t = k/N_l, l \leq t\right\} \quad = \quad P\left\{N_{t+s} - N_t = k\right\}$$

Ejemplo

$P\{N_{2,5} = 17, N_{3,7} = 22, N_{4,3} = 36\}$ en un Proceso Poisson de tasa $\lambda = 8$.

$$\begin{aligned}
P\{N_{2,5} & = 17, N_{3,7} = 22, N_{4,3} = 36\} = \\
= \quad & P(N_{2,5} = 17).P(N_{3,7} - N_{2,5} = 5).P(N_{4,3} - N_{3,7} = 14) \\
= \quad & P(Poisson(8 \times 2,5) = 17).P[Poisson(8 \times 1,5) = 5].P(Poisson(8 \times 0,6) = 14) \\
= \quad & \frac{e^{-20},20^{17}}{17!}.\frac{e^{-9,6},9,6^5}{5!}.\frac{e^{-4,8},4,8^{14}}{14!}
\end{aligned}$$

aproximación Poisson $(\lambda t) \approx N(\lambda t, \lambda t)$

Proposición: $\{N_t\}_{t\geq 0}$ Proceso de Poisson de tasa λ. Sea $\tau \sim$ variable aleatoria "tiempo entre llegadas consecutivas", entonces τ es una variable aleatoria con distribución $\exp(\lambda)$

Demostración

$$\begin{aligned} P(\tau \leq t) &= 1 - P(\tau > t) = 1 - P\{N_t = 0\} \\ &= 1 - \frac{e^{-\lambda t}.(\lambda t)^0}{0!} = 1 - e^{-\lambda t} \quad \Rightarrow \quad \tau \sim \exp(\lambda) \qquad \square \end{aligned}$$

Observación:

$$E[\text{ tiempo entre llegadas }] = \frac{1}{\lambda}$$

Proposición: Sea $\{N_t\}_{t\geq 0}$ Proceso de Poisson de tasa λ y en $[0,t]$ se ha producido una llegada, sea $Y \sim$ variable aleatoria que describe la ocurrencia de esta llegada de Poisson entonces Y es uniforme $[0,t]$.

Demostración.

Sea $0 < x < t$, por definición de Y:

$$\begin{aligned} P[Y \leq x] &= P[\tau_1 \leq x/N_t = 1] = P[N_x = 1, N_t = 1] \\ &= \frac{P[N_x = 1, N_t - N_x = 0]}{P[N_t = 1]} \\ &= \frac{\lambda x e^{-\lambda x}.e^{-\lambda(t-x)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} = \frac{x}{t} \end{aligned}$$

entonces $Y \sim u(0,t)$. $\square$

Proposición: Superposición de procesos de Poisson
Sean $\{L_t\}_{t\geq 0}$ y $\{M_t\}_{t\geq 0}$ Procesos de Poisson independientes, de tasas λ y μ respectivamente, entonces:

$$N_t(\omega) = L_t(\omega) + M_t(\omega)$$

es proceso de Poisson de tasa $(\lambda + \mu)$.

Demostración

Sea $N_B =$ número de llegadas en el intervalo $[0,B]$, veamos qué es una variable aleatoria de Poisson de parámetro $(\lambda + \mu).B$.

$$\begin{aligned} P[N_B = n] &= \sum_{k=0}^{n} P[L_B = k, M_B = n-k] \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-\lambda B}(\lambda B)^k}{k!}.\frac{e^{-\mu B}.(\mu B)^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \frac{e^{-\lambda B}.e^{-\mu B} B^k B^{n-k}}{n!}(\lambda+\mu)^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k . \left(\frac{\mu^{n-k}}{\lambda+\mu}\right) \frac{n!}{k!(n-k)!} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{e^{-B(\lambda+\mu)}B^n.(\lambda+\mu)^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda+\mu \end{pmatrix}^k\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-k} \\
&= \left(\text{ya que }\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^n 1^n\right) \\
&= \frac{e^{-(\lambda+\mu)B}.((\lambda+\mu).B)^n}{n!} \\
&\approx \text{Poisson } (\lambda+\mu).B \qquad \square
\end{aligned}
$$

Proposición: Descomposición del Proceso de Poisson

Sea $\{N_t\}_{t\geq 0}$ Poisson de tasa λ, se consideran:
$\{X_n\}_{n\geq 1}$ Proceso Bernoulli (p) independiente de N_t
$\{S_n\}_{n\geq 1}$ Proceso Sumas de Bernoulli (p) tal que:
S_{N_t} = número de éxitos en $[0,t]$ y
$L_t = N_t - S_{Nt}$ = Número de fracasos en $[0,t]$

Entonces los procesos $\{S_{Nt}\}_{t\geq 0}$ y $\{L_t\}_{t\geq 0}$ son Procesos de Poisson independientes de tasas λp y $\lambda(1-p)$ respectivamente.

Idea de la prueba.

Se demuestra que:

$$
P\{S_{N_{t+s}} - S_{N_t} = m, L_{t+s} - L_t = k / S_{N_u}, L_u, u \leq t\} = \frac{\bar{e}^{\lambda ps}(\lambda ps)^m}{m!}.\frac{\bar{e}^{\lambda qs}(\lambda qs)^k}{k!}
$$
$$
\forall k, m = 0, 1\ldots \qquad s, t \geq 0
$$

Ejemplo

Los vehículos llegan a un aparcamiento según un Proceso de Poisson de tasa $\lambda = 20$ por hora. Las probabilidades de que un vehículo lleve 1, 2, 3, 4, 5 personas son 0,3 0,3 0,2 0,1 y 0,1 respectivamente. Calcular el número esperado de personas que llegan al aparcamiento en una hora.

Solución.

N^1, $N^2, \ldots, N^5$ son el número de vehículos que llegan con 1, 2, …5 personas en una hora sus distribuciones son:

$N^1 \sim$ Poisson (20 x 0,3) $\quad E[N^1] = 6$
$N^2 \sim$ Poisson (20 x 0,3) $\quad E[N^2] = 6$
$N^3 \sim$ Poisson (20 x 0,2) $\quad E[N^3] = 4$
$N^4 \sim$ Poisson (20 x 0,1) $\quad E[N^4] = 2$
$N^5 \sim$ Poisson (20 x 0,1) $\quad E[N^5] = 2$

$$
\begin{aligned}
E[Y: &\quad \text{número de personas que llegan en 1 hora}] = \\
&= E[N^1 + 2N^2 + 3N^3 + 4N^4 + 5N^5] \\
&= 1\cdot E[N^1] + 2\cdot E[N^2] + 3\cdot E[N^3] + 4\cdot E[N^4] + 5\cdot E[N^5] \\
&= 6 + 2\times 6 + 3\times 4 + 4\times 2 + 5\times 2 = 48
\end{aligned}
$$

Probabilidad de que en 3 horas lleguen 6 vehículos con 5 personas:

$$P[P_0(3 \cdot 20 \cdot 0{,}1) = 6] = P[P_0(6) = 6]$$

3. Generalización del Proceso de Poisson: Proceso de Nacimiento y Muerte

Relajando la hipótesis sobre la tasa λ (intensidad) constante, a una situación más realista, en la que la tasa de llegadas λ depende del estado en que se encuentra el proceso (λ_n) se tiene el Proceso de Nacimiento Puro:

- Proceso de Conteo.
- Proceso de incrementos independientes y estacionarios
- Siendo

$$P(X_{t+h} = n+1/X_t = n) = \lambda_n h + o(h)$$
$$P(X_{t+h} \geq n+2/X_t = n) = o(h)$$

de donde

$$P(X_{t+h} = n/X_t = n) = 1 - \lambda_n h + o(h)$$

Admitiendo además la existencia de posibles transiciones a estados anteriores según tasa dependiente del estado del proceso (μ_n), se obtiene el **Proceso de Nacimiento y Muerte**:

- Proceso de incrementos independientes y estacionarios
- Verificando

$$P(X_{t+h} = n+1/X_t = n) = \lambda_n h + o(h)$$
$$P(X_{t+h} = n-1/X_t = n) = \mu_n h + o(h)$$
$$P(X_{t+h} = m/X_t = n) = o(h) \qquad \text{si} \quad |m-n| > 1$$

de donde

$$P(X_{t+h} = n/X_t = n) = 1 - (\lambda_n + \mu_n)0(h) + 0(h)$$

En forma matricial, en términos de la matriz Q (generador infinitesimal del proceso) o matriz de tasas

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu_1 & -\lambda_1 - \mu_1 & \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & -\mu_2 & -\lambda_2 - \mu_2 & \lambda_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Ecuaciones diferenciales del Proceso Nacimiento y Muerte
denotando

$$\begin{aligned} P_n(t) &= P(X_t = n) \\ P_n(t+h) &= P(X_t = n).P(0 \text{ llegadas en } (t, t+h]/X_t = n) \\ &\quad +P(X_t = n-1).P(1 \text{ llegada en } (t, t+h]/X_t = n-1) + \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +P(X_t = n+1).P(1 \text{ abandono en } (t,t+h]/X_t = n+1) + \\
& +P(\text{ resto de los casos }) \\
= \quad & P_n(t).(1-(\lambda_n+\mu_n)h + o(h) + P_{n-1}(t).(\lambda_{n-1}h + o(h)) + \\
+ \quad & P_{n+1}(t)(\mu_n h + o(h)) + o(h)
\end{aligned}
$$

el cociente incremental

$$
\begin{aligned}
\frac{p_n(t+h)-p_n(t)}{h} \quad = \quad & -(\lambda_n+\mu_n)p_n(t) + p_n\frac{o(h)}{h} + p_{n-1}(t).\lambda_{n-1} + p_{n-1}(t)\frac{o(h)}{h} + \\
& + p_{n+1}(t)\mu_{n+1} + p_{n+1}(t) + p_{n+1}(t)\frac{o(h)}{h} + \frac{o(h)}{h}
\end{aligned}
$$

tomando límites, con $h \to 0$

$$
\lim_{h\to 0}\frac{p_n(t+h)-p_n(t)}{h} = -(\lambda_n+\mu_n)p_n(t) + \lambda_{n-1}p_{n-1}(t) + \mu_n p_{n+1}(t)
$$

$$
\begin{cases}
p_n'(t) = & -(\lambda_n+\mu_n)p_n(t) + \lambda_{n-1}p_{n+1}(t) + \mu_n p_{n+1}(t) \qquad n \geq 1 \\
p_0'(t) = & -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t)
\end{cases}
$$

La solución de esta ecuación diferencial se establece para las condiciones en las que el sistema está en equilibrio:

$$
\begin{cases}
p_n(t) = p_n \\
\frac{dp_n(t)}{dt} = 0
\end{cases}
$$

que proporciona la solución siguiente sujeta a la condición de normalización

$$
\sum_n p_n = 1
$$

$$
\begin{cases}
\mu_{n+1}p_{n+1} - \lambda_n p_n = & \mu_n p_n - \lambda_{n-1}p_{n-1} \qquad n \geq 1 \\
\mu_1 p_1 - \lambda_0 p_0 = & 0
\end{cases}
$$

equivalente a

$$
\mu_n p_n = \lambda_{n-1}p_{n-1} \qquad n \geq 0
$$

iterando

$$
\left[
\begin{array}{l}
p_n = p_0 \prod_{j=1}^n (\lambda_{j-1}/\mu_j) \qquad n \geq 1 \\
\text{con} \quad p_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^\infty \prod_{j=1}^n \left(\frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j}\right)\right]^{-1}
\end{array}
\right]
$$

3.1. Caso Particular (modelo M/M/1)

Sean $\lambda_n = \lambda$, $\mu_n = \mu \qquad \forall n \geq 0$

$$
\begin{cases}
p_n = p_0.\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n \\
p_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^\infty \prod_{j=1}^n \frac{\lambda}{\mu}\right]^{-1} = \left[1 + \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]^{-1} = \left(1 + \frac{\lambda/\mu}{1-\lambda/\mu}\right)^{-1} = \\
\qquad = (1-\lambda/\mu) \qquad \text{si } \frac{\lambda}{\mu} < 1
\end{cases}
$$

$$
p_n = (1-\lambda/\mu) \quad \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \quad \sim \quad \text{Geométrica} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \quad \text{si} \quad \frac{\lambda}{\mu} < 1
$$

3.2. Dos ejemplos del Proceso de Nacimiento y Muerte

Cola M/M/s

Sea $\{X_n\}$ = número de usuarios en el sistema; es proceso de nacimiento y muerte

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & \text{si} \quad 1 \leq n \leq s \\ s\mu & \text{si} \quad n > s \end{cases}$$

Modelo de crecimiento lineal con inmigración (reproducción biológica)

$\mu_n = n\mu \quad$ con $\quad n \geq 1$
$\lambda_n = n\lambda + \theta \quad$ con $\quad n \geq 0$
θ : tasa de inmigración
λ : tasa exp. de reproducción por individuo.
μ : tasa muerte por individuo.

4. Proceso Compuesto de Poisson

Un proceso compuesto de Poisson $(X_t)_{t\geq 0}$ es un proceso estocástico que puede ser representado en la siguiente forma:

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \quad , \quad t \geq 0$$

donde $(N_t)_{t\geq 0}$ es un proceso de Poisson y $\{Y_n : n \geq 0\}$ es una familia de variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas las cuales además son independientes de $(N_t)_{t\geq 0}$.

<u>Observación 1:</u> Si $Y_i \equiv 1$ para todo i entonces $X_t = N_t$ es decir, obtenemos el proceso ordinario de Poisson.

<u>Observación 2:</u> En la teoría del riesgo el proceso de Poisson compuesto tiene la siguiente interpretación: La v.a N_t representa el número de reclamaciones que se hacen a una compañía en el intervalo de tiempo $(0, t]$, Y_i representa la cantidad del i-ésimo reclamo y X_t representa la cantidad total reclamada en el intervalo de tiempo $(0, t]$.

<u>Observación 3:</u>

$$EX_t = \lambda t EY_1 \qquad y \qquad VarX_t = (\lambda t) EY_1^2$$

En efecto:

$$EX_t = E(E(X_t \mid N_t)) \;\; \text{como} \;\; E(X_t \mid N_t = n) = E(\sum_{i=1}^{n} Y_i) = nEY_1$$

Entonces $E(X_t \mid N_t) = N_t EY_1$

Por otra parte $VarX_t = E(Var(X_t \mid N_t)) + Var(E(X_t \mid N_t))$

(recuerde: $Var(X \mid Y) := E((X - E(X \mid Y))^2 \mid Y)$.

De ahí $VarX = E(Var(X \mid Y)) + Var(E(X \mid Y)))$

Por consiguiente:

$$
\begin{aligned}
VarX_t &= E(N_t VarY_1) + Var(N_t EY_1) \\
&= \lambda t VarY_1 + (E(Y_1))^2 . VarN_t \\
&= \lambda t VarY_1 + (E(Y_1))^2 . \lambda t \\
&= \lambda t E(Y_1^2).
\end{aligned}
$$