ECTRÍA – T4 → HETEROSCEDASTICIDAD.

$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_T^2 \end{pmatrix}$ ①

1_ Introducción.

- En el modelo lineal $Y = X\beta + U$, $Var(u) = \Sigma$

Heteroscedasticidad ↓
$Var(u_t) \neq Var(u_s)$, $t \neq s$.
Sigue siendo diagonal, $E[u_t u_s] = 0, t \neq s$.

- El estimador lineal eficiente, EMCG, pasa a llamarse EMC Ponderados, pues concede ≠s ponderaciones a ≠s observaciones muestrales según la suma residual que queremos min.

2_ Posibles causas de heteroscedasticidad.

- Modelo de gasto en consumo a partir de ingresos familiares → $G_i = \beta_1 + \beta_2 I_i + u_i$
  ≠s familias con = ingresos, una vez satisfechas sus necesidades primordiales, pueden destinar el excedente a ≠s opciones (ahorro, consumo...)
  ↳ Gasto tendrá mayor varianza en familias con mayores ingresos.
- Modelo de reparto de beneficios de una empresa en dividendos → $D_i = \beta_1 + \beta_2 B_i + u_i$.
  Mayor dispersión en empresas con más beneficios.
  percápita
- Datos de consumo y renta por regiones. Varianzas invers. proporcionales a la pobl. de cada reg.
- Si se omite una var. explicativa del modelo.
  Pasamos de $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t$ → a $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + v_t$ / $v_t = u_t + \beta_3 X_3$
  $Var(v_t) = \sigma_u^2 + \beta_3^2 X_{3t}^2$
  La var. del error varía en función de los valores de X_3.

3_ Estimación MC con heteroscedasticidad.

- MCO sigue siendo insesgado. $\hat{\beta}_{MCO} = (X'X)^{-1}X'Y$ con $V(\hat{\beta}_{MCO}) = (X'X)^{-1}X'\Sigma^{-1}X(X'X)^{-1}$?
- MCO ya no es el de mínima varianza, lo es MCG, que satisface $(X'\Sigma^{-1}X)\beta = X'\Sigma^{-1}Y$
- En caso de heteroscedasticidad, hay que utilizar MCG.

$$\hat{\beta}_{MCG} = (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}Y$$

$$Var(\hat{\beta}_{MCG}) = (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}$$

NO ESCRIBO σ_u^2, pq. como caso general $\sigma_{u_t}^2 \neq \sigma_{u_s}^2$, por lo que $V(u) = \Sigma$ a secas

ECTRÍA – T4

Al ser la var. de u ≠s para cada periodo de tiempo y desconocida $\Big\}\Rightarrow$ nº parámetros a estimar ≠ nº observ.

No tenemos suficiente información, hay que añadir alguna restricción o hipótesis sobre la estructura de la matriz de covarianzas del término de error. (tipo heteroscedasticidad)

¡OJO! → la hipótesis condiciona el contraste y la estimación

→ Si no se detecta heteroscedasticidad, no significa que no haya, sólo que no hay del tipo supuesto.

→ El estimador MCG es eficiente sólo para ese tipo de heteroscedasticidad.

→ Un error en la especificación de la estructura de $\{\sigma_t^2\}$ provoca que EMCG NO sea totalmente eficiente, ¿es mejor que MCO? y la estimación de Var(Σ) será sesgada.

En la práctica, es mejor calcular MCO y compararlo con MCG para la hipótesis específica de heterosc.

$Var(\hat{\beta}_{MCG}) = \sigma_u^2 (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}$

$Var(\hat{\beta}_{MCO}) = \sigma_u^2 (X'X)^{-1} X'\Sigma^{-1}X (X'X)^{-1}$

$\Big\}$ Si $\hat{\beta}_{MCG}$ es lineal, insesgado y de mín. var, entonces $diag(Var_{MCG}) < diag(Var_{MCO})$.

- Procedimiento de estimación por MCG bajo heteroscedasticidad.

1 – Estimar por MCO, ignorando la heteroscedasticidad

2 – Establecer una hipótesis sobre la estructura de $\{\sigma_t^2\}$

3 – Utilizar los residuos MCO para estimar la estructura de $\{\sigma_t^2\} \longrightarrow \hat{\sigma}_t^2$.

4 – Dividir cada observación por $\hat{\sigma}_t$.

5 – Volver a estimar el modelo original con las var. transformadas.

Ponderar → Dar a cada observación una importancia invers. prop. a la var. del término de error en ese periodo.

En MCO se le da la misma importancia a todas las observaciones.

4_ CONTRASTES de Heteroscedasticidad.

Todos tienen la misma hipótesis nula, H_0: Homoscedasticidad.

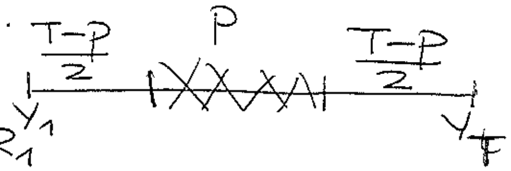
En cada uno, el supuesto sobre la estructura de la matriz de cov. del error, es ≠, por lo que el estadístico y su distrib. son ≠.

a) Contraste de Goldfeld y Quandt (1965)

Parte del supuesto de que σ_t^2 depende de una var. Z_t de la cual disponemos de información (que puede ser var. explicativa)

Si $Z_t \nearrow \Rightarrow \sigma_t^2 \nearrow$, (análogo para relac. inversa)

1º. Ordenar las observaciones de menor a mayor valor de Z_t.



2º. Omitir p observaciones centrales de la muestra.

3º. Estimar el modelo con las primeras observaciones $\rightarrow SR_1$

" " " con las últimas observaciones $\rightarrow SR_2$

4º. Bajo el supuesto de homoscedasticidad y de Normalidad, $\lambda = \frac{SR_2}{SR_1} = \frac{\hat{\sigma}_2^2}{\hat{\sigma}_1^2} \longrightarrow F_{\frac{T-P}{2}-K, \frac{T-P}{2}-K}$

Idea: Si existe heteroscedasticidad del tipo supuesto, $SR2 >> SR1 \Rightarrow \lambda >> F$ tablas.

5º: Decisión $\rightarrow$ Si $\lambda >> F$ tablas $\Rightarrow$ Rechazo H_0 (acepto heteroscedasticidad tipo).

b) Contraste de White (1980)

Contraste general, que no precisa especificar la forma que puede adoptar la heteroscedasticidad.

1º. Estimar el modelo por MCO ignorando heteroscedasticidad y obtener $\hat{u}_t$.

2º. Estimar una regresión del cuadrado de los residuos mín-cuadr sobre una cte, los regresores del modelo original, sus cuadrados y productos cruzados de 2º orden.

3º. Calcular R^2 y TR^2

Idea: Si el tamaño muestral crece con el nº observaciones, bajo H_0 cierta $R^2 \rightarrow 0$. Sólo si la var. del error depende de las var. explicativas, $R^2 \not\rightarrow 0$.

4º. Bajo H_0 cierta, $TR^2 \longrightarrow \chi^2_{p-1}$ (p = nº regresores)

5º. Decisión $\rightarrow$ Si $TR^2 > \chi^2$ tablas $\Rightarrow$ rechazo H_0.

5_ Transformación Box y Cox.

Sp. modelo no lineal $Y_t = e^{x'_t\beta + u_t}$, $t = 1 \dots T$ / $u_t \rightarrow N(0, \sigma_u^2)$ ruido blanco.

Tiene una distrib. lognormal, ya que $\ln Y_t = X_t\beta + u_t$, normal. (lineal)

$Var(Y_t) = (e^{X'_t\beta})^2 \cdot Var(e^{u_t}) = (e^{X'_t\beta})^2 \cdot e^{\sigma_u^2}(e^{\sigma_u^2} - 1) \Rightarrow$ hay heteroscedasticidad.

Pero $\ln Y_t$ es homocedástico, $Var(\ln Y_t) = Var(u_t) = \sigma_u^2 \Rightarrow$ EMCO es eficiente

Esta transf. logarítmica es un caso particular de la transf. Box-Cox:

$$Y_t^{(\lambda)} = \begin{cases} \dfrac{Y_t^{\lambda} - 1}{\lambda} & \text{si } \lambda \neq 0 \\ \ln Y_t & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$$

6_ Heteroscedasticidad condicional autorregresiva (ARCH).

En algunas var. económicas, tasas de rentabilidad de activos financieros, se alternan periodos de estabilidad — alta volatilidad — estabilidad.

Se plantea un modelo $Y_t = X'_t\beta + u_t$, donde $u_t \rightarrow N(0, \sigma_t^2)$ con $\sigma_t^2 = \delta_0 + \delta_1 u_{t-1}^2$ ~~ARCH~~

$\delta_0 > 0$

$0 < \delta_1 < 1$, $|\delta_1| < 1$ estac.

La estimación de máx. verosimilitud se obtiene (Novales 1993)

1º. Estimar $\hat{\beta}_{MCO}$ y obtener los residuos $\hat{u}_t$.

2º. A partir de una estimación inicial $(\hat{\delta}_0, \hat{\delta}_1)$ definir

$$\begin{cases} h_t^2 = \hat{\delta}_0^2 + \hat{\delta}_1^2 \hat{u}_{t-1}^2, & t = 2 \dots T \\ z'_t = \left(\dfrac{1}{h_t^2}, \dfrac{\hat{u}_{t-1}^2}{h_t^2}\right), & t = 2 \dots T \\ W_t = \dfrac{\hat{u}_t^2}{h_t^2} - 1 & t = 2 \dots T \end{cases}$$

Estimar regresión de W_t sobre Z_t

Los coef. estimados son las correcciones a la estim. inicial.

Bla, bla ...

ARCH (p) sería $\sigma_t^2 = \delta_0 + \delta_1 u_{t-1}^2 + \dots + \delta_p u_{t-p}^2$

Para contrastar existencia ARCH (p) se utiliza TR^2 / $R^2 \equiv$ coef. determinación regresión W/Atociada sobre Z. $H_0: \delta = 0$

ECONOMETRÍA — T4

1. HETEROSCEDASTICIDAD
- Planteamiento

2. POSIBLES CAUSAS DE HETEROSCEDASTICIDAD.
- Gastos familiares
- Reparto de beneficios
- Renta percapita por regiones
- Omisión de una var. explicativa

3. ESTIMACIÓN MC en presencia de HETEROSCEDASTICIDAD
- $\hat{\beta}_{MCO}$ y $\hat{\beta}_{MCG}$
- El problema del nº de parámetros
- Estimación MCG con heteroscedasticidad (5 pasos)
- Mínimos cuadrados ponderados

4. CONTRASTES de HETEROSCEDASTICIDAD.
- Hipótesis nula
- Contraste de Goldfeld y Quandt (σ_t^2 depende de Z_t)
- Contraste de White
  - Procedimiento
  - Estadístico
  - Regla de decisión

5. TRANSFORMACIÓN BOX y COX.
- Modelo heteroscedástico
- Transformación homocedástica

6. HETEROSCEDASTICIDAD CONDICIONAL AUTORREGRESIVA
- ARCH (1)
- ARCH (p)