1. Inferencia en el MLG

El MLG parte del modelo $Y = X\beta + U$, para llegar al modelo estimado $\hat{Y} = X\hat{\beta}$, donde $\hat{\beta}_{MCO} = (X'X)^{-1}X'Y$ el estimador lineal insesgado óptimo de β, y $\hat{\sigma}^2_u = \dfrac{\hat{u}'\hat{u}}{T-K}$

$$u \longrightarrow N(0_T, \sigma^2_u I_T) \Longrightarrow \hat{\beta} \longrightarrow N(\beta_K, \sigma^2_u (X'X)^{-1})$$

$$\frac{(T-K)\hat{\sigma}^2_u}{\sigma^2_u} \longrightarrow \chi^2_{T-K}$$

Estas estimaciones son puntuales, por lo que será conveniente

- trabajar con IC y Regiones de Conf.
- Contrastar hipótesis sobre β_i:
  - $\beta_i = 0$ $\longrightarrow$ Significatividad de X_i
  - $\beta_2 = \ldots = \beta_K = 0$ $\longrightarrow$ Signif. global del modelo
  - cq. conjunto de restric. lineales sobre β_i.

Distrib. de probab. utilizadas: Normal, Chi-cuadrado, F de Fisher-Snedecor y t-Student.

$$\hat{\beta} \longrightarrow N_K(\beta_K, \sigma^2_u (X'X)^{-1}) \Longrightarrow \hat{\beta} - \beta \longrightarrow N_K(0, \sigma^2_u (X'X)^{-1})$$

$$\frac{X(\hat{\beta}-\beta)}{\sigma_u} \longrightarrow N_K(0, I)_{K\times 1}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{(\hat{\beta}-\beta)'X'X(\hat{\beta}-\beta)}{\sigma^2_u} \longrightarrow \overset{\text{indep.}}{\chi^2_K} \\[2ex] \dfrac{\hat{u}'\hat{u}}{\sigma^2_u} \longrightarrow \chi^2_{T-K} \end{array}\right\} \frac{(\hat{\beta}-\beta)'X'X(\hat{\beta}-\beta)/K}{\underbrace{\hat{u}'\hat{u}/T-K}_{\hat{\sigma}^2_u}} \longrightarrow F_{K,T-K}$$

$$t_{T-K} = \sqrt{F_{1,T-K}} = \frac{N(0,1)}{\sqrt{\chi^2_{T-K}/_{T-K}}} \qquad \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i/_{\sigma_u}}{\hat{\sigma}_u \sqrt{a_{ii}}/_{\sigma_u}} \longrightarrow t_{T-K}$$

2. Contraste de hipótesis. Planteamiento general

$$\begin{cases} H_0: R\beta = r \\ H_1: R\beta \neq r \end{cases}$$

cjto de q restric. lineales sobre el cjto de pobler.

R matriz $q \times K$, sp $Rg(R) = q$

$q \leqslant K$

$$\left.\begin{array}{l}\hat\beta \longrightarrow N_K(\beta, \sigma_u^2 (X'X)_K^{-1}) \\ Rg(R) = q\end{array}\right\} \Rightarrow R\hat\beta \longrightarrow N_q(R\beta, \sigma_u^2 \overbrace{R(X_K'X)^{-1}R'}^{q\times q})$$

$$R\hat\beta - R\beta \longrightarrow N_q(0, \sigma_u^2 R(X'X)^{-1}R')$$

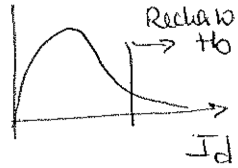
Bajo Ho cierta, $R\beta = r \Rightarrow \underset{q\times 1}{R\hat\beta - r} \longrightarrow N_q(0, \sigma_u^2 R(X'X)^{-1}R')$

multiplicando por sí misma y dividiendo por la varianza ~~----~~ $(R\hat\beta - r)'\left[\sigma_u^2 R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}(R\hat\beta - r) \to \chi_q^2$

$(T-K)\dfrac{\hat\sigma_u^2}{\sigma_u^2} = \dfrac{\hat u'\hat u}{\sigma_u^2}$ Además, $\dfrac{\hat u'\hat u}{\sigma_u^2} \longrightarrow \chi^2_{T-K}$

El cociente de dos chi-cuadrados divididos por sus grados de libertad es una F :

$$I_d = \frac{(R\hat\beta - r)'\left[\cancel{\sigma_u^2}R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}(R\hat\beta - r)\big/ q}{\dfrac{\hat u'\hat u}{\cancel{\sigma_u^2}}\Big/ T-K = \hat\sigma_u^2} \longrightarrow F_{q, T-K}$$



es nuestra cantidad pivotal (depende de $\hat\beta$, pero su distrib. no)

Decisión : si $I_d \geq F_{q, T-K, \alpha}$ (tablas) $\Rightarrow$ Rechazo Ho
$\qquad\qquad <$ acepto Ho.

3. Casos particulares

1) Contraste acerca de un parámetro del modelo :

$H_0: \beta_i = \beta_i^0 \Rightarrow R = (0 \ldots 0\underset{\substack{\uparrow \\ \text{posic. } i}}{1}0 \ldots 0)$ matriz fila $\begin{cases} q=1 \\ K\end{cases}$

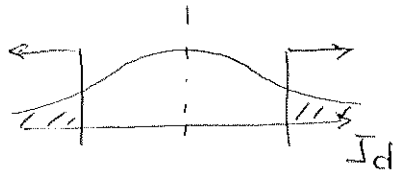
$r = \beta_i^0$, un nº

$R\hat\beta - r = \hat\beta_i - \beta_i^0$

$R(X'X)^{-1}R' = a_{ii} \to$ elemento i-ésimo de la diag. principal de $(X'X)^{-1}$

Entonces: $\dfrac{(\hat\beta_i - \beta_i^0)^2}{\hat\sigma_u^2 \cdot a_{ii}} \longrightarrow \dfrac{\chi_1^2}{\chi^2_{T-K}} = F_{1, T-K}$

luego $I_d = \dfrac{\hat\beta_i - \beta_i^0}{\hat\sigma_u \cdot \sqrt{a_{ii}}} \longrightarrow t_{T-K}$



Decisión : Si $|I_d| \geq t_{T-K, \alpha} \Rightarrow$ Rechazo Ho

Observaciones: 1 – Si $\beta_i^0 = 0 \Rightarrow$ contraste de significatividad de β_i.

2 – a I_d se le conoce como estadístico t de $\hat\beta_i$.

2) Contraste acerca de todos los parámetros del modelo

$H_0: \beta_2 = \beta_2^0$, donde $\beta_2 = (\beta_2 \dots \beta_K)$, coef. del modelo salvo el término indep.

$\Rightarrow R \equiv$ 1ª columna 0 y la identidad K-1.

$R = (0_{K-1} I_{K-1})$

$r = \beta_2^0$, vector columna K-1.

$R\hat{\beta} - r \equiv$ sub~~matriz~~vector de orden K-1

$R(X'X)^{-1}R' \equiv$ submatriz de orden K-1

Entonces:

$$I_d = \frac{(\hat{\beta}_2 - \beta_2^0)' [\cancel{\sigma_u^2} R(X'X)^{-1} R']^{-1} (\hat{\beta}_2 - \beta_2^0) / K-1}{\frac{\hat{u}'\hat{u}}{\cancel{\sigma_u^2}} / T-K = \hat{\sigma}_u^2} \longrightarrow F_{K-1, T-K}$$

Decisión: Si $I_d \geq F_{K-1, T-K, \alpha}$ $\Rightarrow$ Rechazo Ho.

Observación: Si $\beta_2^0 = 0_{K-1}$ $\Rightarrow$ contraste de significación global del modelo. El término indep. no se contrasta pq si resulta $\hat{\beta}_2^0 = 0$, entonces $\hat{\beta}_1$ sería la media de la var. endógena.

3) Contraste acerca de un subconjunto paramétrico de coef.:
No importa sobre qué variables se imponga la restricción a contrastar, se pueden renombrar para que resulten las primeras.

$H_0: R\hat{\beta} = r$ (s restric.) , $R = (\underbrace{0_{K-1} \dots 0_{K-1}}_{K-S}, R_S)$ subvector de orden S

$r \equiv$ vector dim. S

$R(X'X)^{-1}R'$ submatriz cuadrada de orden S

$$I_d = \frac{(R\hat{\beta} - r)' [R(X'X)^{-1}R'] (R\hat{\beta} - r) / S}{\hat{\sigma}_u^2} \longrightarrow F_{S, T-K}$$

Decisión: $I_d \geq F_{S, T-K, \alpha}$ $\Rightarrow$ Rechazo Ho.

RESUMEN:

$q = 1 \Rightarrow I_d \rightarrow t_{T-K}$

$q = K-1 \Rightarrow I_d \rightarrow F_{K-1, T-K}$

$q = S \Rightarrow I_d \rightarrow F_{S, T-K}$

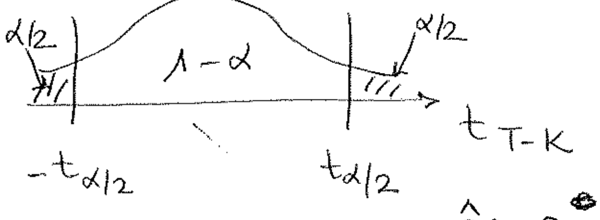
4_ Intervalos y regiones de confianza

A partir de las cantidades pivotales obtenidas anteriormente, ~~utiliz~~ basándonos en su distrib. de probabilidad, se pueden construir intervalos de confianza ó regiones de confianza, (dependiendo de ~~la dim. del parz~~ si es para uno ó mas coef. del modelo.

1) Para un solo coef. del modelo:

$\gamma = 1-\alpha \equiv$ confianza

$$\frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\hat{\sigma}_u \cdot \sqrt{a_{ii}}} \longrightarrow t_{T-K}$$



$$1-\alpha = P\left(-t_{\alpha/2} \leq t_{T-K} \leq t_{\alpha/2}\right) = P\left(-t_{\alpha/2} \leq \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\hat{\sigma}_u \cdot \sqrt{a_{ii}}} \leq t_{\alpha/2}\right) =$$

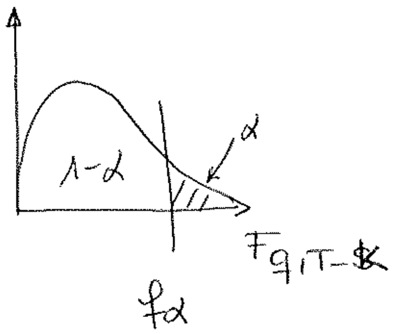
$$= P\left(\hat{\beta}_i - t_{\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}_u \sqrt{a_{ii}} \leq \beta_i \leq \hat{\beta}_i + t_{\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}_u \sqrt{a_{ii}}\right)$$

En una muestra concreta (serie temporal), el verdadero valor del parámetro β_i estará dentro del I.C. $\longrightarrow \hat{\beta}_i \pm t_{\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}_u \sqrt{a_{ii}}$ con una confianza $\gamma = 1-\alpha$.

La prob. será 1 (si $\beta_i \in IC$) ó 0 (si $\beta_i \notin IC$).

2) Para varios coef. del modelo:

$$\frac{(R\hat{\beta} - r)' \left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1} (R\hat{\beta} - r)/q}{\hat{\sigma}_u^2} \longrightarrow F_{q,T-K}$$



$$\gamma = 1-\alpha = P\left[\frac{(R\hat{\beta}-r)'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}(R\hat{\beta}-r)/q}{\hat{\sigma}_u^2} \leq f_\alpha\right]$$

$\longrightarrow$ se despeja β ($R\beta = r$), y se obtiene la región de confianza a nivel $1-\alpha = \gamma$.

En la práctica es bastante complicado, se utiliza para $q=2$ coeficientes, caso en que la RC tiene forma de elipse.

5. Test de Chow

Este contraste se utiliza cuando se dispone de información ~~sufic~~ durante un periodo sufic. largo, y se ha observado una variación estructural durante ese periodo.

H_0: Ausencia de cambio estructural → toda la muestra ha sido generada por una misma estruct. económica.

El procedimiento consiste en dividir la observación muestral (T) en dos submuestras, ~~de tal~~ antes y después del cambio que se contrasta sufic. significativo, tamaños T_1 y T_2, $T_1+T_2=T$.

$$\underbrace{Y_1 \;\; Y_2 \;\; \cdots \;\; \overset{\text{cambio}\,\downarrow}{Y_{T_1}}}_{\substack{K \text{ parámetros} \\ T_1 \text{ observac.} \\ \text{Modelo con } SR_1}} \;\; \underbrace{Y_{T_1+1} \;\; \cdots \;\; Y_T}_{\substack{K \text{ parám.} \\ T_2 \text{ observ.} \\ \text{Modelo con } SR_2}}$$

$H_0: \beta^{(1)} = \beta^{(2)} \sim \beta^{(1)} - \beta^{(2)} = 0_K$

El estad. que se utiliza en el contraste es:

$$\cancel{I_d} \quad I_d = \frac{\dfrac{SRR-(SR_1+SR_2)}{K}}{\dfrac{SR_1+SR_2}{T-2K}} \longrightarrow F_{K,\,T-2K}$$

Puede ocurrir que T_2 sea muy pequeño (cambio hace poco), y no es posible estimar el 2º modelo por falta de grados de libertad. En ese caso, se utiliza el estad.:

$$I_d = \frac{(SR-SR_1)/T_2}{SR_1/T_1-K} \longrightarrow F_{T_2,\,T_1-K}$$

6. Estimación bajo restricciones

~~En Economía,~~ las hipótesis nulas que se contrastan han de ser a priori aceptables desde el punto de vista conceptual (T^a Económica). Sería interesante, una vez aceptada H_0, disponer de un procedimiento que incorporase dicha hipótesis al modelo en forma de restricción, para luego estimar el modelo ganando eficiencia

Objetivo: $\min\limits_{\hat\beta} \hat{u}'\hat{u} \sim \min (Y-X\hat\beta)'(Y-X\hat\beta)$

s.a. $R\beta = r$

Es un problema de optimización condicionado que se resuelve utilizando la función lagrangiana:

$$\min_{\beta,\lambda} \mathcal{L} = (Y - X\beta)'(Y - X\beta) - 2\lambda'(R\beta - r)$$

Derivando respecto a β y a λ e igualando a 0, obtenemos el estimador mínimo cuadrado restringido $\hat{\beta}_R$ y el vector de precios sombra $\hat{\lambda}_R$:

$$\hat{\beta}_R = \hat{\beta} + (X'X)^{-1} R' [R(X'X)^{-1} R']^{-1} (r - R\hat{\beta})$$

MCO + corrección ~~penalización~~ por no satisfacer $\hat{\beta}$ las restricciones

Observaciones:

$\hat{\beta}_R$ insesgado de β sólo si $R\beta = r$

$\hat{\beta}_R$ satisface las restricciones

$\hat{\beta}_R = \hat{\beta}_{MCO} \iff \hat{\beta}_{MCO}$ satisface restricciones.

$\text{cov}(\hat{\beta}_R) \leq \text{cov}(\hat{\beta}_{MCO})$ siempre.

7. Predicción en el modelo lineal

Se estima el modelo con información muestral hasta T, y se pretende ~~decir~~ predecir el valor de Y_{T+1} suponiendo que la relac. lineal hasta T permanece estable.

$$E_T[Y_{T+1}] = E_T[X'_{T+1}\beta + u_{T+1}] = [E_T X_{T+1}]'\hat{\beta}_T + E_T[u_{T+1}]$$

donde $\hat{\beta}_T \equiv$ coef. estimado con información hasta T

$E_T X_{T+1} \equiv$ ~~valor~~ predicción de X_{T+1} con inform. hasta T, tenemos que ~~estimarlo~~ predecirlo.

$E_T u_{T+1} \equiv$ predicción, $E_T u_{T+1} = E[u_T] = 0$, valor esperado.

luego: $E_T Y_{T+1} = (E_T X_{T+1})' \cdot \hat{\beta}_T = X'_{T+1}\hat{\beta}_T \leftarrow$ predicción MCO.

Para que la predicción sea fiable:

- Relación lineal estable,
- Coeficientes estables
- X_{T+1} conocido o bien estimado
- Modelo lineal bien especificado,
- Horizonte temporal no muy lejano.

Error de predicción:

$$e_T(1) = Y_{T+1} - E_T Y_{T+1} = X'_{T+1}\beta + u_{T+1} - X'_{T+1}\hat{\beta} = X'_{T+1}(\beta - \hat{\beta}) + u_{T+1}$$

variable aleatoria que depende
- del error de estim. de β
- del error de estim. de X'_{T+1}
- del error estocástico inherente al modelo