Prácticas de la asignatura Series Temporales

Segunda Entrega

1 Modelos de Series Temporales

1.1 Ruido Blanco Gaussiano

Diremos que una serie, x_t, ha sido generada por un ruido blanco Gaussiano si:

$$x_t = a_t \qquad a_t \sim N\left(0, \sigma^2\right), \text{ independientes}$$

es decir, la serie x_t está formada por observaciones independientes de esperanza común 0 y varianza común σ^2 con distribución Normal. Generemos una serie de 200 observaciones de un proceso ruido blanco de esperanza 0 y varianza 1. Para ello, procedemos creando un workfile de 200 observaciones:

File → New → Workfile

Seleccionamos la opción:

Undated or Irregular → 1 to 200

Hemos creado un workfile de 200 datos sin fecha. A continuación, en el workfile marcamos:

Genr → x=nrnd

y habremos creado una serie temporal de 200 datos generada por un ruido blanco gaussiano. Haciendo doble click sobre el icono de la serie, podemos utilizar el menú View para determinar las carácterísticas principales de este proceso del cual tenemos la información procedente de la serie generada. Vemos el gráfico de la serie generada:

View → Line Graph

En principio deberíamos ver una serie de datos que aproximadamente tenga media 0 y varianza constante. En este caso, y puesto que todos los datos han sido generados por la misma distribución es interesante obtener un histograma y los principales estadísticos:

View → Descriptive Statistics → Histogram and Stats

Hay que comparar los valores teóricos del proceso y los obtenidos para la serie generada. Otra manera interesante de comparar la distribución de los datos con respecto la normal es el gráfico quantile-quantile:

View → Distribution Graph → Quantile-Quantile: Normal distributions

Pasamos a obtener las autocorrelaciones de la serie. Dada una serie x_t, la autocorrelación de orden k está dada por:

$$\rho_k = \frac{Cov\left[x_t, x_{t-k}\right]}{Var\left[x_t\right]} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

es decir, la correlación de orden k. Este estadístico mide la correlación de una serie con respecto su pasado. En el caso del ruido blanco, la autocorrelación teórica para $k > 0$ es 0 porque las observaciones se suponen independientes. Dada una serie $\{x_1, \ldots, x_n\}$ podemos estimar las autocorrelaciones mediante:

$$\rho_k = \frac{\frac{1}{n} \sum_{t=1} (x_t - \overline{x}) (x_{t-k} - \overline{x})}{\frac{1}{n} \sum_{t=1} (x_t - \overline{x})^2} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Puesto que utilizamos estimaciones encontraremos que las autocorrelaciones observadas son diferentes de 0 pero cercanas a él. En el gráfico podemos ver una banda de confianza para los valores observados de la correlación. La longitud de las bandas de confianza es de $2/\sqrt{T}$ donde T es el número de datos y representan el intervalo de confianza aproximado al 95% donde deben estar los coeficientes estimados si la serie se ha generado por un proceso de ruido blanco. Hacemos notar que en la columna siguiente aparecen otro tipo de correlaciones denominadas correlaciones parciales. Más adelante veremos la importancia de estas correlaciones.

1.2 Procesos Autorregresivos

Ejemplo: Sea x_t el capital de una persona que invierte en bolsa al final del día. Cada día la persona gana una cantidad $c + a_t$ donde c es el valor medio de la cantidad que gana y a_t es una variable aleatoria de media cero que hace que esa cantidad varie de un periodo al siguiente. Cada mes invierte una proporción fija $(1 - \phi)\, x_{t-1}$ y se mantiene ϕx_{t-1}. Entonces el valor de x_t es:

$$x_t = \phi x_{t-1} + c + a_t$$

Por lo tanto, el valor de la serie x_t depende linealmente del valor previo de la serie, x_{t-1}. Este es un ejemplo de un proceso autorregresivo. En muchas ocasiones el valor de una serie en tiempo t se puede asumir que va a depender linealmente de los valores previos de dicha serie. Un proceso autorregresivo de orden p viene dado por la siguiente ecuación:

$$x_t = c + \phi_1 x_{t-1} + \ldots + \phi_p x_{t-p} + a_t$$

donde c es una constante, $\phi_i,\ i = 1, \ldots, p$ son constantes a determinar y a_t es un proceso de ruido blanco independiente de x_{t-k} para $k = 0, 1, 2, \ldots$ con varianza σ_a^2. Ya hemos visto en el apartado anterior que son las autocorrelaciones. La autocorrelación parcial de orden k se define como el coeficiente de correlación entre observaciones separadas k periodos cuando eliminamos la dependencia producida por los valores intermedios.

1.2.1 Proceso AR(1)

El proceso AR(1) tiene por ecuación generadora:

$$x_t = c + \phi_1 x_{t-1} + a_t$$

La ecuación nos dice que el valor de la variable en tiempo t es ϕ_1 veces el valor de la variable en tiempo $t - 1$ más el valor de la constante más una componente aleatoria de ruido blanco. Es fácil ver que:

$$E[x_t] = \frac{c}{1 - \phi_1} \qquad Var[x_t] = \frac{\sigma_a^2}{1 - \phi_1^2} \qquad \rho_k = \phi_1^k,\ k = 1, 2, \ldots$$

Para que el proceso sea estacionario se debe verificar que $-1 < \phi_1 < 1$. Vamos a generar varias series para diferentes parámetros ϕ_1. Para ello creamos un workfile de 200 datos de la manera habitual. En primer lugar generamos una serie donde $c = 0$, $\phi_1 = 0.5$ y $\sigma_a^2 = 1$. Para ello debemos seguir los pasos:

1. File→New→Workfile.
2. Undated or Irregular→1 to 200.
3. Genr→a=nrnd. (Esto nos define la serie de ruido blanco).
4. Genr→x1=0. (Esto nos define la serie como 0).
5. Genr→IMPORTANTE: Sample: 2:200 → x1=0.5*x1(-1)+a. (Aqui la serie toma sus valores definitivos).

El proceso de generación asume que $x_1 = 0$. Vemos la serie:

View → Line Graph

La serie debe tomar valores alrededor de la media del proceso, 0, y no tener cambios en la varianza. Ver también el histograma y los estadísticos principales. Por último pasar a ver el correlograma. Comprobar el decrecimiento en la función de autocorrelación del proceso y ver que la correlación parcial muestra un primer valor significativo, mientras que el resto deben ser 0.

Generamos el mismo proceso pero tomando $\phi_1 = 0.9$. Repitiendo los mismos pasos que en el caso anterior, debemos comprobar que el proceso es algo más inestable, mientras que las correlaciones son mucho más marcadas.

Por último para los AR(1) comprobar el caso en que $\phi_1 = 1$. Ver que estamos ante un paseo aleatorio. Comprobar los casos en que tenemos constante y no en el modelo.

1.2.2 Proceso AR(2)

El proceso AR(2) tiene por ecuación generadora:

$$x_t = c + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + a_t$$

La ecuación nos dice que el valor de la variable en tiempo t es ϕ_1 veces el valor de la variable en tiempo $t-1$ más ϕ_2 veces el valor de la variable en tiempo $t-2$, más el valor de la constante más una componente aleatoria de ruido blanco. Para determinar los valores de la media, la varianza y las autocorrelaciones, ver el capítulo 4 de los apuntes. Para que el proceso sea estacionario se deben verificar varias condiciones: $-1 < \phi_2 < 1$, $\phi_1 + \phi_2 < 1$ y $\phi_2 - \phi_1 < 1$. Vamos a generar varias series para diferentes parámetros ϕ_1 y ϕ_2. Para ello creamos un workfile de 200 datos de la manera habitual. Hay cuatro tipos de correlogramas teóricos (mirar el capítulo 4 de los apuntes). Veamos algunos ejemplos. En primer lugar generamos una serie donde $c = 1$, $\phi_1 = 1.4$, $\phi_2 = -0.7$ y $\sigma_a^2 = 1$. Para ello debemos seguir los pasos:

1. File→New→Workfile.
2. Undated or Irregular→1 to 200.
3. Genr→a=nrnd.
4. Genr→x1=1.

5. Genr→IMPORTANTE: Sample: 3:200 → x1=1.4*x1(-1)-0.7*x1(-2)+a.

El proceso de generación asume que $x_1 = 1$ y $x_2 = 1$. Vemos la serie:

View → Line Graph

La serie debe tomar valores alrededor de la media del proceso, 0, y no debe tener cambios en la varianza. Ver también el histograma y los estadísticos principales. Por último pasar a ver el correlograma. Comprobar el comportamiento sinusoidal en el decrecimiento de la función de autocorrelación del proceso. Ver que la correlación parcial muestra dos primeros valores significativos, mientras que el resto deben ser aproximadamente 0.

En segundo lugar considerar el ejemplo donde los parámetros son $c = 0$, $\phi_1 = 1.2$, $\phi_2 = -0.32$ y $\sigma_a^2 = 1$. Para ello debemos seguir los pasos:

1. File→New→Workfile.
2. Undated or Irregular→1 to 200.
3. Genr→a=nrnd.
4. Genr→x1=0.
5. Genr→IMPORTANTE: Sample: 3:200 → x1=1.2*x1(-1)-0.32*x1(-2)+a.

El proceso de generación asume que $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$. Vemos la serie:

View → Line Graph

La serie debe tomar valores alrededor de la media del proceso, 0, y no debe tener cambios en la varianza. Ver también el histograma y los estadísticos principales. Por último pasar a ver el correlograma. Comprobar que en este caso el decrecimiento de la serie no tiene sinusoides, si no que se produce un decrecimiento monótono salvo el signo en la función de autocorrelación del proceso. Ver que la correlación parcial muestra dos primeros valores significativos, mientras que el resto deben ser aproximadamente 0.