ESTADÍSTICA_ T3

1 – PROBABILIDAD INDUCIDA POR UNA VAR. ALEATORIA
- Problemática
- $(\mathbb{R}_X, \mathcal{B}_X, P_X)$ e. probab. inducido
- Definición de var. aleatoria.

2 _ FUNCIÓN de DISTRIBUCIÓN
- Definición
- Propiedades
  - P1 _ $-\infty$ y $+\infty$
  - P2 _ Intervalo
  - P3 _ Monotonía
  - P4 _ Continuidad

3 _ DISTRIB. DISCRETAS y ABSOLUT. CONTINUAS

ESTAD_T3. VARIABLE ALEATORIA UNIDIMENSIONAL.

Probabilidad inducida por una v.a.
Función de distribución.
Distrib. discretas y absolut. continuas.
Cambio de variable en las distrib. unidim.

---

1 y 2. Var. aleatoria y probab. inducida

Partimos de (E, Ω, P) espacio de probabilidad, donde:

$E \rightarrow$ Espacio muestral

$\Omega \rightarrow$ Espacio de sucesos (con estructura de σ-álgebra)

$P \rightarrow$ medida de probabilidad. $P: \Omega \rightarrow [0,1]$.

El problema con el que nos encontramos es que el espacio muestral no tiene por qué ser medible, ni siquiera suscep-tible de ser ordenado $\rightarrow$ difícil tratamiento matemático.

Para resolver este problema, surge el concepto de v.a., ~~como una función de~~ para transformar en algo medible los sucesos no medibles, qué mejor que IR como ejemplo de medible.

PRIMERA APROXIMACIÓN

Las variables aleatorias suelen designarse con letras griegas, siendo

$$\xi : \underset{\text{dominio}}{E} \longrightarrow \underset{\text{campo de variación}}{\mathbb{R}}$$
$$e \longmapsto \cancel{\text{Boreliano de Borel}}\ x \in \mathbb{R}$$

Así, una variable aleatoria es una función real cuyo dominio es el espacio muestral y con campo de variación la recta real, de modo que cada elemento del espacio muestral se transforma en un nº real.

Esta definición no es suficiente, hace falta garantizar la estructura de σ-álgebra de Ω.

$E \in \Omega$ $\quad$ $\bar{S} \in \Omega$ $\quad$ Unión infinit. $\in \Omega$

Para preservar la estructura de σ-álgebra hace falta imponer la condición siguiente: la imagen inversa de cq conjunto de Borel ha de pertenecer a la σ-álgebra Ω.

$\xi : E \longrightarrow \mathbb{R}$

$e \longmapsto b \in B \in \mathbb{R}$ (cjto de Borel)

ξ es v.a. si $\xi^{-1}(b) = \{e / \xi(e) \in B\} \in \Omega$.

Así, si designamos por $\mathbb{R}_X$ los subconjuntos de la recta real cuyas imágenes pertenecen a B_X, entonces $\mathbb{R}_X$ tiene la estructura de σ-álgebra de Borel.

(E, Ω) y $(\mathbb{R}_X, B_X)$ tienen la misma estructura.

En lo que respecta a P, designamos P_X como la función de conjunto que asigna probabilidades en $\mathbb{R}$ a los sucesos que integran B_X.

$P_X : B_X \longrightarrow [0, 1]$

$b \in B \longmapsto P_X(b) = P[\xi^{-1}(b)] = P[e / \xi(e) = b]$.

En estas circunstancias, podemos decir que la variable aleatoria ξ induce a partir de (E, Ω, P) el nuevo espacio probab. $(\mathbb{R}_X, B_X, P_X)$, comprobándose fácilmente que P_X es una probabilidad.

Para simplificar los cálculos, el suceso de $\mathbb{R}_X$ que consideramos es el intervalo semiabierto $(-\infty, x] \in B$, σ-álg. de Borel, de modo que para cada elemento del espacio muestral $e \in E$, $\xi(e) = (-\infty, x]$ siempre que $x \in \mathbb{R}$.

Para que ξ sea una v.a. debe verificarse que ~~$\xi^{-1}(e) \in \Omega$~~

$\xi^{-1}(-\infty, x] \in \Omega$.

A consecuencia de la def. de variable aleatoria deducimos que $\xi(E) = \mathbb{R}$, es decir $\xi^{-1}(\mathbb{R}) = E$.

ESTAD _ T3

Resumen:

Sea (E, Ω, P) un espacio de probabilidad,

y $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ el espacio probabilizable formado por

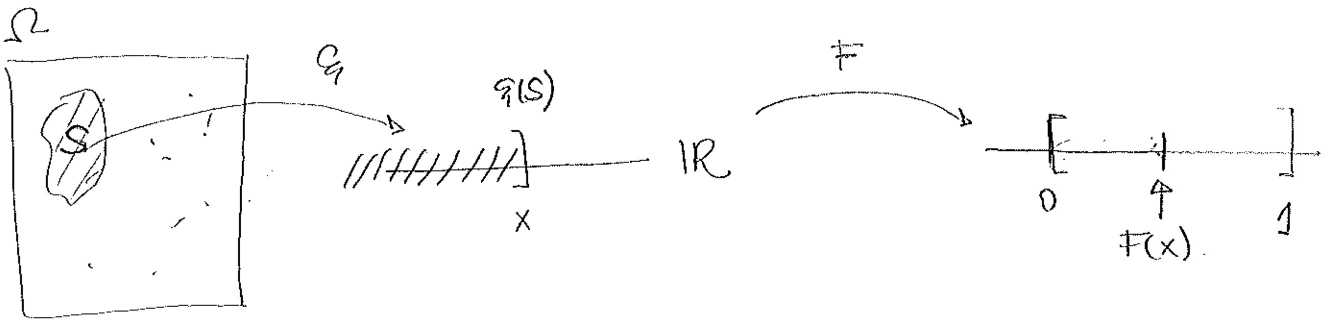
la recta real $\mathbb{R}$

la σ-álgebra de los conjuntos de Borel $\mathcal{B}$.

Una aplicación $\xi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es una variable aleatoria si y sólo si $\xi^{-1}(b) \in \Omega$, $\forall\, b \in \mathcal{B}$.

Hay que resumir / aclarar esto.

- Buscar Quesada (1985)
- Mirar si $\xi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ ó bien $\xi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.
- ¿Aplicación o función?



3_ FUNCIÓN de DISTRIBUCIÓN : $\Omega \xrightarrow{\xi} \mathbb{R} \xrightarrow{F} [0,1]$

Idea: Probabilidad acumulada.

DEF: $\forall\, x \in \mathbb{R},\ F(x) = P(\xi \in (-\infty, x]) = P(\xi \le x)$.

Propiedades:

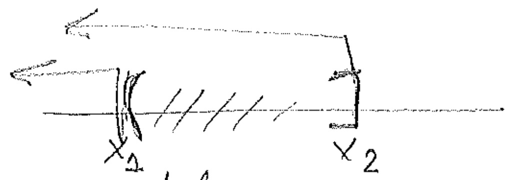
P1_ $F(-\infty) = 0$

$F(+\infty) = 1$

$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = \lim_{x \to -\infty} P(\xi \le x) = \ldots\ P(\emptyset) \overset{T1}{=} 0$$

$$F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} P(\xi \le x) = P(E) \overset{Ax2}{=} 1.$$

P2_ $P(x_1 < \xi \le x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

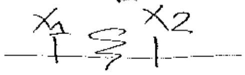


$$P(x_1 < \xi \le x_2) = P(\xi \le x_2) - P(\xi \le x_1) \overset{def}{=}$$
$$= F(x_2) - F(x_1).$$

P3_ $F(x)$ es monótona no decreciente

(Yo distingo entre creciente (absolutamente creciente) y no decreciente (puede ser $>$, puede ser $=$, nunca $<$).

Hay que demostrar que $\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}\ /\ x_1 < x_2$ se verifica que $F(x_1) \le F(x_2)$.



$x_1 < x_2 \Rightarrow P(x_1 < \xi \le x_2) = P(\xi \le x_2) - P(\xi \le x_1) \ge 0$, por ser probabilidad, luego

$$P(\xi \le x_2) \ge P(\xi \le x_1)$$
$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$
$$F(x_2) \ \ge\ F(x_1).$$

P4_ $F(x)$ es continua por la derecha.

$\lim_{\varepsilon \to 0} |F(x+\varepsilon) - F(x)| = 0$. $\quad (x,x] = \{x\}$

(dcha) $F(x+\varepsilon) - F(x) = P(x < \xi \le x+\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} P(x < \xi \le x) = P(\emptyset) = 0$

sin embargo, $\quad (x-\varepsilon, x]$

(izqda) $F(x) - F(x-\varepsilon) = P(x-\varepsilon < \xi \le x) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} P(\xi = x) \ne 0$ si ξ es discreta

4_ DISTR. DISCRETAS y ABS. CONTINUAS

a) Distribuciones DISCRETAS:

Una variable aleatoria es de tipo discreto cuando su campo de variación se compone de un nº finito o numerable de puntos, existiendo en ellos masa discreta.

La función de probabilidad que indica cómo se reparte la masa de la probabilidad entre dichos puntos se denomina función de cuantía, $P(\xi = x_i) = p_i$.

Es función de probabilidad, porque:

$\forall x_i \in \mathbb{R}, \quad P(\xi = x_i) \geq 0 \qquad (A \times 1)$

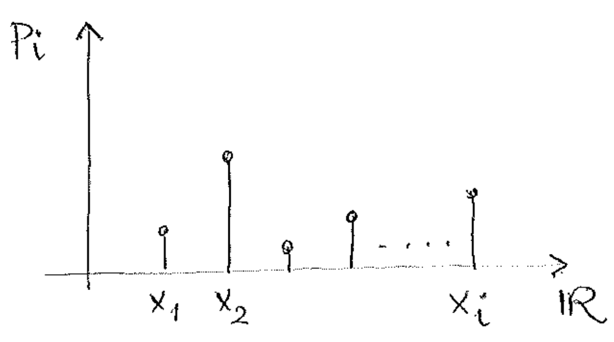
Campo de variación: $x_i \in \mathbb{R}$ tq $p_i > 0$.

Además, $\sum_{i=1}^{\infty} P(\xi = x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1 \qquad (A \times 2)$

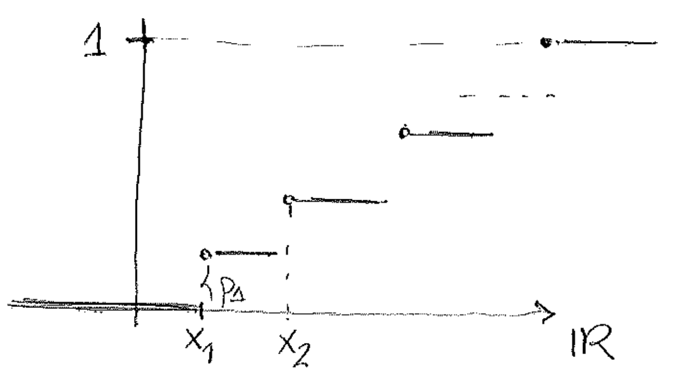
La función de distrib. asociada es:

$$F(x) = P(\xi \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(\xi = x_i) = \sum_{x_i \leq x} p_i$$

que gráficamente:



las probab. están en los puntos



Función tipo escalera (a saltos) discontinua

b) Distrib. absolutamente continuas

Una variable aleatoria es continua si su función de distrib, $F(x)$, es continua, la primera derivada existe y es continua.

El conjunto de valores ~~puntos~~ donde se verifican estas condiciones constituye el campo de variación de la variable aleatoria.

Al contrario que en el caso de v.a. discretas, en las var. aleatorias continuas la probab. ~~exist~~ se reparte entre los intervalos siendo 0 en los puntos. Lo vemos:

$$P(x < \xi \leq x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x)$$

Por el tma. del valor medio

$F(x + \Delta x) - F(x) = \Delta x \cdot F'(\delta)$, siendo $x < \delta \leq x + \Delta x$. por lo que al, acercarse por la izqda

$$\left.\begin{array}{l}\Delta x \to 0 \Rightarrow (x, x + \Delta x] \longrightarrow \{x\} \\ \Rightarrow F(x + \Delta x) - F(x) = 0\end{array}\right\} \Rightarrow P(\xi = x) = 0.$$

Respecto a la derivada de la función de distribución:

$\dfrac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(\delta)$, tomando límites

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x) = f(x)dx \leftarrow \text{función de densidad.}$$

$$P(x < \xi \leq x + dx) = f(x)\,dx$$

Tma. del valor medio:
Si f es continua y derivable en $[x, x + \Delta x]$, se verifica:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x + \theta \Delta x) \quad \text{para } 0 \leq \theta \leq 1,$$

siendo $x + \theta \Delta x$ un pto intermedio de $[x, x + \Delta x]$.

Observando la definición, el numerador expresa la probabilidad en el intervalo cuya amplitud tiende a 0, intervalo infinitesimal dx; mientras que al dividir esta expresión por Δx, obtenemos la probabilidad media. Por eso se llama función de densidad, porque expresa la densidad de masa en el intervalo infinitesimal dx.

De las propiedades de función de distribución se deducen fácilmente las de la función de densidad:

P1 — $f(x) \geq 0$ por ser la probab ≥ 0.

P2 — $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$ por ser $= P(-\infty < \xi < +\infty) = P(E) = 1$.

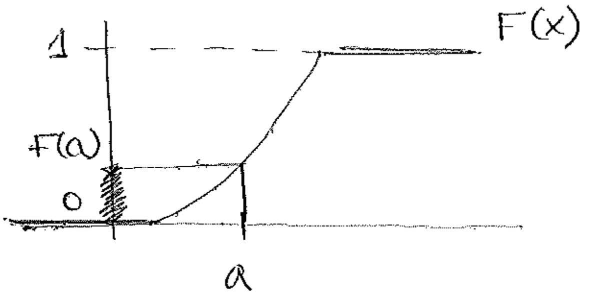
En las variables aleatorias absolutamente continuas, la f. de distribución se puede escribir como:

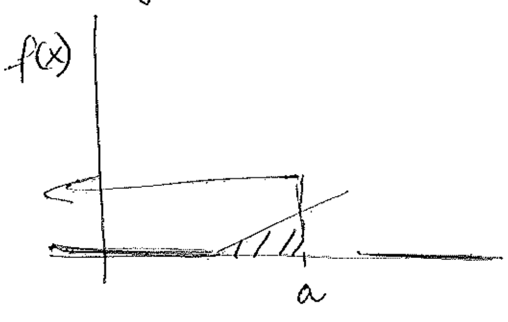
$$F(x) = P(\xi \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$$

es decir, ~~el área~~ la probabilidad se puede calcular de dos formas:

A través de la f. distribución, $F(a)$, la probab. de un suceso es una longitud, la ordenada de F en el punto a.

A través de la f. densidad, $f(x)$, la probab. de un suceso, es un área $\begin{cases} \text{entre } f(x) \text{ y el eje } OX \\ \text{entre } -\infty \text{ y } a. \end{cases}$





mirar atrás →

5_ CAMBIO de VARIABLE en las DISTRIB. UNIDIMENSIONALES

Sea ξ una v.a. definida a través de $F(x)$ y con dominio $\mathbb{R}$.

Consideramos $\eta = h(\xi)$ una transformación de ξ que tb. es variable aleatoria

- con una distrib. de probabilidad dependiente de ξ
- con un campo de variación determinado por ξ

Así, $$P(\eta \in A) = P(h(\xi) \in A) = P(\xi \in h^{-1}(A))$$

Denominamos por $G(y)$ la función de distribución de η.

Por definición,
$$G(y) = P(\eta \leq y) = P(h(\xi) \leq y) = P(\xi \leq h^{-1}(y)) = $$
$$= F(h^{-1}(y)).$$

a) Variables discretas *

$$P(\eta = y) = P(h(\xi) = y) = P(\xi = h^{-1}(y)) = \sum_{x \in h^{-1}(y)} P(\xi = x)$$

F. probabilidad = F. cuantía.

b) Variables continuas *

$\eta = h(\xi) \Longrightarrow \xi = h^{-1}(\eta)$ ← sp. que la inversa es única.

F. probabilidad = F. densidad

$$g(y) = G'(y) = F'[h^{-1}(y)]\,|h'(y)| = f[h^{-1}(y)]\,|h'(y)|,$$

donde $|h'(y)|$ es el módulo del jacobiano de la transformación $y = h(x)$.

(*) Para que la transformación quede perfectamente definida es necesario conocer su campo de variación.