ECTRÍA – T12

1. ARIMA (p,d,q)

I ≡ Integrado ≡ se puede transformar en estacionario → homogéneo de orden d.

Y_t es ARIMA (p,d,q) si $\Delta^d Y_t$ es ARMA (p,q) , $\Delta \equiv$ operador diferencia

$W_t = \Delta^d Y_t = (1-L)^d Y_t$

$(1-\phi_1 L - \dots - \phi_p L^p) W_t = (1-\theta_1 L - \dots - \theta_q L^q)\varepsilon_t \sim \phi(L)(1-L)^d Y_t = \theta(L)\varepsilon_t$

Transformación Box y Cox , $Y_t^{(\lambda)} = \begin{cases} \dfrac{Y_t^\lambda - 1}{\lambda} & \text{si } \lambda \neq 0 \\ \ln Y_t & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$ → $\Delta \ln Y_t \equiv$ tasa variación natural

2. METODOLOGÍA de elaboración

Datos → Modelo generador

Se parte de una serie temporal conocida (valores observados) y se pretende determinar el modelo ARIMA que verosímilmente la haya podido generar.

$\{Y_1 \dots Y_T\} \xrightarrow[\text{Inferencia}]{} \phi_p(L)\cdot(1-L)^d(Y_t^{(\lambda)} - \mu) = \theta_q(L)\cdot\varepsilon_t \;/\; \varepsilon_t \to N(0, \sigma_\varepsilon^2 I_T)$

Fases : F1 _ Identificación (especificación del modelo)
F2 _ Estimación (estimación de los parámetros)
F3 _ Validación (contrastación de la adecuación del modelo a los datos)
F4 _ Predicción (pronóstico de valores futuros)

3. F1 – IDENTIFICACIÓN

→ Especificación del modelo (d, λ, μ)

1º Análisis de la estacionariedad.

- No estac. en nivel → (d) → Tomar diferencias de 1er orden
  - Gráfico s.original no estable en nivel
  - Análisis FACE , $\rho \not\to 0$ (ir tomando dif. de 1 en 1 y observar FACE)
  - Contrastes de raíces unitarias
- No estac. en pendiente. → (λ) → Transf. Box y Cox
  - Gráfico s.orig → Fluctuaciones que se amplíen → tomar ln (heterocedat. / amortiguada)
  - Gráfico rango-media : – Puntos alineados con tendencia asc. → tomar ln
    – Sin esquema ó horizontal → no hacer transf.
- Identificación término indep: → (μ) ó δ.
  - Gráfico s.original → mirar nivel (μ)
  - Esperar a la fase de estimación → de δ

$Y_t \longrightarrow W_t = \underbrace{(1-L)^d}_{3^{\circ}} (\underbrace{Y_t^{(\lambda)}}_{1^{\circ}} - \underbrace{\mu}_{2^{\circ}}) \longrightarrow \text{ARMA}(p,q)$.

2º Identificación de la parte estacionaria. → Especificación de p y q.

- Observando la FAC simple (fas) teórica (T) ó estimada (E)

$\rho_k = \text{CORR}(Y_t Y_{t-k})$, $\hat{\rho}_k = r_k$ → correlac. muestral de W_t.

- Observando la FACP (función de autocorrelación parcial) < T / E (fap)

$\phi_{11} \dots \phi_{kk}$ $(\hat{\phi}_{11} \dots \hat{\phi}_{kk}) = \text{CORR}(Y_t Y_{t-k})$ sin efecto de $Y_{t-1} \dots Y_{t-(k-1)}$

AR(p) → { fas → Decrec. rápido geométrico y/o sinusoidal. Infinitos valores.
fap → $\hat{\phi}_{KK}=0$, ∀ K>p . (corosin)

MA(q) → { fas → $\hat{\rho}_K=0$, ∀ K>q. ¿Izblita?
fap → Decrec. rápido exponenc. y/o sinusoidal. Infinitos valores.

ARMA(p,q) → { fas → 1os valores sin patrón fijo + mezcla de oscilac. sinusoidales y/o exponenciales amortiguadas
A partir de K>q (orden MA) se comporta como AR
fap → 1os valores sin patrón fijo + mezcla de oscilac. sinusoidales y/o exponenciales amortiguadas
Hereda comportamiento MA.

En la práctica, se prueba con modelos sencillos, AR(1 ó 2) y se observa el gráfico de residuos, por si tiene estructura MA.

F2. ESTIMACIÓN → Estimación de $\phi_i, \theta_i; \sigma^2_\varepsilon, \mu_W$ • Ordenador.

$Y_t \to W_t=(1-L)^d Y_t^{(\lambda)}$, donde $W_t-\phi_1 W_{t-1}-\dots-\phi_p W_{t-p}=\varepsilon_t-\theta_1\varepsilon_{t-1}-\dots-\theta_q\varepsilon_{t-q}+\delta_W$
o bien $(W_t-\mu_W)-\phi_1(W_{t-1}-\mu_W)-\dots-\phi_p(W_{t-p}-\mu_W)=\varepsilon_t-\theta_1\varepsilon_{t-1}-\dots-\theta_q\varepsilon_{t-q}$
con $\mu_W=\delta_W/(1-\phi_1-\dots-\phi_p)$.

Hay que estimar $\phi_1\dots\phi_p, \theta_1\dots\theta_q, \mu_W$ y σ^2_ε bajo los supuestos:
+ $\varepsilon_t \to N(0,\sigma^2_\varepsilon I)$ + W_t estacionario e invertible + $\delta_W=0 \Rightarrow \mu_W=0$.

Estimación por MCO o por MV, solventando los problemas de:
- Valores iniciales < Enfoque condicional (con $W_1\dots W_N, W_0\dots W_{-p+1}, \varepsilon_0\dots\varepsilon_{-q+1}$
Enfoque no condicional (sólo $W_1\dots W_N$, resto se estiman).
- Modelo no lineal en los coef (q≥1) → mt. iterativos.

F3. VALIDACIÓN | Si $\hat{\varepsilon}_t \sim$ Ruido blanco, OK. Caso contrario → a F1.

Un modelo adecuado debería cumplir:
a) Residuos ruido blanco → gráfico media 0, sin patrón comport. incorrelacionados, FACE y FACPE $\hat{\rho}, \hat{\phi}$ NO
b) Modelo estimado estacionario e invertible
Factorizando parte AR, si hay raíces ≅1 tomar diferencias 1er orden.
Factorizando parte MA, si hay raíces ≅1 ¿sobrediferenc.?
c) Coef. signif ≠0 y poco correlacionados entre sí.
Junto a cada estimac, desv. típica, estadístico (H_0: coef=0, intervalo) y el NSC de cada coef.
Revisar matriz de correlaciones por si hay multicolinealidad
d) Coef. del modelo suficientes para explicar la serie bien (R^2 alto)
Probar a introducir más parámetros y comparar R^2 y $\bar{R}^2$
e) Modelo estable para periodos futuros
Cuando aparecen nuevas observaciones se comprueba.

6 — $\boxed{\text{T4. PREDICCIÓN}}$ $\hat{Y}^{T}_{t+K}$ = predicción de Y_{t+K} con inform. hasta T.

la mejor predicción es la que minimiza el error esperado al cuadrado: coincide con la esperanza condicional de Y_{T+K}

$$\hat{Y}^{T}_{T+K} = E\left[Y_{T+K}/\Omega_T\right].$$

AR(1) $\longrightarrow Y_t = \delta + \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t$

$$\begin{cases} \hat{Y}^{T}_{T+1} = \delta + \phi Y_T \quad / \ \hat{\varepsilon}_{T+1} = 0 \ (\text{r.b.}) \\ \hat{Y}^{T}_{T+K} = \phi^K Y_T + \delta(1+\phi+\ldots+\phi^{K-1}) \\ \hat{Y}_{T+K} \xrightarrow[K\to\infty]{} E[Y]. \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ AR(p) $\rightarrow$ p valores

MA(1) $\rightarrow Y_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1} \xrightarrow{\text{inv.}} Y_t = -\theta Y_{t-1} - \theta^2 Y_{t-2} - \ldots + \varepsilon_t$

$$\hat{Y}^{T}_{T+1} = -\theta Y_T - \theta^2 Y_{T-1} - \ldots + 0$$

$$\hat{Y}^{T}_{T+K} = 0 \ , \forall K > 1.$$

$\hookrightarrow$ Para MA(q), $\hat{Y}_{T+K} = 0$, $K > q$.

ARMA(1,1) $\rightarrow Y_t = \delta + \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$

$$\hat{Y}^{T}_{T+1} = \delta + \phi Y_T + 0 - \theta\hat{\varepsilon}_T$$

$$\hat{Y}^{T}_{T+K} = (1+\phi+\ldots+\phi^{K-1})\delta + \phi^K Y_T - \phi^{K-1}\theta\varepsilon \ ?$$

ARIMA $\rightarrow d \neq 0 \rightsquigarrow$ Tomar dif. d veces y estimar mod. estac.
Deshacer cambio en predicción.

$\searrow Z_t = \ln Y_t \Rightarrow \hat{Y}^{T}_{T+K} = \exp\left\{ \hat{Z}^{T}_{T+K} + \frac{1}{2}\operatorname{Var} \underbrace{e_T(K)}_{\text{error}} \right\}.$

ARIMA (p, d, q)

Metodología de elaboración de un modelo ARIMA

Datos $\longrightarrow$ Modelo generador

$Y_1 \ldots Y_T \rightsquigarrow \phi_p(L)(1-L)^d\,(Y_t^{(\lambda)} - \mu) = \theta_q(L)\varepsilon_t$

donde $\varepsilon \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2 I_T)$

Fase 1. IDENTIFICACIÓN $\longrightarrow$ Especificación del modelo.

1°. Análisis de la estacionariedad, ¿estacionaria? SI $\rightarrow$ seguir; NO $\rightarrow$ transf.

- No estac. en nivel $\xrightarrow{d}$ Tomar diferencias de 1ª orden
- No estac. en pendiente $\xrightarrow{\lambda}$ Transformación Box y Cox
- Identificación del t. indep.? ~~¿Tiene media ≠ 0?~~ $\longrightarrow$ Incluir μ en el modelo.

2°. Determinación de los órdenes del proceso ARMA.

- Parte autorregresiva $\xrightarrow{p}$ Identificar AR(p)
- Parte media móvil $\xrightarrow{q}$ Identificar MA(q)

combinados!

(Para Identificación) de Novales

No estacionariedad

Gráfico ~~tiene~~ serie original tiene tendencia lineal o cuadrática
⇒ no estacionario.

Procesos integrados, o procesos estocásticos no estacionarios homogéneos de orden d:

Y_t no es estacionario, pero $\Delta^d Y_t = (1-L)^d Y_t$ sí es estac.

Y_t es ARIMA (p, d, q) si $\Delta^d Y_t$ es ARMA (p, q)

Gráfico de la serie temporal muestra fluctuaciones cuya amplitud cambia para ≠ ~~periodos~~ intervalos de tiempo ⇒ no estacionario
(la varianza no permanece de a lo largo del tiempo ⇒ heterosced)

Tomar logaritmos, caso particular de la transf. Box-Cox

$$Y_t^{\lambda} = \begin{cases} \dfrac{Y_t^{\lambda}-1}{\lambda} & \text{si } \lambda \neq 0 \\ \ln Y_t & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$$

La transformación logarítmica no va a corregir el problema de la heteroscedasticidad, lo va a amortiguar, persigue estabilizar la varianza de la variable.

Para determinar d: – Análisis gráfico original (no estable en nivel)
– Análisis FACE ($\rho \not\to 0$)
– Contrastes de raíces unit. (Dickey-Fuller)

Para determinar λ: – Análisis gráfico original (fluctuaciones)
– Gráfico rango-media < Puntos, línea crec ⇒ no estac. / Sin patrón ó OX ⇒ estac

Para determinar μ: – Gráfico serie original
– Esperar a fase de estim. a ver si sale una de.

Identificación de la parte estacionaria

Distinguimos entre función autocorrelación simple (teórica ó estimada)
~~y función~~ $\rho_k = CORR(Y_t Y_{t-k})$

y función autocorrelación parcial (teórica o estimada),
que muestra la correlación entre dos variables ajustada por el efecto de las ~~variables~~ retardos intermedias.

$\cdot\ \phi_{11}, \phi_{22} \dots \phi_{kk} = corr(Y_t Y_{t-k})$ sin efecto de $Y_{t-1} \dots Y_{t(k-1)}$

AR(p) → fas: Decrecimiento rápido de tipo geométrico puro ó geométrico con alternancias de signos, sinusoidal ó mezcla de varios tipos (raíces reales o complejas), infinitos valores.

fap: Se anula para retardos superiores a p.

MA(q) → fas: Se anula para retardos superiores a q.

fap: Decrecimiento rápido de tipo exponencial y/o sinusoidal.

ARMA (p,q) → fas: Primeros valores iniciales sin patrón fijo, seguido de mezcla de oscilaciones sinusoidales y/o exponenciales amortiguadas.

fap: Primeros valores sin patrón fijo.
Mezcla de oscilaciones sinusoidales y/o exponenciales amortiguadas.

↳ A partir de $k > q$ (orden MA) se comporta como un AR (p)

↳ hereda el comportamiento MA.

En la práctica, se prueba con distintas especificaciones

Por ejemplo, partir de un AR, y observar si los residuos tienen estructura MA (ó recíprocamente)

Predicción con modelos ARIMA

Cuando se pretende predecir $\hat{y}^{T}_{t+k}$ con la información hasta T, la mejor predicción, la que minimiza el error esperado al cuadrado, es la esperanza condicional de la var. y_{T+k}

$$AR(1) \Rightarrow Y_t = \delta + \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\hat{y}^{T}_{T+k} = E\left(Y_{T+k}/\Omega_T\right)$$

$$AR(1) \to E\left(Y_{T+1}/\Omega_T\right) = E\left(\delta + \phi Y_T + \varepsilon_{T+1}\right) = \delta + \phi Y_T$$

porque Y_T conocido en T

$E[\varepsilon_{T+1}/\Omega_T] = 0$, por ser ruido blanco

$$E\left(Y_{T+k}/\Omega_T\right) = \phi^k Y_T + \underbrace{\delta(1+\phi+\dots+\phi^{k-1})}_{\text{función de } E(Y)}.$$

$$k \to +\infty \Rightarrow \hat{Y}_{T+k} = E(Y)$$

En un $AR(p)$ se necesitan las p últimas observaciones de y para hacer una predicción.

$$MA(1) \to Y_t = \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}$$

Invertible $\Rightarrow Y_t + \theta Y_{t-1} + \theta^2 Y_{t-2} + \dots = \varepsilon_t$

por lo que $Y_t = -\theta Y_{t-1} - \theta^2 Y_{t-2} - \dots + \varepsilon_t$

$$E\left(Y_{T+1}/\Omega_T\right) = -\theta Y_T - \theta^2 Y_{T-2} - \dots + 0.$$

$$E\left(Y_{T+2}/\Omega_T\right) = -\theta E\left(Y_{T+1}/\Omega_T\right) - \theta^2 Y_T - \dots$$

$$= 0 \qquad \text{(se anulan)}$$

luego $E\left(Y_{T+k}/\Omega_T\right) = 0$ para $k \geq 2$.

En general, para $MA(q)$ $E\left(Y_{T+k}/\Omega_T\right) = 0$ para $k > q$.

ARMA (1,1) $\rightarrow$ $Y_t = \delta + \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}$

$$E[Y_{T+1}/\Omega_T] = \delta + \phi Y_T + 0 - \theta \varepsilon_T .$$

En T se conoce

$$E[Y_{T+K}/\Omega_T] = (1+\phi+\ldots+\phi^{K-1})\delta + \phi^K Y_T - \phi^{K-1}\theta\varepsilon_T .$$

$$K \to +\infty \Rightarrow \hat{Y}_{T+K} \longrightarrow E(Y_t)$$

Intervalos de confianza para las predicciones

$$E[Y_{T+K}/Y_T] \pm \lambda_\alpha \, \hat{\sigma}_{e_T}(K)$$

Normal   estimación

Predicción en un ARIMA.

$d \neq 0 \Rightarrow$ Al tomar diferencias se ha pasado a un proceso estacionario, que es el que se ha estimado y sobre el que se han hecho las predicciones. Hay que deshacer el cambio.

Sp $d = 1 \Rightarrow (1-L)Y_t = Y_t - Y_{t-1} = Z_t$ estacionario

~~Conocemos $\hat{Z}_{T+1} \ldots \hat{Z}_{T+K}$~~

Conocemos $Y_1 \ldots Y_T$.

Predecimos $\hat{Z}_{T+1} \ldots \hat{Z}_{T+K}$ $\Rightarrow$ Conocemos $Z_1 \ldots Z_T$.

$$E(Y_{T+1}/\Omega_T) = E(Z_{T+1}/\Omega_T) + Y_T$$

iterando

$$E(Y_{T+K}/\Omega_T) = E(Z_{T+K}/\Omega_T) + E(Z_{T+K-1}/\Omega_T) + \ldots + Y_T .$$

si $Z_t = \ln Y_t$ ← transf. logarítmica.

error de predic

$$E(Y_{T+K}/\Omega_T) = \exp\left\{E(Z_{T+K}/\Omega_T) + \tfrac{1}{2}\mathrm{Var}\, e_T(K)\right)$$

↳ el intervalo de confianza no será simétrico

$$\text{ARMA}(0,1) \times \text{ARMA}(0,1)_s = \text{MA}(1) \times \text{MA}(1)_s$$

$$\rightarrow \quad Y_t = (1-\theta_1 L) \cdot (1-\Theta_1 L^s)\, \varepsilon_t$$

$$Y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \Theta_1 \varepsilon_{t-s} - \theta_1 \Theta_1 \varepsilon_{t-(1+s)}$$

$$\text{ARMA}(0,2) \times \text{ARMA}(0,1)_s$$

$$Y_t = (1-\theta_1 L - \theta_2 L^2) \cdot (1-\Theta_1 L^s)\, \varepsilon_t =$$

$$= \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \Theta_1 \varepsilon_{t-s} + \theta_1 \Theta_1 \varepsilon_{t-(1+s)} + \theta_2 \Theta_1 \varepsilon_{t-(2+s)}$$

$$\text{ARMA}(0,1) \times \text{ARMA}(1,0)_s$$

$$(1-\Phi_1 L^s)\, Y_t = (1-\theta_1 L)\, \varepsilon_t$$

$$Y_t - \Phi_1 Y_{t-s} = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

$$\text{ARMA}(1,0) \times \text{ARMA}(0,1)_s$$

$$(1-\phi_1 L)\, Y_t = (1-\Theta_1 L^s)\, \varepsilon_t$$

$$Y_t - \phi_1 Y_{t-1} = \varepsilon_t - \Theta_1 \varepsilon_{t-s}$$

$$\text{ARMA}(1,0) \times \text{ARMA}(1,0)_s$$

$$(1-\phi_1 L) \cdot (1-\Phi_1 L^s)\, Y_t = \varepsilon_t$$

$$Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \Phi_1 Y_{t-s} + \phi_1 \Phi_1 Y_{t-(1+s)} = \varepsilon_t .$$

$$\text{ARIMA}(p,d,q) \times \text{ARIMA}(P,D,Q)_s$$

$$\phi_p(L) \cdot \Phi_P(L^s) \cdot \Delta^d \Delta_s^D\, Y_t = \theta(L) \cdot \Theta(L^s) \cdot \varepsilon_t .$$

ECONOMETRIA – T12

1 – ARIMA (p, d, q)

+ Concepto
+ Especificación

(Paseo aleatorio, Tasa de variac. natural)

2 – METODOLOGÍA de elaboración

+ Metodología ARIMA
+ Fases

3 – F1: IDENTIFICACIÓN $\longrightarrow d, \lambda, \mu,$ ~~[illegible]~~ P, Q

+ 1º Análisis de la estacionariedad
  ↳ en nivel (3) → d
  ↳ en pendiente → λ
  ↳ Identificación μ ó δ
+ 2º. Identificación de la parte estacionaria
  ↳ ~~[illegible]~~ fas y fap
  ↳ Características de AR, MA y ARMA.

4 – F2: ESTIMACIÓN $\rightarrow \cancel{\phi_i}, \theta_i, \sigma^2_\varepsilon$, δ ó μ_w

+ Supuestos
+ Problemas
  ↳ Valores iniciales { Condic. / No condic.
  ↳ Mod. no lineales en los coef. $(q \geq 1)$.
+ Estimadores: MCO ó MV.

5 – F3: VALIDACIÓN

+ $\hat{\varepsilon}_t$ ruido blanco ⇝ F1.
+ W_t estac. e invertible → raíces unit. ¬ sobrediferenc.
+ Coef. signif $\neq 0$ e incorrelac.
+ R^2 sufic. alto
+ Modelo estable en futuro

6 – F4: PREDICCIÓN

+ $\hat{Y}^T_{T+K} = E[Y_{T+K}/\Omega_T]$
+ AR(1)

universidad san pablo - ceu

CARRERA		
APELLIDOS		NOMBRE
ASIGNATURA	FECHA	GRUPO

ARIMA

1. DEFINICIÓN

Consideramos solamente procesos no estacionarios que fácilmente pueden transformarse en modelos estacionarios.

Ejemplo: Paseo aleatorio $\rightarrow Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$

Es un AR(1) con $\phi_1 = 1 \Rightarrow$ no es estacionario.

Tomando ~~primeras~~ diferencias de primer orden l.v.e.t

$$W_t = \Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = \varepsilon_t \rightarrow \text{ruido blanco}.$$

El proceso Y_t se obtiene sumando, ó integrando, el proceso W_t

$$Y_t = W_t + Y_{t-1} = W_t + W_{t-1} + Y_{t-2} = \ldots = W_t + W_{t-1} + \ldots$$

MODELOS INTEGRADOS son una clase de modelos que se pueden transformar en estacionarios mediante la toma de diferencias ó de otro modo

son modelos que se pueden obtener mediante suma o integración de un proceso estacionario. Tb. se les denomina modelos no estacionarios homogéneos.

ARIMA (p, d, q) $\rightarrow$ tomando primeras diferencias d veces se obtiene un ARMA (p, q)

I ≡ integrado

Y_t es ARIMA(p, d, q) si $(1-L)^d Y_t$ es ARMA (p, q).

$W_t = \Delta^d Y_t = (1-L)^d Y_t$. Como W_t es ARMA (p, q):

$$(1-\phi_1 L - \ldots - \phi_p L^p) W_t = (1-\theta_1 L - \ldots - \theta_q L^q)\varepsilon_t.$$

$$(1-\phi_1 L - \ldots - \phi_p L^p)(1-L)^d Y_t = (1-\theta_1 - \ldots - \theta_q L^q)\varepsilon_t.$$

$$\phi(L)(1-L)^d Y_t = \theta(L)\varepsilon_t$$

Situación: Varianza de la s.t. viene afectada por una tendencia y esta tendencia no desaparece al tomar diferencias.

Transformación Box y Cox (1964)

$$Y_t^{(\lambda)} = \begin{cases} \dfrac{Y_t^{\lambda} - 1}{\lambda} & \lambda \neq 0 \\ \ln Y_t & \lambda = 0 \end{cases}$$

Para $\lambda = 1 \rightarrow$ transformación $\sim$ valores originales

$\lambda = 0 \rightarrow$ la primera transf. da una indet. % cuyo límite es $\ln Y_t$

Combinando una diferencia con la toma de logaritmos se obtiene la transformación $\Delta \ln Y_t$, muy útil si no se tiene en cuenta el problema de la estacionalidad.

$\Delta \ln Y_t \equiv$ tasa de variación natural

$$\Delta \ln Y_t = \ln Y_t - \ln Y_{t-1} = \ln \frac{Y_t}{Y_{t-1}}$$

$\Delta \ln Y_t \simeq \dot{Y}_t$ (= tasa de variac. relativa, $\frac{Y_t}{Y_{t-1}} - 1$).

La tasa de variación natural es aditiva $\equiv$ se puede obtener como suma de las tasas de variación natural de los intervalos en que está dividido el periodo.

$$\Delta \ln Y_1 + \Delta \ln Y_2 + \Delta \ln Y_3 = \ldots = \ln \frac{Y_3}{Y_0}$$

METODOLOGÍA de ELABORACIÓN
2. FASE de IDENTIFICACIÓN

Metodología de elaboración

Una serie temporal se puede contemplar como una realización de un proceso estocástico.

Los modelos ARIMA, aunque son una clase particular de procesos estocásticos, pueden ser utilizados para describir el comportamiento de la mayor parte de las series económicas.

Se considerará que una serie temporal dada es una realización de un proceso específico ARIMA (p, d, q), en el que están determinados numéricamente los parámetros $\phi_1, \ldots, \phi_p, \theta_1 \ldots \theta_q$, d, λ, μ y σ_ε^2.

En la práctica, se parte de una serie temporal conocida (los valores observados de la magnitud a lo largo del tiempo) y se pretende determinar el modelo ARIMA que verosímilmente la haya podido generar.

Realización		Proceso estocástico
$Y_1, Y_2 \ldots Y_T$	$\Longrightarrow$ inferencia	$\phi_p(L)(1-L)^d(Y_t^{(\lambda)} - \mu) = \theta_q(L)\varepsilon_t$ $\varepsilon \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2 I)$

Para efectuar inferencias se suele disponer de una o más realizaciones (series temporales). En Economía, hay que efectuarla casi siempre en base a una sola realización.
a partir de

La elaboración de un modelo ARIMA consiste en la búsqueda de un proceso ARIMA (p, d, q) que verosímilmente haya podido generar la serie temporal objeto de estudio. En las fases de elaboración se requiere utilizar un ordenador.

Fase 1: Identificación $\rightarrow$ Especificación del modelo.

1º. Análisis de estacionariedad

NO es estacionaria $\rightarrow$ transformaciones para hacerla

- Diferencias de primer orden $\rightarrow d$.
- Transformación Box y Cox $\rightarrow \lambda$.

¿Considerar $\mu \neq 0$?

2º. Determinación de los órdenes del proceso ARIMA:
- Parte autorregresiva → ~~AR~~ p.
- Parte media móvil → q.

Fase 2: Estimación → Estimación de los parámetros
- Estimación de $\phi_1 \dots \phi_p$
- Estimación de $\theta_1 \dots \theta_q$
- Estimación de σ^2_ε
- ¿Opcional: estimación de μ_w (media proceso estac.)

Una vez concluida la estimación, el proceso estacionario relacionado con el ARIMA que haya podido generar la serie puede:

$$\phi(L)(W_t - \mu_w) = \theta(L)\hat{\varepsilon}_t$$

donde $\hat{\varepsilon}_t$ se puede obtener a partir de los parámetros de la serie W_t y, si el modelo fuera adecuado, debería aproximarse al "ruido blanco" ε_t.

Fase 3: Validación → ¿Es el modelo adecuado?

Si $\hat{\varepsilon}_t$ se parece a un ruido blanco, el modelo obtenido en las fases anteriores es válido. En caso contrario, hay que empezar otra vez desde el principio.

Fase 4: Predicción → Utilizar el modelo validado para pronosticar valores futuros.

Tb. sirve de validación del modelo, de manera que si existen discrepancias de carácter sistemático entre los valores pronosticados y los valores observados, se debería cuestionar la validez del modelo, y se debe proceder a reidentificar el modelo generador.

El principio de la parametrización escueta que proponen Box y Jenkins consiste en postular un modelo generador con el mínimo número de parámetros posibles, y ampliar este número sólo si es estrictamente necesario.

- Correlación entre Y_t e Y_{t-k}
- Ajustada por el efecto de los retardos intermedios $(Y_{t-1}, Y_{t-2} \dots Y_{t-k-1})$

3. FASE de IDENTIFICACIÓN

1º. Identificación de modelos estacionarios $\left\{ \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \right\}$ ARMA (p,q).

Función de autocorrelación estimada (FACE)

A partir de una muestra de tamaño N de valores de una serie estacionaria W_t, se puede calcular un coef. de autocorrelación muestral de orden τ:

$$r_\tau = \frac{\sum_{t=\tau+1}^{N} (W_t - \bar{W})(W_{t-\tau} - \bar{W})}{\sum_{t=1}^{N} (W_t - \bar{W})^2}$$

τ retardo

La secuencia de valores de r_τ, para $\tau = 1, 2, 3, \dots$ constituye el correlograma estimado o FACE.

A medida que crece el orden del retardo disminuye el nº de sumandos del numerador, por lo que no se recomienda calcular coef. de autocorrelación para ~~τ~~ $\tau \geq \frac{1}{3}N$ ó $\frac{1}{4}N$.

Función de autocorrelación parcial teórica (FACPT) y estimada (FACPE)

A diferencia de lo que ocurre en un MA, en un AR, de cq orden la función de autocorrelación teórica empieza a decrecer a partir de un determinado retardo, pero nunca se hace 0.

FACPT $\rightarrow \phi_{11}, \phi_{22}, \phi_{33}, \dots, \phi_{pp}, \dots$

En AR(p) $\rightarrow \phi_{11} \dots \phi_{pp} \neq 0$ y $\phi_{p+1\,p+1} = \phi_{p+2\,p+2} = 0$

En MA(q) $\rightarrow$ Decaen de forma rápida a partir de q, pero nunca se hacen 0.

En un ARMA (p, q) tanto la FACPT como FACT tienen infinitos elementos $\neq 0$.

Función de autocorrelación parcial estimada (FACPE)
$\hat{\phi}_{11}, \hat{\phi}_{22} \ldots$

Puede contemplarse como la correlación parcial existente entre dos períodos ($\hat{\phi}_{KK} = corr(Y_t, Y_{t-K})$) cuando se han eliminado el efecto de las var. intermedias ($Y_{t-1}, Y_{t-2} \ldots Y_{t-K+1}$)

$AR(p) \longrightarrow \hat{\phi}_{KK} = 0$ para $K > p$.

La identificación del modelo generador será tanto más fácil cuanto mayor sea el tamaño de la muestra. En las series cuyo nº de observaciones sea pequeño, la identificación con los instrumentos propuestos es muy difícil.

Resumen

Función de AutoCorrelación Teórica. (FACT) En Novales (fas)

AR (p) → Decrecimiento rápido de tipo geométrico puro y geométrico con alternancia de signos sinusoidal o mezcla de varios tipos.

MA (q) → Se anula para retardos superiores a q.

ARMA (p, q) → Primeros valores iniciales sin patrón fijo, seguidos de mezcla de oscilaciones sinusoidales y/o exponenciales amortiguadas.

Función de AutoCorrelación Parcial Teórica (FACPT) En Novales (fp)

AR(p) → Se anula para retardos superiores a p.

MA(q) → Decrecimiento rápido de tipo exponencial y/o sinusoidal

ARMA (p, q) → Primeros valores iniciales sin patrón fijo. Mezcla de oscilaciones sinusoidales y/o exponenciales amortiguadas.

2º. Análisis de estacionariedad. { ~~No estacionaria en nivel~~ / ~~Si estacionaria en periodicidad~~

a) No estacionariedad en media: Identificación de (d).

Análisis visual del gráfico de la serie → mirar si existe un valor en torno al cual la serie va oscilando pero sin alejarse de forma permanente de dicho valor.

Examen de la FACE: Para un paseo aleatorio que arranque en un período finito, $\rho_{\tau t}$ se mantienen próx. a 1. Si los coef. de la FACE no decaen rápidamente, entonces la serie es no estacionaria.
Hay que tomar 1 diferencia y observar la FACE de la serie diferenciada, ... así hasta que decaiga.
En la práctica, basta con $d=1$ ó $d=2$.

¿Qué pasa si el modelo se sobreparametriza? $d_{elegido} > d_{bueno}$
El modelo sería no invertible y con una var. mayor, pero siempre estacionario (La parametrización se vería al estimar la parte MA, con algún θ próx. a 1)

Análisis de la varianza: Calcular la varianza de la serie original y de la serie sometida a diferentes diferencias, y elegir aquélla con varianza mínima.

Estas herramientas no dejan de ser informales poco rigurosas (pruebas)
Contrastes de estacionariedad → Contrastes de raíces unitarias (contraste de Dickey-Fuller).

b) No estacionariedad en varianza: Identificación de λ

Series económicas que se extienden a lo largo de un período dilatado de tiempo y que están afectadas por una fuerte tendencia, → transformación instantánea tipo Box y Cox, para obtener una serie estacionaria en varianza y que al mismo tiempo tenga una distrib. normal.
En la práctica, las alternativas que se utilizan son
$\lambda=0$ (tomar logaritmos neperianos) y
$\lambda=1$ (queda igual)

Análisis visual del gráfico de la serie, para ver si se mantiene o no la dispersión en torno al nivel.
Si $t \nearrow$ → dispersión $\nearrow$, tomar ln ($\lambda = 0$).

Gráfico rango-media. Se divide la serie en varios intervalos, en cada uno se calcula la media (medida del nivel) y el rango (medida de dispersión).
Si los datos son estacionales, el intervalo se considera de longitud = periodo estacional.

- Si los puntos están aprox. alineados en torno a una línea recta con pdte ascendente ⇒ no son estacionarios en varianza. Tómense ln.
- Si el gráfico no muestran un esquema claro, o bien están alineados paralelos al eje OX ⇒ no hacer tranf.

2º. Identificación del término independiente. $\mu = E[Y_t]$ ≠ 0

Se trata de determinar si se incluye una media en el proceso ~~W_t~~ W_t (μ_t), o alternativamente un término indep. δ, en la especificación del proceso.

Teniendo en cuenta que en un proceso ARIMA los datos están autocorrelacionados, el estimador de la varianza muestral puede aproximarse por:

$$\hat{\sigma}_W^2 = \frac{S_W^2}{N}(1+2r_1+2r_2+\ldots+2r_K)$$

siendo K tal que r_i son significativos. Se puede obtener un estimador negativo, no sería aplicable.

1º. Problema no estacionariedad

Heteroscedasticidad ⇒ $\ln Y_t$ ó $Y_t^{(\lambda)}$ ~ homosc.

Modelo con $\mu \neq 0$ $\quad Y_t^{(\lambda)} - \mu$ ~ media 0

Modelo no estac. en nivel ⇒ $(1-L)^d(Y_t^{(\lambda)} - \mu)$ estacionario

Llamamos $W_t = (1-L)^d(Y_t^{(\lambda)} - \mu)$ → ARMA (p, q)

2º. Identificar p y q.

universidad san pablo - ceu

CARRERA		
APELLIDOS	NOMBRE	
ASIGNATURA	FECHA	GRUPO

4. FASE de ESTIMACIÓN

En la fase de identificación, primero

Y_t no estacionario $\longrightarrow$ W_t sí estacionario

$$W_t = (1-L)^d Y_t^{(\lambda)} \quad \text{ó} \quad W_t = (1-L)^d (Y_t^{(\lambda)} - \mu)$$

Después se identifican los órdenes de la parte autorregresiva (p) y de la parte de medias móviles (q)

$$W_t - \phi_1 W_{t-1} - \ldots - \phi_p W_{t-p} = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q} + \delta_W$$

Se ha incluido una cte δ_W, que se relaciona con la media

$$\mu_W = \frac{\delta_W}{1-\phi_1 - \ldots - \phi_p}$$

Alternativamente el proceso se puede expresar:

$$(W_t - \mu_W) - \phi_1 (W_{t-1} - \mu_W) - \ldots - \phi_p (W_{t-p} - \mu_W) = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

En la fase de estimación se trata de estimar los parámetros $\phi_1 \ldots \phi_p, \theta_1 \ldots \theta_q$, μ_W y σ_ε^2.

Supuestos:

a) $\varepsilon \rightarrow N(0, \sigma_\varepsilon^2 I)$

b) El proceso W_t es estacionario

c) El proceso W_t es invertible

d) $\delta_W = 0 \Rightarrow \mu_W = 0$.

Los estimadores se obtienen por mínimos cuadrados o por máxima verosimilitud. En cualquier caso, la estimación de un modelo ARMA plantea el problema de:

- determinación valores iniciales
- modelos no lineales.

Hay dos enfoques distintos para arreglar el problema de los valores iniciales.

Enfoque condicional → Se dan $W_1 \ldots W_N$

$W_0, W_{-1} \ldots W_{-p+1}$

$\varepsilon_0, \varepsilon_{-1}, \ldots \varepsilon_{-q+1}$

Enfoque ~~condicional~~ (w) → Se dan $W_1 \ldots W_N$.

Todo lo demás hay que estimarlo.

Si se verifica que $q \geq 1$ el modelo será no lineal en los coeficientes. En un modelo de este tipo no es posible obtener soluciones analíticas, habrá que utilizar métodos iterativos.

En la práctica, la fase de estimación es realizada por el ordenador, ya que los cálculos son excesivos y complejos.

MIRAR mejor

5. FASE de VALIDACIÓN

Una vez que se ha identificado el modelo y se han estimado los parámetros, nos planteamos si el modelo especificado en las dos fases anteriores es adecuado a los datos muestrales.

Un modelo válido debería cumplir:

a) Residuos se comportan aprox. como ruido blanco.
b) Modelo estimado estacionario e invertible
c) Los coeficientes son estadísticamente significativos y están poco correlacionados entre sí.
d) Los coef. del modelo son suficientes para representar explicar la serie.
e) El grado de ajuste es elevado comparado con otros modelos.

Si los residuos no se aproximan a un ruido blanco, el modelo debería rechazarse.

Análisis de los residuos.

Los residuos tienen que comportarse como un ruido blanco, de media 0, por lo que la mayoría tienen que ~~se~~ estar próx. a 0.

Los residuos tienen que estar incorrelacionados. Esto se ve en la FACE y la FACPE, cuyos coeficientes no deben ser significativamente distintos de 0. En la práctica, se construyen bandas de confianza. Otra forma es realizar un contraste global.

Algunos autores proponen tomar diferencias de primer orden en los residuos y volver a calcular la FACE y la FACPE cuyo comportamiento se puede revisar.

Existen otros contrastes para revisar la heterosce dasticidad de la serie de residuos.

Análisis de los coef. estimados.

En las salidas de ordenador suele aparecer junto al coef. estimado, la desv. típica, el estadístico t, y el NSC de cada coef.

El estadístico t está construido bajo la hipótesis nula de que el $\boxed{\text{parámetro}}$ es igual a 0, y seguirá una distrib. t_{N-K}

$H_0: \phi_1 = 0$ → rechazar para $\alpha = 5\%$ con $t > 2$.
$H_1: \phi_1 \neq 0$

Es importante comprobar si el modelo estimado es estacionario e invertible

Factorizando la parte autorregresiva, si hay algún coeficiente próximo a 1, entonces el modelo es no estacionario → tomar 1 dif.

Factorizando la parte de medias móviles, si algún coef. está próximo a 1, el modelo es no invertible → ¿~~sobreparametrización~~?
¿sobrediferenciación?

Es conveniente revisar la matriz de correlación entre los coef. estimados para revisar si existe un problema de multicolinealidad → ¿eliminar 1 parámetro?

Tb. se puede ver si el modelo mejora introduciendo parámetros adicionales.

Será mejor el modelo que mejor ajuste (R^2 y $\bar{R}^2$)
($\bar{R}^2$ penaliza los parámetros adicionales, evita la sobreparametriz).

Análisis de estabilidad → el modelo estimado para el periodo muestral ¿sigue siendo válido para periodos futuros?
Normalmente, a medida que se van efectuando nuevas observaciones se va comprobando sigue siendo válido.

En el caso de que después de hacer los contrastes y análisis expuestos anteriormente se llega a la conclusión de que el modelo es no válido, hay que reformular el modelo.

En la reformulación se han de tener en cuenta los resultados de esta fase.

CARRERA		
APELLIDOS		NOMBRE
ASIGNATURA	FECHA	GRUPO

6. FASE de PREDICCIÓN

Una vez que se ha conseguido un modelo estimado compatible con los datos, la fase siguiente consiste en utilizar este modelo estimado en la predicción de valores futuros de la variable objeto de estudio.

A veces, resulta más cómodo escribir el modelo ARIMA de formas alternativas:

Partimos de $\phi_p(L)\Delta^d Y_t = \theta_q(L)\varepsilon_t$

Multiplicando la parte AR con las dif.

$\cancel{\phi}\,(1-\phi_1 L - \ldots - \phi_p L^p)\underbrace{(1-L)(1-L)\ldots(1-L)}_{d\text{ veces}} = 1-\varphi_1 L - \ldots - \varphi_{p+d} L^{p+d}$

$\varphi(L) \equiv$ coef. autorregresivos generalizados

ARIMA $\longrightarrow$ $\varphi(L)Y_t = \theta(L)\varepsilon_t$.

Las formas alternativas de predecir Y_{T+l} (conocido hasta T)

a) Mediante un ARIMA: $Y_{T+l} = \varphi_1 Y_{T+l-1} + \varphi_2 Y_{T+l-2} + \ldots + \varphi_{p+d} Y_{T+l-p-d} + \varepsilon_{T+l} - \theta_1 \varepsilon_{T+l-1} - \ldots - \theta_q \varepsilon_{T+l-q}$

b) Mediante un MA(∞): $\varphi(L)\Psi(L) = \theta(L) \to$ despejo $\Psi(L)$.

donde $\Psi(L) = 1 + \Psi_1 L + \Psi_2 L^2 + \ldots$

$Y_{T+l} = \Psi(L)\varepsilon_{T+l} = \varepsilon_{T+l} + \Psi_1 \varepsilon_{T+l-1} + \ldots$

c) Mediante un AR(∞): $\varphi(L) = \pi(L)\theta(L) \to$ despejo $\pi(L)$

donde $\pi(L) = 1 - \pi_1 L - \pi_2 L^2 - \ldots$

$Y_{T+l} = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j Y_{T+l-j} + \varepsilon_{T+l}$

El predictor óptimo

En la obtención del predictor se supondrán conocidos los parámetros del modelo $\phi_1 \dots \phi_p, \theta_1 \dots \theta_q$, $\forall b$, se suponen conocidos todos los ruidos presentes y pasado $\varepsilon_T, \varepsilon_{T-}$

Como criterio de selección, se elegirá el predictor que minimice el ECM, $\tilde{Y}_{T+\ell/T} \Rightarrow$ predictor óptimo /

$$E\left(Y_{T+\ell} - \tilde{Y}_{T+\ell/T}\right)^2 \leq E\left(Y_{T+\ell} - \underset{\text{pred. arbitrario}}{Y^*_{T+\ell,T}}\right)^2$$

El predictor óptimo será un estimador lineal, función lineal de todos los valores conocidos de ε_t.

En general, para el cálculo de predicciones de valores futuros se utiliza el modelo en la forma original ARMA, donde la parte AR está constituida por los coef. autorregresivos generalizados.
Se obtiene de manera recursiva.

Se recomienda realizar un contraste de estabilidad estructural con los periodos de predicción.

CARRERA

APELLIDOS | NOMBRE

ASIGNATURA | FECHA | GRUPO

PROCESOS NO ESTACIONARIOS

Solamente consideramos procesos no estacionarios que se puedan transformar en procesos estacionarios.

Paseo aleatorio

Es un AR(1) con $\phi_1 = 1$ $\quad Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$

De manera recursiva se puede expresar como

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_{t-j}$$

la varianza es infinita, el proceso es no estacionario

Sp. que el proceso se inicia en $-N+1$, tampoco es estacionario porque la varianza es ≠ en cada período.

El coef. de autocorrelación depende del período de referencia, para t muy grande, estarán próximo a 1. Para t_0 no está def.

El proceso puede transformarse en estacionario tomando una diferencia, diferenciar de primer orden

$$W_t = \Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = \varepsilon_t \rightarrow \text{ruido blanco}$$

Para pasar de W_t a Y_t hay que integrar, por eso se llaman modelos integrados

$$Y_t = W_t + Y_{t-1} = W_t + W_{t-1} + Y_{t-2} = \dots = W_t + W_{t-1} + \dots$$

ARIMA (p, d, q) , I = integrado.

Es un modelo integrado, de modo que tomando diferencias d veces se obtiene un modelo estacionario del tipo ARMA (p, q)

Así, $W_t = \Delta^d Y_t = (1-L)^d Y_t$

Es decir,

$$\underbrace{(1-\phi_1 L - \ldots - \phi_p L^p)}_{AR(p)} \underbrace{(1-L)^d}_{I(d)} Y_t = \underbrace{(1-\theta_1 L - \theta_2 L^2 - \ldots - \theta_q L^q)}_{MA(q)} \varepsilon_t$$

En forma más compacta será:

$$\phi(L)(1-L)^d Y_t = \theta(L)\varepsilon_t .$$

Transformación Box y Cox

La varianza viene afectada por la tendencia, que no desaparece al tomar diferencias ⟶ tomar logaritmos.

$$Y_t^{(\lambda)} = \begin{cases} \dfrac{Y_t^\lambda - 1}{\lambda} & \lambda \neq 0 \\ \ln Y_t & \lambda = 0 \end{cases}$$

$\lambda = 1 \rightsquigarrow$ tomar valores originales

$\lambda = 0 \rightsquigarrow$ Indeterminación $\frac{0}{0}$. Regla L'Hôpital: $\lim_{\lambda \to 0} \frac{Y_t^\lambda - 1}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{Y_t^\lambda \ln Y_t}{1}$

Combinando una diferencia con la toma de logaritmos, se obtiene la transformación $\Delta \ln Y_t$ = tasa de variación natural, que es una aprox. de la tasa de variación relativa, y que tiene la ventaja de ser aditiva.

MODELOS ESTACIONALES

Datos que tienen oscilaciones estrictamente periódicos, con periodo inferior o igual a un año.

Modelos estacionales puros y estacionarios

AR(1) estacional, $AR(1)_s$

$$Y_t = \Phi_1 Y_{t-s} + \varepsilon_t$$

Solamente existe relación entre las observaciones separadas por múltipos de s periodos. En realidad, coexisten s procesos autorregresivos independientes entre sí, pero con igual Φ_1.

universidad san pablo - ceu

CARRERA		
APELLIDOS		NOMBRE
ASIGNATURA	FECHA	GRUPO

$AR(1)_s \rightarrow Y_t = \Phi_1 Y_{t-s} + \varepsilon_t$

$AR(2)_s \rightarrow Y_t = \Phi_1 Y_{t-s} + \Phi_2 Y_{t-2s} + \varepsilon_t$

$MA(1)_s \rightarrow Y_t = \varepsilon_t - \Theta_1 \varepsilon_{t-s}$

$MA(2)_s \rightarrow Y_t = \varepsilon_t - \Theta_1 \varepsilon_{t-s} - \Theta_2 \varepsilon_{t-2s}$

$ARMA(1,1)_s \rightarrow Y_t - \Phi_1 Y_{t-s} = \varepsilon_t - \Theta_1 \varepsilon_{t-s}$

Modelos mixto multiplicativo

$ARMA(p,q) \times ARMA(P,Q)_s \rightarrow \phi(L)\Phi(L^s)Y_t = \theta(L)\Theta(L^s)\varepsilon_t$

$$MA(1) \times MA(1)_{s=12} \rightarrow Y_t = (1-\theta_1 L)(1-\Theta_1 L^{12})\varepsilon_t$$
$$= (1-\theta_1 L - \theta_1\Theta_1 L^{13} - \Theta_1 L^{12})\varepsilon_t$$
$$= \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \Theta_1\varepsilon_{t-12} - \theta_1\Theta_1\varepsilon_{t-13}$$

$ARMA(0,1) \times ARMA(0,1)_s = MA(1) \times MA(1)_s$

$ARMA(0,2) \times ARMA(0,1)_s$

$(1)\cdot(1)\, Y_t = (1-\theta_1 L - \theta_2 L^2)(1-\Theta_1 L^s)\varepsilon_t$

$ARMA(0,1) \times ARMA(1,0)_s$

$(1)(1-\Phi_1 L^s)Y_t = (1-\theta_1 L)\cdot(1)\,\varepsilon_t$

$ARMA(1,0) \times ARMA(1,0)_s$

$(1-\phi_1 L)\cdot(1-\Phi_1 L^s)Y_t = \varepsilon_t$

Modelos estacionales no estacionarios

~~ARIMA(0,~~

$ARIMA(p,d,q) \times ARIMA(P,D,Q)_s \quad (1-L)^{sD}$

$(1-\phi_1 L - \ldots - \phi_p L^p)(1-L)^d(1-\Phi_1 L - \ldots - \Phi_P L^P)Y_t = (1-\theta_1 L - \ldots - \theta_q L^q).$

universidad san pablo - ceu

CARRERA			
APELLIDOS		NOMBRE	
ASIGNATURA	FECHA		GRUPO

$AR(1) \rightarrow Y_t = 0'8\,Y_{t-1} + \mathcal{E}_t \quad / \; \sigma^2_{\mathcal{E}} = 2.$

Estacionario? Sí, porque $|0'8| < 1$.

Invertible? Todos los AR son invertibles

$\gamma_0 = E[Y_t Y_t] = E[(0'8 Y_{t-1} + \mathcal{E}_t)(0'8 Y_{t-1} + \mathcal{E}_t)] =$

$= 0'64\,\underbrace{E[Y_{t-1} Y_{t-1}]}_{\gamma_0} + 0 + 2.$

$(1 - 0'64)\gamma_0 = 2 \rightarrow \gamma_0 = \frac{2}{1 - 0'64} = 5'\widehat{5}$

$\gamma_1 = E[Y_t Y_{t-1}] = E[(0'8 Y_{t-1} + \mathcal{E}_t) Y_{t-1}] = 0'8\,\gamma_0 + 0$

$\gamma_2 = E[Y_t Y_{t-2}] = E[(0'8 Y_{t-1} + \mathcal{E}_t) Y_{t-2}] =$

$= E[0'8(0'8 Y_{t-2} + \mathcal{E}_t) + \mathcal{E}_t) Y_{t-2}] =$

$= 0'8^2 \gamma_0 = 0'8\,\gamma_1.$

$\rho_0 = 1$

$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} =$ ó bien $\rho_1 = \phi_1 \rho_0$.

MA ($+\infty$).

$AR(1) \; \Psi(L) = MA(\infty).$

$Y_t = 0'8 Y_{t-1} + \mathcal{E}_t \qquad Y_t = 0'8 Y$

$Y_t - 0'8 Y_{t-1} = \mathcal{E}_t$

$MA(1) \rightarrow Y_t = \varepsilon_t - 0'9\,\varepsilon_{t-1}$; $\sigma^2_\varepsilon = 4$.

¿Estacionario? Todos los MA son estacionarios de orden finito

¿Invertible? $|0'9| < 1$ Sí.

$\gamma_0 = E[Y_t Y_t] = E[(\varepsilon_t - 0'9\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_t - 0'9\varepsilon_{t-1})] =$

$= \sigma^2_\varepsilon - 0 - 0 + 0'9^2\sigma^2_\varepsilon =$

$= (1+\theta^2)\sigma^2_\varepsilon$

$\gamma_1 = E[Y_t Y_{t-1}] = E[(\varepsilon_t - 0'9\varepsilon_{t-1})\underbrace{Y_{t-1}}_{\varepsilon_{t-1} - 0'9\varepsilon_{t-2}}] = 0 - 0'9\sigma^2_\varepsilon$

$\gamma_2 = E[Y_t Y_{t-2}] = 0$.

$\rho_0 = 1$; $\rho_1 = \dfrac{\gamma_1}{\gamma_0} = \dfrac{-0'9\,\sigma^2_\varepsilon}{1+0'81\,\varepsilon}$; ρ_2 —— $\rho_s = 0$.

$AR(2) \rightarrow Y_t = 0'6\,Y_{t-1} + 0'3\,Y_{t-2} + \varepsilon_t$; $\sigma^2_\varepsilon = 3$

los módulos de las raíces de la ec. característica tienen que ser < 1.

~~$1 - 0'6\lambda - 0'3\lambda^2$~~

$\lambda^2 - 0'6\lambda - 0'3 = 0$

$\lambda = \dfrac{+0'6 \pm \sqrt{0'36 + 1'2}}{2} = 0'6 \pm$

otra forma, $1 - 0'6L - 0'3L^2 = 0$ $\left\langle \begin{matrix} 1'08 \\ -3'08 \end{matrix} \right.$ fuera del círculo unidad