

Capítulo 4

PROCESOS AUTORREGRESIVOS

George Udny Yule (1871-1951)

Estadístico escocés. Se graduó en ingeniería en University College y estudió después física en Bonn con Hertz. A su vuelta al Reino Unido conoció a K. Pearson y decidió dedicarse a la estadística. Desarrolló el modelo de regresión múltiple, introdujo el coeficiente de correlación múltiple y el de correlación parcial e inventó los procesos autorregresivos. Profesor en Oxford, su insaciable curiosidad le llevó a aprender a pilotar aviones al jubilarse.

4.1 Introducción

En este capítulo vamos a estudiar modelos para representar la dependencia de los valores de una serie temporal estacionaria de su pasado. El modelo más simple de dependencia entre dos variables aleatorias es el modelo de regresión simple, que explica la evolución de una variable, y , como función lineal de otra variable, x , mediante la ecuación

$$y = c + bx + a$$

donde c y b son constantes a determinar y a es una variable aleatoria normal, con media nula y varianza constante. Si aplicamos esta estructura de dependencia a las variables aleatorias $y = z_t$ y $x = z_{t-1}$ obtenemos el proceso autorregresivo de primer orden, donde el valor presente de la serie sólo depende del último valor observado. Esta dependencia puede generalizarse para permitir que el valor actual de la serie dependa de varios retardos, z_{t-2}, \dots, z_{t-p} , con lo que se obtiene un proceso autorregresivo de orden p . Los procesos autorregresivos son los primeros procesos estacionarios que se estudiaron. En los capítulos siguientes veremos otros modelos para series estacionarias.

4.2 El Proceso autorregresivo de primer orden (AR(1))

Diremos que una serie z_t sigue un proceso autorregresivo de primer orden, o un AR(1) si ha sido generada por:

$$z_t = c + \phi z_{t-1} + a_t \tag{4.1}$$

donde c y $-1 < \phi < 1$ son constantes a determinar y a_t es un proceso de ruido blanco con varianza σ^2 . Las variables a_t , que representan la nueva información que se añade al proceso en cada instante no determinada por su historia se conocen como innovaciones.

Como ejemplo de una situación donde es esperable la aparición de este proceso, consideramos que z_t es la cantidad de agua en un embalse a fin de mes. Cada mes llega al embalse una cantidad $c + a_t$, donde c es el valor medio de la cantidad que entra y a_t es la innovación, una variable aleatoria de media cero y varianza constante que hace que esa cantidad pueda variar de un periodo al siguiente. Cada mes se gasta una

proporción fija de las existencias iniciales, $(1 - \phi)z_{t-1}$, y se mantiene la proporción ϕz_{t-1} . Esta descripción conduce a (4.1).

La condición $-1 < \phi < 1$ es necesaria para que el proceso sea estacionario. Para comprobarlo, supongamos que el proceso comienza con $z_0 = h$, siendo h un valor cualquiera fijo. Entonces, el valor siguiente será $z_1 = c + \phi h + a_1$, el siguiente, $z_2 = c + \phi z_1 + a_2 = c + \phi(c + \phi h + a_1) + a_2$ y sustituyendo sucesivamente podemos escribir:

$$\begin{aligned} z_1 &= c + \phi h + a_1 \\ z_2 &= c(1 + \phi) + \phi^2 h + \phi a_1 + a_2 \\ z_3 &= c(1 + \phi + \phi^2) + \phi^3 h + \phi^2 a_1 + \phi a_2 + a_3 \\ \dots &\dots \dots \\ z_t &= c \sum_{i=0}^{t-1} \phi^i + \phi^t h + \sum_{i=0}^{t-1} \phi^i a_{t-i} \end{aligned}$$

Si calculamos la esperanza de z_t , como $E[a_t] = 0$,

$$E[z_t] = c \sum_{i=0}^{t-1} \phi^i + \phi^t h.$$

Para que el proceso sea estacionario en media es necesario que esta función no dependa de t . Esto ocurrirá si el primer término converge a una constante y el segundo a cero, de manera que para t grande el proceso tenga media constante. Ambas condiciones se verifican si $|\phi| < 1$, ya que entonces $\sum_{i=0}^{t-1} \phi^i$ es la suma de una progresión geométrica indefinida de razón ϕ y converge a $c/(1 - \phi)$, y el término ϕ^t converge a cero, con lo que la suma converge a la constante $c/(1 - \phi)$, que será la media del proceso. Con esta condición, después de un período transitorio inicial, cuando $t \rightarrow \infty$, todas las variables z_t tendrán la misma esperanza, $\mu = c/(1 - \phi)$, independiente de las condiciones iniciales.

Observemos también que en este proceso la innovación a_t está incorrelada con los valores previos del proceso, z_{t-k} para k positivo. En efecto, el valor z_{t-k} depende de los valores de las innovaciones hasta ese instante, a_1, \dots, a_{t-k} , pero no de sus valores futuros. Como la innovación es un proceso de ruido blanco sus valores están futuros están incorrelados con los pasados y, por tanto, con los valores previos de proceso, z_{t-k} .

El proceso AR(1) puede escribirse utilizando la notación del operador de retardo, B , definido por $Bz_t = z_{t-1}$, cuyas propiedades se estudian con detalle en el apéndice 4.1, como:

$$(1 - \phi B)\tilde{z}_t = a_t. \quad (4.2)$$

ya que $B\tilde{z}_t = \tilde{z}_{t-1}$. Esta condición indica que una serie sigue un proceso AR(1) si al aplicarle el operador $(1 - \phi B)$ se obtiene un proceso de ruido blanco. El operador $(1 - \phi B)$ puede interpretarse como un filtro que aplicado a la serie la convierte en una serie sin información, el proceso de ruido blanco. Si consideramos el operador como una ecuación en B el coeficiente ϕ se denomina el factor de la ecuación. La condición de estacionaridad es que este factor sea menor que la unidad en valor absoluto. Alternativamente podemos hablar de la raíz de la ecuación del operador, que se obtiene igualando el operador a cero y resolviendo la ecuación con B como incógnita:

$$1 - \phi B = 0$$

con el resultado $B = 1/\phi$. La condición de estacionaridad es entonces que la raíz del operador sea en valor absoluto mayor que uno.

4.2.1 Esperanza y varianza.

Tomando esperanzas en (4.1) supuesto $|\phi| < 1$, de manera que el proceso es estacionario y $E[z_t] = E[z_{t-1}] = \mu$, se obtiene que

$$\begin{aligned} \mu &= c + \phi\mu \\ \mu &= \frac{c}{1 - \phi} \end{aligned} \quad (4.3)$$

sustituyendo c por $\mu(1 - \phi)$ el proceso puede escribirse en desviaciones a su media:

$$z_t - \mu = \phi(z_{t-1} - \mu) + a_t$$

y llamando $\tilde{z}_t = z_t - \mu$,

$$\tilde{z}_t = \phi \tilde{z}_{t-1} + a_t \quad (4.4)$$

que es la expresión más utilizada del AR(1).

La varianza del proceso se obtiene elevando al cuadrado la expresión (4.4) y tomando esperanzas, con lo que tenemos:

$$E(\tilde{z}_t^2) = \phi^2 E(\tilde{z}_{t-1}^2) + 2\phi E(\tilde{z}_{t-1} a_t) + E(a_t^2)$$

Llamaremos σ_z^2 a la varianza del proceso estacionario. El segundo término de esta expresión es cero ya que como \tilde{z}_{t-1} y a_t son independientes la esperanza de su producto es el producto de las esperanzas, y ambas variables tienen esperanza nula. El tercero es la varianza de la innovación, σ^2 , y concluimos que:

$$\sigma_z^2 = \phi^2 \sigma_z^2 + \sigma^2,$$

de donde obtenemos que la varianza del proceso es

$$\sigma_z^2 = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2}. \quad (4.5)$$

Observemos que en esta ecuación aparece de nuevo la condición $|\phi| < 1$ para que σ_z^2 sea finita y positiva. Por otro lado, observemos que, para un valor fijo de σ^2 , la varianza es tanto mayor cuanto mayor sea ϕ^2 .

En este proceso es importante diferenciar la distribución marginal de cada variable de la distribución condicionada de una variable conocido el valor anterior. La distribución marginal de cada observación es la misma, ya que el proceso es estacionario. Es una distribución con media μ y varianza σ_z^2 . Sin embargo la distribución condicional de z_t si conocemos el valor anterior, z_{t-1} , tiene media condicionada

$$E(z_t | z_{t-1}) = \mu + \phi(z_{t-1} - \mu)$$

y varianza σ^2 , que según (4.5), es siempre menor que σ_z^2 . Si conocemos z_{t-1} reducimos la incertidumbre en la estimación de z_t , y esta reducción es tanto mayor cuanto mayor sea ϕ^2 . Si el parámetro AR está próximo a su valor máximo para que el proceso sea estacionario, es decir es menor pero próximo a uno, la reducción de varianza obtenida por el conocimiento de z_{t-1} puede ser muy importante.

4.2.2 Función de autocovarianzas y autocorrelación

La información sobre la dependencia lineal entre las variables de una serie temporal generada por un proceso estacionario se encuentra, como hemos visto en el capítulo anterior, en la función de autocovarianzas. Utilizando (4.4), multiplicando por z_{t-k} y tomando esperanzas se obtiene γ_k , la covarianza entre observaciones separadas por k periodos, o autocovarianza de orden k :

$$\gamma_k = E[(z_{t-k} - \mu)(z_t - \mu)] = E[z_{t-k}(\phi \tilde{z}_{t-1} + a_t)]$$

que implica:

$$\gamma_k = \phi \gamma_{k-1} \quad k = 1, 2, \dots; \quad \gamma_0 = \sigma_z^2 \quad (4.6)$$

como $|\phi| < 1$ la dependencia entre observaciones se amortigua al aumentar el retardo. En particular, utilizando (4.5):

$$\gamma_1 = \frac{\phi \sigma^2}{1 - \phi^2} \quad (4.7)$$

Función de autocorrelación simple (fas).

Las autocorrelaciones contienen la misma información que las autocovarianzas, pero tienen la ventaja de no depender de las unidades de medida. En adelante llamaremos a la función de autocorrelación del proceso la función de autocorrelación simple, (fas) para diferenciarla de otras funciones ligadas a la autocorrelación que se definen al final de este capítulo. Llamando ρ_k a la correlación entre observaciones separadas por k periodos, o autocorrelación de orden k , definida por:

$$\rho_k = \gamma_k / \gamma_0.$$

Utilizando (4.6), se obtiene que

$$\rho_k = \phi\gamma_{k-1}/\gamma_0 = \phi\rho_{k-1}$$

como, según (4.5) y (4.7), $\rho_1 = \phi$, esta función será:

$$\rho_k = \phi^k \quad (4.8)$$

y cuando k es grande, ρ_k tiende a cero con rapidez que depende de ϕ .

La expresión (4.8) muestra que la función de autocorrelación simple de un proceso AR(1) es igual a las potencias del parámetro AR del proceso y decrece geométricamente hacia cero. Si el parámetro es positivo la dependencia lineal del presente de los valores pasados es siempre positiva, mientras que si el parámetro es negativo esta dependencia es positiva para los retardos pares y negativa para los impares. Como ilustración la figura 4.1 presenta dos realizaciones de un proceso AR(1) con distintos valores del parámetro, el primero negativo y el segundo positivo, y sus funciones de autocorrelación teóricas. Observemos que cuando el parámetro es positivo el valor en t es parecido al valor en $t - 1$, por la dependencia positiva, con lo que el gráfico de la serie evoluciona suavemente. Por el contrario, cuando el parámetro es negativo el valor en t es en general de signo opuesto al de $t - 1$, con lo que el gráfico de la serie muestra muchos cambios de signos.

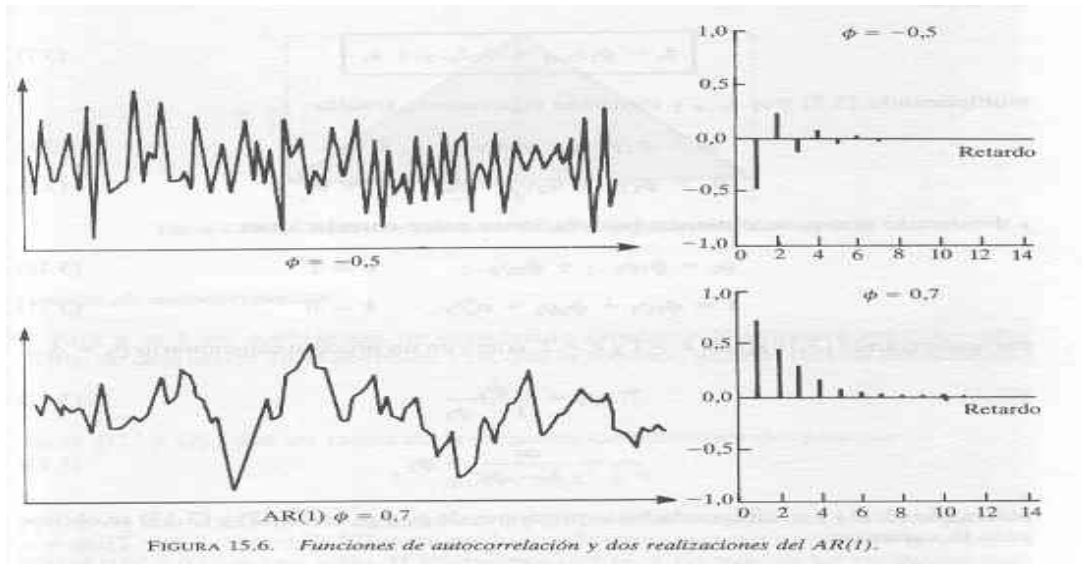


FIGURA 15.6. Funciones de autocorrelación y dos realizaciones del AR(1).

Figura 4.1: Dos realizaciones del proceso AR(1) y sus correspondientes funciones de autocorrelación

4.2.3 Representación del proceso AR(1) como suma de innovaciones

El proceso AR(1) puede expresarse en función de los valores pasados de las innovaciones. Esta representación es útil porque hace patentes algunas propiedades del proceso y, como veremos más adelante, sugiere como introducir otros procesos estacionarios importantes que estudiaremos en el capítulo siguiente. Sustituyendo en la expresión (4.4) del proceso \tilde{z}_{t-1} en función de \tilde{z}_{t-2} , tenemos

$$\tilde{z}_t = \phi(\phi\tilde{z}_{t-2} + a_{t-1}) + a_t = a_t + \phi a_{t-1} + \phi^2 \tilde{z}_{t-2}.$$

Si sustituimos ahora \tilde{z}_{t-2} por su expresión como función de \tilde{z}_{t-3} , se obtiene

$$\tilde{z}_t = a_t + \phi a_{t-1} + \phi^2 a_{t-2} + \phi^3 \tilde{z}_{t-2}$$

y aplicando repetidamente esta sustitución, tenemos que

$$\tilde{z}_t = a_t + \phi a_{t-1} + \phi^2 a_{t-2} + \dots + \phi^{t-1} a_1 + \phi^t \tilde{z}_1$$

Si suponemos que t es grande, como ϕ^t será muy próximo a cero podemos representar la serie como función de todas las innovaciones, con pesos que decrecen geoméricamente. Suponiendo que la serie comienza en el infinito pasado tenemos:

$$\tilde{z}_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j a_{t-j}$$

y esta representación se denomina la forma de media móvil de orden infinito, $MA(\infty)$, del proceso. Observemos que los coeficientes de las innovaciones son precisamente los coeficientes de la función de autocorrelación simple. La expresión $MA(\infty)$ puede obtenerse también directamente multiplicando la ecuación (4.2) por el operador $(1 - \phi B)^{-1} = 1 + \phi B + \phi^2 B^2 + \dots$, con lo que se obtiene:

$$\tilde{z}_t = (1 - \phi B)^{-1} a_t = a_t + \phi a_{t-1} + \phi^2 a_{t-2} + \dots$$

Ejemplo 4.1

La figura 4.2 muestra la serie mensual de los cambios relativos del tipo de interés anual, definidos por $z_t = \log(y_t/y_{t-1}) \approx (y_t - y_{t-1})/y_t$, donde y_t es la serie de tipos de interés anual del fichero tipos88.dat. La figura 4.3 muestra la función de autocorrelación y se observa que tiene la forma de la de un AR(1) con coeficiente positivo, ya que todos los coeficientes de autocorrelación se amortiguan geoméricamente con el retardo.

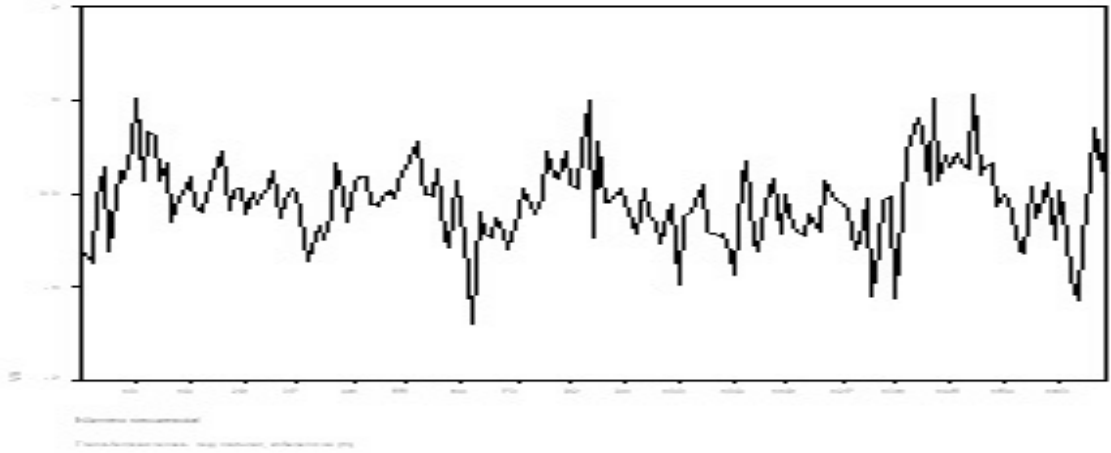


Figura 4.2: Serie mensual de cambios relativos en el tipo de interés a un año en España, 1988 a 2002

4.3 El Proceso AR(2)

La dependencia entre los valores presentes y los pasados que establece un proceso AR(1) puede generalizarse permitiendo que z_t dependa linealmente no sólo de z_{t-1} sino también de z_{t-2} . Se obtiene entonces el proceso autorregresivo de segundo orden o proceso AR(2):

$$z_t = c + \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + a_t \quad (4.9)$$

donde ahora c, ϕ_1, ϕ_2 son constantes a determinar y a_t es un proceso de ruido blanco con varianza σ^2 .

Vamos a calcular que condiciones tienen que verificar los parámetros del proceso para que sea estacionario. Tomando esperanzas en la ecuación del proceso e imponiendo que la media sea constante, se obtiene:

$$\mu = c + \phi_1 \mu + \phi_2 \mu$$

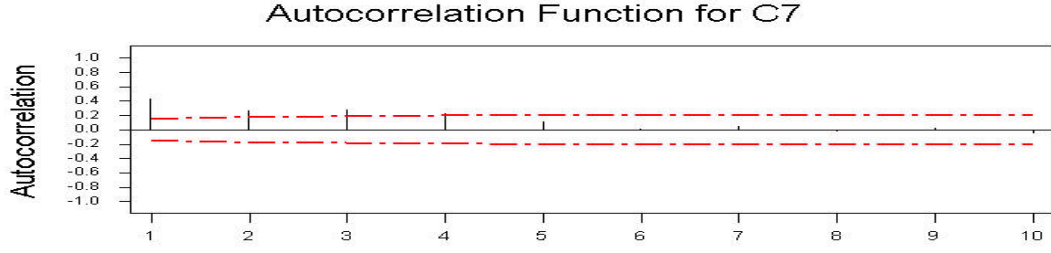


Figura 4.3: Función de autocorrelación de los cambios en los tipos de interés

que implica

$$\mu = \frac{c}{1 - \phi_1 - \phi_2}, \quad (4.10)$$

y la condición para que el proceso tenga media finita es que $1 - \phi_1 - \phi_2 \neq 0$. Sustituyendo c por $\mu(1 - \phi_1 - \phi_2)$ y llamando $\tilde{z}_t = z_t - \mu$ al proceso en desviaciones a su media, el proceso AR(2) puede escribirse:

$$\tilde{z}_t = \phi_1 \tilde{z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{z}_{t-2} + a_t, \quad (4.11)$$

Para estudiar las propiedades del proceso es conveniente utilizar la notación de operadores del apéndice 4.1. Introduciendo el operador de retardo, B , tenemos que la ecuación de este proceso puede escribirse:

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) \tilde{z}_t = a_t.$$

El operador $(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)$ puede siempre expresarse como $(1 - G_1 B)(1 - G_2 B)$, donde G_1^{-1} y G_2^{-1} son las raíces de la ecuación del operador considerando B como variable y resolviendo $1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 = 0$ (véase el apéndice 4.2). Esta ecuación se denomina *la ecuación característica* del operador. También se dice que G_1 y G_2 son los factores del polinomio característico del proceso. Estas raíces pueden ser reales o complejas conjugadas. Se demuestra en el apéndice 4.2 que la condición de estacionaridad es que $|G_i| < 1$, $i = 1, 2$. Esta condición es análoga a la estudiada para el AR(1). Observemos que este resultado es coherente con la condición encontrada para que la media sea finita. Si la ecuación $1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 = 0$ tiene una raíz unidad se verifica que $1 - \phi_1 - \phi_2 = 0$ y el proceso no es estacionario y no tiene media finita.

4.3.1 Función de autocovarianzas

Elevando al cuadrado la expresión del proceso (4.11) y tomando esperanzas, obtenemos que su varianza debe satisfacer

$$\gamma_0 = \phi_1^2 \gamma_0 + \phi_2^2 \gamma_0 + 2\phi_1 \phi_2 \gamma_1 + \sigma^2 \quad (4.12)$$

Para calcular las autocovarianzas de este proceso, multiplicando la ecuación del proceso (4.11) por \tilde{z}_{t-k} y tomando esperanzas, resulta la expresión general de las autocovarianzas:

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2}, \quad k \geq 1 \quad (4.13)$$

Particularizando esta ecuación para $k = 1$, como en el proceso estacionario $\gamma_{-1} = \gamma_1$, se obtiene que

$$\gamma_1 = \phi_1 \gamma_0 + \phi_2 \gamma_1,$$

que proporciona $\gamma_1 = \phi_1 \gamma_0 / (1 - \phi_2)$. Sustituyendo esta expresión en (4.12) se obtiene la expresión para la varianza:

$$\sigma_z^2 = \gamma_0 = \frac{(1 - \phi_2) \sigma^2}{(1 + \phi_2)(1 - \phi_1 - \phi_2)(1 + \phi_1 - \phi_2)}$$

Para que el proceso sea estacionario esta varianza debe ser positiva, lo que ocurrirá si el numerador y el denominador tienen el mismo signo. Puede comprobarse que los valores de los parámetros que hacen que el AR(2) sea un proceso estacionario (y por tanto con varianza siempre positiva) son los incluidos en la región.

$$\begin{aligned} -1 &< \phi_2 < 1 \\ \phi_1 + \phi_2 &< 1 \\ \phi_2 - \phi_1 &< 1 \end{aligned}$$

La figura 4.4 representa estos valores admisibles de los parámetros para que el proceso sea estacionario. En la sección siguiente veremos una condición equivalente de estacionaridad. El resto de las autocovarianzas se calculan recursivamente con la ecuación (4.13).

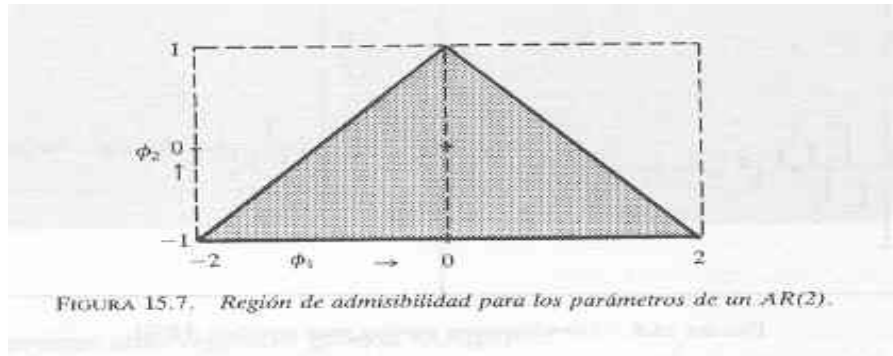


Figura 4.4: Región de admisibilidad para los parámetros de un AR(2)

En este proceso es de nuevo importante diferenciar sus propiedades marginales y las condicionadas. Supuesto que se verifican estas condiciones de estacionaridad, la media marginal es μ , dada por (4.10) y la varianza marginal es σ_z^2 , dada por (??). Sin embargo, la media condicional de z_t dados los dos valores previos es

$$E(z_t | z_{t-1}, z_{t-2}) = c + \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2}$$

y tendrá varianza σ^2 , la varianza de las innovaciones que será siempre menor que la del proceso.

4.3.2 Función de autocorrelación simple

Dividiendo por la varianza en la ecuación (4.13), se obtiene que las relaciones entre los coeficientes de autocorrelación son:

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} \quad k \geq 1 \quad (4.14)$$

particularizando (4.14) para $k = 1$ como en un proceso estacionario $\rho_1 = \rho_{-1}$, obtenemos que:

$$\rho_1 = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2} \quad (4.15)$$

y particularizando (4.14) para $k = 2$ y utilizando (4.15):

$$\rho_2 = \frac{\phi_1^2}{1 - \phi_2} + \phi_2. \quad (4.16)$$

Para $k \geq 3$ los coeficientes de autocorrelación pueden obtenerse recursivamente a partir de la ecuación en diferencias (4.14). Se demuestra en el apéndice 4.1 que la solución general de esta ecuación es:

$$\rho_k = A_1 G_1^k + A_2 G_2^k \quad (4.17)$$

donde G_1 y G_2 son los factores del polinomio característico del proceso y A_1 y A_2 constantes a determinar a partir de las condiciones iniciales $\rho_0 = 1$, (que implica $A_1 + A_2 = 1$) y $\rho_1 = \phi_1 / (1 - \phi_2)$. Según (4.17) los coeficientes ρ_k serán menores o iguales a la unidad si $|G_1| < 1$ y $|G_2| < 1$, que son las condiciones de estacionariedad del proceso. Si los factores G_1 y G_2 son complejos del tipo $a \pm bi$, siendo $i = \sqrt{-1}$, entonces esta condición es $\sqrt{a^2 + b^2} < 1$. Podemos encontrarnos en los casos siguientes:

1. Los dos factores G_1 y G_2 son reales. El decrecimiento de (4.17) será la suma de dos exponenciales y la forma de la función de autocorrelación dependerá de que G_1 y G_2 tengan signo igual u opuesto.
2. Los dos factores G_1 y G_2 son complejos conjugados. Entonces, se demuestra en el apéndice 4.1 que la función ρ_k decrecerá de forma sinusoidal.

Los cuatro tipos de funciones de autocorrelación posibles para un AR(2) se presentan gráficamente en la figura 4.5. Los dos de la izquierda corresponden a raíces reales y entonces se observa un decrecimiento geométrico similar al de un AR(1). En el superior, las dos raíces son reales y los coeficientes son siempre positivos. En el inferior, las raíces tienen signos opuestos siendo mayor la negativa, que es la dominante y produce un decrecimiento alterno, similar al de un AR(1). Los dos casos de la derecha corresponde a raíces complejas conjugadas, y los coeficientes decrecen de forma sinusoidal. Dependiendo del signo de la parte real, se obtiene un decrecimiento comenzando en valores positivos, como en la parte superior, o negativos, como en la parte inferior.

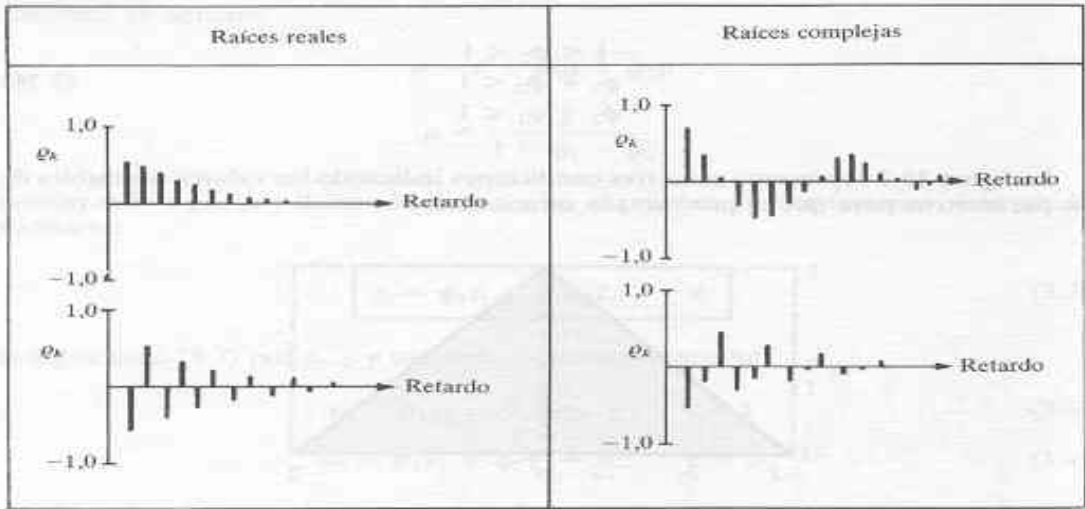


FIGURA 15.8. *Correlogramas teóricos para procesos AR(2).*

Figura 4.5: Funciones de autocorrelación simple para distintos procesos AR(2)

4.3.3 Representación del proceso como suma de innovaciones

El proceso AR(2) puede representarse, de forma análoga al AR(1), como combinación lineal de las innovaciones. Escribiendo el proceso como

$$(1 - G_1 B)(1 - G_2 B)\tilde{z}_t = a_t$$

e invirtiendo estos operadores, tendremos que

$$\tilde{z}_t = (1 + G_1 B + G_1^2 B^2 + \dots)(1 + G_2 B + G_2^2 B^2 + \dots)a_t \quad (4.18)$$

que conducirá a la expresión MA(∞) del proceso:

$$\tilde{z}_t = a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \dots \quad (4.19)$$

Podemos obtener los coeficientes ψ_i como función de las raíces igualando potencias de B en (4.18) y (4.19). Llamando $\psi(B) = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots$ como $\psi(B) = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)^{-1}$, tendremos que

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)(1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots) = 1. \quad (4.20)$$

Esta ecuación permite obtener los coeficientes ψ_i como función de los parámetros ϕ_1 y ϕ_2 imponiendo la condición que todos los coeficientes de las potencias de B en (4.20) sean nulos. El coeficiente de B en esta ecuación es $\psi_1 - \phi_1$, que implica $\psi_1 = \phi_1$. El coeficiente de B^2 es $\psi_2 - \phi_1 \psi_1 - \phi_2$ que implica la relación

$$\psi_k = \phi_1 \psi_{k-1} + \phi_2 \psi_{k-2} \quad (4.21)$$

para $k = 2$, ya que $\psi_0 = 1$. Los coeficientes de B^k para $k \geq 2$ verifican la ecuación (4.21) que es similar a la que deben verificar los coeficientes de autocorrelación. Concluimos que la forma de los coeficientes ψ_i será similar a la de los coeficientes de autocorrelación, aunque los valores no serán idénticos porque los valores iniciales de la secuencia son distintos: para los coeficientes de autocorrelación $\rho_0 = 1$ y $\rho_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2}$, mientras que para los coeficientes ψ_i , $\psi_0 = 1$ y $\psi_1 = \phi_1$.

Ejemplo 4.2

La figura 4.6 presenta el número de visones anuales detectados en una zona de Canadá el siglo pasado. La serie presenta una evolución cíclica que podría explicarse por un AR(2) con raíces negativas. La figura 4.7 muestra la función de autocorrelación que tiene una estructura sinusoidal, confirmando la posibilidad de un AR(2).

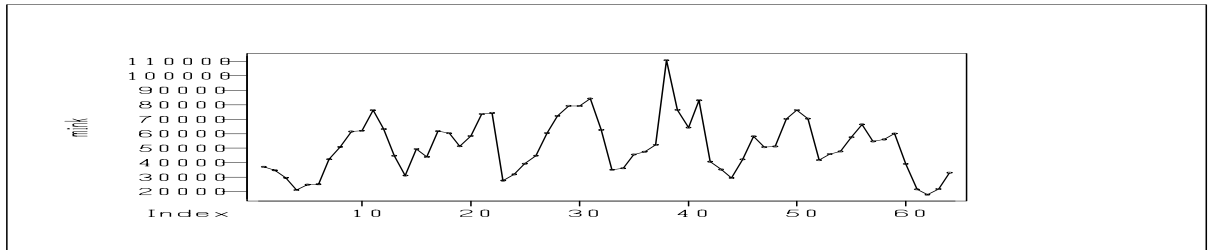


Figura 4.6: Serie del número de visones detectados en una zona de Canada, datos anuales desde 1988 hasta marzo de 2002

Ejemplo 4.3

Escribir la función de autocorrelación simple del proceso AR(2)

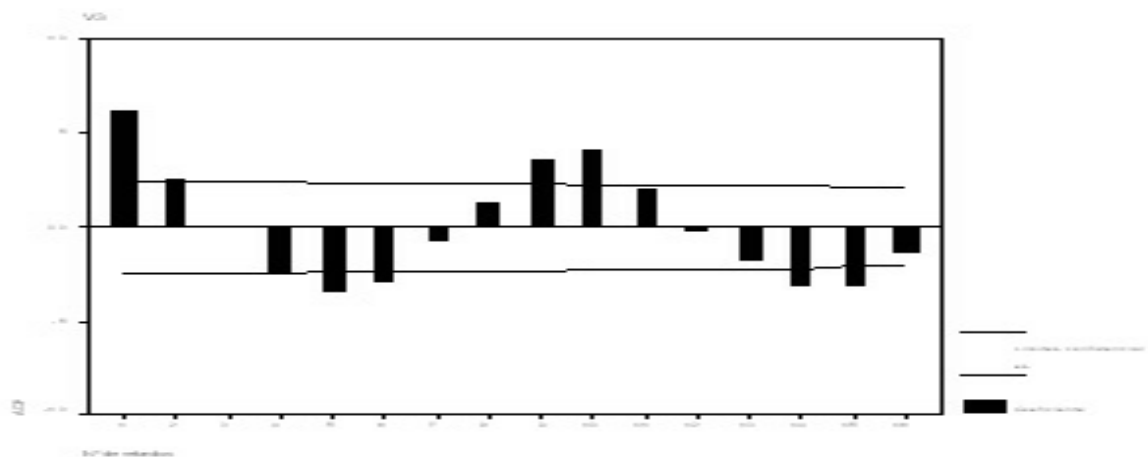


Figura 4.7: Función de autocorrelación del número de visones detectados en una zona de Canadá, datos anuales desde 1988 hasta marzo de 2002

$$z_t = 1.2z_{t-1} - 0.32z_{t-2} + a_t$$

La ecuación característica de dicho proceso es:

$$0.32X^2 - 1.2X + 1 = 0$$

cuya solución es:

$$X = \frac{1.2 \pm \sqrt{1.2^2 - 4 \times 0.32}}{0.64} = \frac{1.2 \pm 0.4}{0.64}$$

Las soluciones son $G_1^{-1} = 2.5$ y $G_2^{-1} = 1.25$ y los factores serán $G_1 = 0.4$ y $G_2 = 0.8$. En efecto, la ecuación característica puede escribirse

$$0.32X^2 - 1.2X + 1 = (1 - 0.4X)(1 - 0.8X)$$

Por tanto, el proceso es estacionario con raíces reales y los coeficientes de autocorrelación verifican

$$\rho_k = A_1 0.4^k + A_2 0.8^k$$

Para determinar A_1 y A_2 imponemos las condiciones, iniciales $\rho_0 = 1, \rho_1 = 1.2 / (1.322) = 0.91$. Entonces, para $k = 0$:

$$1 = A_1 + A_2$$

y para $k = 1$,

$$0.91 = 0.4A_1 + 0.8A_2$$

resolviendo estas ecuaciones se obtiene $A_2 = 0.51/0.4$; $A_1 = -0.11/0.4$. Por tanto, la función de autocorrelación es:

$$\rho_k = -\frac{0.11}{0.4} 0.4^k + \frac{0.51}{0.4} 0.8^k$$

obteniéndose la tabla siguiente:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
ρ_k	1	0.91	0.77	0.63	0.51	0.41	0.33	0.27	0.21

Para obtener la representación en función de las innovaciones, escribiendo

$$(1 - 0.4B)(1 - 0.8B)z_t = a_t$$

tenemos que, invirtiendo ambos operadores:

$$z_t = (1 + 0.4B + .16B^2 + .06B^3 + \dots)(1 + 0.8B + .64B^2 + \dots)a_t$$

que conduce a

$$z_t = (1 + 1.2B + 1.12B^2 + \dots)a_t.$$

4.4 El Proceso autorregresivo general (AR(p))

Diremos que una serie temporal z_t sigue un proceso autorregresivo de orden p si

$$\tilde{z}_t = \phi_1 \tilde{z}_{t-1} + \dots + \phi_p \tilde{z}_{t-p} + a_t \quad (4.22)$$

donde $\tilde{z}_t = z_t - \mu$, siendo μ la media del proceso y a_t es un proceso de ruido blanco. Utilizando la notación de operadores, la ecuación de un AR(p) es:

$$(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p) \tilde{z}_t = a_t \quad (4.23)$$

y llamando $\phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$ al polinomio de grado p en el operador de retardo, cuyo primer término es la unidad, tenemos:

$$\phi_p(B) \tilde{z}_t = a_t \quad (4.24)$$

que es la expresión general de un proceso autorregresivo.

Llamaremos *ecuación característica* del proceso a la ecuación:

$$\phi_p(B) = 0 \quad (4.25)$$

considerada como función de B . Esta ecuación tendrá p raíces $G_1^{-1}, \dots, G_p^{-1}$, en general distintas (véase apéndice 4.1), y podemos escribir:

$$\phi_p(B) = \prod_{i=1}^p (1 - G_i B)$$

de manera que los coeficientes G_i son los factores de la ecuación característica. Se demuestra que el proceso es estacionario si $|G_i| < 1$, para todo i .

4.4.1 Función de autocorrelación simple

Multiplicando (4.22) por \tilde{z}_{t-k} ($k > 0$), tomando esperanzas en ambos miembros y dividiendo el resultado por γ_0 , se obtiene que los coeficientes de autocorrelación de un AR(p) verifican la siguiente ecuación en diferencias:

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \dots + \phi_p \rho_{k-p} \quad k > 0$$

En las secciones anteriores hemos visto casos particulares de esta ecuación para $p = 1$ y $p = 2$. Podemos concluir que los coeficientes de autocorrelación satisfacen la misma ecuación que el proceso

$$\phi_p(B) \rho_k = 0 \quad k > 0 \quad (4.26)$$

La solución general de esta ecuación es (apéndice 4.1):

$$\rho_k = \sum_{i=1}^p A_i G_i^k \quad (4.27)$$

donde las A_i son constantes a determinar a partir de las condiciones iniciales y los G_i son los factores de la ecuación característica. Para que el proceso sea estacionario el módulo de G_i debe ser menor que uno o, lo que es lo mismo, las raíces de la ecuación característica (4.25) deben ser mayores que uno en módulo. Para comprobarlo observemos que la condición $|\rho_k| < 1$ exige que no exista en (4.27) ningún G_i mayor que la unidad, ya que entonces cuando k aumenta el término G_i^k crecería sin límite. Observemos además que para que el proceso sea estacionario no puede existir una raíz G_i igual a la unidad, ya que entonces su componente G_i^k no decrecería y los coeficientes ρ_k no tenderían hacia cero para ningún retardo.

La ecuación (4.27) muestra que la función de autocorrelación simple de un proceso AR(p) es una mezcla de exponenciales, debidas a los términos con raíces reales, y sinusoidales, debidas a las raíces complejas conjugadas. Su estructura puede ser, en consecuencia, muy compleja.

4.4.2 Ecuaciones de Yule-Walker

Particularizando la ecuación (4.26) para $k = 1, \dots, p$, se obtiene un sistema de p ecuaciones que relacionan las p primeras autocorrelaciones con los parámetros del proceso. Llamaremos ecuaciones de Yule-Walker al sistema:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \phi_1 + \phi_2 \rho_1 + \dots + \phi_p \rho_{p-1} \\ \rho_2 &= \phi_1 \rho_1 + \phi_2 + \dots + \phi_p \rho_{p-2} \\ &\vdots \\ \rho_p &= \phi_1 \rho_{p-1} + \phi_2 \rho_{p-2} + \dots + \phi_p \end{aligned}$$

definiendo:

$$\phi' = [\phi_1, \dots, \phi_p], \quad \rho' = [\rho_1, \dots, \rho_p], \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{p-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

el sistema anterior se escribe matricialmente:

$$\rho' = \mathbf{R} \phi \quad (4.28)$$

y los parámetros se determinan a partir de las autocorrelaciones mediante:

$$\phi = \mathbf{R}^{-1} \rho'$$

Ejemplo 4.4

Obtener los parámetros de un proceso AR(3) cuyas primeras autocorrelaciones son $\rho_1 = 0.9$; $\rho_2 = 0.8$; $\rho_3 = 0.5$. ¿Es estacionario el proceso?

El sistema de ecuaciones de Yule-Walker es:

$$\begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.8 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 & 0.8 \\ 0.9 & 1 & 0.9 \\ 0.8 & 0.9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix}$$

cuya solución es:

$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,28 & -5 & 0,28 \\ -5 & 10 & -5 \\ 0,28 & -5 & 5,28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,9 \\ 0,8 \\ 0,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,89 \\ 1 \\ -1,11 \end{bmatrix}$$

En consecuencia el proceso AR(3) con estas correlaciones es:

$$(1 - 0,89B - B^2 + 1,11B^3) z_t = a_t$$

Para comprobar que el proceso es estacionario tendríamos que calcular los factores de la ecuación característica. La forma más rápida es calculando las soluciones de la ecuación

$$X^3 - 0,89X^2 - X + 1,11 = 0$$

y comprobar que todas tienen módulo menor que la unidad. Si calculamos las raíces de esta ecuación obtenemos -1.7930 , $0.4515 + 0.6444i$ y $0.4515 - 0.6444i$. Los módulos de las raíces complejas son menores que la unidad, pero el factor real es mayor que la unidad, con lo que concluimos que no existe un proceso estacionario AR(3) que tenga estos tres coeficientes de autocorrelación.

4.4.3 Representación como suma de innovaciones.

La forma del proceso como suma de innovaciones, o forma MA(∞), se obtiene invirtiendo el operador AR(p). Para obtener los coeficientes de esta representación escribiremos $\psi(B) = \phi(B)^{-1}$, que implica

$$(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p)(1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots) = 1$$

y los coeficientes ψ_i se obtienen igualando potencias de B a cero. Se comprueba que deben verificar la relación

$$\psi_k = \phi_1 \psi_{k-1} + \dots + \phi_p \psi_{k-p}$$

que es análoga a la que verifican los coeficientes de autocorrelación del proceso. Como hemos comentado, los coeficientes de autocorrelación, ρ_k , y los coeficientes de la estructura MA(∞) no son idénticos: aunque ambas secuencias satisfacen la misma ecuación en diferencias y ambas tienen la forma $\sum A_i G_i^k$, las constantes A_i dependen de las condiciones iniciales y serán distintas en ambas secuencias.

4.5 La función de autocorrelación parcial

Determinar el orden de un proceso autorregresivo a partir de su función de autocorrelación simple es difícil. En general esta función es una mezcla de decrecimientos exponenciales y sinusoidales, que se amortiguan al avanzar el retardo, y no presenta rasgos fácilmente identificables para determinar el orden del proceso. Para resolver este problema se introduce la función de autocorrelación parcial.

Si comparamos un AR(1) con un AR(2) vemos que aunque en ambos procesos cada observación está relacionada con las anteriores, el tipo de relación entre observaciones separadas por más de un retardo es distinto en ambos procesos. En el AR(1) el efecto de z_{t-2} sobre z_t es siempre a través de z_{t-1} , y dado z_{t-1} , el valor de z_{t-2} es irrelevante para prever z_t . Sin embargo, en un AR(2) además del efecto de z_{t-2} que se transmite a z_t a través de z_{t-1} , existe un efecto directo de z_{t-2} sobre z_t . En general, un AR(p) presenta efectos *directos* de observaciones separadas por $1, 2, \dots, p$ retardos y los efectos *directos* de las observaciones separadas por más de p retardos son nulos. Esta idea es la clave para la utilización de la función de autocorrelación parcial.

Se define el *coeficiente de autocorrelación parcial* de orden k como el coeficiente de correlación entre observaciones separadas k períodos cuando eliminamos la dependencia producida por los valores intermedios. Este coeficiente se calcula como sigue:

1. Se elimina de \tilde{z}_t , el efecto de $\tilde{z}_{t-1}, \dots, \tilde{z}_{t-k+1}$ mediante la regresión

$$\tilde{z}_t = \beta_1 \tilde{z}_{t-1} + \dots + \beta_{k-1} \tilde{z}_{t-k+1} + u_t,$$

la variable u_t recoge la parte de \tilde{z}_t no común con $\tilde{z}_{t-1}, \dots, \tilde{z}_{t-k+1}$.

2. Se elimina de \tilde{z}_{t-k} el efecto de $\tilde{z}_{t-1}, \dots, \tilde{z}_{t-k+1}$, mediante la regresión:

$$\tilde{z}_{t-k} = \gamma_1 \tilde{z}_{t-1} + \dots + \gamma_{k-1} \tilde{z}_{t-k+1} + v_t,$$

donde de nuevo v_t contiene la parte de z_{t-1} no común con las observaciones intermedias.

3. Se calcula el coeficiente de correlación simple entre u_t y v_t que, por definición, es el coeficiente de autocorrelación parcial de orden k .

Esta definición es análoga a la del coeficiente de correlación parcial en regresión. Puede comprobarse que las tres etapas anteriores equivalen a ajustar la regresión múltiple:

$$\tilde{z}_t = \alpha_{k1}\tilde{z}_{t-1} + \dots + \alpha_{kk}\tilde{z}_{t-k} + \eta_t$$

y el coeficiente de autocorrelación parcial de orden k es el coeficiente α_{kk} . Llamaremos *función de autocorrelación parcial (fap)* a la representación de los coeficientes de autocorrelación parcial en función del retardo. Por tanto, si ajustamos la familia de regresiones:

$$\begin{aligned}\tilde{z}_t &= \alpha_{11}\tilde{z}_{t-1} + \eta_{1t} \\ \tilde{z}_t &= \alpha_{21}\tilde{z}_{t-1} + \alpha_{22}\tilde{z}_{t-2} + \eta_{2t} \\ &\dots\dots\dots \\ \tilde{z}_t &= \alpha_{k1}\tilde{z}_{t-1} + \dots + \alpha_{kk}\tilde{z}_{t-k} + \eta_{kt}\end{aligned}$$

la secuencia de coeficientes α_{ii} proporciona la función de autocorrelación parcial.

De esta definición se deduce que un proceso AR(p) tendrá los p primeros coeficientes de autocorrelación parcial distintos de cero, y por tanto, en la *fap* el número de coeficientes distintos de cero indica el orden del proceso AR. Esta propiedad va a ser clave para identificar el orden de un proceso autorregresivo. La figura 4.8 resume la *fas* y *fap* de distintos procesos AR. Además, el coeficiente de correlación parcial de orden p coincidirá siempre con el parámetro ϕ_p . El apéndice 4.2 presenta métodos eficientes para estimar los coeficientes de correlación parcial.

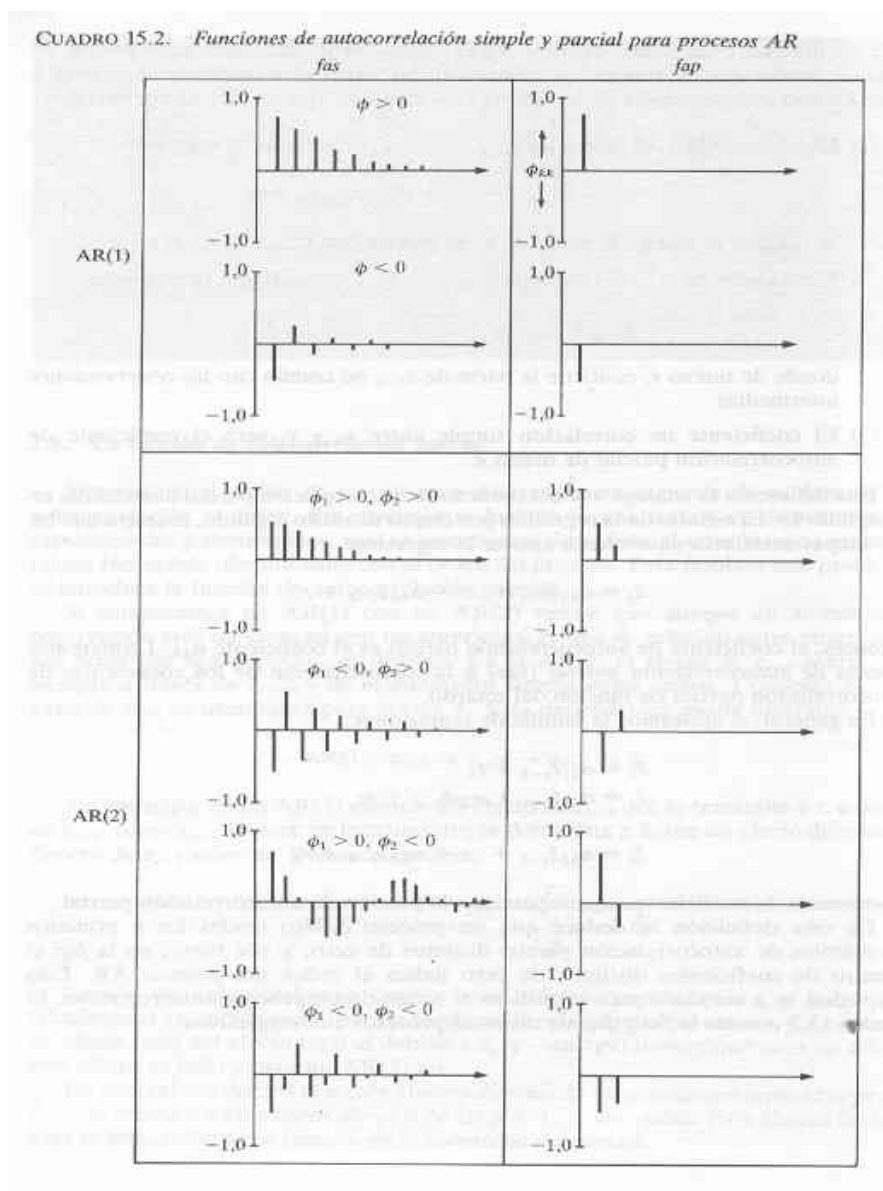


Figura 4.8: Funciones de autocorrelación simple y parcial para procesos AR

Ejemplo 4.5

La figura 4.9 presenta la función de autocorrelación parcial para los tipos de interés del ejemplo 4.1 y la figura 4.7 para los datos de los visones del ejemplo 4.2. Concluimos que las variaciones del tipo de interés si parecen seguir un proceso AR(1), ya que sólo hay un coeficiente significativo, mientras que la serie de los visones presenta coeficientes de autocorrelación parcial significativos hasta el retardo cuarto, sugiriendo que el modelo es AR(4), en lugar de AR(2).

Ejercicios y lecturas complementarias

4.1. Generar muestras de un proceso AR(1) con $\phi = 0.7$ con un programa de ordenador como sigue: (1) generar un vector a_t de 150 variables aleatorias normales (0,1); (2) tomar $z_1 = a_1$; (3) para $t = 2, \dots, 150$ calcular $z_t = 0.7z_{t-1} + a_t$; (4) Para evitar el efecto de las condiciones iniciales eliminar los primeros 50 datos y tomar como muestra de tamaño 100 del proceso AR(1) los valores z_{51}, \dots, z_{150} .

4.2. Obtener la función de autocorrelación teórica del proceso $z_t = 0.7z_{t-1} + a_t$, donde a_t es ruido blanco.

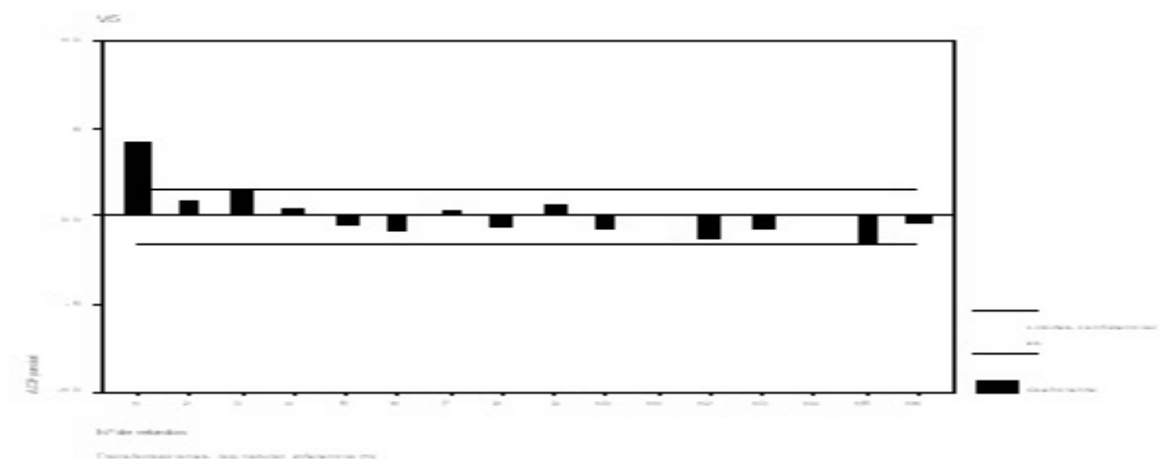


Figura 4.9: Función de autocorrelación parcial para las variaciones relativas del tipo de interés.

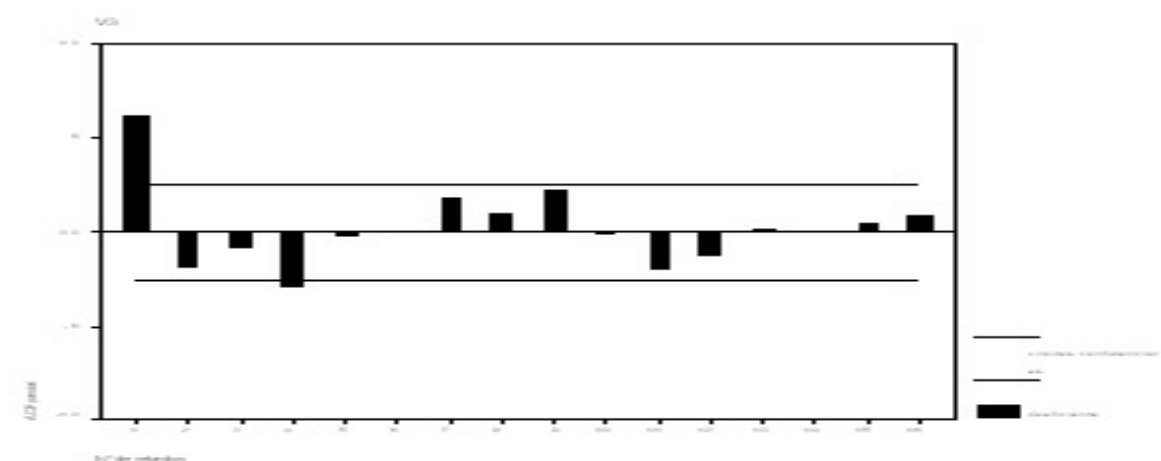


Figura 4.10: Función de autocorrelación parcial para loo visones en Canada.

Comparar los resultados teóricos con los observados en la muestra simulada del ejercicio anterior.

4.3. Obtener la función de autocorrelación simple teórica del proceso $z_t = 0.9z_{t-1} - 0.18z_{t-1} + a_t$, donde a_t es ruido blanco. Generar una realización del proceso mediante el ordenador y comparar la función muestral con la teórica.

4.4. Expresar en notación de operadores los procesos de los ejercicios 2 y 3. Representar los procesos en la forma $z_t = \sum \psi_i a_{t-i}$ obteniendo los operadores inversos.

4.5. Escribir la función de autocorrelación teórica del proceso $(1 - 1.2B + .32B^2)z_t = a_t$. Obtener la representación de este proceso como $z_t = \sum \psi_i a_{t-i}$ y comentar la relación entre los coeficientes ψ y la función de autocorrelación simple.

4.6. Demostrar que el proceso $y_t = z_t - z_{t-1}$, donde $z_t = 0.9z_{t-1} + a_t$ es estacionario, sigue siendo estacionario.

4.7. Demostrar que el proceso anterior puede escribirse como $y_t = -0.09z_{t-2} + a_t - 0.1a_{t-1}$.

4.8. Calcular el operador inverso de $(1 - 0.8B)(1 - B)$.

4.9. Justificar si el proceso $(1 - .5B)(1 - .7B)(1 - .2B)z_t = a_t$ es estacionario y escribirlo en su expresión habitual.

4.10. Calcular los coeficientes teóricos de autocorrelación parcial para el siguiente proceso AR(2): $z_t = 0.7z_{t-1} - 0.5z_{t-2} + a_t$, donde a_t es ruido blanco.

4.6 APENDICE 4.1. Notación de Operadores

4.6.1 El operador de retardo

Definimos el *operador de retardo*, B , como un operador lineal que aplicado a una función temporal proporciona esa misma función retardada un periodo. Por definición:

$$Bf(t) \equiv f(t-1)$$

donde, para simplificar la notación, en lugar de utilizar la notación más precisa $B[f(t)] \equiv f(t-1)$, escribimos el operador como un producto sobre la función, pero esta notación debe interpretarse como una operación aplicada a una función, $f(t)$, que proporciona otra función, $f(t-1)$. En particular, si aplicamos el operador de retardo a una serie temporal obtendremos la misma serie temporal retardada un periodo y escribiremos:

$$Bz_t = z_{t-1}.$$

Un constante se interpreta como una función que es constante en el tiempo, y estableceremos que al aplicar el operador de retardo a una constante ésta no se modifica:

$$B\mu = \mu.$$

De acuerdo con la definición, si aplicamos este operador al producto de una constante, a , por una serie temporal tenemos que

$$Baz_t = aBz_t = az_{t-1}$$

El operador de retardo es lineal, es decir:

$$B(af(t) + bg(t)) \equiv af(t-1) + bg(t-1)$$

y puede aplicarse sucesivamente:

$$B^k z_t = \underbrace{B \dots B}_k z_t = z_{t-k}$$

Definiremos los polinomios en el operador de retardo como nuevos operadores que aplicados a una función proporcionan otra función, de acuerdo con las propiedades anteriores del operador B . Por ejemplo, el operador $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2$ aplicado a una serie temporal proporciona otra serie temporal, mediante la operación

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)z_t = z_t - \phi_1 Bz_t - \phi_2 B^2 z_t = z_t - \phi_1 z_{t-1} - \phi_2 z_{t-2}$$

y al aplicar $\phi(B)$ a una serie, z_t , se obtiene otra serie, y_t , que se calcula como $y_t = z_t - \phi_1 z_{t-1} - \phi_2 z_{t-2}$.

4.6.2 El operador Diferencia

Un caso particular importante de operador polinómico es el operador $(1 - B)$, que se conoce como *operador diferencia*, y se denota por $\nabla = (1 - B)$. Entonces

$$\nabla z_t = (1 - B)z_t = z_t - z_{t-1}.$$

El resultado de aplicar el operador diferencia a una serie z_t con T observaciones es obtener una nueva serie de $T - 1$ observaciones mediante $y_t = z_t - z_{t-1}$, para $t = 2, \dots, T$. El operador diferencia puede aplicarse más de una vez:

$$\nabla^2 z_t = (1 - B)^2 z_t = (1 - B)(z_t - z_{t-1}) = z_t - 2z_{t-1} + z_{t-2}$$

La estacionalidad requerirá tomar diferencias entre observaciones separadas s periodos. Definimos el *operador diferencia de orden s* como:

$$\nabla_s z_t = (1 - B^s)z_t = z_t - z_{t-s}.$$

4.6.3 Operadores inversos

Los operadores descritos tienen sus operadores inversos, que verifican la propiedad de que su producto por el operador inicial es la unidad. El inverso del operador de retardo es el operador de adelanto $F = B^{-1}$, que verifica $FB = 1$ y está definido por

$$Fz_t = B^{-1}z_t = z_{t+1},$$

y se verifica que $FBz_t = z_t = BFz_t$. Si aplicamos un operador y su inverso, en cualquier orden, la serie no se modifica.

Generalizando esta definición, podemos definir el inverso de cualquier operador $\phi(B)$ como un operador $\phi(B)^{-1}$ tal que $\phi(B)\phi(B)^{-1} = 1$. Por ejemplo, nos encontraremos frecuentemente con el operador $\phi(B) = (1 - \phi B)$, cuyo inverso se define para $|\phi| < 1$ como:

$$(1 - \phi B)^{-1} = 1 + \phi B + \phi^2 B^2 + \dots$$

Observemos que esta definición es coherente, ya que $(1 - \phi B)(1 - \phi B)^{-1} = 1$, y como $|\phi| < 1$ la suma es convergente y la definición del operador inverso es consistente con la expresión para la suma de una progresión geométrica indefinida. En general el operador inverso puede obtenerse a partir de la condición $\phi(B)\phi(B)^{-1} = 1$, y será una serie infinita. Las condiciones para que esa suma sea convergente definen las situaciones en que podemos definir sin ambigüedad este operador inverso.

Si $\phi = 1$ el operador $(1 - \phi B)$ es el operador diferencia y al invertirlo la suma $S = (1 - B)^{-1} = 1 + B + B^2 + \dots$ no es convergente. Sin embargo, podemos todavía definir el inverso del operador diferencia como el operador suma:

$$Sz_t = z_t + z_{t-1} + z_{t-2} + \dots$$

ya que es fácil comprobar que $(1 - B)(1 + B + B^2 + \dots) = 1$.

4.7 Apéndice 4.2 Ecuaciones en diferencias

Llamaremos ecuación en diferencias a una expresión del tipo

$$x_t - \phi_1 x_{t-1} - \phi_2 x_{t-2} - \dots - \phi_k x_{t-k} = c$$

y supondremos que los coeficientes ϕ_i son constantes. Esta es una ecuación en diferencias de orden k , que es el máximo retardo de la variable que aparece en la ecuación. Diremos que la ecuación en diferencias es homogénea si $c = 0$. Llamaremos solución de esta ecuación a una secuencia x_t que la verifica para todo t . Obtener las soluciones de estas ecuaciones se simplifica introduciendo el operador de retardo $Bx_t = x_{t-1}$ y escribiendo

$$\phi(B)x_t = c$$

Llamaremos polinomio característico de una ecuación en diferencias al polinomio $\phi(B)$ y *ecuación característica* a la ecuación $\phi(B) = 0$ considerada como función de la variable B . Por ejemplo, la ecuación característica de una ecuación en diferencias de primer orden es

$$1 - \phi B = 0$$

y su solución será $B = 1/\phi$.

En este apéndice vamos a demostrar las siguientes propiedades de soluciones de las ecuaciones en diferencias:

1. La solución de una ecuación homogénea de primer orden es AG^t , donde A es una constante que depende de las condiciones iniciales y G^{-1} es la solución de la ecuación característica.
2. La solución de una ecuación homogénea cuyo polinomio característico puede escribirse como producto de dos polinomios con raíces distintas es la suma de las soluciones asociadas a cada una de las ecuaciones características de los dos polinomios.
3. La solución de una ecuación homogénea de segundo grado con una raíz G^{-1} doble es $(A_1 + A_2 t)G^t$.
4. La solución general de una ecuación en diferencias es la suma de una solución particular de la ecuación más la solución de la ecuación homogénea.

Vamos a comprobar estas cuatro propiedades. La primera resulta al considerar la ecuación en diferencias de primer orden:

$$x_t - \phi x_{t-1} = (1 - \phi B)x_t = 0$$

Esta ecuación produce a partir de un valor inicial x_0 , la secuencia de valores $x_1 = \phi x_0$, $x_2 = \phi^2 x_0$, y en general

$$x_t = \phi^t x_0.$$

La solución de la ecuación es por tanto el producto de la inversa de la solución de la ecuación característica, ϕ^{-1} y una constante que es el valor inicial.

Para comprobar la segunda propiedad, consideremos ahora una ecuación de segundo grado, $x_t - \phi_1 x_{t-1} - \phi_2 x_{t-2} = 0$, que escribiremos como:

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)x_t = 0 \quad (4.29)$$

y si G_1^{-1} y G_2^{-1} son las raíces de la ecuación característica, podemos expresar esta ecuación como:

$$(1 - G_1 B)(1 - G_2 B)x_t = 0 \quad (4.30)$$

Supongamos primero que $G_1 \neq G_2$. Vamos a demostrar que la solución de esta ecuación esta formada por la suma de las soluciones de los dos términos que la componen. Es decir, la solución de esta ecuación es de la forma

$$x_t = S_{1t} + S_{2t} \quad (4.31)$$

donde S_{1t} verifica $(1 - G_1 B)S_{1t} = 0$ y S_{2t} verifica $(1 - G_2 B)S_{2t} = 0$. En efecto, sustituyendo (4.31) en (4.30) tenemos que

$$(1 - G_1 B)(1 - G_2 B)S_{1t} + (1 - G_1 B)(1 - G_2 B)S_{2t} = 0$$

Como la solución de $(1 - G_i B)S_{it} = 0$ debe ser de la forma $S_{it} = A_i G_i^t$, donde las A_i son constantes que depende de las condiciones iniciales, tenemos que la solución general de (4.30) debe ser de la forma:

$$x_t = A_1 G_1^t + A_2 G_2^t. \quad (4.32)$$

Por ejemplo supongamos que tenemos la secuencia de autocorrelaciones de una AR(2) con $\rho_0 = 1$ y $\rho_1 = \phi_1 / (1 - \phi_2)$. Entonces según (4.32) la solución general es

$$\rho_k = A_1 G_1^k + A_2 G_2^k \quad (4.33)$$

donde por ser G_1 y G_2 factores de la ecuación deberá verificarse que $\phi_1 = G_1 + G_2$ y $\phi_2 = -G_1 G_2$. Para obtener las constantes A_1, A_2 , particularizando para $k = 0$ tenemos $1 = A_1 + A_2$ y para $k = 1$ se obtiene $\rho_1 = \phi_1 / (1 - \phi_2) = (G_1 + G_2) / (1 + G_1 G_2) = A_1 G_1 + A_2 G_2$. De estas dos ecuaciones se obtiene:

$$A_1 = \frac{G_1 (1 - G_2^2)}{(1 + G_1 G_2) (G_1 - G_2)}; \quad A_2 = \frac{-G_2 (1 - G_1^2)}{(G_1 - G_2) (1 + G_1 G_2)}$$

Si las dos raíces son reales la solución será la suma de dos decrecimientos geométricos. Sin embargo, cuando las raíces son complejas la solución (4.32) implica un comportamiento sinusoidal. En efecto, si G_1 y G_2 son complejos conjugados pueden escribirse como $G_1 = r \exp(i\omega)$ y $G_2 = r \exp(-i\omega)$. El módulo de estos números se calcula por:

$$r^2 = G_1 G_2 = -\phi_2$$

$$r = \sqrt{-\phi_2} \quad (4.34)$$

y vemos que para que la solución sea compleja ϕ_2 debe ser negativo. Para obtener la frecuencia angular en función de los parámetros observemos que:

$$\phi_1 = G_1 + G_2 = r (\exp(i\omega) + \exp(-i\omega)) = 2r \cos \omega$$

y llamando $\omega = 2\pi/T$, donde T es el período, y utilizando (4.34) se obtiene:

$$\cos \omega = \cos \frac{2\pi}{T_0} = \frac{\phi_1}{2\sqrt{-\phi_2}} \quad (4.35)$$

Sustituyendo A_1 , A_2 , G_1 , y G_2 en (4.33) y operando, se obtiene:

$$\rho_k = \frac{[sg(\phi_1)]^k r^k \text{sen}(2\pi k/T_0 + \alpha)}{\text{sen } \alpha}$$

donde $tg \alpha = (1 + r^2) \text{tag}(2\pi/T_0)/(1 - r^2)$ y $sg(\phi_1)$ es el signo del coeficiente ϕ_1 . Por tanto, la función de autocorrelación será una senoide amortiguada con factor de amortiguación r y período T_0 .

Vamos a demostrar la tercera propiedad. Hemos supuesto hasta ahora que las raíces de la ecuación característica son distintas. Vamos a comprobar que cuando las dos raíces son iguales los dos términos $A_i G_i^t$ correspondientes pueden escribirse como $(A_1 + A_2 t)G^t$. En efecto, supongamos la ecuación (4.29) cuya ecuación característica es

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) = 0 \quad (4.36)$$

Si existe una raíz doble en esta ecuación, G_0^{-1} , se verifica:

$$(1 - G_0 B)^2 = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)$$

que implica $\phi_2 = -G_0^2$ y $\phi_1 = 2G_0$, por tanto

$$\phi_1 G_0 + 2\phi_2 = 0. \quad (4.37)$$

Comprobemos que si G_0^t es una solución de (4.36) también debe serlo tG_0^t . Sustituyendo:

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) tG_0^t = tG_0^t - \phi_1 (t-1) G_0^{t-1} - \phi_2 (t-2) G_0^{t-2}$$

y sacando factores comunes, tenemos que

$$tG_0^{t-2} (G_0^2 - \phi_1 G_0 - \phi_2) + G_0^{t-2} (\phi_1 G_0 + 2\phi_2) = 0.$$

El primer término es cero, por ser G_0 solución, y el segundo por ser doble –según (4.37)–, con lo que concluimos que la solución general es:

$$x_t = (A_1 + A_2 t) G_0^t.$$

Estos resultados se extienden para ecuaciones de cualquier orden. Supongamos la ecuación lineal homogénea en diferencias

$$x_t - \phi_1 x_{t-1} - \phi_2 x_{t-2} - \dots - \phi_k x_{t-k} = 0, \quad (4.38)$$

que escribiremos como

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_k B^k) x_t = 0.$$

Si todas las raíces son distintas, aplicando el resultado anterior concluimos que la solución general es:

$$x_t = A_1 G_1^t + \dots + A_k G_k^t \quad (4.39)$$

donde las A_1, \dots, A_k son constantes que dependen de las condiciones iniciales y $G_1^{-1}, \dots, G_k^{-1}$ son las raíces de la ecuación característica o G_i son los factores de esta ecuación, de manera que

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_k B^k) = (1 - G_1 B) \dots (1 - G_k B).$$

Observemos además que para que x_t tienda a cero cuando $t \rightarrow \infty$, G_i^t debe tender a cero, lo que requiere que el módulo de todas las soluciones de (4.39) sea menor que la unidad.

Si existen raíces repetidas h veces, es decir existe un término de la forma $(1 - G_0 B)^h$, es fácil comprobar que la solución asociada a ese término es

$$x_t = (A_1 + A_2 t + \dots + A_h t^{h-1}) G_0^t. \quad (4.40)$$

Por tanto, la solución general de (4.38) tendrá: (1) por cada raíz real no repetida un término del tipo $A_i G_i^t$; (2) por cada raíz real repetida h veces un término polinómico de orden $(h-1)$ que multiplica a G_0^t ; (3) por cada par de raíces complejas conjugadas un término sinusoidal.

Comprobemos finalmente la propiedad cuarta. Supongamos la ecuación $\phi(B)x_t = c$. Vamos a comprobar que si y_t es una solución también lo es $y_t + q_t$ donde q_t es una solución de la ecuación homogénea, $\phi(B)q_t = 0$. La comprobación es inmediata, ya que

$$\phi(B)(y_t + q_t) = \phi(B)y_t = c.$$

4.8 Apéndice 4.3 Cálculo de los coeficientes de autocorrelación parcial

El procedimiento presentado en la sección 4.6 para calcular los coeficientes de correlación parcial es equivalente a obtener el cociente de determinantes:

$$\alpha_k = \frac{|\mathbf{A}(k, r_k)|}{|\mathbf{R}_k|}$$

donde \mathbf{R}_k es la matriz de coeficientes de autocorrelación de orden k

$$\mathbf{R}_k = \begin{bmatrix} 1 & r_1 & \dots & r_{k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{k-1} & r_{k-2} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

y $\mathbf{A}(k, r_k)$ es el resultado de sustituir en esta matriz la última columna por el vector $\mathbf{r}_k = (r_1, \dots, r_k)'$. Este resultado es la regla de Cramer para resolver ecuaciones lineales. Teniendo en cuenta que podemos escribir el determinante de \mathbf{R}_k como

$$\mathbf{R}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{k-1} & \tilde{\mathbf{r}}'_{k-1} \\ \tilde{\mathbf{r}}_{k-1} & 1 \end{bmatrix}$$

donde $\tilde{\mathbf{r}}_{k-1} = (r_{k-1}, \dots, r_1)'$ y entonces $|\mathbf{R}_k| = |\mathbf{R}_{k-1}| (1 - \tilde{\mathbf{r}}'_{k-1} \mathbf{R}_{k-1}^{-1} \tilde{\mathbf{r}}_{k-1})$. Por otro lado

$$\mathbf{A}(k, r_k) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{k-1} & \mathbf{r}'_{k-1} \\ \tilde{\mathbf{r}}_{k-1} & r_k \end{bmatrix}$$

y tenemos que $|\mathbf{A}(k, r_k)| = |\mathbf{R}_{k-1}| (r_k - \mathbf{r}'_{k-1} \mathbf{R}_{k-1}^{-1} \tilde{\mathbf{r}}_{k-1})$, con lo que

$$\alpha_k = \frac{(r_k - \mathbf{r}'_{k-1} \mathbf{R}_{k-1}^{-1} \tilde{\mathbf{r}}_{k-1})}{(1 - \tilde{\mathbf{r}}'_{k-1} \mathbf{R}_{k-1}^{-1} \tilde{\mathbf{r}}_{k-1})}$$

que proporciona un método rápido de cálculo de los coeficientes de correlación parcial.