Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.
Universidad de Alcalá.

Concentración y desigualdad económica

Dra. J. Domínguez Domínguez

Concepto de Desigualdad

- "La idea de desigualdad es muy simple y muy compleja a la vez. Por una parte, es la más simple de todas las ideas y ha motivado a la gente con un atractivo inmediato difícilmente comparable con ningún otro concepto. Por otra parte, sin embargo, es una noción extraordinariamente compleja que hace las aseveraciones sobre desigualdad altamente problemáticas y ha sido, por tanto, objeto de amplia investigación por parte de filósofos, estadísticos, teóricos de la política, sociólogos y economistas" (Amartya Sen, 1973, *On Economic Inequality*, p.vii).

- "Cuando hablamos de *desigualdad de la renta*, simplemente nos referimos a diferencia de rentas, sin tener en cuenta su deseabilidad como sistema de recompensas o su indeseabilidad como sistema que contradice cierto esquema de igualdad". (Simon Kuznets, 1953, *Share of Upper Income Groups in Income and Savings*, p.xxvii).

Curvas de Lorenz

* Lorenz (1905).- Sea el vector de rentas $(x_1,x_2,\ldots,x_N)'$, de manera que estén ordenadas en sentido creciente, entonces:

$$\left.\begin{array}{l} p_0 = 0,\ \ p_i = \dfrac{i}{N} \\[2ex] q_0 = 0,\ \ q_i = \dfrac{1}{N.\overline{x}} \displaystyle\sum_{j=1}^{i} x_j \end{array}\right\} \Rightarrow$$

L(p) es la poligonal que une los puntos: $\{(p_i,q_i),\ i=0,1,\ldots,N\}$

* Si se modeliza la renta mediante una variable aleatoria no negativa (X), cuya media es μ, siendo F(x) su función de distribución:

$$\left.\begin{array}{l} p = F(x) = \displaystyle\int_0^x dF(t) \\[2ex] q = L(F(x)) = \dfrac{1}{\mu}\displaystyle\int_0^x t.dF(t) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Si $F^{-1}(p) = \inf\{x: F(x) \geq p\}$, entonces:

$$L(p) = \frac{1}{\mu}\int_0^p F^{-1}(t).dt \quad \text{(Gastwirth, 1971)}$$

Propiedades de la curva de Lorenz

•Condición Necesaria.- Si X es una variable aleatoria no negativa, entonces su curva de Lorenz ($L(p)$) verifica las siguientes propiedades:

i) $L(0) = 0$; $L(1) = 1$

ii) $L(p) \leq p$, $\forall p \in [0,1]$

iii) $L(p)$ es no decreciente y convexa

iv) El área comprendida entre las funciones p y $L(p)$ no supera 1/2.

* La pendiente de $L(p)$ viene dada por $t(p) = F^{-1}(p) / \mu$.

* Por otra parte, si se define la *función diferencia* mediante:

$$A(p) = p - L(p) , \forall p \in [0,1] ,$$

entonces alcanza su máximo en el punto $p = F(\mu)$.

Ordenaciones parciales en desigualdad

* Dadas dos distribuciones de renta (x,y), se dice que *x es menos desigual que y* cuando:

$$x \leq_L y \Leftrightarrow L_x(p) \geq L_y(p), \quad \forall p \in [0,1]$$

* Esta relación tiene estructura de preorden (reflexiva y transitiva) ó de orden parcial, si se define entre clases de distribuciones de renta proporcionales. Así, si dos curvas de Lorenz se cruzan, las distribuciones son *no comparables*.
* Para comparar en desigualdad utilizando el criterio de Lorenz, no es posible, en general, ordenar todos los casos, dando como resultado los *diagramas de Hesse*.

Criterios Alternativos de Comparación

*** Criterio de Dominación por Rangos ($\leq_R$)**

Supuestos los vectores de renta ordenados de menor a mayor:

$$x \leq_R y \iff x_i \leq y_i \quad , \forall i = 1,2,\ldots,k$$

Puede comprobarse que:

$$x \leq_R y \Rightarrow x \leq_{LG} y$$

*** Criterio de Dominación Estocástica ($\leq_{Dj}$)**

$$x \leq_{Dj} y \iff F_j(x) \geq G_j(x) \,, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ siendo:}$$

$$F_1(x) = F(x) \,, \quad F_j(x) = \int_{-\infty}^{x} F_{j-1}(t).dt \;, j \geq 2$$

*** Criterio de Dominación de Rawls ($\leq_{rw}$)**

$$x \leq_{rw} y \iff \mathrm{Min}\{x_i\} \leq \mathrm{Min}\{y_i\}$$

<u>Conclusión</u>: Todos, salvo $\leq_{rw,}$ generan cuasi-ordenaciones ó preórdenes.

Medidas de Desigualdad

- Son indicadores sintéticos de la desigualdad contenida en una distribución de ingresos ó rentas.

Formalmente, consideremos el conjunto:

$$D = \bigcup_{n=2}^{\infty} D_n \quad , \quad D_n = \left\{ x \in \Re^n : \sum_{i=1}^{n} x_i > 0,\ x_i \geq 0 \ \ (i = 1,2,\dots,n) \right\}$$

Entonces un indicador de desigualdad es una función $\boxed{\begin{array}{l} I : D \to \Re \\ \quad x \mapsto I(x) \end{array}}$

- Bartels (1977) sugiere incluir en la formulación una distribución de referencia, I(x,r), aunque en la práctica suele ser $\mathbf{r} = \mu \mathbf{1}$.
- Así se inducen *ordenaciones totales de desigualdad*, pero ha de admitirse el esquema subjetivo de ponderaciones implícito.

Clasificación de Medidas de Desigualdad

A) Clasificación de A. Sen (1973):

Medidas Desigualdad
- Positivas
- Éticas ó Normativas

B) Clasificación Instrumental:

Medidas Desigualdad
- Absolutas
- Estandarizadas ó Relativas
- Normalizadas

Planteamiento Axiomático

- En la selección de un buen indicador de desigualdad, juega un papel destacado el esquema de ponderaciones que presente, que no siempre es suficientemente explícito.
- Por ello, se plantea como alternativa la posibilidad de imponer propiedades que garanticen su buen comportamiento, que reciben el nombre de *axiomas*, por lo que no guardan relación con la acepción matemática del término.
- En último extremo, estas propiedades podrían permitir la caracterización de diversas medidas de desigualdad, consiguiendo así su singularización y, por tanto, facilitando la selección.
- No obstante, no existe acuerdo en la selección de una medida de desigualdad que resulte claramente superior al resto.

Axiomas Básicos

Axioma de Simetría ó Imparcialidad

$$\left.\begin{array}{l} x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)' \\ y = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(N)})' \\ \sigma(.) \text{ permutación de } \{1,2,\ldots,N\} \end{array}\right\} \Rightarrow I(x) = I(y)$$

Axioma de Invarianza por Homotecias ó Cambios de Escala

$$I(\lambda x) = I(x)\ ,\quad \forall x \in D,\ \forall \lambda > 0$$

Axioma ó Principio de la Población de Dalton

$$\left.\begin{array}{l} x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)' \\ y = (x, x, \ldots^{(m)}, x)' \end{array}\right\} \Rightarrow I(x) = I(y)$$

siendo *y* una réplica de orden *m* de *x* : $y_{1i} = y_{2i} = \ldots = y_{mi} = x_i\ ,\ \forall i=1,\ldots,N$

Principio de Transferencias de Dalton-Pigou

Si la distribución de renta *y* se obtiene de *x* mediante una transferencia progresiva (regresiva) de renta, ó una sucesión finita no vacía de ellas, entonces I(y) < I(x) (>).

Transferencia progresiva

y se obtiene de *x* mediante una transferencia progresiva de renta si, estando las rentas ordenadas de menor a mayor:

$$x = (x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots,x_N)' \Rightarrow y = (x_1,\ldots,x_i+\delta,\ldots,x_j-\delta,\ldots,x_N)' \ , \ \delta \in \left(0, \frac{x_j - x_i}{2}\right)$$

Teorema (Atkinson,1970; Kakwani,1980)

Si V(.) es una función estrictamente convexa, entonces cualquier medida del tipo I(x) = E[V(x)] satisface el principio de transferencias en todos los niveles de renta. Si, además, V(.) es diferenciable, su sensibilidad relativa es proporcional a:

$$T(x) = V'(x) - V'(x-\delta) \quad , \delta > 0$$

Compatibilidad con la ordenación de Lorenz

Una medida de desigualdad I(.) es *compatible con la ordenación de Lorenz* cuando:

$$x \geq_L y \iff L_x(p) \leq L_y(p) \ , \forall p \in [0,1] \iff I(x) \geq I(y)$$

Teorema (Foster, 1985)

La condición necesaria y suficiente para que un indicador I(.) sea compatible con la *cuasi-ordenación* de Lorenz es que verifique los siguientes axiomas:

i) Simetría.
ii) Invarianza frente a homotecias.
iii) Principio de población de Dalton.
iv) Principio de Transferencias de Dalton-Pigou.

Medidas compatibles con $\leq_L$: CV, I_G, A_ε , T_c , entre otros.

Indices de Gini y Pietra

Indice de Gini Si X,Y son independientes y equidistribuidas:

$$\Delta = E\left[\left|X - Y\right|\right] \Rightarrow I_G = \frac{\Delta}{2\mu} = 1 - 2\int_0^1 L(p).dp \in [0,1]$$

$$I_G = \frac{1}{2.N^2.\mu}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left|x_i - x_j\right| = 1 + \frac{1}{N} - \frac{2}{N^2.\mu}\sum_{i=1}^{N}(N - i + 1).x_{(i)} \cong \frac{\sum_{i=1}^{k-1}(p_i - q_i)}{\sum_{i=1}^{k-1} p_i}$$

Desviación Media Relativa (Pietra)

$$DMR(X) = \frac{1}{2\mu} E\left[\left| X - \mu \right|\right] = \underset{p}{Max}\{p - L(p)\} = F(\mu) - L[F(\mu)]$$

Familia de Medidas de Atkinson (1970)

- Se construye a partir de la función generalizada de medias:

$$A_{\varepsilon}(X) = 1 - \frac{1}{\mu} E\left[X^{1-\varepsilon}\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0$$

- En el caso discreto se expresa (puede sustituirse 1/N por f_i):

$$A_{\varepsilon}(x) = \begin{cases} 1 - \left[\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\dfrac{x_i}{\mu}\right)^{1-\varepsilon}\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} & , \varepsilon > 0, \ \varepsilon \neq 1 \\ 1 - \prod_{i=1}^{N}\left(\dfrac{x_i}{\mu}\right)^{\frac{1}{N}} & , \ \varepsilon = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{\varepsilon \to \infty} A_{\varepsilon}(x) = 1 - \frac{x_{(1)}}{\mu}$$

- Esta familia resulta básica en la formulación normativa de las medidas de desigualdad. ε se interpreta como parámetro de *aversión social a la desigualdad.*

Familia de Índices de Entropía Generalizada

• Se fundamentan en una adaptación del concepto de entropía, propuesta por Theil (1967), identificando *desorden* con igualdad. El índice de Theil de orden 1 utiliza la entropía de Shannon y el resto la generalizada.

$$T_c(X)= \begin{cases} E\left[\log\left(\frac{\mu}{X}\right)\right], \ c=0 \\ \frac{1}{\mu} E\left[X.\log\left(\frac{X}{\mu}\right)\right], \ c=1 \\ \frac{1}{c(c-1)} E\left[\left(\frac{X}{\mu}\right)^c - 1\right], \ c \neq 0,1 \end{cases}$$

Indices de Theil (c = 0, c = 1)

$c \neq 0,1 \longrightarrow$ $T_2(X) = CV^2(X) / 2$

$$T_1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\bar{x}} \log\left(\frac{x_i}{\bar{x}}\right) \in [0, \log N] \Rightarrow T_{1N} = \frac{T_1}{\log N}$$

• Se caracterizan por presentar la propiedad de descomponibilidad aditiva.

• Están relacionados con la familia de Atkinson, mediante:

$$A_\varepsilon(X) = 1 - \left[\varepsilon(\varepsilon-1).T_{1-\varepsilon}(X) + 1\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} \quad , \varepsilon > 0, \varepsilon \neq 1$$

• Son medidas estandarizadas pero no normalizadas.

Axioma de Descomponibilidad Aditiva

$$I(x) = I_e(x^{(1)},x^{(2)},\ldots,x^{(r)}) + I_w(x^{(1)},x^{(2)},\ldots,x^{(r)})$$

Desigualdad entre grupos

$$I_e(x^{(1)},x^{(2)},\ldots,x^{(r)}) = I(\mu^{(1)}e_{n(1)}, \mu^{(2)}e_{n(2)} \ldots, \mu^{(r)}e_{n(r)})$$

Desigualdad dentro de los grupos

$$I_w(x^{(1)},x^{(2)},\ldots,x^{(r)}) = \sum_{h=1}^{r} \alpha_h \, I(x^{(h)})$$

$$\alpha_h = \begin{cases} \dfrac{n_h}{N}\left(\dfrac{\mu_h}{\mu}\right)^c \longrightarrow \boxed{T_c(x)\ ,\ c>0} \\ \dfrac{n_h}{N} \begin{cases} \mu = \mu_G \Rightarrow \boxed{I(x) = VL(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\log x_i - \log \mu_G)^2} \\ \boxed{T_0} \end{cases} \end{cases}$$

Selección de Indicadores

A) Desigualdad:

$$\mathrm{CV2.NORM} = \mathrm{CV}^2 / (1+\mathrm{CV}^2)$$

$$\mathrm{VL.NORM} = \mathrm{VL} / (1+\mathrm{VL})$$

$$\mathrm{GINI} = \tfrac{1}{2\mu} E\left[\left|X - Y\right|\right]$$

$$\mathrm{TH1.NORM} = 1 - \exp\left(-\tfrac{1}{\mu} E[X.\log(X/\mu)]\right)$$

$$\mathrm{ATKIN0.5} = 1 - \tfrac{1}{\mu}\left[E(X^{1/2})\right]^2$$

$$\mathrm{ATKIN1} = 1 - \exp\left(E[\log(X/\mu)]\right)$$

$$\mathrm{ATKIN2} = 1 - \tfrac{1}{\mu}(E[1/X])^{-1}$$

$$\mathrm{PIETRA} = \tfrac{1}{2\mu} E[\left|X - \mu\right|]$$

B) Cumplimiento de Axiomas:

	TRANSF.	INVAR.	POBL.	SIM.	NORM.	DESCOMP.
CV2.NORM.	SI	SI	SI	SI	SI	SI
VL.NORM.	NO	SI	SI	SI	NO	SI
GINI	SI	SI	SI	SI	SI	NO
TH1.NORM.	SI	SI	SI	SI	SI	SI
ATKIN. 0.5	SI	SI	SI	SI	SI	NO
ATKIN. 1	SI	SI	SI	SI	SI	NO
ATKIN. 2	SI	SI	SI	SI	SI	NO
PIETRA	NO	SI	SI	SI	SI	NO

Análisis Estático y Dinámico

Análisis Comparativo

- Espacial → Transversal (*Cross-Section*) ⇒ Medidas de todo tipo, unificando unidades internacionales,en su caso
- Temporal → Longitudinal ó Dinámico ⇒ Medidas estandarizadas y normalizadas, ó deflacionadas si son absolutas

• En cuanto a su <u>cuantificación</u>, las diferencias observadas dependen, en cada caso, de la formulación del indicador correspondiente.