ESTAD _ T5.

Función generatriz de probabilidad

DEF: Sea ξ v.a., $\forall t \in \mathbb{R}$

$$FGP_\xi(t) = \mathbb{P}_\xi(t) = E[t^\xi] = \begin{cases} \sum_{x=0}^{\infty} t^x \cdot P(\xi = x), & \xi \text{ discreta} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} t^x \cdot f(x)dx, & \xi \text{ continua} \end{cases}$$

TEOR: FGP es única

TEOR: Conocida la FGP asociada a una v.a. discreta ($\mathbb{Z}^+$), se puede calcular su función de cuantía:

$$p_\xi^{(k)}(0) = k!\, P(\xi = k) \qquad / \quad p_\xi^{(k)} \equiv \text{derivada orden } k.$$

$\Rightarrow$ Para otras variables (no discretas o no $\mathbb{Z}^+$) se acude a la función generatriz de momentos.

Función generatriz de momentos

DEF: Sea ξ v.a., $\forall t \in \mathbb{R}$

$$FGM_\xi(t) \overset{m_\xi(t)}{=} E[e^{t\xi}] = \begin{cases} \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} P(\xi = x) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \cdot f(x)dx \end{cases}$$

TEOR: FGM es única

TEOR: $\forall t \in \mathbb{R}$, $m_\xi(t) = p_\xi(e^t)$

TEOR: La FGM de una v.a. permite calcular los momentos centrados en el origen de la v.a. ($\Rightarrow \mu_r$ también)

$$m_\xi^{(k)}(0) = \alpha_k$$

TEOR: Sean ξ y η dos v.a. indep. Entonces:

a) $p_{\xi+\eta}(t) = p_\xi(t) \cdot p_\eta(t)$

b) $m_{\xi+\eta}(t) = m_\xi(t) \cdot m_\eta(t)$

$\Rightarrow$ La función generatriz de momentos no existe siempre, la función característica sí.

Función característica

Sea ξ v.a., $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\varphi_\xi(t) = E[e^{it\xi}] = \begin{cases} \sum_x e^{itx} P(\xi = x) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \cdot f(x)\,dx \end{cases}$$ donde $i = \sqrt{-1}$

PROPIEDADES:

P1 _ $\varphi_\xi(t)$ existe siempre $(e^{it\xi} = \cos t\xi + i\,\mathrm{sen}\,t\xi)$

P2 _ $\varphi_\xi(0) = 1$, $\forall \xi$

P3 _ $|\varphi_\xi(t)| \leq 1$, $\forall t$

P4 _ $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$ (conjugado)

P5 _ $\varphi_{a+b\xi}(t) = e^{ita}\varphi_\xi(tb)$

P6 _ $\varphi_{\xi_1+\xi_2}(t) = \varphi_{\xi_1}(t) \cdot \varphi_{\xi_2}(t)$ si ξ_1, ξ_2 son indep.

corolario: $\varphi_{\xi_1+\dots+\xi_n}(t) = [\varphi_{\xi_i}(t)]^n$ si ξ_i v.a. i.i.d.

TEOREMAS:

T1 _ $\varphi_\xi^{(k)}(0) = i^k \cdot \alpha_k \implies \alpha_k = \dfrac{\varphi_\xi^{(k)}(0)}{i^k}$, si existe α_k

Tma INVERSIÓN $\rightarrow$ $F(x_2) - F(x_1) = \dfrac{1}{2\pi} \lim\limits_{T\to\infty} \displaystyle\int_{-T}^{T} \dfrac{e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{it}\varphi(t)\,dt$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\varphi(t)\,dt$$

Tma UNICIDAD $\rightarrow$ A toda $\varphi(t)$ le corresponde una y sólo 1 $F(x)$.

Tma CONTINUIDAD (Levy-Cramér):

$\xi_1 \dots \xi_n \dots$ suc. v.a.

$\{F_n(x)\} \rightarrow F(x) \iff \{\varphi_n(t)\} \rightarrow \varphi(t)$

ESTAD_ T5 . Funciones generatrices (BUSCAR)
Función característica:
- propiedades dble Dem P3, falta dem P5,
- teoremas. (DEM)

---

1. FUNCIONES GENERATRICES

Función generatriz de momentos

La función generatriz de momentos de una v.a ξ se define como la esperanza de $e^{\theta\xi}$, donde θ ¿parámetro?
ξ es la v.a.

$$g(\theta) = E[e^{\theta\xi}] = \begin{cases} \sum_i e^{\theta x_i} p_i & , \xi \text{ v.a. discreta} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\theta x} f(x) dx & , \xi \text{ v.a. continua} \end{cases}$$

Al ser una esperanza matemática, para que exista* la serie / integral ha de converger absolutamente (en valor absoluto)

⇒ NO existe siempre, la func. característica sí

Se llama función generatriz de momentos porque, si existe el momento de orden r respecto al origen, α_r, entonces éste se puede (puede ser generado) obtener (y los de orden menor también) con $g(\theta)$ a través de la igualdad:

$$\alpha_r = \left| \frac{\partial^r}{\partial\theta^r} g(\theta) \right|_{\theta=0}$$

M-P → Func. acumulativa , ¿qué es?
¿qué pinta?

2. FUNCIÓN CARACTERÍSTICA

a) Definición: La función característica de una v.a. ξ se designa por $\varphi(t)$ y se define como la esperanza de la transformación de la v.a. $e^{it\xi}$

$$\varphi(t) = E[e^{it\xi}] = \begin{cases} \sum_j e^{itx_j} p_j & , \ \xi \text{ v.a. discreta} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)\,dx & , \ \xi \text{ v.a. continua} \end{cases}$$

donde $i \equiv$ nº imaginario puro, $i = \sqrt{-1}$
$t \equiv$ una variable real, no aleatoria $t \in \mathbb{R}$

Nota: Sp. que podemos calcular esperanzas de $e^{it\xi}$ de la misma manera que para cq función de ξ no compleja, no es muy riguroso pero no se pierde generalidad.

b) PROPIEDADES de $\varphi(t)$:

P1 → la función característica de una v.a. existe siempre. (y es finita)

Dem: Recordemos que el nº complejo $e^{it\xi}$ puede expresarse siempre en forma binómica, como:

$$e^{it\xi} = \cos t\xi + i \operatorname{sen} t\xi$$

Por lo que su esperanza se puede escribir como (no f. correcta)

$$\varphi(t) = E[e^{it\xi}] = E[\cos t\xi + i \operatorname{sen} t\xi] = E[\cos t\xi] + iE[\operatorname{sen} t\xi]$$

Las variables aleatorias $\cos t\xi$, $\operatorname{sen} t\xi$, al ser funciones trigonométricas están acotadas entre -1 y 1, por lo que su esperanza existirá siempre, y por tanto, $\varphi(t)$ siempre existirá y siempre se podrá calcular.

P2 → La función característica en el punto $t=0$ siempre vale 1, indepte. de la v.a.

$$\varphi(0) = E[e^{i0\xi}] = E[e^0] = E[1] = 1.$$

P3 → El módulo de la función característica es siempre menor o igual que la unidad.

$$|\varphi(t)| \leq 1 \quad , \forall t.$$

Dem: Recordemos que el módulo de un nº complejo en forma binómica es

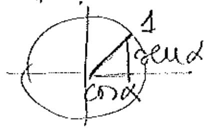
$|a+bi| = +\sqrt{a^2+b^2}$

¿por qué?

$$|\varphi(t)| = |E[e^{it\xi}]| \leq E[|e^{it\xi}|] = E[|\cos t\xi + i \operatorname{sen} t\xi|] =$$

$$= E[+\sqrt{\cos^2 t\xi + \operatorname{sen}^2 t\xi}] = E[1] = 1.$$

$\forall \alpha, \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1.$



P4 → La función característica del opuesto de t es igual al conjugado de la función característica en t.

$$\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$$

Dem: Recordemos que el conjugado del nº complejo $a+bi$ es $a-bi$.

$$\varphi(-t) = E[e^{i(-t)\xi}] = E[\cos t\xi - i \operatorname{sen} t\xi] = E[\cos t\xi] - i E[\operatorname{sen} t\xi]$$

$$\varphi(t) = \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad = E[\cos t\xi] + i E[\operatorname{sen} t\xi]$$

por lo que $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$

P5 → La función característica es uniformemente continua en todo intervalo real de t.

BUSCAR dem

P6 → Función característica de una transformación lineal de la v.a. ξ

~~Sea $w = a+b\xi$, $\varphi_w(t) = e^{ita}\varphi_\xi(tb)$.~~

$$\varphi_{a+b\xi}(t) = e^{ita}\varphi_\xi(tb)$$

$$\varphi_{b\xi}(t) = \varphi_\xi(tb)$$

Dem: Por definición, $\varphi_{a+b\xi}(t) = E[e^{it(a+b\xi)}] =$

$= E[\underbrace{e^{ita}}_{cte} \cdot e^{itb\xi}] = e^{ita} E[e^{it\underbrace{b\xi}_{v.a}}] = e^{ita}\varphi_{b\xi}(t)$.

Si $a=0$, $e^{ita}=1 \Rightarrow \varphi_{b\xi}(t) = \varphi_\xi(bt)$.

P7 → La función característica de la suma de variables aleat. estadísticamente independientes es el producto de las f.c. de cada una de estas v.a.

$$\varphi_{\xi_1+\dots+\xi_n}(t) = \varphi_{\xi_1}(t)\cdot\varphi_{\xi_2}(t)\cdot\ldots\cdot\varphi_{\xi_n}(t). \overset{?}{\Longleftrightarrow} \text{indep.} \quad N(\;)$$

Dem:
$\varphi_{\xi_1+\dots+\xi_n}(t) = E[e^{it(\xi_1+\dots+\xi_n)}] = E[e^{it\xi_1}\cdot e^{it\xi_2}\cdot\ldots\cdot e^{it\xi_n}] =$

$\overset{\text{indep}}{=} E[e^{it\xi_1}]E[e^{it\xi_2}]\ldots E[e^{it\xi_n}] =$

$= \varphi_{\xi_1}(t)\cdot\varphi_{\xi_2}(t)\ldots\varphi_{\xi_n}(t)$.

Corolario de P7: Sean $\xi_1 \dots \xi_n$ v.a. i.i.d., entonces la f. característica de la suma es la potencia de la f. característica de una cq. de ellas.

$\xi_1 \dots \xi_n$ v.a.i.i.d.

$$\varphi_{\xi_1+\dots+\xi_n}(t) = [\varphi_{\xi_i}(t)]^n$$

P8 → Si para una v.a. ξ existe su momento respecto al origen de orden r, entonces la f. característica asoc. es derivable r veces, y los momentos se pueden calcular a través de

$$\alpha_r = E[\xi^r] = \frac{\left.\frac{\partial^r \varphi(t)}{\partial t^r}\right|_{t=0}}{i^r}$$

A un resultado similar se llegaría desarrollando $e^{it\xi}$ por Taylor, obteniéndose el desarrollo en serie de momentos de la función característica:

$$\varphi(t) = 1 + \frac{it}{(1!)}\alpha_1 + \frac{(it)^2}{2!}\alpha_2 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(it)^j}{j!}\alpha_j$$

y derivando posteriormente esta función polinómica.

Dem:

$$\frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} = \frac{\partial E[e^{it\xi}]}{\partial t} = E\left[\frac{\partial e^{it\xi}}{\partial t}\right] = E\left[i\xi e^{it\xi}\right]$$

$$\frac{\partial^2 \varphi(t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E[e^{it\xi}]}{\partial t^2} = \dots = E[i^2\xi^2 e^{it\xi}]$$

$$\frac{\partial^r \varphi(t)}{\partial t^r} = \frac{\partial^r}{\partial t^r} E[e^{it\xi}] = \dots = E[i^r\xi^r e^{it\xi}]$$

Para t = 0

$$\left.\frac{\partial \varphi(t)}{\partial t}\right|_{t=0} = E[i\xi] = iE[\xi] = i\cdot\alpha_1$$

$$\left.\frac{\partial^2 \varphi(t)}{\partial t^2}\right|_{t=0} = E[i^2\xi^2] = i^2E[\xi^2] = i^2\alpha_2$$

$$\left.\frac{\partial^r \varphi(t)}{\partial t^r}\right|_{t=0} = \qquad = i^r\alpha_r$$

c) Teoremas

T1 → Teorema de inversión

Sea ξ v.a. con función de distrib. $F(x)$.
Sean $x_1 < x_2$ dos puntos de continuidad de $F(x)$, entonces se verifica que

$$F(x_2)-F(x_1) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{it} \varphi(t)\,dt$$

si $\varphi(t)$ es integrable para todo t real.

Si además, ξ es v.a. continua, su función de densidad puede determinarse a través de:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \varphi(t)\,dt .$$

Estos resultados relacionan la f. distrib y la f. característica en el sentido inverso de la definición, permitiendo conocer la distrib. de probabilidad de ξ a partir de $F(x)$ y $\varphi(t)$, o bien a partir de $f(x)$ en el caso continuo.

T2 → Teorema de unicidad

A toda función característica $\varphi(t)$ le corresponde una y sólo una función de distribución.

Dem: Directamente del tma de inversión $\begin{cases} x_2 = x \\ x_1 = z \end{cases}$

Al ser $\lim_{z \to -\infty} F(z) = 0$

$$F(x) - F(z) = F(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \to +\infty} \lim_{z \to -\infty} \int_{-T}^{+T} \frac{e^{-itz} - e^{-itx}}{it} \varphi(t)\,dt$$

~~c) Teoremas~~

T3 → <u>Teorema de continuidad</u> (Levy-Cramér)

Sea $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ una sucesión de var. aleatorias. La condición necesaria y suficiente para que su correspondiente sucesión de funciones de distribución $F_1(x), F_2(x) \dots F_n(x) \dots$ converja hacia alguna función de distribución $F(x)$, es que la sucesión de funciones características, asociada a la sucesión de funciones de distribución, converja a una función característica $\varphi(t)$ que, por el teorema de unicidad, será la función característica de la función de distrib. límite $F(x)$.

$$\{F_n(x)\} \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x) \iff \{\varphi_{\xi_n}(t)\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi_{\xi}(t)$$

Dem:

CN: $F_n(x) \to F(x) \Longrightarrow \varphi(t)$ corresp. $F(x)$.

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF_n(x) \overset{F_n(x)\to F(x)}{=}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)\,dx = \varphi(t).$$

CSuf: $\varphi_n(t) \to \varphi(t) \Rightarrow F_n(x) \to F(x)$.

Por los teoremas de inversión y unicidad a $\varphi(t)$ sólo le corresponderá una $F(x)$ que será la distrib. límite.

Nota: Resultado importante para convergencia en distrib.

** AMPLIACIÓN F. GENERATRICES ← sacado de "Probab y Estad" Michael J. Evans, Ed. Reverté (Román)

Función generatriz de probabilidad

Sea ξ v.a., $r_\xi(t) = E[t^\xi]$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Para $\xi \to B(n,p)$; $r_\xi(t) = E[t^\xi] \overset{\xi \text{ discreta}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} P(\xi=i)\cdot t^i =$

$= \sum_{i=0}^{n} t^i \cdot \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (tp)^i (1-p)^{n-i} \overset{\text{binomio de Newton}}{=}$

$= (tp + (1-p))^n$.

Para $\xi \to \mathcal{P}(\lambda)$; $r_\xi(t) = E[t^\xi] = \sum_{i=0}^{\infty} t^i \cdot P(\xi = i) =$

$= \sum_{i=0}^{\infty} t^i \cdot \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(t\lambda)^i}{i!}\cdot e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(t\lambda)^i}{i!} = e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda t}$

$= e^{\lambda(-1+t)}$

TEOREMAS

T1 → Conocida la f. generatriz de probabilidad, se pueden calcular las probabilidades de ξ (f. cuantía). DISCRETA

"Sea ξ una v.a. discreta con campo de variación $\mathbb{Z}^+$".

Si $\exists\, t_0 > 0$ tq $r_\xi(t_0) < +\infty$, entonces

$$\boxed{r_\xi^{(k)}(0) = k!\, P(\xi = k) \quad , \text{ donde } r^{(k)} = k\text{-ésima derivada}}$$

Dem: $r_\xi(t) = E[t^\xi] = \sum_x t^x P(\xi = x) = t^0 P(\xi=0) + t^1 P(\xi=1) + \ldots$

Para $t = 0$, $r_\xi(0) = P(\xi=0) + 0 + \ldots$

1ª derivada → $r'_\xi(t) = 0 + 1\cdot P(\xi=1) + 2t P(\xi=2) + 3t^2 P(\xi=3) + \ldots$

$r'_\xi(0) = P(\xi=1) + 0 + \ldots$

Así, sucesivamente.

Por esto, r_ξ se denomina función generatriz de probabilidad: al menos en el caso discreto ($\mathbb{Z}^+$) podemos calcular las probab. de ξ a partir de $r_\xi \longrightarrow r_\xi$ es única.

Por tanto, si $r_\xi = r_\eta$, entonces ξ y η tienen la misma distribución $\longrightarrow$ propiedad de singularidad de la f. generatriz de probabilidad.

Para otras variables (no discretas ó no $\mathbb{Z}^+$), se utiliza la función generatriz de momentos:

<u>Función generatriz de momentos</u>

Sea ξ v.a., $m_\xi(t) = E[e^{t\xi}]$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Para $\xi \to Exp(\lambda)$: Para $t<\lambda$, $m_\xi(t) = E[e^{t\xi}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \cdot f(x)\,dx =$

$$= \int_0^\infty e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^\infty \lambda e^{(t-\lambda)x} dx = \lambda \frac{e^{(t-\lambda)x}}{t-\lambda}\Big|_0^\infty =$$

$$= 0 - \lambda \frac{e^0}{t-\lambda} = \lambda(\lambda - t)^{-1}$$

Teorema $\to$ Sea ξ una v.a. cualquiera. Entonces su función generatriz de momentos ent coincide con la f.g. de probabilidad ~~de~~ en e^t.

$$m_\xi(t) = r_\xi(e^t)$$

Teorema $\to$ Sea ξ una v.a. cq. $\exists\, t_0 > 0$ tq $m_\xi(t_0) < +\infty$ en $(-t_0, t_0)$. Entonces se verifica

$$\left.\begin{array}{l} m_\xi(0) = 1 \\ m'_\xi(0) = E[\xi] \\ m''_\xi(0) = E(\xi^2) \end{array}\right\} \to m_\xi^{(k)}(0) = E[\xi^k].$$

DUDA

Dem: $m_\xi(t) = E[e^{t\xi}]$

$m_\xi(0) = E[e^{0\xi}] = E(1) = 1$.

PREGUNTAR $m'_\xi(t) = E[\xi e^{t\xi}] \longrightarrow m'_\xi(0) = E[\xi e^{0\xi}] = E[\xi]$.

$m''_\xi(t) = E[\xi^2 e^{t\xi}] \longrightarrow m''_\xi(0) = E[\xi^2]$

etc.

Teorema $\rightarrow$ $\xi \rightarrow N(0,1) \Rightarrow m_\xi(t) = \exp(t^2/2)$.

Dem: $f(x) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-x^2/2)$

$$m_\xi(t) = E[e^{t\xi}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \cdot (2\pi)^{-1/2} \exp(-x^2/2)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(tx - \frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{2tx - x^2}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-t)^2/2 + (t^2/2)} dx = e^{t^2/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-t)^2/2} dx$$

Haciendo $y = x - t \rightarrow dy = dx$.

$$m_\xi(t) = e^{t^2/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2} dy = e^{t^2/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)dy = e^{t^2/2}$$

Teorema $\rightarrow$ Sean ξ y η dos v.a. indep. Entonces:

a) $r_{\xi+\eta}(t) = r_\xi(t) \cdot r_\eta(t)$

b) $m_{\xi+\eta}(t) = m_\xi(t) \cdot m_\xi(t)$.

Dem: Indep $\Rightarrow E[t^X t^Y] = E(t^X) E(t^Y)$ y sdo.

Teorema de unicidad → Sea ξ una v.a. tq $\exists\ s_0 > 0$ con $m_\xi(t) < +\infty$ cuando $t \in (-t_0, t_0)$.
↳ sin dem
Si η es otra v.a. tq $m_\eta(t) = m_\xi(t)$ cuando $t \in (-t_0, t_0)$, entonces ξ y η tienen la misma distrib.

Teorema → Si S sigue una distrib. compuesta ($S = \sum_{i=1}^{N} \xi_i$, suma de v.a. i.i.d., N v.a. con campo de variación $\mathbb{Z}^+$ e indep. a $\{\xi_i\}$), entonces:

a) $E(S) = E(\xi_1) \cdot E(N)$.

b) $m_S(t) = r_N(m_{\xi_1}(t))$.

Dem. ⓐ $\left.\begin{array}{l} E[\xi_i] \overset{\text{indep}}{=} E[\xi_1] \ \forall i \\ \text{sea } I_i = I_{\{1 \dots N\}}(i) \end{array}\right\}$ $S = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \cdot I_i$ porque $\sum_{i=1}^{\infty} I_i = N$

como N es indep. de ξ_i, tb lo es de I_i

$$E[S] = E\left[\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \cdot I_i\right] = \sum E(\xi_i I_i) = \sum E(\xi_i) E(I_i) =$$
$$= E(\xi_1) \sum E(I_i) = E(\xi_1) E\left(\sum I_i\right) = E(\xi_1) E(N).$$

ⓑ $$m_S(t) = E\left[\exp\left(\sum_{i=1}^{n} t X_i\right)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) E\left(\exp\left(\sum t X_i\right) \mid N=n\right) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) E\left(\exp\left(\sum t X_i\right)\right) = \sum P(N=n)\, m_{\xi_1}(t)^n =$$
$$= \sum (m_{\xi_1}(t)^N) = r_N(m_{\xi_1}(t)).$$