ESTAD _ T9

1. DISTRIB. DEGENERADA.
2. DISTRIB. UNIFORME DISCRETA.
3. DISTRIB. de BERNOUILLI.
4. DISTRIB. BINOMIAL.
5. DISTRIB. de POISSON.

(absorbidas) CARACTERÍSTICAS (de todas)

6. DISTRIB. de POISSON como LÍMITE de la BINOMIAL.

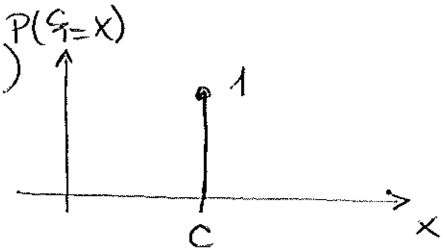
---

1. DISTRIBUCIÓN DEGENERADA ó CAUSAL.

La distrib. degenerada ó causal es la manera en que se escribe una $\boxed{cte}$ (determinista) como una var. aleatoria (incertidumbre). (modelización de los fenóm.)

Función de cuantía: (probab. en los puntos)

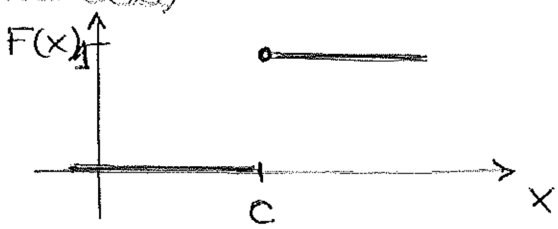
$$\xi = \begin{cases} c \\ \neq c \end{cases} \quad \begin{array}{|l} P(\xi = c) = 1 \\ P(\xi \neq c) = 0 \end{array}$$



La masa de probabilidad se concentra en un único punto c. (Está bien definida porque $p_i > 0$ y $\sum p_i = 1$)

Función de distrib: (probab. acumulada)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < c \\ 1 & x \geq c \end{cases}$$



Características:

$$E[\xi] = \sum x_i p_i = c \cdot P(\xi = c) + \sum_{x \neq c} x \cdot \underbrace{P(\xi = x)}_{=0} = c \cdot 1 = c$$

$$E[\xi^2] = \sum x_i^2 p_i = c^2 P(\xi = c) + \sum_{x \neq c} x^2 \underbrace{P(\xi = x)}_{=0} = c^2 \cdot 1 = c^2$$

$$V[\xi] \underset{\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2}{=} E[\xi^2] - (E[\xi])^2 = c^2 - (c)^2 = c^2 - c^2 = 0 \leftarrow \text{lógico, es una cte.}$$

Función característica:

$$\varphi(t) = E[e^{it\xi}] = E[e^{itc}] + \overset{\sum_{x\neq c} E[e^{itx}]}{0} = e^{itc} \quad (E[e^{itc}] = e^{itc}\cdot P(\xi = c))$$

↳ $\sum_{x_i} e^{itx_i}\cdot P(\xi = x_i)$

2. DISTRIB. UNIFORME DISCRETA

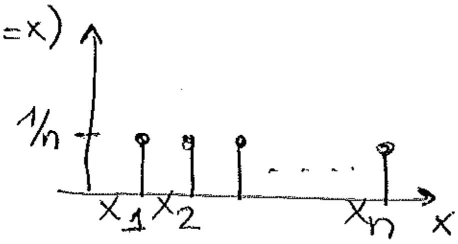
La distrib. uniforme discreta modeliza los fenómenos discretos en los que la masa de probabilidad se reparte ~~equitativamente~~ de manera uniforme entre 2 o más valores (puede ser un nº finito ó ~~numerable~~) NO (*)
yo creo que no ??

Describe el comportamiento de una v.a. discreta que puede tomar n valores distintos con la misma probabilidad, es decir, la masa de probabilidad se reparte por igual ó uniformemente.

Función de cuantía

$$P(\xi = x_i) = \frac{1}{n}, \ \forall i = 1 \dots n$$

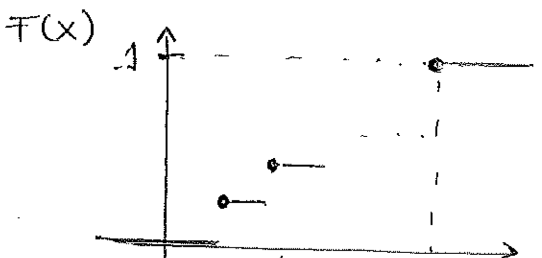
(Está bien def, porque $\frac{1}{n} > 0$ y $\sum_{i=1}^{n} 1/n = n/n = 1$)



Función de distribución

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \\ \frac{1}{n} & x_1 \leq x < x_2 \\ \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{n} & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 1 & x \geq x_n \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{i} \frac{1}{n} = \frac{i}{n}$$



$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq x_1 \\ \frac{i}{n} & x_i \leq x < x_{i+1}, \ \forall i = 1 \dots n-1 \\ 1 & x \geq x_n \end{cases}$$

(*) n ha de ser finito porque $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ (serie divergente)

Características

$$E[\xi] = \sum_{i=1}^{n} x_i P(\xi = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{1}{n} = \overline{x}$$ ← media muestral de los valores probables ?

$$E[\xi^2] = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 P(\xi = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$V[\xi] = E[\xi^2] - (E[\xi])^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{n\overline{x}^2}{n} = ?$$

$$= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$ ← varianza muestral de los valores probables

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \sum x_i^2 - 2\overline{x}\underbrace{\sum x_i}_{n\overline{x}} + n\overline{x}^2 = \sum x_i^2 - \cancel{2n\overline{x}^2} + \cancel{n\overline{x}^2}$$

Función característica

$$\varphi(t) = E[e^{it\xi}] = \sum_j e^{itx_j} P(\xi = x_j) = \sum_j e^{itx_j} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_j e^{itx_j}$$

$\boxed{\text{Nota}}$ En el caso particular de que los valores probables coinciden con los n 1ºˢ nº naturales, entonces: $(x_j = j)$

$$F(x_j) = P(\xi \le j) = \frac{j}{n}$$ ← Func. distrib. empírica de la muestra.

$$E[\xi] = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j = \frac{1}{n}[1 + 2 + \dots + n] = \frac{1}{\cancel{n}} \cdot \frac{\cancel{n}(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

= centro de gravedad de la distrib, $\frac{\text{mín} + \text{máx}}{2}$.

$$V[\xi] = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^2 - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{1}{n}(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{\cancel{n}} \cdot \frac{\cancel{n}(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{2n^2 + 2n + n + 1}{6} - \frac{n^2 + 2n + 1}{4} =$$

$$= \frac{4n^2 + 6n + 2 - 3n^2 - 6n - 3}{12} = \frac{n^2 - 1}{12}$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} e^{itj} = \frac{1}{n}\,\frac{e^{itn} \cdot e^{it} - e^{it}}{e^{it} - 1} = \frac{e^{it}(e^{itn} - 1)}{n(e^{it} - 1)}$$

¿con o sin?

3. DISTRIB. de BERNOULLI ó $B(1,p)$

Esta distribución modeliza los fenómenos de carácter dicotómico, donde sólo existen dos sucesos posibles (o reducibles a dicotómicos) y, por tanto, complementarios.

- La variable sólo toma 2 valores: Éxito / Fracaso
- Las probab. asociadas a E/F son complem, $p+q=1$
- Las probab. son ctes ← no tiene sentido, $n=1$.

Sea:

Éxito → se cumpla la característica A → $P(A)=p$.

Fracaso → no se cumple la caract A ⇒ A^c → $P(A^c)=q=1-p$.

Definimos la v.a. ξ tq:

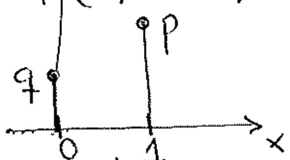
$\xi=1$ si se verifica A, $P(\xi=1)=p$.

$\xi=0$ si no se verifica A, $P(\xi=0)=q=1-p$.

Así definida, la $B(1,p)$ sería un caso particular de la distrib. en dos puntos con valores 0 y 1.

① Función de cuantía

$$P(\xi=x)=p^x\cdot q^{1-x}, \quad x=0 \text{ ó } x=1.$$



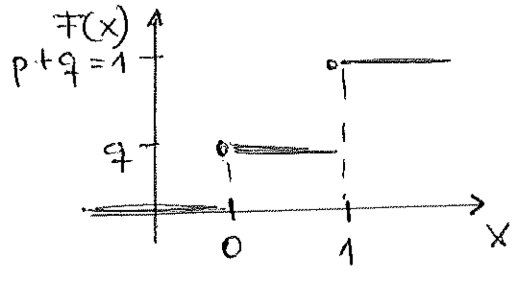
$x=0 \Rightarrow P(\xi=0)=p^0 q^{1-0}=q$.

$x=1 \Rightarrow P(\xi=1)=p^1 q^{1-1}=p$.

(Está bien definida porque $\underbrace{p,q>0}_{\text{prob.}}$ y $p+q=1$).

Función de distribución

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ q & 0\le x<1 \\ 1 & x\ge 1 \end{cases}$$



Características

$$E[\xi] = \sum_i x_i P(\xi = x_i) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$$

$$E[\xi^2] = \sum_i x_i^2 P(\xi = x_i) = 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p = p$$

$$V[\xi] = p - p^2 = p(1-p) = p \cdot q$$

Función característica

$$\varphi(t) = E[e^{it\xi}] = \sum_i e^{itx_i} p(\xi = x_i) =$$

$$= e^{it \cdot 0} \cdot q + e^{it \cdot 1} \cdot p = q + pe^{it} .$$

BUSCAR algo de Historia (Markov??)

4_ DISTRIB. BINOMIAL , $B(n,p)$

Conceptualmente, la distribución binomial modeliza fenómenos aleatorios tales que:

- El experimento consiste en n ensayos.
- Sólo hay dos situaciones posibles (éxito/fracaso).
- Las probabilidades son complementarias $(p+q=1)$ } Dicotóm
- Los ensayos son indep. entre sí.
- Las probab. se mantienen a lo largo de todo el experim.

Este esquema coincide con la distrib. Geométrica y con la Binomial Negativa. Lo que las diferencia es lo que mide la variable aleatoria.

En el caso binomial, la v.a. mide el nº de éxitos en un experimento con n ensayos, sin tener en cuenta el orden de aparición de los mismos.

~~Ds~~

Desde el punto de vista teórico, la $B(n,p)$ puede considerarse como la suma de n var. aleat. indep. con la misma distrib. $B(1,p)$, anteriormente comentada.

$\xi = \xi_1 + \dots + \xi_n$, donde ξ_i v.a.i.i.d. $B(1,p)$
$i = 1 \dots n$

$$\xi_i = \begin{cases} 1 & \text{si se cumple A} \\ 0 & \text{si no se cumple} \end{cases}$$

$\xi = \{0,1,2,\dots n\}$

Función de cuantía, $P(\xi = x)$

$$\boxed{P(\xi = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x}}$$ para $x = 0, 1, 2 \ldots n$

donde $\binom{n}{x} = P_{n}^{x, n-x} = \dfrac{n!}{x!\,(n-x)!}$ ← combinaciones ≠ sin importar el orden

$p^x \equiv$ probab. de éxito x veces $(p \cdot p \cdots p)$

$q^{n-x} \equiv$ al haber n ensayos, si hay x éxitos forzosamente habrá $n-x$ fracasos.

La var. aleatoria está bien definida, ya que:

$p_i = P(\xi = x_i) \geq 0$, $\forall x_i$, por ser producto de nº positivos.

$$\sum_{i=0}^{n} p_i = 1 \rightarrow \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} = q^n + npq^{n-1} + \ldots + np^{n-1}q + p^n =$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{binomio} \\ \text{Newton}}}{=} (p+q)^n = 1^n = 1.$$

Función de distribución, $F(x) = P(\xi \leq x)$

Por definición,

$$F(x) = P(\xi \leq x) = \sum_{x_i = 0}^{x} \binom{n}{x_i} p^{x_i} q^{n-x_i}$$

Características (aprovechando que $B(n,p) = $ Suma $B(1,p)$).

$$E[\xi] = \cancel{\Sigma}\, E[\xi_1 + \ldots + \xi_n] = E[\xi_1] + \ldots + E[\xi_n] =$$

$$= \overbrace{p + \ldots + p}^{n} = np$$

$$V[\xi] = V[\xi_1 + \ldots + \xi_n] \overset{\text{indep}}{=} V[\xi_1] + \ldots + V[\xi_n] =$$

$$= pq + \ldots + pq = npq.$$

Función característica

$$\varphi_\xi(t) = \varphi_{\xi_1+\ldots+\xi_n}(t) = \varphi_{\xi_1}(t)\cdot\varphi_{\xi_2}(t)\cdot\ldots\cdot\varphi_{\xi_n}(t) \overset{\text{indep.}}{=}$$
$$= \prod_{j=1}^{n} \varphi_{\xi_j}(t) \underset{\text{i.d.}}{=} \prod_{j=1}^{n} (q+pe^{it}) = (q+pe^{it})^n$$

Nota: La distrib. Binomial es reproductiva; lógico, ya que se puede escribir como suma de $B(1,p)$.

$$\left.\begin{array}{l} \xi_1 \to B(n_1,p) \\ \xi_2 \to B(n_2,p) \end{array}\right\} \Rightarrow \xi_1+\xi_2 \to B(n_1+n_2,p).$$

indep.

Dem: $\xi_1 = \xi_{11}+\ldots+\xi_{1n_1}$, $\xi_{1i} \to B(1,p)$.
$\xi_2 = \xi_{21}+\ldots+\xi_{2n_2}$, $\xi_{2j} \to B(1,p)$

$\xi_1+\xi_2 = \xi_{11}+\ldots+\xi_{1n_1}+\xi_{21}+\ldots+\xi_{2n_2}$, suma de n_1+n_2 v.a.i.i.d. $B(1,p)$.

$\xi_1+\xi_2 \to B(n_1+n_2,p)$.

A partir de las f. características:

Sea $\eta = \xi_1+\xi_2$, $\varphi_\eta(t) = \varphi_{\xi_1+\xi_2}(t) \overset{\text{indep.}}{=} \varphi_{\xi_1}(t)\,\varphi_{\xi_2}(t) =$
$= (q+pe^{it})^{n_1}\cdot(q+pe^{it})^{n_2} =$
$= (q+pe^{it})^{n_1+n_2} \leftarrow$ f. caract. de una Binom.

Esta propiedad es generalizable al caso de más de dos var. aleat.

5_ DISTRIB. de POISSON.

Conceptualmente, un fenómeno se ~~xxxxx~~ comporta con arreglo a una distrib. de Poisson si:

- mide el nº de ocurrencias de un suceso en el tiempo o en el espacio,
- depende de un parámetro $\lambda = \mu \cdot t$, donde
  $\mu \equiv$ tasa media de ocurrencia, ha de ser cte. ó estable a lo largo de todo el proceso.
  $t \equiv$ amplitud del intervalo temporal o espacial
- la probab. de ocurrencia es proporcional a la amplitud del intervalo temporal/espacial, pero independiente de la localización del mismo.

Ejemplos: nº llamadas centralita, nº siniestros, nº olivos en Jaén, ...

Aunque la distrib. de Poisson tiene sus orígenes como límite de la distrib. Binomial con $n \to \infty$ y $p \to 0$, la naturaleza de los fenómenos tipo Poisson y la de los fenómenos tipo Binomial es muy distinta.

~~En primer lugar~~, la distrib. binomial mide fenómenos dicotómicos, donde resulta equivalente medir el nº de éxitos a medir el nº de fracasos; sin embargo, en la distrib. de Poisson resulta imposible medir el nº de "no ocurrencias". ~~En segund.~~

En ~~segundo lugar~~ definitiva, los fenómenos dicotómicos son experimentables y los de Poisson observables

$\xi \to \mathcal{P}(\lambda)$, $\xi = 0, 1, 2, \ldots$

cada vez menos probables

Función de cuantía

$$P(\xi=x)=\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{x}}{x!}\quad,\ x=0,1,2,\dots$$

Está bien definida, porque:

- $p_i\geq 0,\ \forall i \longrightarrow$ producto y coc. de nº positivos
- $\sum p_i=1 \longrightarrow \sum_{x=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{x}}{x!}=e^{-\lambda}\underbrace{\left(\frac{\lambda^0}{0!}+\frac{\lambda^1}{1!}+\dots\right)}_{e^{\lambda}}=e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=1.$

Función de distribución

$$F(x)=P(\xi\leq x)=\sum_{x_i=0}^{x}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_i}}{x_i!}$$

Función característica

$$\varphi_{\xi}(t)=E[e^{it\xi}]=\sum_{x=0}^{\infty}e^{itx}P(\xi=x)=\sum_{x=0}^{\infty}e^{itx}\cdot\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}=$$

$$=e^{-\lambda}\underbrace{\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^{it})^{x}}{x!}}_{\sum_{x=0}^{\infty}\frac{k^x}{x!}=e^{k}}=e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda e^{it}}=e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

Características

$$E[\xi]=\alpha_1=\frac{1}{i}\left|\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\frac{1}{i}\left|\lambda i e^{it}\cdot e^{\lambda(e^{it}-1)}\right|_{t=0}=$$

$$=\frac{1}{i}\cdot\lambda i\cdot\underbrace{e^{0}}_{1}\cdot\underbrace{e^{\lambda(\overbrace{e^{0}-1}^{0})}}_{1}=\lambda\frac{i}{i}=\lambda.$$

$$E[\xi^2]=\alpha_2=\frac{1}{i^2}\left|\frac{\partial^2\varphi(t)}{\partial t^2}\right|_{t=0}=\frac{1}{i^2}\left|\lambda i^2+\lambda i\cdot\lambda i\right|=$$

$$=\lambda+\lambda^2$$

$$\left[e^{f(x)}\right]'=e^{f(x)}\cdot f'(x)$$

$$f(t)=e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\lambda i e^{it}\cdot e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=\lambda i^2 e^{it}\cdot e^{\lambda(e^{it}-1)}+\lambda i e^{it}\cdot\lambda i e^{it}e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

$$V[\xi] = \mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = E[\xi^2] - (E[\xi])^2 =$$
$$= \lambda + \lambda^2 - (\lambda)^2 = \lambda .$$

La distrib. de Poisson tb. se conoce como la distrib. de los sucesos raros. No se entienda que es difícil encontrar un fenómeno que se comporte según una ley Poisson, más bien al contrario, ya que se utiliza frec. para estudiar fenómenos de espera, en el campo actuarial y financiero. Con lo de "sucesos raros" se quiere decir sucesos que, aun siendo probables, son poco probables que se den un nº repetido alto de veces.

¿Algo de historia?

Nota: la distrib. de Poisson es reproductiva.

$$\text{indep}\left.\begin{array}{l}\xi_1 \longrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1)\\ \xi_2 \longrightarrow \mathcal{P}(\lambda_2)\end{array}\right\} \Rightarrow \xi_1+\xi_2 \longrightarrow \mathcal{P}(\lambda=\lambda_1+\lambda_2).$$

Dem: Con la f. característica

$$\text{Sea } \eta = \xi_1+\xi_2,\quad \varphi_\eta(t) = \varphi_{\xi_1+\xi_2}(t) \overset{\text{indep}}{=} \varphi_{\xi_1}(t)\varphi_{\xi_2}(t) =$$

$$= e^{\lambda_1(e^{it}-1)}\, e^{\lambda_2(e^{it}-1)} =$$

$$= e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^{it}-1)}.$$

6. DISTRIB. POISSON como LÍMITE de la BINOMIAL.

Sea $\xi \rightarrow B(n,p)$ tq $P(\xi=x) = \binom{n}{x}p^x q^{n-x}$ y $E[\xi]=np=\lambda$

Para que $\lim_{n\to\infty} np = \lambda$ será necesario que $p=\frac{\lambda}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

El límite de la f. de cuantía será:

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ p\to 0}} P(\xi=x) = \lim_{\substack{n\to\infty\\ p\to 0}} \binom{n}{x}p^x q^{n-x} = \lim_{\substack{n\to\infty\\ p\to 0}} \frac{n!}{x!(n-x)!}\, p^x(1-p)^{n-x} =$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty\\ \cancel{p\to 0}}} \frac{n!}{x!(n-x)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} =$$

$$= \frac{\lambda^x}{x!}\cdot \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-x+1)}^{x\text{ veces}}}{n^x}}_{\simeq \frac{n^x}{n^x}\to 1} \frac{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^x} =$$

$$= \frac{\lambda^x}{x!} \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = \frac{\lambda^x}{x!} \lim_{n\to\infty}\Bigg[\underbrace{\left(1+\frac{1}{\frac{n}{-\lambda}}\right)^{n/\lambda}}_{\to e}\Bigg]^{-\lambda} =$$

$$= \frac{\lambda^x}{x!}\cdot e^{-\lambda}$$

En la práctica, se utiliza para $p \leq 0.1$ y $\lambda = np < 5$.