# Master en Estadística Aplicada y Estadística para el Sector Público

## Procesos Estocásticos

José Javier Núñez Velázquez

Universidad de Alcalá

INE Instituto Nacional de Estadística

CIFF Centro Internacional de Formación Financiera

2008 2009

CIFF

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

# Características generales de los Procesos Estocásticos

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

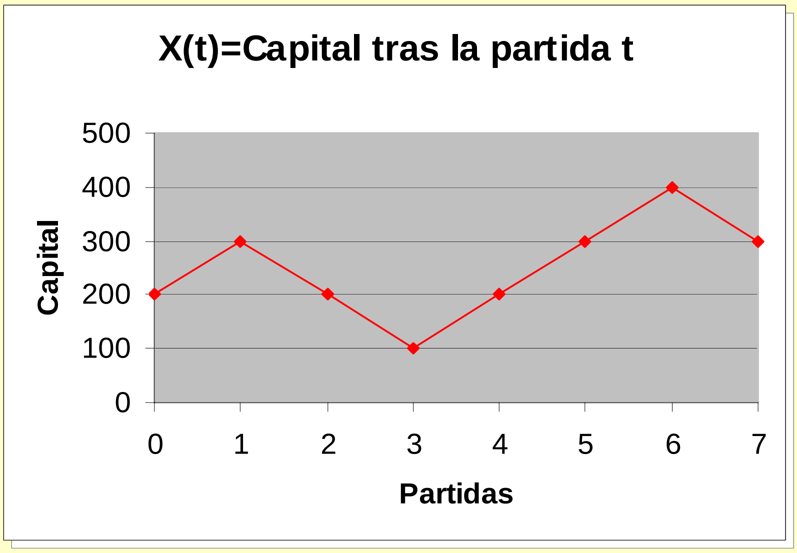
*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

## Cálculo de Probabilidades

Probabilidad
↓
Variable Aleatoria
↓
Variable Aleatoria Multidimensional
↓
Sucesiones de Variables Aleatorias
↓
Función Aleatoria { Proceso Estocástico / Campo Aleatorio

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*




*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

# Problema Clásico de la Ruina

| p | q | z | a | Probabilidad de Ruina | Éxito | Ganancia Media | Duración Media |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,1 | 0,9 | 2 | 5 | 0,999 | 0,001 | -1,993 | 2,492 |
| 0,2 | 0,8 | 2 | 5 | 0,985 | 0,015 | -1,927 | 3,211 |
| 0,25 | 0,75 | 2 | 5 | 0,967 | 0,033 | -1,835 | 3,669 |
| 0,3 | 0,7 | 2 | 5 | 0,935 | 0,065 | -1,674 | 4,185 |
| 0,35 | 0,65 | 2 | 5 | 0,884 | 0,116 | -1,419 | 4,731 |
| 0,4 | 0,6 | 2 | 5 | 0,810 | 0,190 | -1,052 | 5,261 |
| 0,5 | 0,5 | 2 | 5 | 0,600 | 0,400 | 0,000 | 6,000 |
| 0,6 | 0,4 | 2 | 5 | 0,360 | 0,640 | 1,199 | 5,995 |
| 0,7 | 0,3 | 2 | 5 | 0,172 | 0,828 | 2,142 | 5,354 |
| 0,8 | 0,2 | 2 | 5 | 0,062 | 0,938 | 2,692 | 4,487 |
| 0,9 | 0,1 | 2 | 5 | 0,012 | 0,988 | 2,938 | 3,673 |

El capital inicial, en cientos de euros, es z.

El juego termina con la ruina (se pierde z) o con el éxito (se gana a-z).

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

# Procesos Estocásticos

- Definición:

$$\Phi : \ \Omega \times T \longrightarrow \Re$$

$$(w, t) \longrightarrow X_t(w) = \Phi\ (w,t)$$

- Expresión Abreviada:

$$\{\ X(t), t\in\ T\ \} \quad ó \quad \{\ X_t, t\in\ T\ \}$$

- Espacio de Estados (S) y Trayectorias ó funciones muestrales.

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

# Procesos Estocásticos: Clasificación

| | T discreto | T continuo |
|---|---|---|
| S discreto | CADENAS | Cadenas en tiempo continuo |
| S continuo | Procesos en tiempo discreto | PROCESOS en tiempo continuo |

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

# Componentes de un Proceso Estocástico

- Trayectorias:

$$w = w_0 \in \Omega \text{ fijo} \quad \Rightarrow \quad \Phi : T \to \Re$$
$$t \mapsto X_t(w_0)$$

- Secciones transversales:

$$t = t_0 \in T \text{ fijo} \Rightarrow X_{t_0} : \Omega \to \Re$$
$$w \mapsto X_{t_0}(w) = \Phi(w; t_0)$$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

# Construcción Formal

$$\Phi: (\Omega,\vartheta,p) \to (\Re_T,\beta_T,P_T) \quad \begin{cases} \Re_T = \prod_{t\in T} \Re \\ \beta_T = <\{A \subset \Re_T : M \in \beta_n\}> \\ P_T(A) = P_{t_1,t_2,\dots,t_n}(M) \end{cases}$$

Conjuntos cilíndricos de Borel:

$$A = \pi^{-1}_{t_1,t_2,\dots,t_n}(M) = \{x \in \Re_T : (x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)) \in M\}$$

$\Phi$ es medible $\Leftrightarrow$ X(t) es medible, $\forall t \in T$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

# Gran Teorema de Kolmogorov

**Teorema 1 (Kolmogorov).**

La distribución de probabilidad de un proceso estocástico $\{X(t), t\in T\}$ queda determinada mediante las distribuciones finito-dimensionales que lo integran siempre que satisfagan las siguientes condiciones de compatibilidad:

i) *Simetría*:

$F(x_1, x_2,..., x_n; t_1, t_2,..., t_n) = F(x_{i(1)}, x_{i(2)},..., x_{i(n)}; t_{i(1)}, t_{i(2)},..., t_{i(n)})$, donde $\{i(1), i(2),..., i(n)\}$ es una permutación de los índices $\{1, 2,..., n\}$.

ii) *Convergencia a la distribución marginal*:

$$\lim_{x_n \to +\infty} F(x_1, x_2,..., x_n; t_1, t_2,..., t_n) = F(x_1, x_2,..., x_{n-1}; t_1, t_2,..., t_{n-1}) \;, \forall\, n > 1, \forall t_1, t_2,..., t_n \in T$$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

# Características Generales

- Función Media: $\mu(t) = E(X_t)$ , $t\in T$
- Función Varianza: $\sigma^2(t)=E[(X_t-\mu(t))^2]$, $t\in T$
- Núcleo de Covarianza ó Autocovarianza:

$\gamma(r,s)=Cov(X_r,X_s)=E(X_r.X_s)- \mu(r).\mu(s)$, $r,s\in T$

- Función de Autocorrelación:

$$\rho(r, s) = \frac{\gamma(r, s)}{\sigma(r).\sigma(s)}$$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

# Propiedades Generales

**Proposición 1. (Propiedades de las funciones de autocovarianza y autocorrelación)**

Sea $\{X_t, t\in T\}$ un proceso estocástico y sean $\gamma(t_1,t_2)$ su función de autocovarianza y $\rho(t_1,t_2)$ su función de autocorrelación. Entonces:

a) $\gamma(t,t) = \sigma^2(t)$ , $\forall t\in T$.
b) $\gamma(t_1,t_2) = \gamma(t_2,t_1)$ , $\forall t_1, t_2\in T$.
c) $|\gamma(t_1,t_2)| \leq \sigma(t_1).\sigma(t_2)$ , $\forall t_1, t_2\in T$.
d) $\rho(t,t) = 1$ , $\forall t\in T$.
e) $\rho(t_1,t_2) = \rho(t_2,t_1)$ , $\forall t_1, t_2\in T$.
f) $|\rho(t_1,t_2)| \leq 1$ , $\forall t_1, t_2\in T$.

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

# Procesos Estocásticos Estacionarios

- Estrictamente Estacionarios.

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n; t_1,t_2,\ldots,t_n) = F(x_1,x_2,\ldots,x_n; t_1+h,t_2+h,\ldots,t_n+h),$$
$$\forall\ t_1,t_2,\ldots,t_n \in T,\ \forall h\in T,\ \forall n\in N.$$

- Estacionarios de Orden r.

$$\forall n\in N: n\leq r.$$

- Estacionarios de Orden 2.

$$F(x;t) = F(x; t+h)\ ,\ \forall t,h\in T.$$
$$F(x_1,x_2;t_1,t_2) = F(x_1,x_2;t_1+h,t_2+h).$$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

## Procesos Estocásticos Estacionarios de orden 2

**Proposición 2. (Propiedades de primer orden)**

Sea $\{X(t), t\in T\}$ un proceso estacionario de orden 2, entonces:

a) Las variables aleatorias que lo integran son idénticamente distribuidas.

b) La funciones media y varianza del proceso son constantes.

**Proposición 3. (Propiedades de segundo orden)**

Sea $\{X(t), t\in T\}$ un proceso estacionario de orden 2, entonces las distribuciones conjuntas bidimensionales no dependen de los índices concretos de las variables que lo integran, sino de la diferencia entre ellos.

**Corolario**

$$\gamma(t_1,t_2) = C(t_2-t_1); \quad \rho(t_1,t_2) = \frac{\gamma(t_1,t_2)}{\sigma(t_1).\sigma(t_2)} = \frac{C(t_2-t_1)}{\sigma^2} = R(t_2-t_1)$$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

## Procesos Débilmente Estacionarios

- Definición:
  - a) $\mu(t)=\mu, \ \forall t\in T$
  - b) $\gamma(t,t+h)=C(h), \ \forall t,h\in T$
- Consecuencias:

  $\sigma^2(t)=\sigma^2, \ \forall t\in T; \quad \rho(t,t+h)=R(h), \ \forall t,h\in T$
- Proposición 4.

  $C(0) = \sigma^2 \ ; \ R(0) = 1.$

  $C(h) = C(-h) \ ; \ R(h) = R(-h) \ , \ \forall h\in T.$

  $|C(h)| \le C(0) \ ; |R(h)| \le 1 \ , \ \forall h\in T.$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

## Procesos de Incrementos Independientes

- $\{X(t), t\in T\}$ *tiene incrementos independientes* cuando las variables aleatorias:

$$(X(t_1)-X(t_0)), (X(t_2)-X(t_1)), \ldots, (X(t_n)-X(t_{n-1})) ,$$
$$\forall n\in N, \forall t_0,t_1,t_2,\ldots,t_n\in T : t_0<t_1<t_2<\ldots<t_n$$

sean independientes.

- **Proposición 5.**

Sea $\{X(t), t\geq 0\}$ un proceso estocástico con incrementos independientes tal que $X(0)=0$. Entonces:

$$\gamma(t_1,t_2) = \sigma^2(t_1) , \ \forall t_1,t_2\in T : t_1<t_2.$$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

## Procesos de Incrementos Estacionarios

- $\{X(t), t\in T\}$ *tiene incrementos estacionarios* cuando las variables aleatorias:

$$(X(t_1+h)-X(t_1)) \text{ y } (X(t_2+h)-X(t_2)) , \ \forall t_1,t_2,h\in T,$$

tienen la misma distribución.

- Si el proceso $\{X(t), t\geq 0\}$ tiene incrementos independientes estacionarios, puede probarse que:

$$\mu(t) = \mu(0) + [\mu(1)-\mu(0)].t , \ \forall t\geq 0$$
$$\sigma^2(t) = \sigma^2(0) + [\sigma^2(1)- \sigma^2(0)].t , \forall t\geq 0,$$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

## Procesos de Incrementos Ortogonales

- $\{X(t), t\in T\}$ será *de incrementos ortogonales* cuando:

$$E\left[\left(X(t_m)-X(t_h)\right)\cdot\left(X(t_h)-X(t_k)\right)\right]=0\,,\ \forall t_k,t_h,t_m\in T: t_k<t_h<t_m$$

- Si $\{X(t), t\in T\}$ es un proceso estocástico de variables centradas en media, entonces:

$(\{X(t), t\in T\}$ es de incrementos independientes$)\Rightarrow$
$(\{X(t), t\in T\}$ es de incrementos ortogonales$)$

- La implicación es válida para procesos de media constante.

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

## Procesos de Interés General

- Variables Independientes.
- Ortogonales.
- Recuento (Ej.: Poisson).
- Gaussianos o Normales.
- Markov.

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

# TEMA 1:

# CARACTERÍSTICAS GENERALES DE LOS PROCESOS ESTOCÁSTICOS.

**PREPARADO POR:** José Javier Núñez Velázquez.

Prof. Titular de Universidad.

Universidad de Alcalá

## 1. PROCESOS ESTOCÁSTICOS. FUNCIÓN ALEATORIA.

El desarrollo del Cálculo de Probabilidades puede resumirse, en términos generales, partiendo de la fundamentación rigurosa de los conceptos de probabilidad y de variable aleatoria unidimensional, incluyendo el resto de los elementos involucrados (momentos, funciones característica y generatrices, etc.). La generalización natural conduce a las variables aleatorias multidimensionales, a través del espacio probabilístico producto construido sobre $\mathfrak{R}^n$. A continuación, tiene sentido la consideración de las sucesiones de variables aleatorias, admitiendo la posibilidad de incluir un número infinito de las mismas y la problemática derivada de la operación de paso al límite. De esta manera, la evolución lógica conduce a la consideración de funciones aleatorias, definidas sobre un conjunto de índices T que, en general, podrá ser no numerable.

Por otra parte, hasta ahora, el planteamiento podía considerarse estático, ya que el primer intento de introducir elementos dinámicos en el análisis probabilístico conduce a la consideración de las sucesiones de variables aleatorias, considerando el índice de la sucesión como el tiempo considerado de manera discreta. El nuevo planteamiento permitiría la consideración del paso del tiempo de forma continua, lo que, incorporando como caso particular a las sucesiones de variables aleatorias, conducirá al concepto de proceso estocástico. De hecho, es este carácter temporal asociado al conjunto T de índices el rasgo que muchos autores consideran diferencial para hablar de procesos estocásticos, siendo más general el concepto de función aleatoria[1]. Otros autores exigen, además, que los procesos estocásticos presenten una ley condicional común, a partir de las condiciones iniciales, a lo largo de su evolución, como Loeve (1976).

Por su capacidad de servir de modelo a la evolución de magnitudes en el tiempo, los procesos estocásticos constituyen una técnica con aplicaciones muy fructíferas en

[1] Entre ellos, por ejemplo, Gikhman y Skorokhod (1996), quienes además reservan el término *campos aleatorios* para aquellas funciones aleatorias en las que T presenta un carácter espacial.

los más variados campos, entre los que pueden destacarse la Demografía, Control de Inventarios, Seguros, Fenómenos de Espera, Control de Calidad, Economía, Física, etc.

## 1.1. DEFINICIÓN.

En lo que sigue, se supondrá siempre que las variables aleatorias componentes son reales unidimensionales. No obstante, aún cabrían generalizaciones adicionales si se consideran variables aleatorias multidimensionales, lo que llevaría a la definición de procesos estocásticos multidimensionales, ó variables aleatorias definidas en otros espacios como el generado por los números complejos.

En principio, un proceso estocástico es una construcción cuyo propósito es servir de modelo al comportamiento de una variable aleatoria a través del tiempo. Esto provoca, en general, el planteamiento de una variable aleatoria de dimensión infinita no numerable, cuyos aspectos probabilísticos consideraremos más adelante. Así pues, hecha esta aclaración y en el sentido más amplio posible, podemos definir una *función aleatoria* como un conjunto de variables aleatorias afectadas por un índice, que notaremos indistintamente mediante:

$$\{X(t), t\in T\}, \text{ ó como } \{ X_t, t\in T\}.$$

Es decir, para cada t, del conjunto T de índices se tiene una variable aleatoria unidimensional:[2]

$$\begin{aligned} X_t : \Omega &\longrightarrow \Re \\ \omega &\longrightarrow X_t(\omega) = X(\omega,t) \end{aligned}$$

o, como construcción más general:

$$\begin{aligned} \Phi : \Omega x T &\longrightarrow \Re \\ (\omega,t) &\longrightarrow X_t(\omega) = \Phi(\omega,t) \end{aligned}$$

[2] En realidad, la definición rigurosa es más compleja. Aquí, se simplifica la notación del espacio probabilístico de base, que sería ($\Omega$, A,P) y la construcción del espacio probabilístico en que toma sus valores. Para obtener más detalles, puede verse Vélez(1977) ó Laha-Rohatgi (1979).

donde $\Phi(\omega,t)$ indica el valor de la función aleatoria para el suceso $\omega$ en el instante t. En la línea expresada con anterioridad, un proceso estocástico no es más que un caso especial de una función aleatoria, en el que T expresa el tiempo y la ley condicional de probabilidad se mantiene en su evolución. Por ello, nos referiremos preferentemente a los procesos estocásticos, por comodidad.

Al conjunto de los valores de las variables aleatorias que componen el proceso, se le denomina *espacio de estados (S)*, y cada uno de sus elementos será un *estado* del mismo. Por otra parte, cada realización concreta del proceso constituirá una *trayectoria ó función muestral*; es decir, fijando el comportamiento de $\Omega$, se obtendrán las diferentes trayectorias del proceso.

De esta manera, disponemos de una estructura que permite englobar, como casos particulares, los distintos conceptos que se han presentado del Cálculo de Probabilidades, en relación con las variables aleatorias componentes, sin más que elegir adecuadamente el conjunto de índices T. En efecto, sea la función aleatoria $\{X(t), t\in T\}$, entonces:

a) Si $T=\{t_0\}$, se obtiene una variable aleatoria unidimensional $X(t_0)$.
b) Si $T=\{t_1, t_2, ..., t_k\}$, se obtendrá una variable aleatoria k-dimensional $(X(t_1),..., X(t_k))$
c) Si T=N, el resultado es una sucesión de variables aleatorias $\{X(t)\}_{t\in N}$ .

Por otra parte, si tratamos de modelizar el desarrollo de una variable aleatoria a través del tiempo, podemos optar, básicamente, entre dos posibilidades, dependiendo del tratamiento más conveniente en cada situación. Estas opciones son las siguientes:

i) A través de saltos discretos (días, meses, años, etc.) y, en tal caso, $T=N\cup\{0\}$.
ii) De manera continua, siendo $T=[0,+\infty)$, ó bien $T=\Re$, si admitimos análisis retrospectivos desde un instante fijado como origen.

## 1.2.- CLASIFICACIÓN Y CARACTERÍSTICAS GENERALES.

Aunque, por razones históricas, se designan casi todos los casos con el nombre genérico de proceso, se va a efectuar una clasificación dependiendo del carácter que presenten el espacio de estados (S) y el conjunto de índices (T). Para ello, consideraremos que un conjunto es *discreto* cuando su cardinal (número de elementos) es finito ó infinito numerable como, por ejemplo, N; en contraposición, diremos que es *continuo* cuando su cardinal sea infinito no numerable como, por ejemplo, $\Re$ o el intervalo [0,1].

Así pues, un proceso estocástico cuyo espacio de estados es discreto, se denomina una *cadena*. Por otra parte, si el conjunto de índices es discreto, se hablará de procesos *en tiempo discreto*, mientras que, si T es continuo, entonces se tendrán procesos *en tiempo continuo*. Se puede resumir toda esta casuística mediante el siguiente cuadro:

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Clasificación<br>Según S y T</td><td colspan="2">T</td></tr>
<tr><td>Discreto</td><td>Continuo</td></tr>
<tr><td rowspan="2">S</td><td>Discreto</td><td>CADENAS</td><td>CADENAS EN TIEMPO CONTINUO</td></tr>
<tr><td>Continuo</td><td>PROCESOS EN TIEMPO DISCRETO</td><td>PROCESOS EN TIEMPO CONTINUO</td></tr>
</table>

De esta manera, las cadenas y procesos en tiempo discreto serán sucesiones de variables aleatorias cuando el conjunto de índices sea N, lo que ocurrirá casi siempre en este caso. Por otra parte, las cadenas estarán compuestas por variables aleatorias discretas; además, en este caso, si S es un conjunto finito, se habla de *cadenas finitas*.

A continuación, pasemos a analizar el efecto que produce el fijar cada componente de un proceso estocástico. En efecto, de la definición efectuada, puede deducirse la presencia de dos componentes: por una parte, el índice del conjunto T y, por otra parte, la aleatoria correspondiente al espacio probabilístico. Así:

a) Si fijamos la componente aleatoria:

$$w = w_0 \in \Omega \text{ fijo } \Rightarrow \quad \begin{aligned} \Phi : T &\rightarrow \Re \\ t &\mapsto X_t(w_0) \end{aligned}$$

e indica la trayectoria temporal del proceso asociada al suceso $w_0$, que sólo depende de t; formalmente, es una función real de variable real, pues T será un subconjunto de $\Re$. Por ello, a las diferentes funciones que aparecen cuando se fija el suceso en el espacio probabilístico, se les denomina *trayectorias*.

Obsérvese como, si T es un conjunto discreto, las trayectorias serán sucesiones reales mientras que, cuando T es continuo, las trayectorias serán funciones reales.

b) Si fijamos la componente temporal o relativa al conjunto T:

$$t = t_0 \in T \text{ fijo} \Rightarrow \begin{aligned} X_{t_0} : \Omega &\rightarrow \Re \\ w &\mapsto X_{t_0}(w) = X(w; t_0) \end{aligned}$$

y, por tanto, obtenemos una variable aleatoria unidimensional, que refleja el comportamiento del proceso estocástico en el instante temporal $t_0$. Así, las secciones transversales de un proceso corresponderán a variables aleatorias discretas o continuas, según sea el espacio de estados.

## 2.- DISTRIBUCIONES ASOCIADAS A UN PROCESO.

Como ya se ha expuesto, en general, un proceso estocástico ó, en general, una función aleatoria, $\{X(t),\ t \in T\}$ estará compuesto por un número infinito de variables aleatorias. Este hecho genera importantes dificultades en la construcción del espacio probabilístico real asociado, cuya construcción se describe a continuación[3].

---

[3] La construcción rigurosa del espacio probabilístico, así como la demostración del Teorema de Kolmogorov, pueden verse en Laha-Rohatgi (1979) o en Vélez (1977), por ejemplo.

Sea $(\Omega,\vartheta,p)$ el espacio probabilístico común que sirve de referencia a todas las variables aleatorias que integran $\{X(t),\ t\in T\}$. Entonces, la función aleatoria ó el proceso estocástico pueden considerarse como una aplicación global:

$$\Phi: (\Omega,\vartheta,p) \rightarrow (\Re_T,\beta_T,P_T),$$

donde $\Re_T = \prod_{t\in T}\Re$. Ahora bien, sea $x\in\Re_T$, y sea $\{t_1,t_2,...,t_n\}$ un subconjunto finito de T. Entonces, consideremos la siguiente proyección de x sobre $\Re^n$:

$$\pi_{t_1,t_2,...,t_n}(x)=\left(x(t_1),x(t_2),...,x(t_n)\right)\in\Re^n .$$

En este caso, un subconjunto A de $\Re_T$ se denomina *conjunto cilíndrico* si existe un subconjunto finito no vacío $\{t_1,t_2,...,t_n\}$ de T y un subconjunto M de $\Re^n$, tales que:

$$A=\pi^{-1}_{t_1,t_2,...,t_n}(M)=\left\{x\in\Re_T : \left(x(t_1),x(t_2),...,x(t_n)\right)\in M\right\}$$

y, si M pertenece a la $\sigma$-álgebra de Borel $\beta_n$, entonces se dice que A es un *conjunto cilíndrico de Borel* de $\Re_T$. De esta manera, el $\sigma$-álgebra generada por todos los conjuntos cilíndricos de Borel de $\Re_T$ será el *$\sigma$-álgebra de conjuntos de Borel* $(\beta_T)$de $\Re_T$. La medida de probabilidad $(P_T)$ vendrá, evidentemente, definida por la expresión:

$$P_T(A)=P_{t_1,t_2,...,t_n}(M)$$

Por otra parte, la función aleatoria $\Phi$ será medible si y sólo si cada una de las variables aleatorias componentes es medible.

Así pues, la función aleatoria puede manejarse a través de subconjuntos finitos de estas variables aleatorias lo que, dada la generalidad subyacente en la definición, resultará muy útil en la práctica. Sin embargo, se plantea el problema de si, efectivamente, estos subconjuntos finitos representarán al proceso completo. En 1933, Kolmogorov demostró que así es, imponiendo condiciones muy generales. La importancia de este resultado es tal que suele conocerse como *Gran Teorema de Kolmogorov*, y es el que se enuncia a continuación. Previamente, se incluye la notación correspondiente para la función de distribución de las variables aleatorias que integran el proceso estocástico ó la función aleatoria.

La función de distribución de una variable aleatoria unidimensional del proceso se notará de las siguientes maneras, que se emplearán indistintamente:

$$F(x; t) = P(X(t) \leq x) \quad \text{ó} \quad F_t(x) = P(X_t \leq x)\ ,\ \ \forall t \in T.$$

En el caso de una variable aleatoria multidimensional, se utilizarán las siguientes notaciones:

$$\left.\begin{array}{l} F_{t_1, t_2, \ldots, t_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_{t_1} \leq x_1, \ldots, X_{t_n} \leq x_n) \\ F(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) = P(X(t_1) \leq x_1, \ldots, X(t_n) \leq x_n) \end{array}\right\} \ \forall\ t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$$

En estas condiciones:

**Teorema 1 (Kolmogorov).**

La distribución de probabilidad de un proceso estocástico $\{X(t),\ t\in T\}$ queda determinada mediante las distribuciones finito-dimensionales que lo integran siempre que satisfagan las siguientes condiciones de compatibilidad:

i) *Simetría*:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) = F(x_{i(1)}, x_{i(2)}, \ldots, x_{i(n)}; t_{i(1)}, t_{i(2)}, \ldots, t_{i(n)}),$$

donde $\{i(1), i(2), \ldots, i(n)\}$ es una permutación de los índices $\{1, 2, \ldots, n\}$.

ii) *Convergencia a la distribución marginal*:

$$\lim_{x_n \to +\infty} F(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) = F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}; t_1, t_2, \ldots, t_{n-1})\ ,\ \forall\, n > 1, \forall t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$$

Así pues, se deduce que para estudiar un proceso estocástico, bastará con conocer la distribución de probabilidad de los subconjuntos finitos de variables aleatorias:

$$(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)),\ \ \forall n \in N, \forall t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$$

siendo más interesantes, por su simplicidad, los casos que presentan menor dimensión. En los casos multidimensionales, las distribuciones de probabilidad vendrán determinadas a través de sus funciones de distribución conjuntas, o bien mediante sus distribuciones marginales y condicionadas, aunque también se puede trabajar a través de las correspondientes funciones características.

En la práctica, las herramientas más útiles serán las distribuciones de las variables aleatorias unidimensionales y bidimensionales. Por ello, a continuación, se estudiarán estos casos con mayor detenimiento.

## 2.1. DISTRIBUCIONES DE PRIMER ORDEN.

Corresponden, como ya se ha explicado, a las secciones transversales del proceso estocástico. Así pues, su función de distribución vendrá dada por:

$$F(x;t) = F_t(x) = P(X_t \leq x) \ , \ \ \forall t \in T.$$

Las características más relevantes son la media y la varianza que permiten obtener información muy valiosa. La dependencia de las variables aleatorias del índice t, genera en el proceso funciones dependientes de este índice para dichas características.

Se denomina *función media del proceso* a la definida por la esperanza matemática de las variables aleatorias que lo integran. Es decir:

$$\mu(t) = E(X_t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.dF_t(x) \ , \ \ \forall t \in T$$

Análogamente, se define la *función varianza del proceso* como sigue:

$$\sigma^2(t) = Var(X_t) = \mu_2(t) = E[(X_t - \mu(t))^2] = E(X_t^2) - \mu^2(t) \ , \ \ \forall t \in T.$$

A partir de las definiciones anteriores, pueden desarrollarse otras ligadas a aspectos conocidos de las variables aleatorias. Entre ellas, puede destacarse, por ejemplo, la *función desviación típica del proceso*, que se define como es usual:

$$\sigma(t) = \sqrt{\sigma^2(t)} \ , \ \ \forall t \in T$$

## 2.2. DISTRIBUCIONES DE SEGUNDO ORDEN.

Nos ocupamos, ahora, de las distribuciones bidimensionales generadas por el proceso, que permiten incluir el análisis de la dependencia existente a través de las distribuciones condicionadas. Las funciones de distribución conjuntas serán:

$$F(x_1, x_2; t_1, t_2) = F_{t_1, t_2}(x_1, x_2) = P(X_{t_1} \leq x_1, X_{t_2} \leq x_2)\,,\ \forall t_1, t_2 \in T$$

En este caso, aparte de las características marginales ya recogidas entre las de primer orden, destacan la covarianza y el coeficiente de correlación lineal, que también generan funciones definidas sobre el proceso, aunque ahora serán bidimensionales.

Se define el *núcleo de covarianza ó función de autocovarianza* del proceso, de la siguiente manera:

$$\gamma(t_1, t_2) = \mathrm{Cov}\,(X_{t_1}, X_{t_2}) = E\left|(X_{t_1} - \mu(t_1)).(X_{t_2} - \mu(t_2))\right| = E(X_{t_1}.X_{t_2}) - \mu(t_1).\mu(t_2)\,,\ \forall t_1, t_2 \in T\,.$$

Por otra parte, se definirá la *función de correlación lineal o de autocorrelación* del proceso como sigue:

$$\rho\,(t_1, t_2) = \frac{\gamma\,(t_1, t_2)}{\sigma\,(t_1).\sigma\,(t_2)}\ ,\quad \forall t_1, t_2 \in T.$$

Las propiedades de la covarianza y del coeficiente de correlación lineal permiten establecer propiedades operativas para estas últimas funciones definidas. Para su exposición, se agrupan en el resultado siguiente.

**Proposición 1. (Propiedades de las funciones de autocovarianza y autocorrelación)**

Sea $\{X_t,\ t\in T\}$ un proceso estocástico y sean $\gamma(t_1,t_2)$ su función de autocovarianza y $\rho(t_1,t_2)$ su función de autocorrelación. Entonces:

a) $\gamma(t,t) = \sigma^2(t)\ ,\ \forall t\in T.$

b) $\gamma(t_1,t_2) = \gamma(t_2,t_1)\ ,\ \forall t_1, t_2\in T.$

c) $\left|\gamma(t_1,t_2)\right| \leq \sigma(t_1).\sigma(t_2)\ ,\ \forall t_1, t_2\in T.$

d) $\rho(t,t) = 1$ , $\forall t\in T$.

e) $\rho(t_1,t_2) = \rho(t_2,t_1)$ , $\forall t_1, t_2\in T$.

f) $|\rho(t_1,t_2)| \leq 1$ , $\forall t_1, t_2\in T$.

Demostración.

a) $\gamma(t,t) = Cov(X_t, X_t) = E(X_t.X_t) - \mu(t).\mu(t) = E(X_t^2) - \mu^2(t) = \sigma^2(t)$ , $\forall t\in T$.

b) $\gamma(t_1,t_2) = E(X_{t_1}.X_{t_2}) - \mu(t_1).\mu(t_2) = E(X_{t_2}.X_{t_1}) - \mu(t_2).\mu(t_1) = \gamma(t_2,t_1)$ , $\forall t_1, t_2 \in T$.

c) Si $\rho(t_1,t_2)$ es el coeficiente de correlación lineal entre las correspondientes variables aleatorias, entonces su cuadrado es el coeficiente de determinación, que está siempre comprendido entre 0 y 1[4]. Por tanto:

$$\rho^2(t_1,t_2) = \frac{\gamma^2(t_1,t_2)}{\sigma^2(t_1).\sigma^2(t_2)} \leq 1 \;\Rightarrow\; \gamma^2(t_1,t_2) \leq \sigma^2(t_1).\sigma^2(t_2) \;\Rightarrow\; -\sigma(t_1).\sigma(t_2) \leq \gamma(t_1,t_2) \leq \sigma(t_1).\sigma(t_2) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\gamma(t_1,t_2)| \leq \sigma(t_1).\sigma(t_2) \;,\; \forall t_1, t_2 \in T.$$

d) $$\rho(t,t) = \frac{\gamma(t,t)}{\sigma(t).\sigma(t)} = \frac{\sigma^2(t)}{\sigma^2(t)} = 1,\; \forall t \in T.$$

e) $$\rho(t_1,t_2) = \frac{\gamma(t_1,t_2)}{\sigma(t_1).\sigma(t_2)} = \frac{\gamma(t_2,t_1)}{\sigma(t_2).\sigma(t_1)} = \rho(t_2,t_1),\; \forall t_1,t_2 \in T.$$

f) $$\rho^2(t_1,t_2) \leq 1 \;\Rightarrow\; -1 \leq \rho(t_1,t_2) \leq 1 \;\Rightarrow\; |\rho(t_1,t_2)| \leq 1 \;,\; \forall t_1,t_2 \in T.$$

c.q.d.

## 3. PROCESOS ESTOCÁSTICOS ESTACIONARIOS.

De manera intuitiva, un proceso estacionario es aquel cuya distribución no cambia con el transcurso del tiempo. Esta propiedad permite que su utilización resulte mucho más sencilla con respecto a la definición más general y, aunque la restricción introducida es relativamente fuerte, se encuentran frecuentemente en la práctica. Un ejemplo clásico sería el de la evolución de una onda en el tiempo.

---

[4] De manera más rigurosa, puede justificarse utilizando la desigualdad de Schwarz para las variables centradas en media. Puede verse, por ejemplo, en Karlin & Taylor (1975).

Para conseguir una definición más formal del concepto, recurrimos a una restricción bastante natural del conjunto de índices (T) del proceso. Así pues, se dirá que un conjunto de índices T es *lineal* si y sólo si:

$$t, h \in T \Rightarrow (t+h) \in T.$$

En lo sucesivo, supondremos que los conjuntos de índices son lineales, lo que incluye todos los casos más habituales en la práctica, que sirven como descripción del tiempo.

Por tanto, un proceso estocástico $\{X(t), t \in T\}$, con conjunto lineal de índices, será *estacionario en sentido estricto* ó *estrictamente estacionario* si la distribución de probabilidad de cualquier conjunto finito de variables $(X(t_1), X(t_2),..., X(t_n))$ no cambia si se realiza un cambio de origen en los índices que le afectan, es decir $(X(t_1+h), X(t_2+h), ..., X(t_n+h))$, lo que provoca un desplazamiento temporal igual en todas las variables consideradas. De manera más formal, se dirá que el proceso estocástico es *estrictamente estacionario* si y sólo si:

$$F(x_1,x_2,...,x_n; t_1,t_2,...,t_n) = F(x_1,x_2,...,x_n; t_1+h,t_2+h,...,t_n+h),$$
$$\forall\ t_1,t_2,...,t_n \in T,\ \forall h \in T,\ \forall n \in N.$$

Puede observarse cómo la definición anterior exige la satisfacción de muchas condiciones para que un proceso sea estrictamente estacionario. Por esto, se puede rebajar el nivel de exigencia para plantear definiciones menos restrictivas. En este sentido, se dirá que el proceso $\{X(t), t \in T\}$ es *estacionario de orden r* ($r \in N$) cuando se cumplen las condiciones antes requeridas, pero sólo hasta llegar a las distribuciones de orden r. Es decir, si y sólo si:

$$F(x_1,x_2,...,x_n; t_1,t_2,...,t_n) = F(x_1,x_2,...,x_n; t_1+h,t_2+h,...,t_n+h),$$
$$\forall\ t_1,t_2,...,t_n \in T,\ \forall h \in T,\ \forall n \in N: n \leq r.$$

Entre los procesos estocásticos estacionarios, son de particular interés práctico los de orden 2 (r=2). Así, un proceso $\{X(t), t \in T\}$ será *estacionario de orden 2,* cuando se verifiquen las siguientes condiciones:

a) $F(x;t) = F(x; t+h)$ , $\forall t,h\in T$.
b) $F(x_1,x_2;t_1,t_2) = F(x_1,x_2;t_1+h,t_2+h)$.

Así pues, resulta evidente que cualquier proceso estrictamente estacionario será también estacionario de cualquier orden r y, a su vez, cada proceso estacionario de un orden determinado lo será también si se considera un orden inferior. Por supuesto, el recíproco de estas implicaciones no será cierto, en general.

A continuación, analizaremos las consecuencias de estas definiciones sobre las distribuciones de primer y segundo orden. Para ello, supondremos que el proceso estocástico $\{X(t), t\in T\}$ es estacionario de orden 2, con lo que las consecuencias que se establezcan serán válidas también para procesos estrictamente estacionarios, así como para procesos estacionarios de orden superior.

**Proposición 2.(Propiedades de primer orden de los procesos estacionarios de orden 2)**[5]

Sea $\{X(t), t\in T\}$ un proceso estacionario de orden 2, entonces:

a) Las variables aleatorias que lo integran son idénticamente distribuidas.
b) La funciones media y varianza del proceso son constantes.

Demostración.

a) Puesto que el proceso es estacionario de segundo orden, se tiene que:

$$F(x;t) = F(x;t+h),\ \ \forall t,h\in T.$$

Sea ahora un índice cualquiera fijado $t_0\in T$, entonces:

$$\forall h\in T,\ \ t = t_0 + h \in T \quad \Rightarrow F(x;t) = F(x; t_0+h) = F(x; t_0)\ ,\ \forall t\in T.$$

Por lo tanto, todas las distribuciones son iguales.

b) Al ser todas las distribuciones iguales, sus momentos también lo serán. En particular:

$$\mu(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x.dF(x;t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.dF(x;t_0) = E[X(t_0)] = \mu(t_0) = \mu\ \ ,\forall t\in T$$

---

[5] En este resultado, la imposición de que el proceso sea estacionario de orden 2 es muy fuerte. Bastaría, en realidad, con que el proceso fuese estacionario de orden 1.

$\sigma^2(t) = Var[X(t)] = Var[X(t_0)] = \sigma^2(t_0) = \sigma^2$ , $\forall t\in T$.

c.q.d.

**Proposición 3. (Propiedades de segundo orden de los procesos estacionarios de orden 2)**

Sea $\{X(t), t\in T\}$ un proceso estacionario de orden 2, entonces las distribuciones conjuntas bidimensionales no dependen de los índices concretos de las variables que lo integran, sino de la diferencia entre ellos.

Demostración.

Puesto que el proceso es estacionario de orden 2, se tiene que:

$$F(x_1,x_2;t_1,t_2) = F(x_1,x_2;t_1+h,t_2+h) \ , \forall t_1,t_2,h\in T$$

Supongamos que $t_1<t_2$ y sea $t_0\in T$ fijado. Entonces, basta con elegir $h= t_0 - t_1$:

$$F(x_1,x_2;t_1,t_2) = F(x_1,x_2;t_1+h,t_2+h) = F(x_1,x_2;t_0,t_0+t_2-t_1),\ \forall t_1,t_2\in T,$$

y, puesto que $t_0$ es fijo, se tiene que la función de distribución sólo depende de $(t_2-t_1)$.

c.q.d.

Como consecuencia, esta característica se traslada también a los argumentos de las funciones de autocovarianza y autocorrelación. En efecto:

$$\gamma(t_1,t_2) = Cov[X(t_1), X(t_2)] = Cov[X(t_0), X(t_0+t_2-t_1)] = \gamma(t_0, t_0+t_2-t_1) = C(t_2-t_1),$$

$$\forall t_1,t_2\in T : t_2>t_1$$

Análogamente:

$$\rho(t_1,t_2) = \frac{\gamma(t_1,t_2)}{\sigma(t_1).\sigma(t_2)} = \frac{C(t_2 - t_1)}{\sigma^2} = R(t_2 - t_1)\,, \quad \forall t_1,t_2\in T : t_2>t_1$$

Una vez examinadas las consecuencias que los procesos estacionarios generan en las funciones asociadas, puede observarse como son estas últimas, precisamente, las que dotan de una mayor simplicidad a la operativa con estos procesos. Por ello, siguiendo en la línea de debilitar las definiciones expuestas, pasaremos a definir otro tipo de estacionariedad, basada en estas propiedades.

Así, se dirá que el proceso estocástico $\{X(t), t\in T\}$ es *débilmente estacionario* si verifica las siguientes condiciones:

a) $\mu(t) = \mu$ , $\forall t \in T$.

b) $\gamma(t,t+h) = C(h)$ , $\forall t,h \in T$.[6]

Con la definición anterior del proceso débilmente estacionario, se deduce que la función varianza es constante y que la función de autocorrelación verifica una propiedad análoga a la de la función de autocovarianza. En efecto:

$$\sigma^2(t) = \mathrm{Var}\,[X(t)] = \gamma(t,t) = C(0)\ ,\ \forall t \in T.\ \Rightarrow\ \sigma^2(t) \text{ es constante.}$$

$$\rho(t,t+h) = \frac{\gamma(t,t+h)}{\sigma(t).\sigma(t+h)} = \frac{C(h)}{\sigma^2} = R(h)\ ,\quad \forall t,h \in T$$

Con esta última definición, puede completarse la cadena de implicaciones que se había iniciado con los sucesivos conceptos relacionados con la estacionariedad. En efecto, cualquier proceso estacionario de orden 2 será también débilmente estacionario, sin que el recíproco sea cierto en general.

Por otra parte, un proceso estocástico se denomina *evolutivo* cuando no es estacionario, en ninguna de sus modalidades, de manera que su distribución de probabilidades se modificará con el transcurso del tiempo.

Finalmente, se analizará la expresión que adoptan las propiedades de las funciones de autocovarianza y de autocorrelación, cuando un proceso es estacionario, en alguno de los sentidos expuestos, excluyendo, obviamente, a los procesos estacionarios de orden 1, cuyas características no afectan a estas funciones. Por lo tanto, se supondrá que el proceso es débilmente estacionario.

**Proposición 4. (Propiedades de las funciones de autocovarianza y autocorrelación de los procesos débilmente estacionarios)**

Sea $\{X(t), t \in T\}$ un proceso estocástico débilmente estacionario. Entonces:

a) $C(0) = \sigma^2$ ; $R(0) = 1$.

b) $C(h) = C(-h)$ ; $R(h) = R(-h)$ , $\forall h \in T$.

---

6 Esta es una forma equivalente de expresar que la función de autocovarianza sólo depende del lapso existente entre los índices de las variables que intervienen. En efecto, basta tomar $t=t_1$ y $h=t_2-t_1$.

c) $|C(h)| \leq C(0)$ ; $|R(h)| \leq 1$ , $\forall h \in T$.

Demostración.

Es trivial a partir de la Proposición 1.

c.q.d.

## 4. PROCESOS DE INCREMENTOS ORTOGONALES E INDEPENDIENTES.

En la aplicación práctica de los procesos estocásticos, tiene gran importancia el comportamiento de los incrementos de las variables que los componen. En este sentido, si se tiene un proceso estocástico $\{X(t), t \in T\}$, sus incrementos vienen determinados por las variables aleatorias:

$$(X(t_k)-X(t_h)),\ \forall t_k,t_h \in T : t_k > t_h$$

Entre ellos, los que tienen más repercusión son aquellos en los que los incrementos son independientes ó estacionarios, que se presentan a continuación.

### 4.1. PROCESOS ESTOCÁSTICOS DE INCREMENTOS INDEPENDIENTES.

A diferencia de los anteriores, los procesos con incrementos independientes exigen que la propiedad de independencia afecte a los sucesivos incrementos de cada conjunto finito de variables. Así, se dirá que un proceso estocástico $\{X(t), t \in T\}$ *tiene incrementos independientes* cuando las variables aleatorias:

$$(X(t_1)-X(t_0)),\ (X(t_2)-X(t_1)),\ \ldots,\ (X(t_n)-X(t_{n-1}))\ ,\ \forall n \in N,\ \forall t_0,t_1,t_2,\ldots,t_n \in T : t_0<t_1<t_2<\ldots<t_n$$

sean independientes. Este tipo de procesos estocásticos juega un papel primordial en todos aquellos que son de tipo acumulativo, como los de recuento, que van registrando el número de sucesos de cierto tipo que se producen, conforme el tiempo evoluciona; así pues, esta propiedad expresaría que, aunque las variables que integran el proceso no son, obviamente, independientes, sí lo son el número de sucesos ocurridos durante diferentes períodos de tiempo, siempre que éstos no se solapen.

Si, en lugar de lo anterior, los incrementos son estacionarios, en el sentido de que tienen la misma distribución:

$$(X(t_1+h)-X(t_1)) \text{ y } (X(t_2+h)-X(t_2)), \ \forall t_1,t_2,h\in T,$$

entonces se dice que el proceso *tiene incrementos estacionarios*. Obviamente, si el proceso posee, además, incrementos independientes, se dirá que *tiene incrementos independientes estacionarios*.

Una propiedad interesante de este tipo de procesos es la que se demuestra a continuación.

**Proposición 5.**

Sea $\{X(t), t\geq 0\}$ un proceso estocástico con incrementos independientes tal que $X(0)=0$. Entonces:

$$\gamma(t_1,t_2) = \sigma^2(t_1), \ \forall t_1,t_2\in T : t_1<t_2.$$

Demostración.

Como el proceso tiene incrementos independientes y $0\in T$, se tiene que las variables aleatorias $X(t_1)-X(0)$ y $X(t_2)-X(t_1)$ son independientes. Por lo tanto:

$$\gamma(t_1,t_2) = Cov[X(t_1),X(t_2)] = Cov[X(t_1)-X(0), X(t_2)-X(t_1)+X(t_1)] =$$

$$= Cov[X(t_1)-X(0), X(t_2)-X(t_1)] + Cov[X(t_1), X(t_1)] =$$

$$= 0 + \gamma(t_1,t_1) = \sigma^2(t_1), \ \forall t_1,t_2\in T : t_1<t_2.$$

c.q.d.

Por otra parte, si el proceso $\{X(t), t\geq 0\}$ tiene incrementos independientes estacionarios, puede probarse que:[7]

$$\mu(t) = \mu(0) + [\mu(1)-\mu(0)].t, \ \forall t\geq 0$$

$$\sigma^2(t) = \sigma^2(0) + [\sigma^2(1)- \sigma^2(0)].t, \ \forall t\geq 0,$$

[7] Puede verse en Karlin & Taylor (1975).

resultado que sigue siendo válido si $T=N\cup\{0\}$.

## 4.2. PROCESOS ESTOCÁSTICOS DE INCREMENTOS ORTOGONALES.

Seguidamente, se presenta un tipo de procesos cuya propiedad sobre los incrementos le hace más general que los de incrementos independientes.

Así, un proceso estocástico $\{X(t),\ t\in T\}$ será *de incrementos ortogonales* cuando:

$$E\left[\left(X(t_m)-X(t_h)\right)\cdot\left(X(t_h)-X(t_k)\right)\right]=0\,,\ \forall t_k,t_h,t_m\in T: t_k<t_h<t_m$$

Evidentemente, un proceso estocástico de variables centradas en media que sea de incrementos independientes, también presentará incrementos ortogonales, aunque el recíproco no es cierto. Esta implicación se mantiene en el caso de que el proceso no esté centrado en media, pero su función media sea constante.

## BIBLIOGRAFÍA.


DOOB, J.L. (1953). *Stochastic Processes.* Ed. J. Wiley.

GIKHMAN, I.I.; SKOROKHOD, A.V. (1996). *Introduction to the theory of random processes.* Ed. Dover.

KARLIN, S.; TAYLOR, H.M. (1975). *A first course in Stochastic Processes.* Ed. Academic Press.

LAHA, R.G.; ROHATGI, V.K. (1979). *Probability theory.* Ed. John Wiley & Sons.

LOEVE, M. (1976). *Teoría de la Probabilidad.* Ed. Tecnos.

LÓPEZ CACHERO, M.; LÓPEZ DE LA MANZANARA, J. (1996). *Estadística para Actuarios.* Ed. Fundación MAPFRE Estudios.

PARZEN, E. (1972). *Procesos Estocásticos.* Ed. Paraninfo.

VÉLEZ, R. (1977). *Procesos Estocásticos.* UNED.

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

# Cadenas de Markov Regulares

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

## Procesos de Markov

Un proceso estocástico $\{X(t), t\in T\}$ es de Markov cuando:

$$F_{t_n}(x_n/X(t_1)=x_1,\ldots,X(t_{n-1})=x_{n-1}) = F_{t_n}(x_n/X(t_{n-1})=x_{n-1}),\ \forall t_1,t_2,\ldots,t_n\in T: t_1<t_2<\ldots<t_n,\ \forall n\in N.$$

• Consecuencias:
- Es un proceso cuyas variables aleatorias son dependientes.
- La dependencia exhibida implica que la ley de probabilidad en el futuro sólo depende del estado en que se encuentra y no de cómo llegó hasta el mismo. (Dependencia markoviana)

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

# Procesos de Markov: Clasificación

| | T discreto | T continuo |
|---|---|---|
| S discreto | CADENAS DE MARKOV | Cadenas de Markov en tiempo continuo |
| S continuo | Procesos de Markov en tiempo discreto | Procesos de Markov en tiempo continuo |

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

# Cadenas de Markov

- Sucesiones de variables aleatorias que son dependientes, en el sentido de Markov.
- Definición:

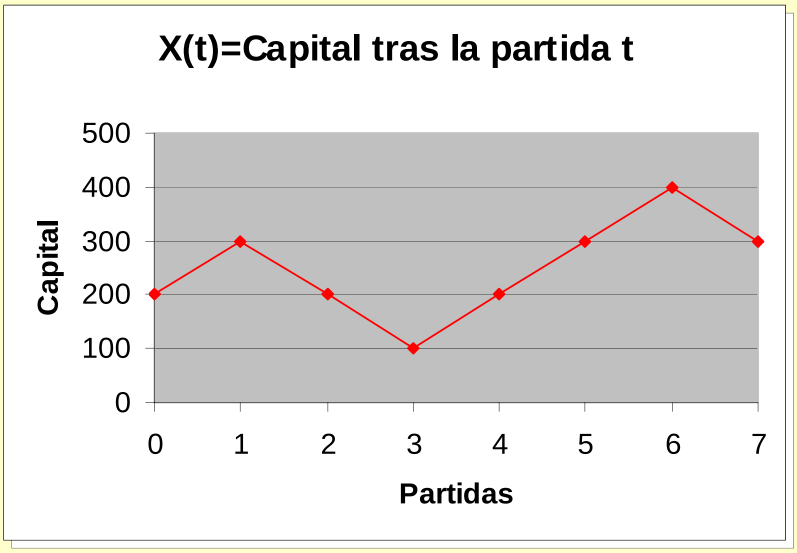
$$P[X_{t_n}=i_n \,/\, X_{t_1}=i_1, X_{t_2}=i_2, \ldots, X_{t_{(n-1)}}=i_{n-1}] = P[X_{t_n}=i_n \,/\, X_{t_{(n-1)}}=i_{n-1}],$$
$$\forall t_1<t_2<\ldots<t_n \in T,\ \forall i_1,i_2,\ldots,i_n \in S,\ \forall n \in N$$

- Cadenas Finitas:

$\{ X_t, t \in T \}$ , cuando S es finito.

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*




*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

# Distribución de la Cadena

• Primer orden: **Vector de estados** en t

$V_t = (p_i(t),\ i\in S),\ \forall t\in T:\ \ p_i(t) = P(X_t=i),\ \forall i\in S,\ \forall t\in T.$

• Segundo orden:

$$P(X_m=i,\ X_n=j) = P(X_n=j\ /\ X_m=i).P(X_m=i) = P(X_n=j\ /\ X_m=i).p_i(m),$$
$$\forall i,j\in S,\ \forall m,n\in T: m<n,$$

• Orden superior:

$$P(X_{t_1}=i_1, X_{t_2}=i_2,\ldots,X_{t_n}=i_n) = P(X_{t_n}=i_n/X_{t_{n-1}}=i_{n-1},\ldots,X_{t_1}=i_1)\ldots.P(X_{t_2}=i_2/X_{t_1}=i_1).P(X_{t_1}=i_1) =$$
$$= P(X_{t_n}=i_n/X_{t_{n-1}}=i_{n-1})\ldots..P(X_{t_2}=i_2/X_{t_1}=i_1).P(X_{t_1}=i_1),$$
$$\forall i_1,i_2,\ldots,i_n\in S,\ \forall t_1,t_2,\ldots,t_n\in T: t_1<t_2<\ldots<t_n,$$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

## Cadenas de Markov: Características Generales

- Probabilidades de Transición:

  $p_{ij}(m,n)=P[X_n=j/X_m=i], \ \forall i,j \in S, \ \forall m,n \in T: m<n.$

- Matriz de Transición:

  $$P(m,n) = (p_{ij}(m,n), i,j \in S)$$

- En una etapa: $P(t,t+1), \forall t \in T.$
- Vector de Estados:

  $V_t=(p_i(t), i \in S)$, siendo $p_i(t)=P(X_t=i)$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

## Transiciones en Cadenas de Markov

- $P(m,n)$ es una matriz estocástica.
- Modelización del avance de la Cadena:

  $$V_t=V_s.P(s,t), \quad \forall s,t \in T: s<t$$

- Ecuación de Chapman-Kolmogorov:

  $$P(r,t) = P(r,s).P(s,t), \quad \forall r,s,t \in T: r<s<t.$$

- $P(m,n) = P(m,m+1).P(m+1,m+2). .... P(n-1,n)$ ,

  $\forall m,n \in T: m<n.$

- $V_t = V_0.P(0,t), \forall t \in T.$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

# Cadenas Homogéneas

- Definición:

  $P(t,t+1) = P$, o bien $p_{ij}(t,t+1)=p_{ij}$, $\forall t\in T$, $\forall i,j\in S$

- Consecuencias:
  - $P(r+s) = P(r).P(s)$, $\forall r,s\in T$ (Ec. Chapman-Kolmogorov)
  - $P(h,t+h) = P(0,t) = P^t = P(t)$, $\forall t,h\in T$.
  - $V_t = V_0.P(t) = V_0.P^t$, $\forall t\in T$.
- Cálculo de $P^t$:

  Recurrencia ó Descomposición de Jordan: $P^t = H.J^t.H^{-1}$

- A largo plazo:

  $\lim V_t$, cuando $t\to\infty$.

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

# UN MODELO DE PREFERENCIA DE MARCAS DEL CONSUMIDOR.

•Datos:

| Julio \ Agosto | Azul | Verde | Rojo | TOTAL |
|---|---|---|---|---|
| Azul | 180 | 30 | 40 | 250 |
| Verde | 20 | 200 | 30 | 250 |
| Rojo | 30 | 15 | 255 | 300 |
| TOTAL | 230 | 245 | 325 | 800 |

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

## UN MODELO DE PREFERENCIA DE MARCAS DEL CONSUMIDOR.

Matriz de Transición:

$$P=\begin{pmatrix} 0.72 & 0.12 & 0.16 \\ 0.08 & 0.8 & 0.12 \\ 0.1 & 0.05 & 0.85 \end{pmatrix}$$

**Vectores de Estado:**

| i | Mes | Azul | Verde | Rojo |
|---|---|---|---|---|
| 0 | Julio | .313 | .313 | .375 |
| 1 | Agosto | .288 | .306 | .406 |
| 2 | Septiembre | .272 | .300 | .428 |
| 3 | Octubre | .263 | .294 | .444 |
| 4 | Noviembre | .257 | .289 | .454 |
| 5 | Diciembre | .253 | .285 | .462 |

Límite: V = (0.249, 0.270, 0.481)

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

## Características de los Estados

- Accesibles $(i \to j)$ : $\exists t \in T : p_{ij}^{(t)} > 0$
- Comunicantes $(i \leftrightarrow j)$: $(j \to i)$ y $(i \to j)$
- Absorbentes: $p_{ii}=1$
- Sin Retorno: $p_{ii}^{(t)}=0, \ \forall t \in T$
- Periódicos (d): $p_{ii}^{(t)} = 0, \quad \forall t \neq d, 2d, \ldots, nd, \ldots$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

# Clasificación de los Estados

- Clases Comunicantes: $C(i)=\{j\in S:\ j\leftrightarrow i\},\ \forall i\in S$
- Descomposición en clases comunicantes:

$$S=C_1\cup C_2\cup\ldots\cup C_r\cup\ldots\ ,\quad C_i\cap C_j=\phi\,,\ i\neq j$$

siendo cada C(i) una clase comunicante ó un estado sin retorno.

- La periodicidad es una propiedad de clase.
- Clases Cerradas o Subcadenas: $\sum_{j\in C} p_{ij}=1,\ \forall i\in C$

$$\text{Clases Comunicantes}\begin{cases}\text{Cerradas}\begin{cases}\text{Periódicas}\\ \text{Aperiódicas}\end{cases}\\ \text{Transitorias}\end{cases}$$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

# Estados recurrentes y transitorios

- Probabilidades de primer paso:

$$f_{ij}^{(n)}=P\left(X_n=j,X_m\neq j,\forall m<n\,/\,X_0=i\right)\ ;i,j\in S,\ n=1,2,3,\ldots$$

- Probabilidades y tiempo medio de recurrencia:

$$f_{ij}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{ij}^{(n)}\quad ;i,j\in S\qquad\qquad \mu_i=\sum_{n=1}^{\infty}n.f_{ii}^{(n)},\ i\in S$$

$$\text{Estados}\begin{cases}\text{Recurrentes o Persistentes: } f_{ii}=1 \begin{cases}\text{Positivos: } \mu_i<\infty\\ \text{Nulos: } \mu_i=\infty\end{cases}\\ \text{Transitorios: } f_{ii}<1\end{cases}$$

- Descomposición: $S = C_1 U\ C_2\ U \ldots U\ C_r\ U \ldots U\ Z$, $C_i$ cerradas

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

# Tipos de Cadenas

$$\text{Cadenas Homogéneas} \begin{cases} \text{Irreducibles} \begin{cases} \text{Recurrentes} \begin{cases} \text{Positivas} \begin{cases} \text{Aperiódicas} \Rightarrow \text{Regulares} \\ \text{Periódicas} \end{cases} \\ \text{Nulas} \end{cases} \\ \text{Transitorias} \end{cases} \\ \text{Reducibles} \rightarrow \quad S = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_r \cup Z \ , \end{cases}$$

- Si la cadena es finita, no existen clases transitorias cerradas ni recurrentes nulas, pues deben contener infinitos estados.
- Una cadena irreducible finita es <u>regular</u> si existe un número entero n tal que todos los elementos de la matriz $P^n$ son estrictamente positivos.

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

# Estructura de las Cadenas Homogéneas Finitas

**<u>Clasificación General</u>:**

$$\text{Cadenas} \begin{cases} \text{Irreducibles} \begin{cases} \text{Regulares} \\ \text{Periódicas} \end{cases} \\ \\ \text{Reducibles} \begin{cases} \text{Absorbentes} \\ \text{Generales} \end{cases} \end{cases}$$

**<u>Forma Matricial Estándar</u>:**

$$P = \left( \begin{array}{ccccc|c} P_1 & 0 & \cdots & 0 & & 0 \\ 0 & P_2 & \cdots & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_r & & 0 \\ \hline & & A & & & B \end{array} \right)$$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

## Cadenas Estacionarias y Ergódicas

- Distribución Estacionaria: $V_0=V_1=\ldots=V_t=\ldots=\pi$
- Cadena Estacionaria: $V_0=\pi$
- Cadena Ergódica: $\lim_{t\to\infty} V_t=\pi$

- **Teorema Límite: En cadenas regulares existe siempre el vector límite ($\pi$), es único y se calcula mediante:**

$$\left.\begin{array}{l}\pi=\pi.P\\ \sum_{i\in S}\pi_i=1\end{array}\right\}$$

- **También puede utilizarse en cadenas periódicas, pero ahora sólo resume la información del ciclo completo.**

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

## Matriz Límite de Transición para Cadenas Regulares

Si $\pi=(\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_k)$ es el vector límite, entonces:

$$P^t=\begin{pmatrix}p_{11}&p_{12}&\cdots&p_{1k}\\ p_{21}&p_{22}&\cdots&p_{2k}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ p_{k1}&p_{k2}&\cdots&p_{kk}\end{pmatrix}^t \xrightarrow[t\uparrow\infty]{} \Pi=\begin{pmatrix}\pi_1&\pi_2&\cdots&\pi_k\\ \pi_1&\pi_2&\cdots&\pi_k\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \pi_1&\pi_2&\cdots&\pi_k\end{pmatrix}$$

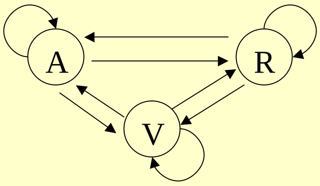
y, por tanto, $V_t=V_0.P^t \xrightarrow[t\uparrow\infty]{} V_0.\Pi=\pi$

Además: $\pi_i=\dfrac{1}{\mu_i},\ \forall i\in S,$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

## UN MODELO DE PREFERENCIA DE MARCAS DEL CONSUMIDOR.




S = {A,V,R} = C(A) ⇒ CADENA REGULAR.

**VECTOR LÍMITE:**

$$(\pi_1,\pi_2,\pi_3) = (\pi_1,\pi_2,\pi_3).\begin{pmatrix} 0.72 & 0.12 & 0.16 \\ 0.08 & 0.8 & 0.12 \\ 0.1 & 0.05 & 0.85 \end{pmatrix}$$

$\pi_1+\pi_2+\pi_3= 1$

$$\left.\begin{array}{c} 0.72\pi_1+ 0.08\pi_2+ 0.1\pi_3= \pi_1 \\ 0.12\pi_1+ 0.8\pi_2+ 0.05\pi_3= \pi_2 \\ 0.16\pi_1+ 0.12\pi_2+ 0.85\pi_3= \pi_3 \\ \pi_1+\pi_2+\pi_3= 1 \end{array}\right\}$$

$$V_t \xrightarrow[t\uparrow\infty]{} \pi = (0.249,\ 0.270,\ 0.481)$$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

# Cadenas de Markov Periódicas y Reducibles

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

## Características de los Estados

- Accesibles $(i \to j)$ : $\exists t \in T : p_{ij}^{(t)} > 0$
- Comunicantes $(i \leftrightarrow j)$: $(j \to i)$ y $(i \to j)$
- Absorbentes: $p_{ii}=1$
- Sin Retorno: $p_{ii}^{(t)} = 0, \ \forall t \in T$
- Periódicos (d): $p_{ii}^{(t)} = 0, \quad \forall t \neq d, 2d, \ldots, nd, \ldots$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

# Estados Periódicos

$$i \text{ es periódico(d)} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{i) } p_{ii} = 0 \\ \text{ii) } p_{ii}^{(n)} > 0 \Leftrightarrow n = \dot{d} \ (= d, 2d, \ldots, nd, \ldots) \end{cases}$$

• En el caso de que un estado no sea periódico (d=1), entonces se dice *aperiódico.*

• También la periodicidad resulta ser una propiedad asociada a las clases comunicantes, lo que permite hablar de clases *periódicas(d)* y *aperiódicas*.

• **Proposición.** Sea $\{X_t, t \in T\}$ una cadena homogénea de Markov y sea un estado cualquiera $i \in S$. Entonces:

•a) $i$ es periódico(d) $\Rightarrow$ $j$ es periódico(d), $\forall j \in C(i)$.

•b) C es una clase comunicante periódica(d) $\Rightarrow$ C es cerrada.

•c) $i$ es transitorio ó recurrente nulo $\Rightarrow$ $i$ es aperiódico.

•d) Una clase cerrada finita C es periódica(d) $\Leftrightarrow$ $|P_C - \lambda.I| = (\lambda^d - 1).h(\lambda)$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

# Clasificación de los Estados

- Clases Comunicantes: $C(i)=\{j \in S: j \leftrightarrow i\}$
- Clases Cerradas o Subcadenas: $\sum_{j \in C} p_{ij} = 1, \ \forall i \in C$

$$\text{Clases Comunicantes} \begin{cases} \text{Cerradas} \begin{cases} \text{Periódicas} \\ \text{Aperiódicas} \end{cases} \\ \text{Transitorias} \end{cases}$$

$$\text{Estados} \begin{cases} \text{Recurrentes o Persistentes} \\ \text{Transitorios} \end{cases}$$

- Descomposición: $S = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_r \cup Z$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

# Subclases Cíclicas

En una clase cerrada C periódica(d), los estados que la componen pueden descomponerse mediante una unión disjunta de *subclases cíclicas:*

$$G_{h+1} = \{ j \in C : p_{ij} > 0, i \in G_h \},\ h = 0,1,\ldots,(d-1)$$

siendo el esquema de actuación el siguiente:

$$G_0 \to G_1 \to G_2 \to \ldots \to G_{d-1} \to G_0$$

$$P_C^{nd+1} = \begin{array}{c} G_0 \\ G_1 \\ G_2 \\ \vdots \\ G_{d-2} \\ G_{d-1} \end{array} \begin{pmatrix} 0 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \\ x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, P_C^{nd} = \begin{array}{c} G_0 \\ G_1 \\ G_2 \\ \vdots \\ G_{d-2} \\ G_{d-1} \end{array} \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{pmatrix}$$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

# Comportamiento Límite

$$\left( \{ P^{nd} \}, \{ P^{nd+1} \}, \ldots, \{ P^{nd+(d-1)} \} \right) \xrightarrow[n \to \infty]{} \left( S_0, S_1, \ldots, S_{d-1} \right)$$

- **<u>Teorema Límite para cadenas periódicas</u>:** Sea $\{X_t, t \in T\}$ una cadena homogénea de Markov, irreducible y periódica(d), cuya matriz de transición es P. Entonces:

a) Posee distribución estacionaria y es única.

b) Si $V_0 = \pi$, la cadena es estacionaria.

c) Si $V_0 \neq \pi$, la cadena no es ergódica, siendo $\pi$ la media de los vectores de estados del ciclo límite completo $(\pi^*_{(1)}, \pi^*_{(2)}, \ldots, \pi^*_{(d)})$.

$$\pi = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{d} \lim_{t \to \infty} \pi^*_{d.t+i} = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{d} \pi^*_{(i)}$$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

# Cadenas Periódicas.Ejemplo

$$P=\begin{pmatrix}0 & 0{,}25 & 0{,}75\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\left|P-\lambda.I\right|=-\lambda.(\lambda^2-1)\quad\Rightarrow \text{Es periódica(2)}$$

$$\boxed{G_0=\{2,3\},\ G_1=\{1\}}$$

$$P^{2n+1}=\begin{pmatrix}0 & 0{,}25 & 0{,}75\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix};P^{2n}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0{,}25 & 0{,}75\\ 0 & 0{,}25 & 0{,}75\end{pmatrix},\forall n\in N$$

$$\left.\begin{array}{l}\pi^*_{(1)}=\left(p_2+p_3;0{,}25.p_1;0{,}75.p_1\right)\\ \pi^*_{(2)}=\left(p_1;0{,}25.p_2+0{,}25.p_3;0{,}75.p_2+0{,}75.p_3\right)\end{array}\right\}\ \pi=\left(0{,}5;0{,}125;0{,}375\right)$$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

# Subcadenas de Markov

La importancia de las clases comunicantes cerradas radica en que pueden extraerse del espacio de estados y estudiar el comportamiento de la cadena en ellas, de manera independiente, lo que induce el que, a veces, se les denomine *subcadenas de Markov*. En efecto, si C es una clase cerrada y $P_C$ es la submatriz de la matriz de transición P, cuyas filas y columnas corresponden a los estados de C, entonces:

$$P=\begin{pmatrix}P_C & 0\\ * & *\end{pmatrix}\Rightarrow P^t=\begin{pmatrix}P_C^t & 0\\ * & *\end{pmatrix},\ \forall C\subset S:\ C\ \text{cerrada}.$$

Obsérvese que, si una cadena homogénea de Markov sólo presenta una clase comunicante, es evidente que ésta deberá ser cerrada. Por otra parte, si su espacio de estados presenta una descomposición con más de una clase comunicante, al menos una de ellas deberá, a su vez, ser cerrada.

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

## Estructura de las Cadenas Homogéneas Finitas

**Clasificación General:**

- Cadenas
  - Irreducibles
    - Regulares
    - Periódicas
  - Reducibles
    - Absorbentes
    - Generales

**Forma Matricial Estándar:**

$$P = \left(\begin{array}{ccccc|c} P_1 & 0 & \cdots & 0 & & 0 \\ 0 & P_2 & \cdots & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_r & & 0 \\ \hline & & A & & & B \end{array}\right)$$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

## Matriz Límite de Transición para Cadenas Reducibles

$$P^t = \left(\begin{array}{cccc|c} P_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_r & 0 \\ \hline A_1 & A_2 & \cdots & A_r & B \end{array}\right)^t \xrightarrow[t\uparrow\infty]{} \Pi = \left(\begin{array}{cccc|c} \Pi_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \Pi_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Pi_r & 0 \\ \hline \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_r & 0 \end{array}\right)$$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

## Probabilidades de Absorción

$f_{jC}^{(n)} = P\left(X_n \in C, X_m \notin C, \forall m < n / X_0 = j\right)$ ; $j \in Z$, $n = 1,2,3,\ldots$; $f_{jC} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{jC}^{(n)}$ ; $j \in Z$

$$f_{iC} = \sum_{j \in C} p_{ij} + \sum_{k \in Z} p_{ik}.f_{kC}, \quad \forall i \in Z$$
$$\alpha_{ij} = f_{iC(j)}.\pi_j, \forall i \in Z, \forall j \in S - Z$$

En forma matricial, para cada clase cerrada C, se tendrá:

$$* f_C' = A_C.\vec{1}' + B.f_C' \Rightarrow f_C' = (I-B)^{-1}.A_C.\vec{1}'$$
$$* \alpha_C = f_C'.\Pi_C$$

Por tanto : $V_t = V_0.P^t \xrightarrow[t \uparrow \infty]{} V_0.\Pi$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

## Tiempo Medio de Absorción

$$m_i = 1 + \sum_{k \in Z} p_{ik}.m_k, \quad \forall i \in Z$$

En forma matricial:

$$m' = \vec{1}' + B.m' \Rightarrow m' = (I-B)^{-1}.\vec{1}'$$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

# Cadenas de Markov Absorbentes

$$P = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & & 0 \\ \hline & & A & & & B \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline A & B \end{array}\right)$$

Ahora, las expresiones se simplifican notablemente:

$$P^t = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline A & B \end{array}\right)^t \xrightarrow[t\uparrow\infty]{} \Pi = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline \alpha & 0 \end{array}\right), \text{donde:} \begin{cases} * \ f = (I-B)^{-1}.A \\ * \ \alpha = f \\ * \ m' = (I-B)^{-1}.\vec{1}' \end{cases}$$

$(I\text{-}B)^{-1}$ es la MATRIZ FUNDAMENTAL

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

# Un Modelo de Seguro Bonificado

**Matriz de Transición Estándar:**

$$P = \left(\begin{array}{c|cc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0.8 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.4 & 0 \\ \hline 0.6 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \end{array}\right)$$

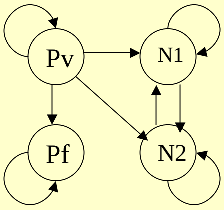
**Vectores de Estado:**

| Año | Pref | N1 | N2 | Prov |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,300 | 0,100 | 0,200 | 0,400 |
| 1 | 0,540 | 0,280 | 0,140 | 0,040 |
| 2 | 0,564 | 0,316 | 0,116 | 0,004 |
| 3 | 0,566 | 0,323 | 0,110 | 0,000 |
| 4 | 0,567 | 0,325 | 0,109 | 0,000 |
| 5 | 0,567 | 0,325 | 0,108 | 0,000 |

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

# Un Modelo de Seguro Bonificado




<u>Vector Límite de la Subcadena</u>:

$$\left.\begin{array}{r} 0.8\pi_1+0.6\pi_2 = \pi_1 \\ 0.2\pi_1+0.4\pi_2 = \pi_2 \\ \pi_1+\pi_2 = 1 \end{array}\right\} \quad \pi = (0.75,0.25)$$

<u>Probabilidades de Absorción</u>:

$f_{Pv,N} = (10/9).\ (0.2,0.1).(1,1)' = 0.3333$

$f_{Pv,Pf} = (10/9).\ (0.6\ ).\ 1 = 0.6667$

$\alpha_N = 0.3333.\ (0.75,0.25) = (0.25,0.0833)$

$\alpha_{Pf} = 0.6667.1= 0.6667$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

# Un Modelo de Seguro Bonificado

<u>Comportamiento Límite</u>

$$P^t \xrightarrow[t\uparrow\infty]{} \Pi = \left(\begin{array}{c|cc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0.75 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0.75 & 0.25 & 0 \\ \hline 0.67 & 0.25 & 0.08 & 0 \end{array}\right)$$

<u>Tiempo Medio hasta la Absorción:</u>

$m' = (10/9).1 = 1.11$ pasos

$$V_t \xrightarrow[t\uparrow\infty]{} V_0.\Pi = (0.3,0.1,0.2,0.4).\Pi = (0.5667,0.325,0.1083,0)$$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

# Cadenas de Markov en tiempo continuo

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

## Procesos de Markov

- Definición:

$$P\left(X(t_n) \leq x_n / X(t_1) = x_1, \ldots, X(t_{n-1}) = x_{n-1}\right) = P\left(X(t_n) \leq x_n / X(t_{n-1}) = x_{n-1}\right)$$

$$\forall t_1 < t_2 < \ldots < t_n \in T, \ \forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in S, \ \forall n \in N$$

- Rasgos Diferenciales:
  - T es continuo, usualmente $T=\{t\in \Re: t\geq 0\} = [0,\infty)$
  - No existen transiciones en un paso, P(t,t+1).
  - Si las variables son discretas, estamos ante <u>cadenas de Markov en tiempo continuo.</u>

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

## Transiciones en Cadenas con Tiempo Continuo

- P(s,t) es una matriz estocástica.
- Modelización del avance del Proceso:

$$V_t = V_s.P(s,t), \quad \forall s,t \in T: s<t$$

- Ecuación de Chapman-Kolmogorov:

$$P(r,t) = P(r,s).P(s,t), \quad \forall r,s,t \in T: r<s<t.$$

- Cadenas Homogéneas:

$$P(s,t) = P(t-s), \forall s < t \in T \Rightarrow P(0,t) = P(t) \neq P^t, \forall t \in T$$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

## Intensidades de Transición

- Matriz de Transición Infinitesimal:

$$P(\Delta t) = P(t, t+\Delta t) = (p_{ij}(t, t+\Delta t), i, j \in S), \quad \forall t \in T$$

- Matriz de Intensidades de Transición:

$$Q = P'(0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(\Delta t) - I}{\Delta t} = (q_{ij}, i, j \in S)$$

- Elementos de la matriz Q:
  - Intensidades de Transición.- $q_{ij}, \forall i, j \in S : i \neq j$
  - Intensidades de Paso.- $q_i = -q_{ii}, \forall i \in S$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

## Propiedades de la Matriz de Intensidades de Transición

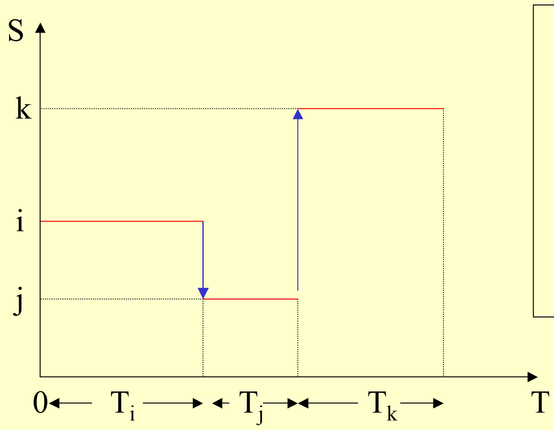
- Es una matriz conservativa: $\sum_{j \in S} q_{ij} = 0, \forall i \in S$
- Ecuaciones Diferenciales de Kolmogorov:
  - Adelantadas: $P'(t) = P(t).Q$
  - Atrasadas: $P'(t) = Q.P(t)$
- Condición de Continuidad: $P(0) = I$
- Solución para Cadenas Finitas:

$$P(t) = e^{Qt} = H.e^{Jt}.H^{-1} \Rightarrow V_t = V_0.e^{Qt}$$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

## Esquema de Cadena en Tiempo Continuo




MOVIMIENTO

=

PERMANENCIAS

+

SALTOS

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

## Estructura de una Cadena de Markov en Tiempo Continuo

- 1.- Tiempo de Permanencia en los Estados:

$\tau_i$ = "Tiempo de Permanencia Ininterrumpida en i" ~ Exp($q_i$), $\forall i \in S$

$$E(\tau_i) = 1/q_i \longrightarrow \text{Estados} \begin{cases} \text{Instantáneos: } q_i = +\infty \\ \text{Estables: } 0 < q_i < +\infty \\ \text{Absorbentes: } q_i = 0 \end{cases}$$

- 2.- Cadena de Markov Integrada o Inmersa:

$Y_n$= "Posición de X(t) tras el salto n"

Estados Estables: $p^*_{ij} = \dfrac{q_{ij}}{q_i}, \forall i, j : i \neq j \quad ; p^*_{ii} = 0$

Estados Absorbentes: $p^*_{ij} = \delta_{ij}$ , $\forall$ i, j $\in$ S

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

## Clasificación de Estados

- La estructura de estados de $\{X(t), t\in T\}$ coincide con la de la cadena asociada $\{Y_n, n\in N\}$. Aspectos novedosos son:
- **Proposición.**

Sea $\{X(t), t\in T\}$ una cadena de Markov homogénea en tiempo continuo, con matriz de transición P(t). Entonces:

a) $p_{ii}(t) > 0, \ \forall t \in T, \forall i \in S$ .

b) $p_{ij}(t) > 0$ ó $p_{ij}(t) = 0, \ \forall i, j \in S \, (i \neq j), \forall t > 0$

- Consecuencias:

1. No hay estados periódicos en $\{X(t), t\in T\}$, aunque sí puede haberlos en $\{Y_n, n\in N\}$.

2. La estructura de S puede establecerse a través de cualquier P(t), t>0.

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

# Tipos de Cadenas

• La clasificación de las cadenas en tiempo continuo se establece a través de la cadena integrada. Así pues, es la siguiente, teniendo en cuenta las características diferenciales apuntadas:

$$\text{Cadenas Homogéneas}\begin{cases}\text{Irreducibles}\begin{cases}\text{Recurrentes}\begin{cases}\text{Positivas} \Rightarrow \text{Regulares}\\ \text{Nulas}\end{cases}\\ \text{Transitorias}\end{cases}\\ \text{Reducibles} \rightarrow S = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_r \cup Z\ ,\end{cases}$$

• Si la cadena es finita, no existen clases transitorias cerradas ni recurrentes nulas, pues deben contener infinitos estados.

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

# UN MODELO DINÁMICO DE ESPECIALIZACIÓN LABORAL

## DATOS:

- Los Obreros Agrícolas que cambian de Sector van al Industrial o Servicios con igual probabilidad.
- El resto de Obreros que cambian van al Sector Agrícola sólo en un 25%.
- El tiempo que pasa un Obrero sin cambiar de Sector es Exponencial con media de 10 años.
- En el momento actual, el 60% de la población es agrícola, el 25% industrial y el resto de servicios.

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

## UN MODELO DINÁMICO DE ESPECIALIZACIÓN LABORAL

Matriz de Intensidades:

$$Q=\begin{pmatrix} -0.1 & 0.05 & 0.05 \\ 0.025 & -0.1 & 0.075 \\ 0.025 & 0.075 & -0.1 \end{pmatrix}$$

Matriz de Transición Integrada:

$$P^{*}=\begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.25 & 0 & 0.75 \\ 0.25 & 0.75 & 0 \end{pmatrix}$$

Vector de Estados:

$$V_t=(0.6,0.25,0.15)P(t)=(0.2+0.4e^{-t/8},0.4-0.2e^{-t/8}+0.05e^{-7t/40},0.4-0.2e^{-t/8}-0.05e^{-7t/40})$$

$$V_t \xrightarrow[t\uparrow\infty]{} \pi=(0.2,0.4,0.4)$$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

## Comportamiento a Largo Plazo

Teorema Límite:

Si $\{X(t), t\in T\}$ es una Cadena homogénea de Markov en tiempo continuo, **estable y regular**, entonces existe siempre el vector límite y puede obtenerse a partir del sistema:

$$\left.\begin{aligned} \pi.Q &= 0 \\ \sum_{i\in S}\pi_i &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Además, $(1/\pi_i)$ indica el tiempo medio que transcurre entre dos salidas consecutivas del estado i $(q_i.\mu_i)$ . Por otra parte:

$$\lim_{t\to\infty} V_t = V_0.\lim_{t\to\infty} P(t)=\pi,\ \forall V_0$$

y son ergódicas.

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

## Cadenas Reducibles

- El comportamiento límite de las subcadenas regulares estables queda recogido en el resultado anterior.

- Si C(i) es una clase absorbente, entonces: $\lim_{t\to\infty} p_{ii}(t) = 1$

- Si C es una clase cerrada transitoria ó recurrente nula:

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = 0, \forall i, j \in C$$

- En el caso de los estados transitorios, se tendrá:

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = 0, \forall j \in Z$$

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = f^*_{i,C(j)}.\pi_{j,C(j)} = \alpha_{ij}, \forall i \in Z, \forall j \in C(j)$$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

## Distribuciones Estacionarias

- Pueden obtenerse a través de la cadena en tiempo continuo ó mediante la cadena integrada, de acuerdo con la siguiente:
- **Proposición.**

Sea $\{X(t), t \in T\}$ una cadena homogénea de Markov en tiempo continuo, estable y regular y sea $\{Y_n, n \in N\}$ su cadena integrada. Sean $\pi$ y $\pi^*$ las distribuciones estacionarias respectivas. Entonces:

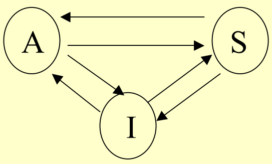
a) $\pi^*_j = \dfrac{\pi_j . q_j}{\sum_{i\in S} \pi_i . q_i} \quad , j \in S$

b) $\pi_j = \dfrac{\pi^*_j / q_j}{\sum_{i\in S} \pi^*_i / q_i} \quad , j \in S$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

## UN MODELO DINÁMICO DE ESPECIALIZACIÓN LABORAL




C(A)={A,I,Sv}=S $\Rightarrow$ REGULAR y ESTABLE

VECTOR LÍMITE

$$(0,0,0)=(\pi_1,\pi_2,\pi_3)\cdot\begin{pmatrix} -0.1 & 0.05 & 0.05 \\ 0.025 & -0.1 & 0.075 \\ 0.025 & 0.075 & -0.1 \end{pmatrix}$$

$$\pi_1+\pi_2+\pi_3 = 1$$

$$\left.\begin{array}{r} -0.1\pi_1+0.025\pi_2+0.025\pi_3 = 0 \\ 0.05\pi_1-0.1\pi_2+0.075\pi_3 = 0 \\ 0.05\pi_1+0.075\pi_2-0.1\pi_3 = 0 \\ \pi_1+\pi_2+\pi_3 = 1 \end{array}\right\}$$

$$V_t \xrightarrow[t\uparrow\infty]{} \pi = (0.2, 0.4, 0.4)$$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

# Procesos de Nacimiento y Muerte

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

## Proceso General de Nacimiento y Muerte

$X_t$ = "Número de Individuos en la Población en el Instante t", $t \geq 0$

- Es un Proceso de Markov (cadena) en tiempo continuo con $S=\{0,1,2,...n,...\}$
- En un intervalo infinitesimal, las transiciones posibles son:

1.- <u>En relación con el arranque:</u>

$$P_{0,h}(t,t+dt)=\begin{cases} \lambda_0(t).dt + o(dt), & \text{si } h=1 \\ 1-\lambda_0(t).dt + o(dt), & \text{si } h=0 \\ o(dt), & \text{si } h\neq 0,1 \end{cases}$$

2.- <u>En general</u>:

$$P_{n,h}(t,t+dt) =\begin{cases} \lambda_n(t).dt + o(dt), & \text{si } h=n+1 \\ \mu_n(t).dt+o(dt), & \text{si } h=n-1 \\ 1-\lambda_n(t).dt-\mu_n(t).dt+o(dt), & \text{si } h=n \\ o(dt), & \text{si } h\neq n-1,n,n+1 \end{cases}$$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

# Matriz de Intensidades de Transición

$$Q(t)=\begin{pmatrix} -\lambda_0(t) & \lambda_0(t) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu_1(t) & -\lambda_1(t)-\mu_1(t) & \lambda_1(t) & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu_2(t) & -\lambda_2(t)-\mu_2(t) & \lambda_2(t) & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \mu_3(t) & -\lambda_3(t)-\mu_3(t) & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu_n(t) & -\lambda_n(t)-\mu_n(t) & \lambda_n(t) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

- $\mu_n(t) = 0,\ \forall t\geq 0,\ \forall n=0,1,2,\ldots$ $\longrightarrow$ PROCESO DE NACIMIENTO PURO
- $\lambda_n(t) = 0,\ \forall t\geq 0,\ \forall n=0,1,2,\ldots$ $\longrightarrow$ PROCESO DE MUERTE PURO

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

# Descripción General del Proceso de Nacimiento y Muerte

- Vector de Estados del Proceso:

$V_t = ( P_0(t),P_1(t), \ldots,P_n(t), \ldots )$, siendo $P_n(t) = P(X_t= n),\ n=0,1,2,\ldots$

- Ecuaciones Diferenciales del Proceso:

$$\left.\begin{aligned} P_n'(t) &= \lambda_{n-1}(t).P_{n-1}(t) - [\lambda_n(t)+\mu_n(t)].P_n(t) + \mu_{n+1}(t).P_{n+1}(t),\ \ n\geq 1 \\ P_0'(t) &= -\lambda_0(t).P_0(t) + \mu_1(t).P_1(t) \end{aligned}\right\}$$

- Tiempo de Permanencia Ininterrumpida en los Estados:

$\tau_n \sim Exp(\lambda_n(t)+\mu_n(t)),\ \forall n\geq 1$
$\tau_0 \sim Exp(\lambda_0(t))$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

# Procesos de Nacimiento y Muerte Homogéneos

Característica General: $\lambda_n(t) = \lambda_n$ , $\mu_n(t) = \mu_n$ , $\forall t \geq 0$

- La Cadena es REGULAR y ESTABLE si $\lambda_n + \mu_n \neq 0$, n=0,1,2,...
- Existencia de Distribución Estacionaria (Límite):
  - Condición Necesaria: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} < \infty$
  - Distribución Estacionaria:

$$\left.\begin{aligned} \pi_n &= \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} \pi_0 \text{ , } n \geq 1 \\ \pi_0 &= \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n}} \end{aligned}\right\}$$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

# Algunos Procesos de Nacimiento y Muerte Homogéneos

- **EL PROCESO CON TASAS CONSTANTES:** $\lambda_n = \lambda$, $\mu_n = \mu$, $\forall n \geq 0$

  - **Aplicaciones:** Dinámica de Poblaciones y Líneas de Espera.
  - **Condición Existencia de Vector Estacionario:** $\lambda < \mu$
  - **Distribución Estacionaria:**

$$\left.\begin{aligned} \pi_0 &= 1 - \tfrac{\lambda}{\mu} \\ \pi_n &= (1 - \tfrac{\lambda}{\mu})(\tfrac{\lambda}{\mu})^n \text{ , } n \geq 1 \end{aligned}\right\}$$

- **EL PROCESO DE ERLANG:** $\lambda_n = \lambda$, $\mu_n = n\mu$, $\forall n \geq 0$

  - **Aplicaciones:** Líneas de Espera con varios Servidores y Telefonía.
  - **Distribución Estacionaria:**

$$\left.\begin{aligned} &\pi_n = \tfrac{1}{n!}(\tfrac{\lambda}{\mu})^n e^{-\lambda/\mu} \text{ , } n \geq 0 \\ &\pi \sim \wp(\lambda/\mu) \end{aligned}\right\}$$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

# Procesos Puros de Nacimiento

- **EL PROCESO DE POISSON:** $\lambda_n=\lambda,\ \forall n\geq 0$
  - **Aplicaciones:** Siniestros, Astronomía, Averías, Llegadas, etc.
  - **Distribución del Proceso:**

$$\left.\begin{array}{l} P_n(t) = \dfrac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t},\ n \geq 0 \\ X_t \sim \wp(\lambda t),\ \ \forall t>0 \end{array}\right\}$$

- **EL PROCESO DE YULE-FURRY:** $\lambda_n=n\lambda,\ \forall n\geq 1,\ X_0= r\geq 1$
  - **Aplicaciones:** Epidemias, Evolución de Especies.
  - **Distribución del Proceso:**

$$\left.\begin{array}{l} P_{r,n}(t) = \dbinom{n-1}{n-r} . e^{-r\lambda t} . (1-e^{-\lambda t})^{n-r},\ \forall n \geq r \\ X_t - X_0 \sim BN(r, e^{-\lambda t}) \end{array}\right\}$$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

# Procesos Puros de Muerte

- **EL PROCESO CON TASA CONSTANTE:** $\mu_n=\mu,\ \forall n\geq 1,\ X_0=r$
  - **Aplicaciones:** Modelos de Extinción.
  - **Distribución del Proceso:**

$$P_n(t) = \frac{(\mu . t)^{r-n}}{(r-n)! \sum_{i=0}^{r} \frac{(\mu . t)^i}{i!}},\ n \leq r$$

- **EL PROCESO CON TASA LINEAL:** $\mu_n=n\mu,\ \forall n\geq 1,\ X_0=r$
  - **Aplicaciones:** Gestión de Inventarios, Emigración, etc.
  - **Distribución del Proceso:**

$$\left.\begin{array}{l} P_n(t) = \dbinom{r}{n} . e^{-n\mu t} . (1-e^{-\mu . t})^{r-n},\ \ n \leq r \\ X_t \sim B(r, e^{-\mu t}) \end{array}\right\}$$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

# Modelo para una Estación de Peaje

DATOS:

- Dispone de una única ventanilla.
- Los automóviles llegan según una tasa constante de 2 por minuto.
- El cobro de peaje tiene una duración exponencial con media de 20 segundos.
- Desearía estimar el efecto de incorporar una segunda ventanilla al servicio.

MODELO:

$X_t$ = "Número de Vehículos que esperan para pagar peaje, al cabo de t minutos", $t\geq 0$

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_n(t) = 2\\ \mu_n(t) = 3\end{array}\right\} \Longrightarrow \lambda<\mu \Longrightarrow \text{Admite vector estacionario}$$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

# Modelo para una Estación de Peaje

- $$\pi_n = \left(\tfrac{\lambda}{\mu}\right)^n . \left(1 - \tfrac{\lambda}{\mu}\right),\ n \geq 0 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\pi_0 = 0.3333\\ \pi_1 = 0.2222\\ \pi_2 = 0.1481\\ \pi_3 = 0.0988, \ldots\end{array}\right.$$
- Número Medio de Vehículos en la Estación: $E(\pi) = \lambda/(\mu-\lambda) = 2$
- Si pasamos a 2 ventanillas: $\lambda_n(t) = 2$, $\mu_1(t) = 3$, $\mu_n(t) = 6$, $\forall n\geq 2$

$$\left.\begin{array}{l}\pi_0 = \dfrac{2\mu-\lambda}{2\mu+\lambda}\\[2ex] \pi_n = 2\left(\dfrac{\lambda}{2\mu}\right)^n . \dfrac{2\mu-\lambda}{2\mu+\lambda},\quad n\geq 1\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\pi_0 = 0.5\\ \pi_1 = 0.3333\\ \pi_2 = 0.1111, \ldots\\ E(\pi) = 4\lambda\mu/(4\mu^2-\lambda^2) = 0.75\end{array}\right.$$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

# Modelos de Colas

**Rasgos Esenciales**

- Tiempo entre Llegadas
- Tiempo de Servicio
  - → **M**.- Exponencial (Markoviano)
  - → $\mathbf{M_k}$.- Erlang (Suma k exp. i.i.d.)
  - → **D**.- Determinística.
  - → **G**.- General
- Número de Servidores: $c \in \mathbb{N}$
- Capacidad del Sistema: Limitada ($k \in \mathbb{N}$) ó Ilimitada
- Disciplina de Servicio: FIFO, LIFO, Tiempo Compartido, etc.

**Notación de Kendall:** Distribución Llegadas / Distribución Servicio / Número Servidores / Capacidad

Ejemplo: M/M/1/k

**Medidas de Efectividad**

- Número Medio de Clientes en el Sistema (**L**)
- Número Medio de Clientes en la Cola ($\mathbf{L_q}$)
- Tiempo Medio de Espera en el Sistema (**W**)
- Tiempo Medio de Espera en la Cola ($\mathbf{W_q}$)
- Tasas Medias de Entrada y Salida ($\boldsymbol{\lambda}$ y $\boldsymbol{\mu}$)

Fórmula de Little:
$L = \lambda . W$
$L_q = \lambda . W_q$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

# Sistema M/M/1

Consiste en un Proceso de Nacimiento y Muerte Homogéneo con tasas constantes $\lambda$ y $\mu$. Por tanto, la distribución estacionaria ($\pi$) del nº de clientes en el sistema, es:

$$\left.\begin{aligned} P_0 &= 1 - \tfrac{\lambda}{\mu} \\ P_n &= (1 - \tfrac{\lambda}{\mu}).(\tfrac{\lambda}{\mu})^n \ , n \geq 1 \end{aligned}\right\} \text{ siempre que } \rho = (\lambda/\mu) < 1$$

Intensidad de Tráfico

Medidas de Efectividad:

$$L = E(\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} n.P_n = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$ ⇒ La congestión crece cuando $\rho = (\lambda/\mu) \to 1$.

$$L = \lambda.W \Rightarrow W = \tfrac{1}{\lambda}.L = \frac{1}{\mu - \lambda}$$ → El tiempo de espera se distribuye Exp($\mu$-$\lambda$)

$$W_q = W - E(S) = W - \tfrac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu.(\mu - \lambda)} \Rightarrow L_q = \lambda.W_q = \frac{\lambda^2}{\mu.(\mu - \lambda)} = L - \tfrac{\lambda}{\mu}$$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

# Sistema M/M/1/k

A diferencia del sistema M/M/1, ahora no es necesario que $\rho<1$, para alcanzar el estado estacionario, ya que la sala está limitada a k. Ahora, las ecuaciones son:

$$\left.\begin{array}{l} P'_0(t) = -\lambda.P_0(t) + \mu.P_1(t) \\ P'_n(t) = \lambda.P_{n-1}(t) - (\lambda+\mu).P_n(t) + \mu.P_{n+1}(t)\,,\, 1\le n\le k-1 \\ P'_k(t) = \lambda.P_{k-1}(t) - \mu.P_k(t) \end{array}\right\}$$

En régimen estacionario:
$P'_n(t) = 0, \quad 0\le n\le k$
$P_n(t) = P_n\,,\, 0\le n\le k$

y se obtiene: $\boxed{P_n = \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}}\rho^n \quad , n = 0,1,\ldots,k}$ donde $\rho=\lambda/\mu$ es la intensidad de tráfico.

<u>Medidas de Efectividad</u>:

$$L = \sum_{n=0}^{k} n.P_n = \frac{\rho}{1-\rho}\,\frac{1-(k+1)\rho^k + k\rho^{k+1}}{1-\rho^{k+1}}$$

La tasa efectiva de entrada al sistema es:
$\lambda^* = 0.P_k + \lambda.(1-P_k) = \lambda.(1-P_k)$ ,
que es la que figura en la Fórmula de Little.

$$\left\{\begin{array}{l} W = \frac{1}{\lambda^*}L = \dfrac{L}{\lambda.(1-P_k)} \\ W_q = W - E(S) = \dfrac{L}{\lambda.(1-P_k)} - \dfrac{1}{\mu} \\ L_q = \lambda^*.W_q = L - \dfrac{\lambda.(1-P_k)}{\mu} \end{array}\right.$$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

# Sistema M/M/c

En este caso, se dispone de c servidores, cada uno de ellos con una tasa de servicio $\mu$. Por tanto, se tiene un proceso de nacimiento y muerte, cuyas tasas son:

$$\lambda_n = \lambda\ ,\ n\ge 0 \qquad \mu_n = \begin{cases} n.\mu\ ,\ 0\le n\le c \\ c.\mu\ ,\ n\ge c \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Alcanzará el régimen estacionario si la intensidad de tráfico es: $\boxed{\rho = \dfrac{\lambda}{c.\mu} < 1}$

<u>Distribución Estacionaria</u>:

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1}\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^c}{c!}\left(\frac{c\mu}{c\mu-\lambda}\right)\right]^{-1}$$

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{(\lambda/\mu)^n}{n!}P_0\ ,\ n\le c \\ \dfrac{(\lambda/\mu)^n}{c!c^{n-c}}P_0\ ,\ n> c \end{cases}$$

<u>Medidas de Efectividad</u>:

$$L_q = \sum_{n=c}^{\infty}(n-c).P_n = \frac{\lambda\mu.(\lambda/\mu)^c}{(c-1)!(c\mu-\lambda)^2}P_0$$

$W_q = (L_q/\lambda)$

$W = W_q + (1/\mu)$

$L = \lambda.W = L_q + (\lambda/\mu)$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

## Estación de Peaje con Dos Ventanillas

Corresponde a una cola del tipo M/M/2, siendo $\lambda$=2 y $\mu$=3. Posee distribución estacionaria, ya que la intensidad de tráfico es $\rho$=1/3<1.

$$P_0=\left[\sum_{n=0}^{1}\frac{(2/3)^n}{n!}+\frac{(2/3)^2}{2!}\left(\frac{2.3}{2.3-2}\right)\right]^{-1}=\left(\frac{5}{3}+\frac{2}{9}\frac{3}{2}\right)^{-1}=\frac{1}{2}$$

$$P_1=\frac{(2/3)^1}{1!}\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

$$P_2=\frac{(2/3)^2}{2!}\frac{1}{2}=\frac{1}{9},\ldots$$

$$L_q=\frac{2.3.(2/3)^2}{(2-1)!(2.3-2)^2}\frac{1}{2}=\frac{(24/9)}{32}=\frac{1}{12}=0.08\widehat{3}\Rightarrow\begin{cases}L=\frac{1}{12}+\frac{2}{3}=\frac{3}{4}=0.75=E(\pi)\\ W_q=\frac{(1/12)}{2}=\frac{1}{24}=0.041\widehat{6}\\ W=\frac{1}{24}+\frac{1}{3}=\frac{3}{8}=0.375\end{cases}$$

Con una ventanilla, resultaría:
$W$=1; $W_q$=2/3; $L_q$=4/3

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

# TEMA 5:

# PROCESOS DE NACIMIENTO Y MUERTE.

**PREPARADO POR:** José Javier Núñez Velázquez.
Prof. Titular de Universidad.
Universidad de Alcalá

## 1. PROCESO GENERAL DE NACIMIENTO Y MUERTE.

Los procesos de nacimiento y muerte, como su nombre indica, están particularmente adaptados para servir de modelo al crecimiento de poblaciones vivas, aunque también se utilizan con frecuencia para todo tipo de situaciones en los que se ha de gestionar una cola en la que los clientes llegan (nacimientos) y se marchan después de haber sido servidos (muertes), como pueden ser la gestión de colas que demandan un servicio ó los inventarios, por ejemplo.

Así pues, sea $\{X_t,\ t\in T\}$ un proceso estocástico, cuyas variables aleatorias definiremos a partir de una población genérica, mediante:

$X_t$ = "Número de Individuos en la Población en el Instante t",donde se considera que el tiempo transcurre de manera continua, de modo que $T=\{t:t\geq 0\}$, pudiendo ser el conjunto de los números reales si se admiten movimientos retrospectivos. Por otra parte, el espacio de estados vendrá determinado por $S=\{0,1,2,...,n,...\} = \mathbf{N}\cup\{0\}$, siendo **N** el conjunto de los números naturales. Así pues, el proceso estocástico puede clasificarse como una cadena en tiempo continuo. Además, el carácter markoviano viene determinado al considerar que la evolución del proceso se debe a la ocurrencia de nacimientos ó muertes sobre el número concreto de efectivos que la población presenta. En resumen, el proceso estocástico así definido es una cadena de Markov en tiempo continuo, aunque tradicionalmente se mantiene la denominación general de *proceso* para este tipo de casos.

En estas condiciones, $\{X_t,\ t\in T\}$ será un *proceso de nacimiento y muerte* cuando, en un intervalo infinitesimal, sólo puede producirse un nacimiento, una muerte ó ninguno de estos hechos. De manera más formal, la matriz infinitesimal de probabilidades de transición, P(t,t+dt), viene determinada por los siguientes elementos:

$$P_{n,h}(t,t+dt) = \begin{cases} \lambda_n(t).dt + o(dt), \text{ si } h=n+1 \\ \mu_n(t).dt+o(dt), \text{ si } h=n-1 \\ 1-\lambda_n(t).dt-\mu_n(t).dt+o(dt), \text{ si } h=n \\ o(dt), \text{ si } h\neq n-1,n,n+1 \end{cases}$$

siempre que n>0. El caso n=0 corresponde al arranque del proceso y, en tal caso, las probabilidades infinitesimales de transición vienen dadas por:

$$P_{0,h}(t,t+dt)=\begin{cases} \lambda_0(t).dt + o(dt), & \text{si } h=1 \\ 1-\lambda_0(t).dt + o(dt), & \text{si } h=0 \\ o(dt), & \text{si } h\neq 0,1 \end{cases}$$

siendo *o(dt)* un infinitésimo de orden superior a *dt*. En estas expresiones, recordemos que las probabilidades infinitesimales de transición vienen dadas por:

$$P_{n,h}(t,t+dt) = P\left(X_{t+dt} = h / X_t = n\right), \forall n,h \in S, \forall t \geq 0\,,$$

siendo *dt* suficientemente pequeño. Por otra parte, $\lambda_n(t)$ y $\mu_n(t)$ representan las tasas instantáneas de nacimiento y muerte, respectivamente, en el instante t. Además, el caso n=0 debe considerarse con cuidado, en especial en poblaciones vivas, ya que corresponde al caso de extinción.

En el caso en que sólo puedan producirse *nacimientos*, se tendrá que $\mu_n(t)=0$, $\forall t\geq 0$, $\forall n\in \mathbf{N}\cup\{0\}$, y se hablará de *procesos de nacimiento puros.* Por otra parte, si sólo pudieran producirse *muertes*, entonces $\lambda_n(t)=0$, $\forall t\geq 0$, $\forall n\in \mathbf{N}\cup\{0\}$, debiéndose admitir que existen elementos en la población en el instante inicial para que puedan producirse bajas ($\exists\, r>0: P(X_0=r)=1$), denominándose *procesos de muerte puros.*

## 1.1. DESCRIPCIÓN GENERAL DEL PROCESO DE NACIMIENTO Y MUERTE.

Como ya se ha argumentado, los procesos de nacimiento y muerte son cadenas de Markov en tiempo continuo y, por lo tanto, las matrices de probabilidades de transición pueden obtenerse a partir de un elemento generador, que es la matriz de intensidades de transición. En general, esta se obtiene mediante la expresión:

$$Q(t) = \lim_{dt\to 0} \frac{P(t,t+dt) - P(t,t)}{dt} = \lim_{dt\to 0} \frac{P(t,t+dt) - I}{dt} \quad ,t \geq 0$$

siendo **I** la correspondiente matriz identidad y entendiendo que el límite se calcula elemento a elemento de la matriz. Teniendo en cuenta la definición de las probabilidades de transición infinitesimal, este cálculo conduce a la matriz:

$$Q(t)=\begin{pmatrix} -\lambda_0(t) & \lambda_0(t) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu_1(t) & -\lambda_1(t)-\mu_1(t) & \lambda_1(t) & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu_2(t) & -\lambda_2(t)-\mu_2(t) & \lambda_2(t) & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \mu_3(t) & -\lambda_3(t)-\mu_3(t) & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu_n(t) & -\lambda_n(t)-\mu_n(t) & \lambda_n(t) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

En la forma habitual, el *vector de estados en el instante t* del proceso mostrará la función de cuantía de la variable $X_t$. Por lo tanto:

$$V_t = ( P_0(t), P_1(t), \ldots, P_n(t), \ldots ) , \quad \text{siendo } P_n(t) = P( X_t = n ), \ \forall n\in \mathbf{N}\cup\{0\}.$$

Con estos elementos, pueden obtenerse las *ecuaciones diferenciales del proceso*, que rigen su evolución en el transcurso del tiempo. Para ello, utilizando las ecuaciones adelantadas de Kolmogorov ( $P'(0,t) = P(0,t).Q(t), t > 0$ ), que son válidas para este tipo de procesos, basta con efectuar la operación matricial $V_t' = V_t \cdot Q(t)$, resultando:

$$\left.\begin{array}{l} P_n'(t) = \lambda_{n-1}(t).P_{n-1}(t) - [\lambda_n(t) + \mu_n(t)].P_n(t) + \mu_{n+1}(t).P_{n+1}(t), \ n \geq 1 \\ \\ P_0'(t) = -\lambda_0(t).P_0(t) + \mu_1(t).P_1(t) \end{array}\right\}$$

que expresan el comportamiento que registra el proceso en intervalos infinitesimales, a través de las tasas instantáneas de nacimiento y muerte, en cada instante del tiempo, permitiendo observar cómo puede el proceso alcanzar cada uno de los estados; es decir, de qué manera se llega a presentar *n* individuos *(n>0)*, en la primera ecuación y cómo se produce la extinción *(n=0)*, en la segunda.

Finalmente, puede observarse que, al tratarse de una cadena de Markov en tiempo continuo, es posible conocer la distribución de la variable aleatoria que rige el tiempo de permanencia ininterrumpida en los estados, de manera que, si se define:

$\tau_n$ = "Tiempo en que el proceso cuenta con *n* individuos
sin registrarse cambios, a partir de *t*",

entonces se tiene que su distribución es exponencial:

$$\tau_n \sim \text{Exp}\,[\lambda_n(t)+\mu_n(t)],\ \ \forall n\geq 1$$
$$\tau_0 \sim \text{Exp}\,[\lambda_0(t)],$$

sin más que tener en cuenta los opuestos (*intensidades de paso*) de los elementos de la diagonal de la matriz $Q(t)$.

## 2. PROCESO DE NACIMIENTO Y MUERTE HOMOGÉNEO.

El proceso general de nacimiento y muerte se dirá que es *homogéneo* cuando las tasas instantáneas de nacimiento y muerte sean constantes en el tiempo. Es decir, cuando:

$$\lambda_n(t) = \lambda_n \ , \mu_n(t) = \mu_n \ , \quad \forall t\geq 0.$$

Obsérvese, no obstante, que aún siguen dependiendo del número de individuos en la población. Sin embargo, ahora la matriz de intensidades de transición tampoco dependerá del tiempo y, por tanto, $Q(t)=Q\ ,\ \ \forall t\geq 0.$

En cuanto a la estructura de la cadena de Markov en tiempo continuo, debe recordarse que los estados serán estables cuando el parámetro de la distribución exponencial asociada al tiempo de permanencia ininterrumpida en los estados sea finita y positiva; es decir, cuando:

$$\lambda_n+\mu_n \neq 0,\ \ \forall n\in \mathbf{N} \cup \{0\}.$$

Ahora bien, en este caso, las probabilidades de transición muestran que todos los estados comunican entre sí, quedando una única clase comunicante que coincide con el espacio de estados (S). Por lo tanto, en el caso en que se verifique la condición anterior, el proceso homogéneo de nacimiento y muerte se constituye en una cadena de Markov en tiempo continuo, *estable* y *regular*.

Así pues, en este caso, pasemos a estudiar la existencia de distribución estacionaria, lo que, dada la ergodicidad del proceso, determinaría el comportamiento a largo plazo del proceso. Tal distribución estacionaria *($\pi$)* será la solución al sistema de ecuaciones siguiente, que también se obtiene sin más que igualar a 0 las derivadas de las componentes del vector de estados *($V_t=\pi$)*, en las ecuaciones diferenciales que rigen el proceso, adaptando la condición de homogeneidad:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \cdot Q = 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = 1 \end{array}\right\}$$

Efectuando el cálculo, resulta:

$$\left.\begin{array}{c} -\lambda_0\pi_0 + \mu_1\pi_1 = 0 \\ \lambda_0\pi_0 - (\lambda_1 + \mu_1)\pi_1 + \mu_2\pi_2 = 0 \\ \dots \\ \lambda_{n-1}\pi_{n-1} - (\lambda_n + \mu_n)\pi_n + \mu_{n+1}\pi_{n+1} = 0 \\ \dots \\ \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = 1 \end{array}\right\}$$

Resolvamos la primera ecuación:

$$\lambda_0\pi_0 = \mu_1\pi_1 \quad \Rightarrow \quad \pi_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0$$

Para la segunda:

$$\mu_2\pi_2 = (\lambda_1 + \mu_1)\pi_1 - \lambda_0\pi_0 \quad \Rightarrow \quad \mu_2\pi_2 = (\lambda_1 + \mu_1)\frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0 - \lambda_0\pi_0 \quad \Rightarrow \pi_2 = \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}\pi_0$$

Utilizando el método de inducción completa, supongamos que para el caso (n) es:

$$\pi_n = \frac{\lambda_0\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2 \cdot \ldots \cdot \mu_n}\pi_0$$

y demostremos que es válida para *(n+1)*:

$$\mu_{n+1}\pi_{n+1} = (\lambda_n + \mu_n)\pi_n - \lambda_{n-1}\pi_{n-1} \quad \Rightarrow \mu_{n+1}\pi_{n+1} = (\lambda_n + \mu_n)\frac{\lambda_0\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2 \cdot \ldots \cdot \mu_n}\pi_0 - \lambda_{n-1}\pi_{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \mu_{n+1}\pi_{n+1} = \frac{\lambda_0\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n}{\mu_1\mu_2 \cdot \ldots \cdot \mu_n}\pi_0 + \frac{\lambda_0\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2 \cdot \ldots \cdot \mu_{n-1}}\pi_0 - \frac{\lambda_0\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2 \cdot \ldots \cdot \mu_{n-1}}\pi_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \pi_{n+1} = \frac{\lambda_0\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n}{\mu_1\mu_2 \cdot \ldots \cdot \mu_{n+1}}\pi_0, \quad n \geq 1$$

Ahora bien, utilizando la última ecuación:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\pi_n = 1 \quad \Rightarrow \quad \pi_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_0 \cdot \ldots \cdot \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdot \ldots \cdot \mu_n}\right)\pi_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad \pi_0\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_0 \cdot \ldots \cdot \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdot \ldots \cdot \mu_n}\right)\right) = 1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_0 \cdot \ldots \cdot \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdot \ldots \cdot \mu_n}\right)}$$

de manera que la condición necesaria para la existencia de distribución estacionaria es:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_0 \cdot \lambda_1 \ldots \cdot \lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2 \cdot \ldots \cdot \mu_n}\right) < \infty$$

## 2.1. ALGUNOS PROCESOS DE NACIMIENTO Y MUERTE HOMOGÉNEOS.

A continuación, se presentan algunos casos notables de procesos de nacimiento y muerte homogéneos.

### 2.1.1. EL PROCESO CON TASAS CONSTANTES.

Constituye el proceso más elemental de nacimiento y muerte homogéneo, en el que las tasas son constantes; es decir, que no dependen del número de individuos en la población:

$$\lambda_n = \lambda, \quad \mu_n = \mu, \quad \forall n \geq 0$$

Este tipo de proceso se ha aplicado con frecuencia en fenómenos relacionados con la evolución dinámica de poblaciones y en el estudio de líneas de espera.

En este caso, el comportamiento del proceso sigue los patrones generales sin más que particularizar. Estudiemos, no obstante, el comportamiento a largo plazo. Así pues, ahora la condición necesaria para la existencia de distribución estacionaria es:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_0\cdot\lambda_1\ldots\cdot\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdot\ldots\cdot\mu_n}\right)<\infty \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n<\infty \quad \Leftrightarrow \quad \lambda<\mu$$

Así pues:

$$\pi_0=\frac{1}{1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_0\cdot\ldots\cdot\lambda_{n-1}}{\mu_1\cdot\ldots\cdot\mu_n}\right)}=\frac{1}{1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}=\frac{1}{1+\frac{\lambda}{\mu-\lambda}}=\frac{\mu-\lambda}{\mu}=1-\frac{\lambda}{\mu}$$

y, por lo tanto:

$$\pi_n=\frac{\lambda_0\lambda_1\cdot\ldots\cdot\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdot\ldots\cdot\mu_n}\pi_0=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\cdot\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right),\quad n\geq 1$$

### 2.1.2. EL PROCESODE ERLANG.

La diferencia con el proceso anterior viene determinada porque la tasa de servicio es proporcional al número de individuos de la población. Por ello, ha sido aplicado fructíferamente en el estudio de líneas de espera con varios servidores y en telefonía. Así pues, las tasas de nacimiento y muerte ahora serán:

$$\lambda_n=\lambda,\quad \mu_n=n.\mu,\quad \forall n\geq 0$$

Pasemos a estudiar su comportamiento a largo plazo. Ahora:

$$\pi_0=\frac{1}{1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_0\cdot\ldots\cdot\lambda_{n-1}}{\mu_1\cdot\ldots\cdot\mu_n}\right)}=\frac{1}{1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}=e^{-\left\|\lambda/\mu\right\|}$$

de manera que:

$$\pi_n=\frac{\lambda_0\lambda_1\cdot\ldots\cdot\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdot\ldots\cdot\mu_n}\pi_0=\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\cdot e^{-\frac{\lambda}{\mu}},\quad n\geq 1$$

y, por lo tanto, se obtiene que, a largo plazo, la distribución estacionaria es de Poisson:

$$\pi \sim \wp(\lambda/\mu)$$

## 3. PROCESOS PUROS DE NACIMIENTO.

Como se indicó al comienzo del tema, un proceso puro de nacimiento es aquel proceso de nacimiento y muerte en el que no ocurren muertes, sino sólo nacimientos. Es decir, con respecto al planteamiento general:

$$\mu_n(t)=0,\ \forall t\geq 0,\ \forall n\in \mathbf{N}\cup\{0\}$$

Las expresiones desarrolladas con carácter general son válidas sin más que particularizar la condición anterior. Por lo tanto, presentaremos algunos de los casos particulares más interesantes de este tipo de procesos.

### 3.1. EL PROCESO DE POISSON.

El proceso de Poisson es el caso de referencia en el estudio de los procesos estocásticos con espacio de discreto de estados. Corresponde a un proceso puro de nacimiento con tasa constante de nacimiento. Por lo tanto, un proceso puro de nacimiento es de Poisson cuando su tasa de nacimiento es:

$$\lambda_n = \lambda, \quad \forall n \geq 0$$

Sus campos de aplicación son múltiples, pudiendo destacarse los relacionados con los modelos adecuados al número de siniestros registrados, la astronomía, el número de averías ó las llegadas a líneas de espera, entre otros.

Obviamente, ya que no se producen *muertes,* este tipo de procesos son siempre evolutivos, sin que pueda alcanzarse una distribución estacionaria. Particularizando las ecuaciones diferenciales obtenidas de modo general, aquellas que definen a un proceso de Poisson serán:

$$\left.\begin{array}{r} P_n'(t) = \lambda.P_{n-1}(t) - \lambda.P_n(t)\,, \quad n \geq 1 \\ P_0'(t) = -\lambda.P_0(t) \qquad\qquad \end{array}\right\}$$

cuya solución, por recurrencia, conduce a:

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot e^{-\lambda t} \;, \quad n \geq 0$$

y, por lo tanto, la distribución de las variables aleatorias que integran el proceso es de Poisson:

$$X_t \sim \wp(\lambda t)\;, \quad \forall t>0$$

### 3.2. EL PROCESO DE YULE-FERRY.

Este proceso difiere del anterior en que ahora la tasa de nacimientos es proporcional al número de individuos que hay en la población. Por lo tanto, ahora:

$$\lambda_n = n.\lambda\;, \quad \forall n \geq 1\,, \quad X_0 = r \geq 1$$

donde puede observarse como se supone que, en el instante inicial existen *r* individuos en la población. Por ello, se ha utilizado como modelo para la propagación de epidemias y para estudiar la evolución de especies vivas. En este caso, las ecuaciones diferenciales que rigen el proceso quedan determinadas por:

$$P_n'(t) = (n-1).\lambda.P_{n-1}(t) - n.\lambda.P_n(t)\,, \quad n \geq 1$$

cuya solución, por recurrencia, conduce a:

$$P_{r,n}(t) = \binom{n-1}{n-r} \cdot e^{-r\lambda t} .(1 - e^{-\lambda t})^{n-r} \;, \quad \forall n \geq r$$

es decir, corresponde a una distribución binomial negativa:

$$X_t - X_0 \sim BN(r, e^{-\lambda t})$$

Como en el caso anterior, al tratarse de un proceso de nacimiento puro, no cabe hablar de distribución estacionaria, ya que se trata de un proceso evolutivo.

## 4. PROCESOS PUROS DE MUERTE.

Análogamente al caso anterior, un proceso puro de muerte es aquel proceso de nacimiento y muerte en el que no ocurren nacimientos, sino sólo muertes. Es decir, con respecto al planteamiento general:

$$\lambda_n(t)=0, \ \forall t\geq 0, \ \forall n\in \mathbf{N}\cup\{0\},$$

debiéndose admitir que existen elementos en la población en el instante inicial para que puedan producirse bajas ($\exists\, r>0: P(X_0=r)=1$), correspondiendo por lo tanto a procesos que identifican fenómenos de descuento

Las expresiones desarrolladas con carácter general son válidas sin más que particularizar las condiciones anteriores. Sin embargo, conviene destacar que el comportamiento a largo plazo de estos procesos viene determinado por la extinción de la población, teniendo en cuenta las características expuestas. Por lo tanto, presentaremos algunos de los casos particulares más interesantes de este tipo de procesos.

## 4.1. EL PROCESO PURO DE MUERTE CON TASA CONSTANTE.

Corresponde al caso en que la tasa de muerte es constante, tanto con respecto al tiempo como con respecto al número de individuos que quedan en la población. Así pues, quedará definido mediante:

$$\mu_n = \mu, \quad \forall n \geq 1, \quad X_0 = r$$

Este tipo de proceso encuentra su principal campo de aplicación en el estudio de modelos de extinción.

Particularizando las ecuaciones diferenciales generales del proceso de nacimiento y muerte, queda:

$$\left.\begin{array}{c} P'_r(t) = -\mu.P_r(t) \\ P'_n(t) = -\mu.P_n(t) + \mu.P_{n+1}(t), \quad 0 < n < r \\ P'_0(t) = \mu.P_1(t) \end{array}\right\}$$

cuya solución conduce a la expresión:

$$P_n(t) = \frac{(\mu.t)^{r-n}}{(r-n)!.\sum_{i=0}^{r} \frac{(\mu.t)^i}{i!}} \quad , n \leq r$$

que corresponde a una distribución de Poisson truncada.

## 4.2. EL PROCESO PURO DE MUERTE CON TASA LINEAL.

En este caso, la tasa de muerte es proporcional al número de individuos que quedan en la población. Por lo tanto, queda definido mediante:

$$\mu_n = n.\mu, \quad \forall n \geq 1, \quad X_0 = r$$

Este tipo de procesos se ha utilizado como modelo para gestión de inventarios, así como para fenómenos de emigración, entre otros. Particularizando las ecuaciones diferenciales generales de los procesos de nacimiento y muerte, queda:

$$\left.\begin{array}{c} P_r'(t) = -r.\mu.P_r(t) \\ P_n'(t) = -n.\mu.P_n(t) + (n+1).\mu.P_{n+1}(t)\,, \quad 0 < n < r \\ P_0'(t) = \mu.P_1(t) \end{array}\right\}$$

que conduce a la solución:

$$P_n(t) = \binom{r}{n} \cdot e^{-n\mu t}.(1 - e^{-\mu t})^{r-n}\,, \quad n \le r$$

es decir, que las variables que integran el proceso responden a la distribución:

$$X_t \sim B(r, e^{-\mu t})$$

**5. MODELOS DE COLAS.**

Los modelos de colas ó fenómenos de espera constituyen un campo de aplicación directo de los procesos de nacimiento y muerte presentados con anterioridad. En estos, se trata de generar un modelo que permita el análisis de líneas de espera que se forman mediante clientes que llegan a un sistema esperando ser servidos. Existen diversas medidas que permiten estudiar la eficiencia de este tipo de sistemas, y que contribuyen a mejorar sus prestaciones.

En primer lugar, se pasará revisión a los rasgos esenciales que caracterizan este tipo de sistemas. Así, dos elementos esenciales son el tiempo transcurrido entre llegadas consecutivas y el tiempo que requiere dar servicio a cada cliente. En general, estos rasgos quedan determinados por su distribución de probabilidad, aunque una clasificación operativa podría ser la siguiente:

**M**.- Distribución Exponencial (Procesos de Markov).

**$M_k$.-** Distribución de Erlang (suma de k exponenciales independientes e idénticamente distribuidas).

**D.-** Distribución determinística.

**G.-** Distribución de tipo general.

Otros aspectos que merecen destacarse son el número de servidores presentes en el sistema, caracterizado por un número natural ($c\in \mathbf{N}$); la capacidad total para albergar clientes en el sistema, que puede venir determinada por un número natural ($k\in \mathbf{N}$) si la sala de espera está limitada (como una consulta ó un garaje) ó bien puede ser ilimitada; y, finalmente, la disciplina de servicio, que rige de qué modo serán servidos los clientes que ingresen en el sistema y que podría ser de tipo **FIFO** (será la opción que supondremos en adelante, que consiste en *first in, first out*, es decir, se sirve a los clientes según el orden de entrada en el sistema), de tipo **LIFO** (*last in, first out*, que significa que se sirve a los clientes en orden inverso a su entrada en el sistema), en **tiempo compartido** (propio de la arquitectura de las CPU de los sistemas informáticos), etc.

Para identificar de manera resumida las características de los modelos de colas, suele utilizarse la denominada *notación de Kendall*, que, suponiendo en todo momento que la disciplina de servicio es de tipo FIFO, utiliza el esquema siguiente:

Distribución llegada / Distribución servicio/ Número de servidores / Capacidad

de manera que un modelo del tipo **M/M/1/k**, identifica un sistema en el que los clientes llegan con tiempos distribuidos según una distribución exponencial, son servidos mediante un proceso cuya duración es también exponencial, disponen de un solo servidor ó ventanilla y esperan en una sala cuya capacidad está limitada para contener un máximo de k clientes.

Las medidas que se utilizan para analizar la eficacia de un sistema de este tipo suelen denominarse *medidas de efectividad* y, entre ellas, son de especial interés, el número medio de clientes en el sistema (**L**), el número medio de clientes que esperan en cola (**$L_q$**), el tiempo medio de espera en el sistema que debe soportar un cliente (**W**) y el tiempo medio de espera en la cola (**$W_q$**), así como las tasas medias de entrada en el sistema ($\lambda$) y de salida del mismo ($\mu$).

Con carácter general, en el planteamiento efectuado son las conocidas como *fórmulas de Little,* que permiten relacionar las longitudes medias de la cola y del número de clientes en el sistema con el tiempo que invierten, respectivamente, y que vienen determinadas por:

$$L = \lambda.W$$
$$L_q = \lambda.W_q.$$

A continuación, se presentan tres de los sistemas de colas que destacan por su aplicabilidad práctica, unida a su simplicidad analítica.

**5.1. EL SISTEMA M/M/1.**

En un sistema de este tipo, los clientes llegan con tiempos distribuidos según un modelo exponencial de parámetro $\lambda$, y son atendidos de manera que el tiempo de servicio se distribuye también de manera exponencial, pero ahora de parámetro $\mu$. Así pues, en esencia, constituye un proceso de nacimiento y muerte homogéneo con tasa constantes respectivas $\lambda$ y $\mu$. Por lo tanto, de acuerdo con lo expuesto, la condición necesaria para que el sistema alcance el estado estacionario es que:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1 ,$$

que suele conocerse con el nombre de *intensidad de tráfico*. En este caso, la distribución estacionaria será, de acuerdo con la deducción efectuada anteriormente:

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$
$$P_n = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n , \quad n \geq 1$$

Las medidas de efectividad asociadas serán las siguientes. En primer lugar, el número medio de clientes en el sistema, una vez alcanzado el régimen estacionario, vendrá dado por:

$$L = E(\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} n.P_n = \frac{\lambda}{\mu - \lambda},$$

lo que muestra cómo la congestión crece cuando al intensidad de tráfico ($\rho=\lambda/\mu$) se acerca hacia 1.

Haciendo uso de la fórmula de Little, puede obtenerse el tiempo medio de espera en el sistema:

$$L = \lambda.W \Rightarrow \quad W = \frac{1}{\lambda} \cdot L = \frac{1}{\mu - \lambda},$$

y puede demostrarse que el tiempo de espera en el sistema se distribuye exponencialmente con parámetro ($\mu$-$\lambda$).

El tiempo medio de espera en la cola se puede obtener como sigue:

$$W_q = W - E(S) = W - \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu.(\mu - \lambda)},$$

y, haciendo uso nuevamente de la fórmula de Little, la longitud media de la cloa vendrá dada por:

$$L_q = \lambda.W_q = \frac{\lambda^2}{\mu.(\mu - \lambda)} = L - \frac{\lambda}{\mu}$$

## 5.2. EL SISTEMA M/M/1/k.

En esta variante del sistema anterior, la sala de espera está limitada por una capacidad máxima para k clientes. Así pues, ahora no es necesario que la intensidad de tráfico verifique la condición $\rho=(\lambda/\mu)<1$ para que se alcance el régimen estacionario, ya que la limitación de la sala de espera hará que este se alcance en cualquier caso. Ahora, las ecuaciones que rigen el sistema, de manera general, serán:

$$\left.\begin{array}{c} P_0'(t) = -\lambda.P_0(t) + \mu.P_1(t) \\ P_n'(t) = \lambda.P_{n-1}(t) - (\lambda+\mu).P_n(t) + \mu.P_{n+1}(t)\,, \quad 1 \le n \le k-1 \\ P_k'(t) = \lambda.P_{k-1}(t) - \mu.P_k(t) \end{array}\right\}$$

El régimen estacionario se alcanzará cuando las derivadas del sistema anterior de ecuaciones diferenciales se anulen, de manera que:

$$\begin{array}{l} P_n'(t) = 0\,, \quad 0 \le n \le k \\ P_n(t) = P_n\,, \quad 0 \le n \le k \end{array},$$

obteniéndose que:

$$P_n = \frac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}} \cdot \rho^n\,, \quad n = 0,1,\ldots,k$$

Pasemos, a continuación, a obtener las medidas de efectividad correspondientes a este sistema. El número medio de individuos en el sistema viene dado por:

$$L = \sum_{n=0}^{k} n.P_n = \frac{\rho}{1-\rho} \cdot \frac{1-(k+1).\rho^k + k.\rho^{k+1}}{1-\rho^{k+1}}\,,$$

En este caso, para poder aplicar la fórmula de Little, debe tenerse en cuenta que el tiempo entre llegadas se interrumpe cuando la sala de espera está llena. Por lo tanto, la tasa efectiva de entrada al sistema ahora es:

$$\lambda^* = 0.P_k + \lambda.(1-P_k) = \lambda.(1-P_k)$$

Por lo tanto, el tiempo medio de espera en el sistema es:

$$W = \frac{1}{\lambda^*} \cdot L = \frac{L}{\lambda.(1-P_k)}$$

El tiempo medio de espera en la cola es:

$$W_q = W - E(S) = \frac{L}{\lambda.(1-P_k)} - \frac{1}{\mu},$$

y la longitud media de la cola será:

$$L_q = \lambda^*.W_q = L - \frac{\lambda.(1-P_k)}{\mu}$$

## 5.2. EL SISTEMA M/M/c.

En este caso, se dispone de *c* servidores, cada uno con una tasa media de servicio de $\mu$. De esta manera, se forma una única cola de clientes pero pueden ser atendidos por cualquiera de los *c* servidores, conforme vayan quedando libres. En esencia, el proceso estocástico que rige el sistema es de nacimiento y muerte, en el que las tasas de entrada y de salida son, respectivamente, las siguientes:

$$\lambda_n = \lambda, \quad n \geq 0$$
$$\mu_n = \begin{cases} n.\mu, & 0 \leq n \leq c \\ c.\mu, & n \geq c \end{cases}$$

Por lo tanto, el proceso alcanzará el régimen estacionario sólo si:

$$\rho = \frac{\lambda}{c.\mu} < 1$$

Haciendo uso de las técnicas expuestas en los puntos anteriores, la distribución estacionaria vendrá determinada por:

$$P_0 = \left[ \sum_{n=0}^{c-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^c}{c!} \cdot \left( \frac{c.\mu}{c.\mu - \lambda} \right) \right]^{-1}$$

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \cdot P_0 \,, & n \le c \\ \dfrac{(\lambda/\mu)^n}{c!.c^{n-c}} \cdot P_0 \,, & n > c \end{cases}$$

Teniendo en cuenta esta distribución estacionaria, las medidas de efectividad correspondientes resultan ser:

Longitud media de la cola: $L_q = \sum_{n=c}^{\infty} (n-c).P_n = \dfrac{\lambda.\mu.(\lambda/\mu)^c}{(c-1)!.(c.\mu-\lambda)^2} \cdot P_0$

Tiempo medio de espera en la cola: $W_q = (L_q / \lambda)$

Tiempo medio de espera en el sistema: $W = W_q + (1/\mu)$

Número medio de clientes en el sistema: $L = \lambda.W = L_q + (\lambda/\mu)$

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

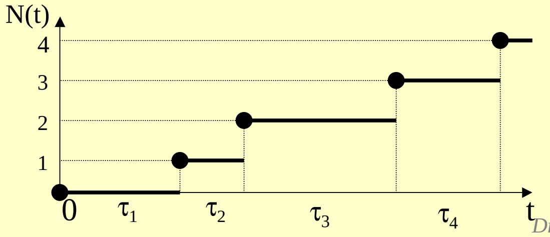
# Procesos de Poisson

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

## Procesos de Recuento

- Definición:
  N(t) = "Número de Ocurrencias hasta el instante t", $t \geq 0$
- Espacio de Estados: S = 0,1,2,3,...,n,...
- Aplicaciones: Llegadas, Entradas, Sucesos, etc.
- Tiempo entre Ocurrencias:
  $\tau_1=t_1,\ \tau_2=t_2-t_1,\ \tau_3=t_3-t_2,\ \ldots,\ \tau_n=t_n-t_{n-1},\ \ldots,\ 0<t_1<t_2<\ldots<t_{n-1}<t_n<\ldots$




*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I. Universidad de Alcalá.*

# Procesos de Poisson

• Un proceso de recuento $\{N(t), t \geq 0\}$ es un *Proceso de Poisson con tasa* $\lambda$ ($\lambda>0$) si:

i) $N(0) = 0$.

ii) Tiene incrementos independientes: $N(t_1)$, $N(t_2)$-$N(t_1)$,...

iii) $N(t) \sim \wp(\lambda t)$, $\forall t\geq 0$. Además:

$$P[N(t+s) - N(s) = n] = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, \; n = 0,1,..., \; \forall s,t \geq 0$$

• Consecuencias:

1.- El Proceso de Nacimiento Puro con Tasa Constante es de Poisson.

2.- El Proceso N(t) es de Poisson si y sólo si los tiempos entre ocurrencias son independientes y distribuidos Exp($\lambda$).

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I. Universidad de Alcalá.*

# Definición Axiomática

• Un proceso de recuento $\{N(t), t \geq 0\}$ es un *Proceso de Poisson con tasa* $\lambda$ ($\lambda>0$) si:

i) $N(0) = 0$.

ii) Tiene incrementos independientes y estacionarios.

iii) $P[N(t) \geq 2] = o(t)$

iv) $P[N(t) = 1] = \lambda.t + o(t)$

# Procesos Puros de Nacimiento

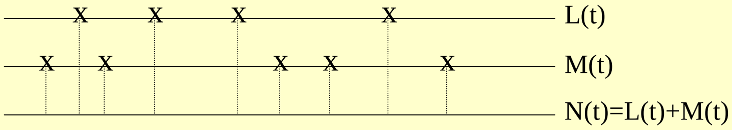
$\lambda_n=\lambda, \forall n\geq 0$

$$P_n(t) = P[N(t)=n] \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} P_0'(t) = -\lambda.P_0(t) \\ P_n'(t) = -\lambda.P_n(t) + \lambda.P_{n-1}(t) \end{array} \right\} \; P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \; n \geq 0 \quad N(t) \sim \wp(\lambda t), \; \forall t>0$$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

## Superposición de Procesos de Poisson




• Si $\{L(t), t \geq 0\}$ y $\{M(t), t \geq 0\}$ son dos procesos de Poisson independientes, con tasas respectivas $\lambda$ y $\mu$, entonces su *superposición* $\{N(t), t \geq 0\}$:

$$N(t) = L(t) + M(t)$$

es también un proceso de Poisson con tasa:

$$\nu = \lambda + \mu$$

• <u>Aplicaciones</u>: Acumulación de ocurrencias generadas por varios procesos de Poisson. Ej.: Nº Total de Vehículos que acceden a un cruce.

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

## Descomposición de Procesos de Poisson

• Sea $\{N(t), t \geq 0\}$ un proceso de Poisson con tasa $\lambda$, y supongamos que cada ocurrencia puede clasificarse, independientemente de las demás, como:

Tipo I, con probabilidad p

Tipo II, con probabilidad q=1-p,

entonces los procesos definidos por:

L(t) = "Nº de ocurrencias de tipo I hasta el instante t", $t \geq 0$

M(t) = "Nº de ocurrencias de tipo II hasta el instante t", $t \geq 0$

son independientes y de Poisson con tasas respectivas $\lambda p$ y $\lambda q$.

• <u>Aplicaciones</u>: Diversificación de categorías en las ocurrencias de los Procesos de Poisson. Ej: Llegadas a una tienda, según sexo.

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

## Modelo de Demanda en un Restaurante de Carretera

DATOS:

- Los vehículos llegan según un proceso de Poisson con una tasa constante de 20 por hora.
- Los vehículos contienen 1,2,3,4 o 5 personas con probabilidades respectivas de 0.3,0.3,0.2,0.1 y 0.1.

MODELO:

- $N(t)$ = "Nº de Vehículos que llegan hasta el instante t (horas)", $t \geq 0$
- $N_i(t)$="Nº de Vehículos con i personas hasta el instante t (hs)",$t \geq 0$
- $\{N_i(t), t \geq 0\}$ son de Poisson con tasas 6,6,4,2 y 2, e independientes.
- El número medio de vehículos por hora es 20 y el número medio de personas será:

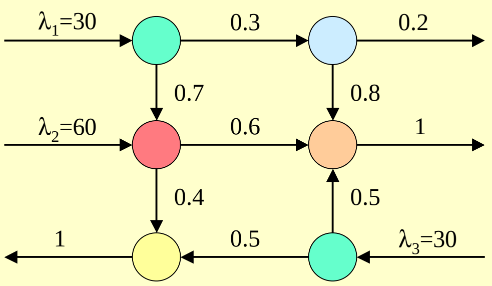
$$E\left(\sum_{i=1}^{5} i.N_i\right) = \sum_{i=1}^{5} i.E(N_i) = 48$$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

## Modelo para el Flujo de Tráfico en una Red Vial

A la siguiente red vial, los vehículos llegan mediante procesos de Poisson con las tasas por hora indicadas, lo que permite estimar los flujos de tráfico soportados, según las probabilidades de giro:




- La circulación total soportada por la red es de 120 vehículos/hora.
- El tráfico soportado por los nudos de la red oscila entre los 81 y los 9 vehículos/hora.

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

## Procesos de Poisson no Homogéneos

• Un proceso de recuento $\{N(t), t \geq 0\}$ es un *Proceso de Poisson no homogéneo con función de intensidad* $\lambda(t)$ si:

i) $N(0) = 0$.

ii) Tiene incrementos independientes: $N(t_1)$, $N(t_2)-N(t_1)$,...

iii) $N(t) \sim \wp(m(t))$, $\forall t \geq 0$, donde $m(t)$ es la función media:

$$m(t) = \int_0^t \lambda(z)dz$$

Además:

$$P[N(t+s)-N(s)=n] = e^{-[m(t+s)-m(s)]} \cdot \frac{[m(t+s)-m(s)]^n}{n!}, \; n \geq 0, \forall s,t \geq 0$$

• Es un proceso puro de nacimiento no homogéneo con tasa $\lambda(t)$.

• Los tiempos entre ocurrencias son también exponenciales pero dependientes del instante en que aparece la primera de ellas.

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

## Modelo de Demanda de un Comercio

$X(t)$=“Nº de clientes que acuden hasta el instante t (horas)”, $t \geq 0$

La tasa de llegada es la siguiente, de acuerdo con un proceso de Poisson no homogéneo:

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 8 \\ 5+5(t-8), & 8 \leq t \leq 11 \\ 20, & 11 \leq t \leq 13 \\ 20-2(t-13), & 13 \leq t \leq 17 \\ 0, & 17 < t \leq 24 \end{cases}$$

$$\lambda(t) = \lambda(t-24), \; t > 24$$

Por ejemplo, entre las 8:30 y las 9:30, el número de clientes se distribuye según Poisson con parámetro:

$$m\left(\tfrac{19}{2}\right)-m\left(\tfrac{17}{2}\right) = \int_{17/2}^{19/2} [5+5(t-8)]dt = 10$$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

# Procesos de Poisson Compuestos

• Un proceso $\{X(t),t \geq 0\}$ es un *Proceso de Poisson Compuesto* si:

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, \ \ t \geq 0$$

donde $\{N(t), t \geq 0\}$ es un proceso de Poisson y $\{Y_n, n \geq 0\}$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuídas e independientes también de $\{N(t), t \geq 0\}$.

• Aplicaciones: Total de Recursos derivados por las ocurrencias generadas según un proceso de Poisson. (Ej.:Cantidad de Viajeros Transportados por una línea de autobuses).

• Características: Media: $m(t) = E[X(t)] = \lambda t E(Y)$

Varianza: $\sigma^2(t) = Var[X(t)] = \lambda t E(Y^2)$

Covarianza: $\gamma(s,t) = \lambda.\min(s,t).E(Y^2)$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

# Modelo de una Aseguradora de Vida

DATOS:

• Las reclamaciones se producen según un proceso de Poisson con una tasa de 5 por semana.

• La cantidad pagada, en ptas., se distribuye exponencialmente con media de 5 millones.

MODELO:

• $N(t)$ = "Nº Reclamaciones hasta el instante t (semanas)", $t \geq 0$

• $Y_n$ = "Cantidad desembolsada por la póliza n (millones)"~ Exp(0.2)

• $X(t)$ = "Cantidad desembolsada en el instante t (semanas)"

• $X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \ , t \geq 0$

Por término medio, el desembolso semanal es de 25 millones, para las 5 pólizas que se reclaman.

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

# TEMA 6:

# PROCESOS DE POISSON.

**PREPARADO POR:** José Javier Núñez Velázquez.
Prof. Titular de Universidad.
Universidad de Alcalá

## 1. PROCESOS DE RECUENTO.

Un proceso de recuento ó de conteo es, simplemente, un proceso estocástico que permite contabilizar el número de sucesos de un determinado tipo, que se producen en el transcurso del tiempo mediante un mecanismo de índole aleatoria.

Así, de manera más formal, se dirá que un proceso estocástico $\{N(t), t\geq 0\}$ es *de recuento* ó *de conteo* si se define de manera genérica del siguiente modo:

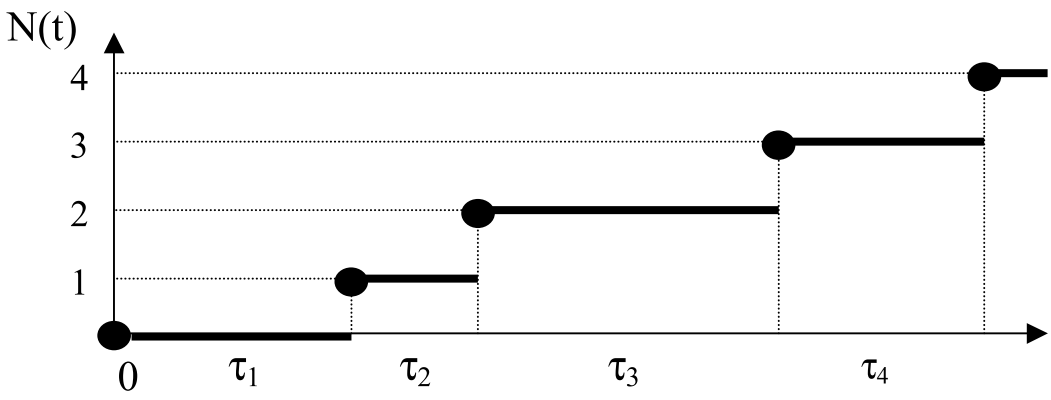
N(t) = "Número de Ocurrencias registradas hasta el instante t" , $t \geq 0$,

donde las ocurrencias se refieren a la aparición, o no, de un suceso determinado. Resulta evidente que el espacio de estados asociado es $S=\{0,1,2,...,n,...\}=\mathbf{N}\cup\{0\}$, siendo **N** el conjunto de los números naturales.

Los procesos de recuento encuentran aplicación en gran cantidad de situaciones prácticas, teniendo en cuenta su versatilidad; en particular, puede citarse las llegadas, entradas y el recuento de siniestros, como campos de aplicación. Las trayectorias del proceso vienen determinadas por los instantes temporales en que han tenido lugar las ocurrencias observadas; supóngase, por ejemplo, que se han producido en los instantes $t_1, t_2, ..., t_{n-1}, t_n, ...$ , de manera que $0< t_1< t_2< ...< t_{n-1}< t_n<...$ . Los intervalos de tiempo transcurridos entre ocurrencias consecutivas son variables aleatorias $(\tau_i)$, definidas por:

$$\tau_1 = t_1, \quad \tau_2 = t_2 - t_1, \dots, \quad \tau_n - \tau_{n-1}, \dots, \quad 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n < \dots .$$

Gráficamente, puede visualizarse de la siguiente manera:



## 2. PROCESOS DE POISSON.

A continuación, se presenta, en primer lugar, la definición descriptiva del proceso de Poisson, para luego obtener dos definiciones equivalentes, que lo caracterizan de manera axiomática y como un proceso puro de nacimiento con tasa constante, respectivamente. Esta variedad muestra la versatilidad de este tipo de procesos, que juega un papel clave en la teoría de las cadenas de Markov en tiempo continuo.

**Definición 2.1. (Proceso de Poisson)**

Un proceso de recuento $\{N(t), t\geq 0\}$ es un *proceso de Poisson con tasa $\lambda$ ($\lambda$>0)* si verifica las siguientes condiciones:

i) $N(0) = 0$.

ii) Tiene incrementos independientes ( $N(t_1)$, $N(t_2)$-$N(t_1)$, ..., $0<t_1<t_2<\ldots$).

iii) La distribución de los incrementos es:

$$P[N(t+s)-N(s)=n]=\frac{(\lambda.t)^n}{n!}\cdot e^{-\lambda t}\ , \quad n=0,1,2,\ldots\ , \quad \forall s,t\geq 0$$

De la condición iii), se deduce inmediatamente, teniendo en cuenta que $N(0)=0$, que las distribuciones de primer orden del proceso son de Poisson:

$$N(t) \sim \wp(\lambda.t)\ , \quad \forall t\geq 0.$$

A continuación, se propone una definición equivalente de los procesos de Poisson, en términos axiomáticos.

**Proposición 2.1. (Caracterización axiomática del proceso de Poisson).**

Un proceso estocástico $\{N(t), t\geq 0\}$ es un proceso de Poisson con tasa $\lambda$ *($\lambda$>0)* si y sólo si satisface las siguientes condiciones:

i) $N(0)=0$.

ii) Tiene incrementos independientes y estacionarios.

iii) $P[N(t)\geq 2]=o(t)$.

iv) $P[N(t)=1]=\lambda.t+o(t)$,

siendo o(t) un infinitésimo de orden superior a *t*.

Demostración.

⇒) Teniendo en cuenta la definición 2.1, las condiciones i) y ii) son inmediatas. Además, puesto que $N(t) \sim \wp(\lambda.t)$, $\forall t \geq 0$:

$$P[N(t)=1]=\lambda.t.e^{-\lambda t}=\lambda.t.\left(1+\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i.\frac{(\lambda.t)^i}{i!}\right)=\lambda.t+o(t),$$

lo que prueba la condición iv).

$$\begin{aligned}P[N(t)\geq 2]&=1-P[N(t)=0]-P[N(t)=1]=1-e^{-\lambda t}-\lambda.t.e^{-\lambda t}=1-e^{-\lambda t}(1+\lambda.t)=\\&=1-(1+\lambda.t).\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i.\frac{(\lambda.t)^i}{i!}=-\lambda.t-(1+\lambda.t).\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i.\frac{(\lambda.t)^i}{i!}=\\&=(\lambda.t)^2-(1+\lambda.t).\sum_{i=2}^{\infty}(-1)^i.\frac{(\lambda.t)^i}{i!}=o(t)\end{aligned}$$

lo que prueba la condición iii).

⇐) Basta con comprobar que los incrementos estacionarios se distribuyen según una ley de Poisson. Así, sea $P_n(t)=P[N(t)=n]$, entonces, utilizando que los incrementos son independientes y estacionarios:

$$\begin{aligned}P_0(t+h)&=P[N(t+h)=0]=P[N(t)=0;N(t+h)-N(t)=0]=\\&=P[N(t)=0].P[N(t+h)-N(t)=0]=P_0(t).P_0(h)\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\frac{P_0(t+h)-P_0(t)}{h}=\frac{P_0(t).P_0(h)-P_0(t)}{h}=P_0(t).\frac{P_0(h)-1}{h}$$

Usando iii) y iv), se tiene que $P_0(h)=1-\lambda.h+o(h)$, y, tomando límite cuando $h\rightarrow 0$, queda:

$$P_0'(t)=-\lambda.P_0(t)$$

Pasemos ahora al caso n>0, utilizando de nuevo que los incrementos son independientes y estacionarios, además de las condiciones iii) y iv), de modo similar:

$$\begin{aligned}
P_n(t+h) &= P[N(t+h)=n] = \\
&= P[N(t)=n;\, N(t+h)-N(t)=0] + P[N(t)=n-1;\, N(t+h)-N(t)=1] + \\
&+ \sum_{k=2}^{n} P[N(t)=n-k;\, N(t+h)-N(t)=k] = P_n(t).P_0(h) + P_{n-1}(t).P_1(h) + o(h) = \\
&= P_n(t).\left(1-\lambda.h+o(h)\right) + P_{n-1}(t).\left(\lambda.h+o(h)\right) + o(h)
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\frac{P_n(t+h)-P_n(t)}{h} = \frac{(1-\lambda.h+o(h)).P_n(t)-P_n(t)}{h} + \frac{(\lambda.h+o(h)).P_{n-1}(t)+o(h)}{h}$$

Tomando límite cuando h tiende a 0, queda:

$$P_n'(t) = -\lambda.P_n(t) + \lambda.P_{n-1}(t)$$

Así pues, sólo queda resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\left.\begin{aligned}
&P_0'(t) = -\lambda.P_0(t) \\
&P_n'(t) = -\lambda.P_n(t) + \lambda.P_{n-1}(t) \;, \quad n>0
\end{aligned}\right\}$$

La primera ecuación se resuelve fácilmente:

$$\frac{P_0'(t)}{P_0(t)} = -\lambda \quad \Rightarrow \operatorname{Ln} P_0(t) = -\lambda.t + C \quad \Rightarrow P_0(t) = K.e^{-\lambda t}$$

Además, ya que N(0)=0, se tiene que $P_0(0) = 1$ y, por lo tanto, la constante vale K=1, de manera que:

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

Pasemos ahora al caso n=1, en el que la ecuación diferencial queda:

$$P_1'(t) = -\lambda.P_1(t) + \lambda.P_0(t) = -\lambda.P_1(t) + \lambda.e^{-\lambda t} ,$$

que es una ecuación diferencial lineal de primer orden, que se resolverá utilizando el método de variación de la constante. Para ello, comencemos resolviendo la ecuación homogénea, que resulta ser similar al caso $n = 0$:

$$P_1'(t) = -\lambda.P_1(t) \quad \Rightarrow P_1(t) = K.e^{-\lambda t}$$

Ahora, hagamos "variar" la constante, $K = K(t)$:

$$P_1'(t) + \lambda.P_1(t) = \lambda.e^{-\lambda t} \quad \Rightarrow K'(t).e^{-\lambda t} - \lambda.K(t).e^{-\lambda t} + \lambda.K(t).e^{-\lambda t} = \lambda.e^{-\lambda t} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow K'(t).e^{-\lambda t} = \lambda.e^{-\lambda t} \quad \Rightarrow K(t) = \lambda.t + C$$

Por lo tanto, la solución general queda:

$$P_1(t) = (\lambda.t + C).e^{-\lambda t}$$

Como N(0)=0, se tiene que $P_1(0)=0$ y, por lo tanto, C=0, quedando definitivamente:

$$P_1(t) = \lambda.t.e^{-\lambda t}$$

Para completar la resolución del sistema de ecuaciones diferenciales, procedamos mediante el método de inducción completa. Por lo tanto, supongamos que la solución para *n=k-1* es $P_{k-1}(t) = \frac{(\lambda.t)^{k-1}}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda t}$ y demostremos que se mantiene para *n=k*. Ahora, la ecuación diferencial lineal que debe resolverse es:

$$P_k'(t) = -\lambda.P_k(t) + \lambda.P_{k-1}(t) = -\lambda.P_k(t) + \frac{\lambda^k.t^{k-1}}{(k-1)!}.e^{-\lambda t}$$

Aplicando, de nuevo, el método de variación de la constante, la solución de la ecuación homogénea es, de modo similar:

$$P'_k(t) = -\lambda.P_k(t) \quad \Rightarrow P_k(t) = K.e^{-\lambda t} \ ,$$

y, haciendo variar la constante K=K(t), queda:

$$P'_k(t) + \lambda.P_k(t) = \frac{\lambda^k.t^{k-1}}{(k-1)!}.e^{-\lambda t} \quad \Rightarrow K'(t).e^{-\lambda t} - \lambda.K(t).e^{-\lambda t} + \lambda.K(t).e^{-\lambda t} = \frac{\lambda^k.t^{k-1}}{(k-1)!}.e^{-\lambda t} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K'(t).e^{-\lambda t} = \frac{\lambda^k.t^{k-1}}{(k-1)!}.e^{-\lambda t} \quad \Rightarrow K(t) = \frac{(\lambda.t)^k}{k!} + C$$

La solución general de la ecuación es:

$$P_k(t) = \left[\frac{(\lambda.t)^k}{k!} + C\right].e^{-\lambda t} \ ,$$

y, aplicando de nuevo que N(0)=0 y, por tanto, $P_k(0)=0$, queda que C=0, de modo que queda probado que:

$$P_k(t) = \frac{(\lambda.t)^k}{k!}.e^{-\lambda t} \ , \quad k \in \mathbf{N}.$$

Lo anterior prueba que las variables aleatorias que integran el proceso se distribuyen según Poisson, en el sentido de que $X_t \sim \wp(\lambda.t)$, $t \geq 0$. Ahora bien, como el proceso tiene incrementos estacionarios:

$$P[N(t+s) - N(s) = n] = P[N(t) = n] = \frac{(\lambda.t)^n}{n!} \cdot e^{-\lambda t} \ , \quad n = 0,1,2,\dots \ , \quad \forall s,t \geq 0$$

c.q.d.

Además, la demostración del resultado anterior permite mostrar que las ecuaciones diferenciales que rigen el proceso de Poisson son:

$$\left.\begin{array}{l} P_0'(t) = -\lambda.P_0(t) \\ P_n'(t) = -\lambda.P_n(t) + \lambda.P_{n-1}(t) \ , \quad n>0 \end{array}\right\}$$

que corresponden a un proceso de nacimiento puro con tasa constante $\lambda$, lo que prueba la tercera caracterización de este tipo de procesos.

Finalmente, otro rasgo característico del proceso de Poisson viene determinado por ser una cadena de Markov en tiempo continuo, lo que provoca que los tiempos entre ocurrencias consecutivas del proceso se distribuyan idéntica e independientemente, según una ley exponencial de parámetro $\lambda$. En efecto, como justificación puede utilizarse el siguiente argumento. Sea:

$\tau_i$ = "Tiempo que tarda en producirse la primera ocurrencia, desde $t_i$", $i\in\mathbf{N}$.

Entonces, se tiene que:

$$P(\tau_i > t) = P[N(t_i + t) - N(t_i) = 0] = e^{-\lambda t},$$

de manera que la función de distribución es:

$$F_i(t) = P(\tau_i \le t) = 1 - P(\tau_i > t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad \Rightarrow \tau_i \sim Exp(\lambda)\ , \ \forall i\in\mathbf{N}.$$

En cuanto a la independencia, basta utilizar que los incrementos son estacionarios e independientes:

$$\begin{aligned} P(\tau_{i+1} > t / \tau_i = s) &= P[N(t+s) - N(s) = 0 / N(s) = i] = P[N(t+s) - N(s) = 0\ ] = \\ &= e^{-\lambda t} = P(\tau_{i+1} > t\ ), \quad \forall i \in N \end{aligned}$$

Además, puede demostrarse que, si se definen las variables aleatorias:

$S_n$ = "Tiempo de espera hasta que se produce la n-sima ocurrencia", $n\in\mathbf{N}$, son sumas de *n* variables aleatorias definidas por el tiempo de espera entre dos ocurrencias consecutivas, que son exponenciales de parámetro $\lambda$ e independientes, de manera que, sin más que utilizar la función característica, se tiene que la distribución de $S_n$ es gamma del tipo $\Gamma(n,\lambda)$.

## 3. SUPERPOSICIÓN Y DESCOMPOSICIÓN DE PROCESOS DE POISSON.

A continuación, se presentan dos interesantes propiedades de los procesos de Poisson, que permiten una gran variedad de aplicaciones en situaciones donde es precisa la acumulación de procesos de Poisson ó la clasificación de los estados que presentan según diversas categorías. Por cuestiones de espacio, ambas se presentan sin demostración.

**Proposición 3.1 (Superposición de procesos de Poisson independientes).**

Sean $\{L(t), t \geq 0\}$ y $\{M(t), t \geq 0\}$ dos procesos de Poisson independientes, con tasas respectivas $\lambda$ y $\mu$. Sea ahora $\{N(t), t \geq 0\}$ la *superposición* de los dos procesos anteriores, definida por:

$$N(t) = L(t) + M(t)\ , \quad t \geq 0.$$

Entonces, el proceso estocástico $\{N(t), t \geq 0\}$ es también de Poisson, con tasa:

$$\nu = \lambda + \mu.$$

Como se ha avanzado, los procesos superpuestos a partir de procesos de Poisson son útiles para aplicarse en situaciones que se generan mediante acumulación de ocurrencias procedentes de varios procesos de Poisson, como por ejemplo el número total de vehículos que acceden a un cruce, en el que confluyen varias calles, siempre que el acceso por ellas se realice de manera independiente y mediante procesos de Poisson.

**Proposición 3.2 (Descomposición de procesos de Poisson).**

Sea $\{N(t), t \geq 0\}$ un proceso de Poisson con tasa $\lambda$, y supongamos que cada ocurrencia puede clasificarse, independientemente de las demás, de la siguiente manera:

Tipo I, con probabilidad *p*.

Tipo II, con probabilidad $q = 1\text{-}p$.

Sean los procesos estocásticos $\{L(t), t \geq 0\}$ y $\{M(t), t \geq 0\}$, definidos por:

L(t) = "Número de ocurrencias de tipo I hasta el instante *t*" , $t \geq 0$

M(t) = "Número de ocurrencias de tipo II hasta el instante *t*" , $t \geq 0$.

Entonces, ambos procesos son independientes y de Poisson, con tasas respectivas $\lambda.p$ y $\lambda.q$.

La descomposición de procesos de Poisson se aplica fructíferamente a fenómenos que suponen la diversificación de categorías en las ocurrencias que definen a un proceso de Poisson, como, por ejemplo, la clasificación de los clientes que llegan a una tienda, según su sexo ó la diversificación de los automóviles que llegan a un comercio, ubicado en una carretera, según su número de ocupantes, lo que determina su clientela.

## 4. PROCESOS DE POISSON NO HOMOGÉNEOS.

Corresponden a procesos de Poisson generalizados, en los que ahora la tasa que los determina no es constante, sino que es una función que depende del tiempo. Pasemos a definirlos de manera más formal.

**Definición 4.1. (Procesos de Poisson no homogéneos).**

Un proceso de recuento $\{N(t), t \geq 0\}$ se denomina *proceso de Poisson no homogéneo con función de intensidad* $\lambda(t)$, si verifica las siguientes condiciones:

i) $N(0) = 0$.

ii) Tiene incrementos independientes ( $N(t_1)$, $N(t_2)-N(t_1)$, ..., $0<t_1<t_2<\ldots$).

iii) La distribución de los incrementos es:

$$P[N(t+s) - N(s) = n] = \frac{[m(t+s) - m(s)]^n}{n!} \cdot e^{-[m(t+s)-m(s)]} , \quad n \geq 0, \forall s, t \geq 0 ,$$

donde $m(t)$ es la función media del proceso:

$$m(t) = \int_0^t \lambda(z).dz$$

De la condición iii), se deduce inmediatamente, teniendo en cuenta que N(0)=0, que las distribuciones de primer orden del proceso son de Poisson:

$$N(t) \sim \wp(m(t)), \quad \forall t \geq 0.$$

También puede considerarse como un proceso puro de nacimiento no homogéneo con tasa $\lambda(t)$. Por lo tanto, las ecuaciones diferenciales que rigen este proceso son:

$$\left.\begin{array}{l} P_0'(t) = -\lambda(t).P_0(t) \\ P_n'(t) = -\lambda(t).P_n(t) + \lambda(t).P_{n-1}(t) \;, \quad n>0 \end{array}\right\}$$

Además, los tiempos que transcurren entre ocurrencias consecutivas también se distribuyen según una ley exponencial, pero ahora el parámetro que las define depende del instante en que aparece la primera de ellas.

Entre las aplicaciones de este tipo de procesos, destacan los fenómenos en que la tasa correspondiente varía con el tiempo. Un ejemplo podría ser la demanda, medida en número de clientes, que llegan hasta un comercio, dependiente de la hora del día; en tal caso, la función intensidad, si se mide en horas, sería periódica, siendo su período de 24 horas, suponiendo que la demanda se comporta igual todos los días.

## 5. PROCESOS DE POISSON COMPUESTOS.

Finalmente, se presenta una generalización en la que el proceso contabiliza los resultados de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, cuyo número de sumandos viene regido por un proceso de Poisson.

**Definición 5.1. (Proceso de Poisson compuesto).**

Un proceso estocástico $\{X(t), t \geq 0\}$ se denomina *proceso de Poisson compuesto* si viene definido por:

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i , \quad t \geq 0 ,$$

donde $\{N(t), t \geq 0\}$ es un proceso de Poisson y $\{Y_n, n \in \mathbf{N} \cup \{0\}\}$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas e independientes también de $\{N(t), t \geq 0\}$.

Este tipo de procesos se utiliza para modelar la cantidad total de recursos derivados de las ocurrencias generadas según un proceso de Poisson. Un ejemplo podría ser la cantidad de viajeros transportados por una línea de autobuses, siempre que las llegadas de los autobuses vengan regidas por un proceso de Poisson y que la cantidad de viajeros transportada por los autobuses pueda modelarse mediante variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Otro ejemplo habitual puede ser la cantidad total de dinero reclamada a una compañía de seguros a partir de las reclamaciones que se van presentando en el transcurso del tiempo, siempre que la cantidad desembolsada por las reclamaciones responda al patrón de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas y las reclamaciones se presenten siguiendo un proceso de Poisson.

El siguiente resultado muestra las características generales más relevantes de los proceso de Poisson compuestos.

**Proposición 5.1. (Características generales de los procesos de Poisson compuestos).**

Sea $\{X(t), t \geq 0\}$ un proceso de Poisson compuesto, definido mediante:

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i , \quad t \geq 0 ,$$

donde $\{N(t), t \geq 0\}$ es un proceso de Poisson y $\{Y_n, n \in \mathbf{N} \cup \{0\}\}$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas e independientes también de $\{N(t), t \geq 0\}$. Entonces, las funciones media, varianza y covarianza son:

i) $m(t) = E[X(t)] = \lambda.t.E(Y)$

ii) $\sigma^2(t) = Var[X(t)] = \lambda.t.E(Y^2)$

iii) $\gamma(s,t) = \lambda.\min(s,t).E(Y^2)$ ,

donde Y es una variable aleatoria independiente con la misma distribución que $\{Y_n, n \in \mathbf{N} \cup \{0\}\}$.

Demostración.

Calculemos la función característica de X(t):

$$\varphi(u)=E\left[e^{i.u.X(t)}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}E\left[e^{i.u.X(t)}/N(t)=n\right]\cdot P\left[N(t)=n\right]=\sum_{n=0}^{\infty}E\left[e^{i.u.X(t)}/N(t)=n\right]\cdot\frac{(\lambda.t)^n}{n!}\cdot e^{-\lambda t}$$

Pero, utilizando que $\{Y_n,\ n\in\mathbf{N}\cup\{0\}\}$ son independientes e idénticamente distribuidas como Y:

$$E\left[e^{i.u.X(t)}/N(t)=n\right]=E\left[e^{i.u.(Y_1+Y_2+...+Y_n)}/N(t)=n\right]=E\left[e^{i.u.(Y_1+Y_2+...+Y_n)}\right]=\left\{E\left[e^{i.u.Y}\right]\right\}^n.$$

Sea ahora $\varphi_Y(u)$ la función característica de Y. Entonces:

$$E\left[e^{i.u.X(t)}/N(t)=n\right]=\left\{E\left[e^{i.u.Y}\right]\right\}^n=\left(\varphi_Y(u)\right)^n.$$

Por lo tanto:

$$\varphi(u)=\sum_{n=0}^{\infty}E\left[e^{i.u.X(t)}/N(t)=n\right]\cdot\frac{(\lambda.t)^n}{n!}\cdot e^{-\lambda t}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\varphi_Y(u)\right)^n\cdot\frac{(\lambda.t)^n}{n!}\cdot e^{-\lambda t}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\varphi_Y(u).\lambda.t\right)^n}{n!}\cdot e^{-\lambda t}$$

Así pues:

$$\varphi(u)=e^{-\lambda t}\cdot e^{\lambda t\varphi_Y(u)}=e^{\lambda t\left(\varphi_Y(u)-1\right)}$$

Obtengamos las funciones media y varianza del proceso:

$$m(t)=E\left[X(t)\right]=\frac{1}{i}\cdot\left.\frac{d\varphi(u)}{du}\right|_{u=0}=\frac{1}{i}\cdot\lambda t\varphi'_Y(0)\cdot e^{\lambda t\left(\varphi_Y(0)-1\right)}=\lambda.t.E(Y),$$

lo que prueba el aserto i).

$$\sigma^2(t) = \mathrm{Var}[X(t)] = -\left.\frac{d^2\varphi(u)}{du^2}\right|_{u=0} - [m(t)]^2 =$$
$$= -\lambda t\left[\varphi''(0).e^{\lambda t(\varphi_Y(0)-1)} + (\varphi'(0))^2.\lambda t.e^{\lambda t(\varphi_Y(0)-1)}\right] - \lambda^2 \cdot t^2.E(Y)^2 =$$
$$= \lambda.t.E(Y^2) + \lambda^2 t^2 E(Y)^2 - \lambda^2 t^2 E(Y)^2 =$$
$$= \lambda.t.E(Y^2)$$

lo que prueba el aserto ii).

Finalmente, puesto que el proceso es de incrementos independientes, se tiene que:

$$\gamma(s,t) = \mathrm{Var}[X(\min(s,t))] = \sigma^2[\min(s,t)] = \lambda.\min(s,t).E(Y^2),$$

lo que prueba la afirmación iii).

c.q.d.

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

# Procesos Continuos

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

## Procesos Continuos en Media Cuadrática

- El proceso $\{X(t), t\in T\}$ es continuo en media cuadrática si:

$$\text{mc}-\lim_{\varepsilon\to 0} X(t+\varepsilon) = X(t)$$

ó bien: $$\lim_{\varepsilon\to 0} E\{(X(t+\varepsilon) - X(t))^2\} = 0$$

- <u>Consecuencias</u>:

1.- $\gamma(t_1,t_2)$ es continua $\Leftrightarrow$ $\{X(t), t\in T\}$ es continuo en media cuadrática

2.- $\{X(t), t\in T\}$ es continuo en media cuadrática $\Rightarrow$ $\mu(t)$ es continua.

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

## Diferenciación Estocástica en Media Cuadrática

- Un proceso $\{X(t), t\in T\}$ es diferenciable en media cuadrática si:

$$\text{mc-}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{X(t+\varepsilon)-X(t)}{\varepsilon}\right)=X'(t)$$

Es decir: $\lim_{\varepsilon\to 0} E\left\{\left(\frac{X(t+\varepsilon)-X(t)}{\varepsilon}-X'(t)\right)^2\right\}=0$

- <u>Consecuencias</u>:

Sea: $\frac{\partial^2\gamma(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_2}=\lim_{h_1,h_2\to 0}\frac{1}{h_1h_2}\{\gamma(t_1+h_1,t_2+h_2)-\gamma(t_1+h_1,t_2)-\gamma(t_1,t_2+h_2)+\gamma(t_1,t_2)\}$

1.- Existe $\frac{\partial^2\gamma(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_2}$ en (t,t) $\Leftrightarrow$ $\{X(t)\}$ es diferenciable en m.c. en $t\in T$.

2.-$\{X(t)\}$ diferenciable en m.c. $\Rightarrow$ $E\{X'(t)\}=\lim_{\varepsilon\to 0}E\left\{\frac{X(t+\varepsilon)-X(t)}{\varepsilon}\right\}=\mu'(t)$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

## Integración Estocástica en Media Cuadrática

- Un proceso $\{X(t), t\in T\}$ es integrable en media cuadrática si existe:

$$\int_a^b X(t).dt=\text{mc-}\lim_{\substack{\Delta\to 0\\ n\to\infty}}\sum_{i=1}^{n}X(t_i).(t_i-t_{i-1})\text{, siendo }\Delta=\max_{1\le i\le n}(t_i-t_{i-1})$$

- <u>Características</u>:

1.- Puede extenderse en el sentido de Riemann-Stieltjes, para procesos de variación acotada.

2.- Si $\int_a^b\int_a^b|\gamma(t_1,t_2)|.dt_1dt_2<\infty$ $\Rightarrow$ $\{X(t), t\in T\}$ es integrable en m.c.

3.- $E\left\{\left|\int_a^b X(t).dt\right|^2\right\}=\int_a^b\int_a^b\gamma(t_1,t_2).dt_1dt_2$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I. Universidad de Alcalá.*

# Movimiento Browniano

• Observado por R. Brown en 1827, consiste en el movimiento aleatorio de una partícula coloidal (p.ej., polen) sumergida en un líquido o un gas, que depende de la viscosidad del mismo y de los continuos bombardeos de las moléculas colindantes.

• Descrito matemáticamente por Einstein en 1905, a partir de leyes físicas, permitió a Perrin obtener experimentalmente el valor del número de Avogadro por lo que obtuvo el Premio Nobel en 1926.

X(t) = "Posición de la partícula en el instante t", t>0; X(0)=0

$$\xleftarrow{\Delta x} \; \underset{x}{\bullet} \; \xrightarrow{\Delta x}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } n = \dfrac{t}{\Delta t},\; X(t) = \sum_{i=1}^{n} X_i \\ P(X_i=\Delta x) = P(X_i=-\Delta x) = 1/2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} X(t) \sim N(0,\sigma\sqrt{t}) \\ \sigma^2 = \dfrac{4RT}{Nf} \end{array}$$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I. Universidad de Alcalá.*

# Proceso de Wiener Estándar

• Un proceso estocástico $\{X(t), t\geq 0\}$ es un *Proceso de Wiener* si:

i) X(0)=0.

ii) Tiene incrementos independientes estacionarios.

iii) X(t)-X(s) sigue una distribución normal $N(0,\sigma\sqrt{|t-s|})$.

• Aplicaciones: Modelo del Movimiento Browniano (Wiener, Einstein), Fluctuaciones de Precios en mercados de mercancías y suministros (Bachelier, Osborne), Agitación térmica en circuitos eléctricos, Mecánica Cuántica, etc.

• Características: Es un proceso de Markov en tiempo continuo, con trayectorias continuas pero no diferenciables.

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

# Ruido Blanco

- En el caso discreto, corresponde a una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas N(0,1).
- Dado un proceso de Wiener {X(t), t≥0}, se tiene:

$$\left.\begin{array}{r}\Delta X(t) = X(t+\Delta t) - X(t) \approx N(0, \sigma\sqrt{\Delta t}) \\ \Delta X(t) = \sigma.\Delta W(t)\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\Delta W(t) \sim N(0, \sqrt{\Delta t})}$$

- Así pues, haciendo $\Delta t \to 0$, se tiene, formalmente:

$$\boxed{\frac{dX(t)}{dt} = \sigma.\frac{dW(t)}{dt} = \sigma.\xi_t} \Rightarrow X(t) = X(s) + \int_s^t \sigma.dW(t) = X(s) + \sigma.(W(t) - W(s))$$

$$\left.\begin{array}{l} E(\xi_t) = 0 \\ E(\xi_t.\xi_s) = \begin{cases} \infty, \text{ si } t=s \\ 0, \text{ si } t \neq s \end{cases}\end{array}\right\} \longrightarrow \boxed{\text{RUIDO BLANCO}}$$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

# Procesos de Difusión

- Definición:

  Un proceso estocástico {X(t), t≥0} es un *Proceso de Difusión* si:

  1.- Es un proceso de Markov, con espacio de estados continuo.

  2.- X(t) es suma de una sucesión de movimientos individuales infinitesimales.

- Consecuencias:
  - Las probabilidades de transición se definen según su función de distribución o su función de densidad (f), si es posible:

    $$F(x,t; x_0,t_0) = P[X(t) \leq x \;/\; X(t_0)=x_0]$$

  - Ecuación de Chapman-Kolmogorov:

$$f(x,t;y,s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t;z,r).f(z,r;y,s)dz\,, \quad \forall s,r,t \geq 0 : s < r < t$$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

# Ecuaciones de Difusión de Kolmogorov

- Media y Varianza Infinitesimales:

$$\mu(x,t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{E\left[X(t+\Delta t) - X(t)/X(t) = x\right]}{\Delta t}$$

$$\sigma^2(x,t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{Var\left[X(t+\Delta t) - X(t)/X(t) = x\right]}{\Delta t}$$

- **Ecuación Adelantada (Ecuación de Difusión de Fokker-Plank):**

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t;x_0,t_0) = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu(x,t).f(x,t;x_0,t_0)\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\sigma^2(x,t).f(x,t;x_0,t_0)\right]$$

- **Ecuación Atrasada:**

$$\frac{\partial}{\partial t_0} f(x,t;x_0,t_0) = -\mu(x_0,t_0)\frac{\partial}{\partial x_0} f(x,t;x_0,t_0) - \frac{1}{2}\sigma^2(x_0,t_0)\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} f(x,t;x_0,t_0)$$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

# Integral Estocástica de Itô

Hipótesis:

- $G(x,t)$ es *no anticipativa* si es independiente de $(W(s)-W(t))$, $\forall t,s: t<s$
- $[t_0, t] = [t_0,t_1] \cup (t_1,t_2] \cup \ldots \cup (t_{n-1},t_n]$, con $\Delta = \max_{1 \le i \le n} (t_i - t_{i-1})$

En estas condiciones:

$$\int_{t_0}^{t} G(x,t).dW(t) = mc - \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta \to 0}} \sum_{i=1}^{n} G\left[X(t_{i-1}), t_{i-1}\right]\left\{W(t_i) - W(t_{i-1})\right\}$$

- Fórmula Diferencial de Itô ó del Cambio de Variable (Lema de Itô):

$$df\left[X(t),t\right] = \left\{\frac{\partial f}{\partial t} + \mu(x,t).\frac{\partial f}{\partial x} + \tfrac{1}{2}\sigma^2(x,t).\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right\}.dt + \sigma(x,t).\frac{\partial f}{\partial x}.dW(t)$$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

## Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

- En general, un proceso $\{X(t), t\geq 0\}$ de este tipo, presentará:
  - a) Componente Determinístico ó *de deriva*: $\mu(x,t)$.
  - b) Componente Estocástico, generado por un proceso ruido blanco, con un coeficiente de *difusión*: $\sigma(x,t)$.

Así, dará lugar a la siguiente Ecuación Diferencial Estocástica:

$$\frac{dX(t)}{dt} = \mu(x,t) + \sigma(x,t)\frac{dW(t)}{dt} \Rightarrow \boxed{dX(t) = \mu(x,t).dt + \sigma(x,t).dW(t)}$$

Tiene sentido su solución: $X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mu(x,t).dt + \int_{t_0}^{t} \sigma(x,t).dW(t)$

- $\{X(t), t\geq 0\}$ es un proceso de Markov. En concreto, es un proceso de difusión con media infinitesimal $\mu(x,t)$ y varianza infinitesimal $\sigma^2(x,t)$.

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

*Dpto. de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.*
*Universidad de Alcalá.*

## Modelo de Valoración de un Activo Financiero

- $S(t)$ es el precio del activo, sin dividendos, en el instante $t$, para $t\geq 0$.
- $\mu$ es el tipo esperado de reembolso, en tanto por uno (Rentabilidad).
- $\sigma$ es la volatilidad asociada al precio del activo.
- La valoración del activo puede modelizarse mediante la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$\boxed{dS(t) = \mu.S(t).dt + \sigma.S(t).dW(t)}$$

- Para resolverla, se toma $X(t) = Ln\{S(t)\}$, y se aplica la fórmula diferencial de Itô, resultando:

$$\boxed{S(t) = S(0).\exp\left\{\mu t - \tfrac{\sigma^2}{2}t + \sigma W(t)\right\}} \longrightarrow \boxed{\text{Distribución Lognormal ó Proceso de Wiener Geométrico}}$$

*Dr. J.J. Núñez Velázquez*

# PRÁCTICAS:

# PROCESOS GENERALES Y CADENAS DE MARKOV.

**PREPARADO POR:** José Javier Núñez Velázquez.

Prof. Titular de Universidad.

Universidad de Alcalá

**1. Demostrar que cualquier proceso estocástico con incrementos independientes es también un proceso de Markov.**

<u>Solución</u>.

$\forall n\in N$, $\forall t_1,t_2,...,t_n \in$ T: $t_1<t_2<...<t_n$ , $\forall x_1,x_2,...,x_n \in S$:

$$F_{t_n}\left(x_n/X(t_1)=x_1,...,X(t_{n-1})=x_{n-1}\right)=$$
$$P\left[X(t_n)-X(t_{n-1})\le x_n-x_{n-1}/X(t_{n-1})=x_{n-1},X(t_{n-1})-X(t_{n-2})=x_{n-1}-x_{n-2},...,X(t_2)-X(t_1)=x_2-x_1\right]=$$
$$=P\left[X(t_n)-X(t_{n-1})\le x_n-x_{n-1}/X(t_{n-1})=x_{n-1}\right]$$
$$=F_{t_n}(x_n/X(t_{n-1})=x_{n-1}).$$

**2. Sea X(t) la posición de un móvil con velocidad constante, que puede expresarse en la forma:**

$$\mathbf{X(t) = X(0) + V.t\ ,\quad t \ge 0,}$$

**donde X(0) y V son variables aleatorias que representan la posición inicial y la velocidad. Calcular las funciones media, varianza, autocovarianza y autocorrelación del proceso y estudiar bajo qué condiciones el proceso resulta ser estacionario, en sus diversas modalidades.**

<u>Solución</u>.

$$m(t)=E[X(t)]=E[X(0)]+E(V).t,\quad t\ge 0$$

$$\gamma(t_1,t_2)=Cov[X(t_1),X(t_2)]=E[(X(0)+V.t_1).(X(0)+V.t_2)]-m(t_1).m(t_2)=$$
$$=E\left[(X(0))^2\right]+E[V.X(0)](t_1+t_2)+E(V^2).t_1.t_2-\left(E[X(0)]+E(V).t_1\right).\left(E[X(0)]+E(V).t_2\right)=$$
$$=E[V.X(0)](t_1+t_2)+E(V^2).t_1.t_2-E[X(0)].E(V)(t_1+t_2)-E(V)^2.t_1.t_2-E[X(0)]^2=$$
$$=Var(X(0))+Cov(X(0),V).(t_1+t_2)+Var(V).t_1.t_2,\quad t_1,t_2\ge 0$$

$$\sigma^2(t)=Var(X(t))=\gamma(t,t)=Var(X(0))+2.t.Cov(X(0),V)+Var(V).t^2,\quad t\ge 0$$

$$\rho(t_1,t_2)=\frac{\gamma(t_1,t_2)}{\sigma(t_1).\sigma(t_2)}$$ y basta con sustituir las expresiones anteriores.

En cuanto a la estacionariedad, para que m(t) sea constante, deberá ser E(V)=0 y, para que lo sea la función varianza, además debe ser nula Var(V), lo que obligaría a la variable V a ser degenerada en el punto 0. Así, el proceso será débilmente estacionario si V es degenerada en el punto 0, pero en tal caso, el proceso es estacionario de orden 2.

**3. Igual que el ejercicio 2, siendo las variables aleatorias independientes y normales con media 0 y varianza $\sigma^2$.**

Solución.

Basta aplicar que las variables aleatorias son independientes con estos valores:

$m(t) = 0, \ t \geq 0.$

$$\gamma(t_1, t_2) = \sigma^2.(1 + t_1.t_2), \ t_1,t_2 \geq 0 \ \Rightarrow \ \sigma^2(t) = \sigma^2(1 + t^2), \ t \geq 0$$

$$\rho(t_1, t_2) = \frac{\sigma^2.(1 + t_1 t_2)}{\sigma.\sqrt{1 + t_1^2}.\sigma.\sqrt{1 + t_2^2}} = \frac{(1 + t_1 t_2)}{\sqrt{1 + t_1^2}.\sqrt{1 + t_2^2}}, \ t_1,t_2 \geq 0$$

El proceso será débilmente estacionario si la varianza ($\sigma^2$) es 0, lo que lo convertiría en degenerado en el punto 0.

**4. Sea el proceso estocástico definido por:**

$$\mathbf{X(t) = C + B.t + A.t^2, \quad t \geq 0,}$$

**donde A, B y C son variables aleatorias independientes con media 1 y varianza 1. Calcular las funciones media, varianza y autocovarianza del proceso y estudiar si es estacionario, en alguna de sus variantes.**

Solución.

$$m(t) = E\left[A.t^2 + B.t + C\right] = t^2 + t + 1$$

$$\sigma^2(t) = Var\left[A.t^2 + B.t + C\right] = t^4 + t^2 + 1$$

$$\gamma(t_1, t_2) = Cov\left[\left(A.t_1^2 + B.t_1 + C\right), \left(A.t_2^2 + B.t_2 + C\right)\right] = \ldots = t_1^2.t_2^2 + t_1.t_2 + 1$$

Puesto que m(t) no es constante, el proceso es evolutivo.

5. **Sea $\{X(t), t\in T\}$ un proceso estocástico estacionario con media nula y función varianza constante ($\sigma^2$). Sea $Z(t) = 5 + 2.t + X(t)$ otro proceso estocástico definido sobre el mismo conjunto de índices. Calcule las funciones media y varianza del proceso $\{Z(t), t\in T\}$, y discuta razonadamente si es un proceso estacionario ó no.**

Solución.

$$m(t) = E[Z(t)] = 5 + 2.t$$

$$\sigma^2(t) = Var[Z(t)] = Var[X(t)] = \sigma^2$$

Como la función media no es constante, el proceso es evolutivo. Por lo tanto, no es estacionario de ningún orden ni débilmente estacionario.

6. **Se han distribuido 3 bolas blancas y 3 bolas negras entre dos urnas, de manera que cada una contiene 3 bolas. En cada etapa, se extrae una bola de cada urna y se cambian de lugar. Estudiar si el proceso determinado por el número de bolas negras en la primera urna es una cadena de Markov y analizar su comportamiento a largo plazo.**

Solución.

El proceso queda definido por:

$X_t$ = "nº de bolas negras en la primera urna tras la t-ésima extracción", $t\in N\cup\{0\}$,

Siendo el espacio de estados $S=\{0,1,2,3\}$. Por lo tanto, se trata de una cadena finita. Además, es de Markov porque el nº de bolas negras en la urna sólo depende de su estado en la extracción anterior y no del historial que le llevó a ese estado. Por otra parte, la evolución es la misma en el transcurso del tiempo y, por tanto, la cadena es homogénea.

Cada extracción puede definirse por un par (1,2), donde 1 representa la bola extraída de la primera urna y 2 la de la segunda, pudiendo ser ambas blancas ó negras.

La matriz de transición en una etapa será:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/9 & 4/9 & 4/9 & 0 \\ 0 & 4/9 & 4/9 & 1/9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Así, C(0) = {0,1,2,3} = S $\Rightarrow$ La cadena es irreducible, finita y aperiódica. Por lo tanto, es regular.

Para obtener la distribución estacionaria, se resuelve el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} (1/9).\pi_1 = \pi_0 \\ \pi_0 + (4/9)\pi_1 + (4/9)\pi_2 = \pi_1 \\ (4/9)\pi_1 + (4/9)\pi_2 + \pi_3 = \pi_2 \\ (1/9)\pi_2 = \pi_3 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{array}\right\} \text{ con solución } \quad \pi = \left(1/20, 9/20, 9/20, 1/20\right).$$

Como la cadena es ergódica, esta es la distribución a largo plazo del número de bolas negras en la primera urna.

**7. Suponga que, si un día llueve, la probabilidad de que llueva también el siguiente día es *a*, mientras que, si no llueve, la probabilidad de que tampoco lo haga el día siguiente es *b*. Analizar el proceso que modela la aparición diaria de lluvia y estudiar su comportamiento a largo plazo.**

Solución.

Sea $p_k$ la probabilidad de que llueva al cabo de k días. Entonces:

$$p_{k+1} = a.p_k + (1-b).(1-p_k) = (a+b-1).p_k + (1-b) , \quad k\geq 0,$$

que es una ecuación de recurrencia, que puede resolverse utilizando la función generatriz de probabilidades, tomando límite en la expresión de $p_k$.

Pasemos a resolverlo mediante una cadena de Markov. Sea $X_t$ = "Estado del tiempo, en cuanto a la aparición de lluvia, el día t", t=0,1,2,.... El espacio de estados es S = {LL, NLL} y, por tanto, es una cadena finita. Por las condiciones del enunciado, se tiene que es una cadena finita homogénea de Markov, cuya matriz de transición es:

$$P = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix}$$

Evidentemente, la cadena es finita y regular. Por lo tanto, es ergódica, siendo la distribución a largo plazo:

$$\left.\begin{array}{rrl} a.\pi_{LL} & +(1-b).\pi_{NLL} & = \pi_{LL} \\ (1-a).\pi_{LL} + & b.\pi_{NLL} & = \pi_{NLL} \\ \pi_{LL} + & \pi_{NLL} & = 1 \end{array}\right\} \text{ cuya solución es: } \pi = \left( \frac{1-b}{2-(a+b)}, \frac{1-a}{2-(a+b)} \right)$$

**8. Una Empresa decide mensualmente si se anuncia en la prensa ó en la televisión. Si un mes se anuncia en la prensa, lo hace al mes siguiente con una probabilidad del 70%. Por otra parte, si un mes se anuncia en televisión, también lo hará el mes siguiente con una probabilidad del 60%. Si se admite que este comportamiento es estable en el tiempo, se pide:**

**a) Caracterizar el proceso estocástico, definiendo sus principales características.**

**b) Si este mes se anunció en la prensa, calcular la probabilidad de que se anuncie en la prensa al cabo de *t* meses.**

**c) Si este mes se anunció en la prensa, calcular la probabilidad de que se anuncie en televisión al cabo de tres meses. Calcule, además, en esas mismas condiciones, la probabilidad de que se anuncie en televisión durante dos meses consecutivos.**

**d) Estudiar el comportamiento a largo plazo de la Empresa, teniendo en cuenta el medio elegido en el mes actual.**

<u>Solución</u>.

a) $X_t$ = "Medio de comunicación elegido el mes t", $t \in N \cup \{0\}$; S={Pr,TV}.

Por las características del enunciado, es una cadena homogénea finita de Markov.

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

Así, es una cadena regular y, por lo tanto, ergódica.

b) Para $V_0$ = (1,0), se pide $V_t = V_0.P^t$, ó bien $P(X_t = Pr / X_0 = Pr)$. Para ello, utilizaremos la descomposición de Jordan de la matriz P, que en este caso es:

$$P = H.J.H^{-1} = \frac{10}{7}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -0,3 \\ 1 & 0,4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$P^t = H.J^t.H^{-1} = \frac{10}{7}\cdot\begin{pmatrix} 0,4+0,3.(0,3)^t & 0,3-0,3.(0,3)^t \\ 0,4-0,4.(0,3)^t & 0,3+0,4.(0,3)^t \end{pmatrix}, \quad t \in N$$

Directamente:

$$P(X_t = Pr / X_0 = Pr) = \frac{4}{7} + \frac{3}{7}\cdot(0,3)^t, t \in N$$

ó bien la primera componente de $V_t$.

Este apartado también puede resolverse mediante la solución de la siguiente ecuación de recurrencia:

$$\left.\begin{array}{l} p_{t+1} = 0,7.p_t + 0,4.(1-p_t), t \geq 0 \\ p_0 = 1 \end{array}\right\}$$

que se resuelve utilizando la función generatriz de probabilidades.

c) Se pide ahora $P(X_3 = TV / X_0 = Pr)$. Basta elegir el correspondiente elemento de la matriz $P^t$, haciendo t=3:

$$P(X_3 = TV / X_0 = Pr) = \frac{3}{7} - \frac{3}{7}\cdot(0,3)^3 = 0,417$$

También se pide:

$$P(X_3 = TV, X_4 = TV / X_0 = Pr) = P(X_4 = TV / X_3 = TV, X_0 = Pr).P(X_3 = TV / X_0 = Pr) =$$
$$= P(X_4 = TV / X_3 = TV).P(X_3 = TV / X_0 = Pr) = (0,6).(0,417) = 0,2502.$$

d) Puede obtenerse resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} (\pi_1, \pi_2) = (\pi_1, \pi_2).\begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \\ \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{array}\right\}$$

ó bien, simplemente, haciendo:

$$\lim_{t\to\infty} V_t = V_0.\lim_{t\to\infty} P^t = V_0.\lim_{t\to\infty}\frac{10}{7}\cdot\begin{pmatrix} 0,4+0,3.(0,3)^t & 0,3-0,3.(0,3)^t \\ 0,4-0,4.(0,3)^t & 0,3+0,4.(0,3)^t \end{pmatrix} = \left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7}\right)$$

independientemente de $V_0$.

**9. En una Empresa, el personal hace cada dos años un curso de formación anual en el que se asignan otras tareas, reintegrándose a continuación a su puesto de trabajo. Analizar las características de la cadena de Markov que permite modelizar la asignación de trabajo en esta Entidad y estudiar su comportamiento asintótico.**

Solución.

Sea: $X_t$ = "Situación laboral en el año t", t=0,1,2,...; S={CF,PT}, donde:

CF = "Curso de Formación", PT = "Puesto de Trabajo",

siendo el conjunto de índices $T = N\cup\{0\}$. De acuerdo con las suposiciones expresadas, puede concluirse que es una cadena finita homogénea de Markov, cuya matriz de transición es:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la cadena es irreducible. Además, al ser finita, debe ser recurrente positiva.

A continuación, se analiza su carácter en lo referente a la periodicidad, observando que todos los elementos de la diagonal de P son nulos. El polinomio característico es:

$$0 = \left| P - \lambda.I \right| = (\lambda^2 - 1)$$

y, por lo tanto, la cadena es periódica(2).

Las subclases cíclicas correspondientes son:

G0 = {CF}, G1 = {PT}.

Las matrices de transición adoptan la siguiente forma, una vez ordenados los estados de acuerdo con las subclases construidas:

$$P = P^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^2 = P^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ n = 1,2,3,....$$

Como puede observarse, el patrón de movimiento de la cadena es:

$$G_0 \rightarrow G_1 \rightarrow G_0$$

En este caso, la distribución estacionaria de la cadena será:

$$\left.\begin{array}{c}(\pi_1,\pi_2).\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=(\pi_1,\pi_2)\\ \pi_1+\pi_2=1\end{array}\right\}$$

cuya solución es:

$$\pi=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

Pasemos, ahora, al análisis de la distribución estacionaria como media o resumen del ciclo límite. Para ello, se va a suponer un vector inicial de estados general y se obtendrá el vector límite en ciclos pares e impares, dado que d=2. Así pues, sea $V_0 = (p_1,p_2)$, entonces:

$$\pi^*_{(1)} = V_0.\lim_{t\to\infty} P^{2t+1} = (p_1,p_2).\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=(p_2,p_1)$$

$$\pi^*_{(2)} = V_0.\lim_{t\to\infty} P^{2t} = (p_1,p_2).\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=(p_1,p_2)$$

Si ahora se promedia, asumiendo ambos elementos del ciclo igualmente probables:

$$\frac{1}{2}\left(\pi^*_{(1)}+\pi^*_{(2)}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\pi$$

**10. Una Compañía se está planteando ofrecer a sus empleados un programa de formación continua en la empresa, para lo cual les va a ofrecer dos módulos semestrales, uno de formación en Gestión y otro de formación Financiera. El plan de formación de la empresa funcionará de la siguiente forma: Un empleado que no esté recibiendo formación, pasará el semestre siguiente al módulo de Gestión con una probabilidad de 0,3, y al módulo Financiero con una probabilidad de 0,2. En caso de no pasar a ninguno de estos módulos, seguirá sin formar parte del programa de formación continua. Como parte de la especialización de cada empleado, de los que reciben durante un semestre la formación en Gestión, el 70% vuelven a realizar el mismo módulo el semestre siguiente, y de los que reciben durante un semestre la formación Financiera, el 80% repite el semestre siguiente. El resto de los que han tenido algún tipo de formación, se cambian al otro módulo, pero siguen formando parte, ya para siempre, del programa de formación**

**continua. En el primer semestre del año 2003, no hay ningún empleado recibiendo formación continua.**

**a) Analice cuál será la proporción de empleados que participarán en cada uno de los módulos de formación continua que ofrece la empresa durante el primer semestre del año 2004, y durante el primer semestre del año 2005.**

**b) Analice cuál sería a largo plazo la proporción de trabajadores que realizarían cada módulo de formación, e indique cuál es el tiempo medio que tarda en estar en el programa de formación continua un empleado que inicialmente no tuviera ningún tipo de formación.**

Solución.

Sea Xt= "Programa de formación que recibe el empleado en el semestre t", t=0,1,2,...

El conjunto de estados se puede definir como S={N,G,F}, en donde:

N = "El empleado no recibe formación".

G = "El empleado recibe formación en Gestión".

F = "El empleado recibe formación Financiera".

Según las condiciones expuestas en el enunciado, (S y T discretos, la posición de la cadena en un semestre sólo depende de su posición en el semestre anterior, y suponemos que las condiciones que rigen el sistema se mantienen estables), estamos ante una cadena de Markov.

Hay dos clases de estados:

C(N) = {N} Estado Transitorio

C(F) = {F,G} Clase Cerrada

Por tanto, la cadena es reducible.

En forma estándar, la matriz de probabilidades de transición en una etapa es:

$$P = \begin{array}{c} \\ G \\ F \\ N \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} G & F & N \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 & 0 \\ 0,2 & 0,8 & 0 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Inicialmente, (primer semestre de 2003), el vector de estados es $V_0 = (0,0,1)$ (Nadie recibe formación).

La proporción de empleados que participan en cada uno de los módulos de formación en los primeros semestres de 2004 y 2005 vendrá dada por los vectores de estado $V_2$ y $V_4$.

Como $V_2 = V_0 \cdot P_2$, y $V_4 = V_2 \cdot P_2$, debemos calcular $P_2$:

$$P^2 = P{\cdot}P = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 & 0 \\ 0,2 & 0,8 & 0 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 & 0 \\ 0,2 & 0,8 & 0 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,45 & 0 \\ 0,30 & 0,70 & 0 \\ 0,40 & 0,35 & 0,25 \end{pmatrix}.$$

Así:

$$V_2 = V_0{\cdot}P^2 = (0,0,1) \cdot \begin{pmatrix} 0,55 & 0,45 & 0 \\ 0,30 & 0,70 & 0 \\ 0,40 & 0,35 & 0,25 \end{pmatrix} = (0,40;0,35;0,25),$$

luego, en el primer semestre de 2004, el 40% de los empleados están en el módulo de Gestión y el 35% en el módulo Financiero (el 25% restante no participa en el programa de formación continua).

La situación en el primer semestre de 2005 es la siguiente:

$$V_4 = V_2{\cdot}P^2 = (0,40;0,35;0,25) \cdot \begin{pmatrix} 0,55 & 0,45 & 0 \\ 0,30 & 0,70 & 0 \\ 0,40 & 0,35 & 0,25 \end{pmatrix} = (0,425;0,5125;0,0625),$$

con lo que el 42,5% de los empleados estará en el módulo de Gestión y el 51, 25% en el módulo Financiero (ya sólo queda un 6,25% de empleados fuera del plan de formación).

Para analizar el comportamiento asintótico de la cadena, analizamos el límite de $P_t$ cuando t tiende a $\infty$. Como la cadena es reducible, se analiza por separado el comportamiento asintótico de las clases cerradas (una, en este caso) y de la transitoria: Para la clase cerrada, hemos de encontrar el vector límite, $\pi$, resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{c} \pi \cdot \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = \pi \\ \$\sum_{i=1}^{2} \pi_i = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \pi = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right).$$

Luego, la matriz de transición en t pasos tiene el siguiente límite:

$$P^t \xrightarrow[t\uparrow\infty]{} \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}6 & 0 \\ & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

La probabilidad de absorción del estado transitorio por cada una de las clases cerradas (una en este caso) es:

$$f_{N,C(G)} = (I-B)^{-1} \cdot A_{C(G)} \cdot \vec{1}' = (0{,}5)^{-1} \cdot (0{,}3;0{,}2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1,$$

lo cual es lógico, pues al haber una única clase cerrada, obligatoriamente la cadena debe acabar en ella.

Las probabilidades de absorción del estado transitorio por los estados de la clase cerrada son:

$$\alpha_{N,C(G)} = f_{N,C(G)} \cdot \pi_{C(G)} = 1 \cdot (0{,}4;0{,}6) = (0{,}4;0{,}6).$$

El tiempo medio de absorción es:

$$m = (I-B)^{-1} \cdot \vec{1}' = (0{,}5)^{-1} \cdot 1 = 2 \text{ semestres.}$$

# PRÁCTICAS:

# CADENAS Y PROCESOS DE MARKOV EN TIEMPO CONTINUO.

**PREPARADO POR:** José Javier Núñez Velázquez.
Prof. Titular de Universidad.
Universidad de Alcalá

**1. Una persona vende suscripciones a domicilio para recibir una revista, respondiendo sus clientes de acuerdo con un proceso de Poisson con tasa de 6 al día. Las suscripciones se contratan por 1, 2 ó 3 años, lo que realizan de manera independiente con probabilidades 1/2, 1/3 y 1/6, respectivamente. Por cada suscripción conseguida, recibe 1€ por cada año que esta dura. Sea X(t) la comisión total recibida hasta el día t. Obtener:**

a) **Las funciones media y varianza del proceso $\{X(t), t\geq 0\}$.**
b) **La probabilidad de que no haya conseguido ninguna comisión hasta el día t.**
c) **La probabilidad de que haya conseguido 4€ de comisión por suscripciones a dos años, hasta el día t.**

Solución.

a) Sea $N(t)$ = "Nº de suscripciones realizadas hasta t (días)", $t\geq 0$. Entonces, este proceso es de Poisson con tasa $\lambda=6$. A continuación, se descompone el proceso:

$N_i(t)$ = "Nº de suscripciones a *i* años realizadas hasta t (días)", $t\geq 0$,

de manera que, al ser independientes, serán de Poisson con tasas respectivas 3, 2 y 1.

Finalmente, se tiene que:

$$X(t) = N_1(t) + 2.N_2(t) + 3.N_3(t)\ ,\ t\geq 0$$

Por lo tanto:

$$m(t) = E(X(t)) = E(N_1(t)) + 2.E(N_2(t)) + 3.E(N_3(t)) = 3t + 4t + 3t = 10.t$$

$$\sigma^2(t) = Var(X(t)) = Var(N_1(t)) + 4.Var(N_2(t)) + 9.Var(N_3(t)) = 3t + 8t + 9t = 20.t$$

b) $P(X(t)=0) = P(N(t)=0) = e^{-6.t}$.

c) $P[N_2(t)=2] = \frac{4.t^2}{2}\cdot e^{-2.t} = 2.t^2.e^{-2.t}$

**2. Sea X(t) el montante total de las indemnizaciones satisfechas por una compañía de seguros, cuyos partes se reciben de acuerdo con un proceso de**

**Poisson cuya tasa es de 2 por día. Las indemnizaciones son variables aleatorias independientes y distribuidas uniformemente entre 1000 y 10000 €. Se pide:**

**a) Obtener las funciones media y varianza del proceso {X(t), t≥0}.**

**b) Probabilidad de que no pague ninguna indemnización al cabo de t días.**

**c) Obtenga a) y b), en el caso en que las indemnizaciones se distribuyan según una exponencial de media 5000 €.**

<u>Solución</u>.

Sea N(t) = "Nº de partes recibidos hasta el instante t (días)", t≥0.

Según el enunciado, se trata de un proceso de Poisson con tasa 2. Por otra parte, sean las variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas:

$Y_i$ = "Indemnización correspondiente al parte *i*", i=1,2,3,...

En estas condiciones, $X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ es un proceso compuesto de Poisson. Así pues, si las $Y_i$ se distribuyen según una U(1000,10000), se tiene:

a) $m(t) = E[X(t)] = \lambda t.E(Y) = 2t.5500 = 11000.t$

$$\sigma^2(t) = Var[X(t)] = \lambda t.E(Y^2) = 2t.\left(\frac{10000^2 + 1000.10000 + 1000^2}{3}\right) = 74.10^6.t$$

b) $P[X(t) = 0] = P[N(t) = 0] = e^{-2t}$

c) El apartado b) no cambia y, para resolver el a), basta con obtener E(Y) y E($Y^2$), en el caso en que los $Y_i$ son Exp(1/5000):

$$m(t) = E[X(t)] = \lambda t.E(Y) = 2t.5000 = 10000.t$$

$$\sigma^2(t) = Var[X(t)] = \lambda t.E(Y^2) = 2t.(2.5000^2) = 100.10^6.t$$

**3. Las llegadas de clientes a un comercio se producen de acuerdo con un proceso de Poisson con una tasa de 30 por hora. Calcular la probabilidad de que el tiempo entre dos llegadas sucesivas sea:**

**a) Mayor de 3 minutos.**

**b) Comprendido entre 1 y 2 minutos.**

Solución.

Sea X(t) = "Nº de clientes en el comercio en el instante t (horas)", t≥0

Corresponde a un proceso de Poisson con tasa λ=30. Por lo tanto, el tiempo entre llegadas sucesivas (τ) se distribuye según un modelo Exp(30), expresado en horas. Si se expresa en minutos, la distribución será Exp(0,5). Así pues:

a) $P(\tau > 3) = 1 - F(3) = e^{-3/2} = 0{,}223$

b) $P(1 < \tau < 2) = F(2) - F(1) = e^{-1/2} - e^{-1} = 0{,}607 - 0{,}368 = 0{,}239$

**4. Un gran número de empleados de una Administración tienen acceso a una máquina fotocopiadora. Cada persona invierte una media de 1 minuto y 20 segundos en usar la máquina, a la que se acercan los empleados con una tasa media de 40 por hora. Suponiendo que la llegada se realiza mediante una distribución de Poisson y que los tiempos de servicio se distribuyen exponencialmente, se pide:**

**a) Número medio de empleados en el sistema.**

**b) Número medio de empleados en la cola.**

**c) Tiempo medio de espera en cola.**

**d) Tiempo medio de espera en el sistema.**

Solución.

Sea X(t) = "Nº de empleados accediendo a la fotocopiadora en el instante t (horas)", t≥0. Se trata de un proceso de nacimiento y muerte con tasas constantes:

$$\lambda = 40, \quad \mu = 45$$

que alcanza el estado estacionario, puesto que λ<μ. Puede describirse mediante un sistema de espera M/M/1, siendo la intensidad de tráfico $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{40}{45} = \frac{8}{9}$.

a) $L = E(\pi) = \dfrac{\lambda}{\mu - \lambda} = 8$ empleados.

b) $L_q = L - \dfrac{\lambda}{\mu} = 8 - \dfrac{8}{9} = \dfrac{64}{9} = 7{,}11$ empleados.

c) $W_q = \dfrac{\lambda}{\mu.(\mu-\lambda)} = \dfrac{40}{(45).(5)} = \dfrac{8}{45} = 0{,}18$ horas, es decir, 10 minutos y 40 segundos.

d) $W = \dfrac{1}{\mu-\lambda} = \dfrac{1}{5} = 0{,}2$ horas, es decir, 12 minutos.

**5. En una cadena de montaje, un obrero debe realizar dos operaciones consecutivas sobre cada unidad, cada una de las cuales sigue una distribución exponencial de media hora de media. Entre unidad y unidad, el obrero descansa un tiempo (en horas) que se distribuye exponencialmente con parámetro 9. Si, en el momento inicial, realiza la primera operación sobre una unidad, se pide:**

**a) Probabilidad de que el obrero esté descansando al cabo de t horas.**

b) **Proporción límite de tiempo que pasa trabajando.**

<u>Solución</u>.

Sea X(t) = "Situación en que se encuentra el obrero en el instante t (horas)", t≥0.
El espacio de estados es S={A,B,D}, donde A y B identifican las dos fases de trabajo y D el descanso. Además, los datos del enunciado indican que se trata de una cadena homogénea de Markov en tiempo continuo.

Por otra parte, X(0)=A y si son $\tau_i$ los tiempos de permanencia ininterrumpida en los estados, estos se distribuyen exponencialmente con parámetros respectivos 2, 2 y 9.

a) Construyamos la matriz de intensidades de transición. Para ello, $q_{AA}=q_{BB}=-2$ y $q_{DD}=-9$. El planteamiento y el hecho de que Q es conservativa conducen a:

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 9 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

Se pide $P[X(t) = D / X(0) = A] = p_{A,D}(t)$, que se obtiene de la matriz P(t). Diagonalizando:

$$Q = \frac{1}{60} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & -6 & -3 \\ 1 & 9 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 27 & 27 & 6 \\ 12 & -8 & -4 \\ -15 & 5 & 10 \end{pmatrix} =$$

de manera que:

$$P(t)=e^{Q.t}=H.e^{J.t}.H^{-1}=\frac{1}{60}\begin{pmatrix}1 & 4.e^{-5t} & e^{-8t}\\ 1 & -6.e^{-5t} & -3.e^{-8t}\\ 1 & 9.e^{-5t} & 9.e^{-8t}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}27 & 27 & 6\\ 12 & -8 & -4\\ -15 & 5 & 10\end{pmatrix}$$

y, por lo tanto:

$$p_{A,D}(t)=\frac{1}{60}\cdot\begin{pmatrix}1 & 4.e^{-5t} & e^{-8t}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\ -4\\ 10\end{pmatrix}=\frac{1}{10}-\frac{4.e^{-5t}}{15}+\frac{e^{-8t}}{6}$$

b) Como la cadena es regular y estable, el vector estacionario se obtiene:

$$\left.\begin{array}{r}(\pi_A,\pi_B,\pi_D)\cdot Q=0\\ \pi_A+\pi_B+\pi_D=1\end{array}\right\}\Rightarrow\pi=\left(\frac{9}{20},\frac{9}{20},\frac{1}{10}\right)$$

de modo que la proporción del tiempo que pasa trabajando, a largo plazo es:

$$\frac{9}{20}+\frac{9}{20}=\frac{18}{20}$$

es decir, el 90% del tiempo.

**6. Los potenciales clientes de un surtidor de gasolina llegan de acuerdo con una distribución de Poisson con tasa constante de 20 vehículos por hora; sin embargo, sólo entrarán en la estación si no hay más de 2 vehículos esperando, incluyendo el que reposta en ese momento. El tiempo necesario para servir a cada automóvil se distribuye exponencialmente con media de 5 minutos. Suponiendo que se ha alcanzado el estadio estacionario, se pide:**

**a) Fracción de tiempo que el surtidor está vacío.**

**b) Proporción de clientes que se pierden por estar congestionada la estación.**

**c) Analizar el efecto que tendría sobre el sistema invertir en un cursillo que garantizara que el operario tardará exactamente la mitad de tiempo en realizar el servicio.**

Solución.

Sea $X_t$ = “Número de clientes esperando en la cola, incluyendo el que está en el surtidor, en el minuto t”. $t\geq 0$.

Tenemos una cola con sala limitada (como mucho habrá dos vehículos en la Estación de Servicio). Como hay un solo servidor, estamos ante una cola de tipo

M/M/1/2. Aunque se puede resolver también considerándolo como un proceso de nacimiento y muerte con cola limitada o una cadena de Markov general en tiempo continuo, vamos a plantear la solución como un modelo de cola M/M/1/2:

Al llegar los vehículos con una tasa constante de 20 por hora, y sabiendo que estamos considerando el tiempo en minutos, resulta que la tasa de llegada es:

$$\lambda = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}.$$

Al salir los vehículos según son servidos, siendo el tiempo de servicio una variable con una distribución exponencial de media 5 minutos, la tasa de salida será:

$$\mu = \frac{1}{5}.$$

En este caso, la intensidad de tráfico es $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{1/3}{1/5} = \dfrac{5}{3}$.

a) La fracción de tiempo que el surtidor está vacío es:

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}}\rho^0 = \frac{1-\frac{5}{3}}{1-\left(\frac{5}{3}\right)^3}\left(\frac{5}{3}\right)^0 = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{27-125}{27}} = \frac{-54}{-294} = \frac{9}{49}.$$

El surtidor está vacío (ocioso) con una probabilidad de 9/49.

Además, se puede calcular la probabilidad de que haya uno o dos clientes en la estación, que sería:

$$P_1 = P_0 \cdot \rho = \frac{9}{49}\cdot\frac{5}{3} = \frac{15}{49} \text{ y } P_2 = P_1 \cdot \rho = \frac{15}{49}\cdot\frac{5}{3} = \frac{25}{49}.$$

y se comprueba que la suma de las tres probabilidades es la unidad.

b) La proporción de clientes que se pierden por estar congestionada la estación es igual a la probabilidad de que la cola esté completa, es decir, de que haya dos clientes en la estación, por lo tanto, la proporción es de 25/49, como se ha calculado en el apartado anterior.

c) Si el operario tardara la mitad que ahora en efectuar el servicio, la tasa de salida cambia a:

$$\mu = \frac{2}{5}.$$

En este caso, la intensidad de tráfico es:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1/3}{2/5} = \frac{5}{6}$$

Si repetimos los cálculos anteriores con esta nueva intensidad de tráfico, resulta:

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^3}\rho^0 = \frac{1-\frac{5}{6}}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^3} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{216-125}{216}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{91}{216}} = \frac{36}{91}$$

$$P_1 = P_0 \cdot \rho = \frac{36}{91} \cdot \frac{5}{6} = \frac{30}{91}$$

$$P_2 = P_1 \cdot \rho = \frac{30}{91} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{91}$$

Ahora se pierden menos clientes (en una proporción de 25/91), y además el operario está ocioso más tiempo (con una probabilidad de 36/91).

**7. En un aeropuerto, los aviones llegan con una tasa media de uno cada 15 minutos. De ellos, la probabilidad de que precisen reparación es del 50%. Por otra parte, el taller trata de decidir si instala uno de los dos procesos que puede aplicar. El primero funciona a una tasa de reparación de 25 minutos por aparato y en el segundo, más completo, la tasa asciende a 40 minutos.**

**a) Justificar por qué el taller debe tratar de instalar el proceso que funciona a una tasa de 25 minutos por reparación.**

**b) Describa este proceso en régimen estacionario, analizando en particular el número medio de aeronaves que habrá en el taller y la probabilidad de que esté ocioso.**

<u>Solución</u>.

Sea X(t) = "Nº de aviones en el taller al cabo de t (minutos)", $t \geq 0$.

Evidentemente, se trata de un proceso de nacimiento y muerte con tasas constantes, siendo la tasa de llegada de aviones al aeropuerto de (1/15). Como sólo requiere reparación el 50%, la tasa de entrada de aviones al taller será:

$$\lambda = \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{30}$$

a) Los dos procesos que pueden instalarse, se caracterizan por tener distribuciones de servicio exponencial con media (tasa de salida):

$$\mu_1 = \frac{1}{25}; \quad \mu_2 = \frac{1}{40}$$

El proceso alcanza el estado estacionario, sólo si $\lambda<\mu$. Por lo tanto:

$$\frac{\lambda}{\mu_1} = \frac{25}{30} < 1; \quad \frac{\lambda}{\mu_2} = \frac{40}{30} > 1$$

Por lo tanto, el taller no debe implementar el segundo proceso por ser evolutivo.

b) El proceso 1 se comporta como un sistema de espera M/M/1, siendo las tasas de entrada $\lambda$=(1/30) y la tasa de salida $\mu$=(1/25), con lo ya se ha comprobado que $\lambda<\mu$ y, por tanto, alcanza el estado estacionario, siendo esta situación la descrita por:

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{25}{30} = \frac{1}{6}$$

$$P_n = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n, n \geq 1$$

de modo que la probabilidad de que el taller esté ocioso es (1/6).

El número medio de aeronaves que habrá en el taller será:

$$L = E(\pi) = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = 5 \text{ aviones.}$$