

IDENTIFICACIÓN, ESTIMACIÓN Y CONTRASTE DEL MODELO DE REGRESIÓN UNIECUACIONAL.

SIN FORJES

UN MODELO DE REGRESIÓN DINÁMICA es una representación de la relación existente entre dos o más series temporales.

El MODELO DE REGRESIÓN LINEAL SIMPLE supone dos variables x_t, y_t que siguen procesos de ruido blanco y expresa la media condicionada de la variable dependiente o endógena y_t en función de los valores de la explicativa o exógena x_t del modo:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + u_t$$

donde las variables u_t , que no son observadas, son las INNOVACIONES del modelo, que siguen también un proceso de ruido blanco.

Al intentar aplicar este modelo a variables que no son ruido blanco y pueden tener dependencia temporal aparecen tres problemas principales:

- (1) La ecuación $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + u_t$ supone que la relación entre las dos variables es instantánea, pero entre variables dinámicas la relación puede ser más compleja y transmitirse con ciertos retardos: el valor de y_t puede depender de x_{t-k} o de $(x_t, x_{t-1}, \dots, x_{t-k})$.
- (2) El modelo supone implícitamente que la relación va de la variable x_t a la y_t , pero que la variable y_t no influye sobre la x_t , es decir, que no hay relación entre y_{t-k} y x_t , para cualquier $k > 0$. Sin embargo en muchos casos existe realimentación o causalidad bidireccional entre ambas variables: x_t influye sobre y_{t+k} , y a su vez y_t influye sobre x_{t+m} .
- (3) El modelo también supone que la parte de la variable respuesta y_t no explicada por la variable independiente x_t es un proceso u_t

de variables independientes. Esta hipótesis no suele verificarse para datos dinámicos: muchas veces la variable y_t evoluciona con inercia, de modo que el valor en el instante t está próximo al valor en el instante anterior $t-1$ (y éste al valor en $t-2, \dots$), lo que supone correlación entre las innovaciones, o hay un efecto de estacionalidad (y_t toma valores próximos en los instantes $s, 2s, 3s, \dots$) de modo que las innovaciones también están autocorrelacionadas.

En este tema se estudian los modelos para relacionar SERIES ESTACIONARIAS. Se conocen como modelos econométricos dinámicos o MODELOS DE FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA y describen cómo se transmiten los efectos desde una variable x_t a otra y_t cuando no existe realimentación o causalidad bidireccional.

REPRESENTACIÓN GENERAL

Una relación lineal unidireccional de x_t hacia y_t entre dos procesos estocásticos estacionarios de media cero puede representarse:

$$y_t = \alpha_0 x_t + \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \dots + n_t$$

que también puede escribirse de forma compacta utilizando el operador retardo:

$$y_t = \alpha(B) x_t + n_t$$

donde:

• $\alpha(B) = \alpha_0 + \alpha_1 B + \alpha_2 B^2 + \dots$ es la FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

• Los coeficientes α_i describen la relación dinámica entre las dos series y el proceso n_t , y se denominan función de respuesta al impulso.

• El proceso n_t se denomina proceso de perturbación o de inercia y sigue un proceso ARMA(p_n, q_n) estacionario:

$$\phi(B) n_t = \theta(B) a_t \quad \text{ARMA}(p_n, q_n)$$

• La ganancia de la función de transferencia es:

$$g = v(1) = \sum_{i=0}^{\infty} v_i$$

y representa el efecto a largo plazo que experimenta y_t cuando x_t aumenta en una unidad y permanece constante a continuación.

Las etapas para ajustar un modelo de regresión dinámica entre dos variables estacionarias son las mismas que para un modelo ARIMA, según la metodología de Box-Jenkins: Identificación, estimación y contraste (diagnóstico).

Si la variable y_t sigue un proceso ARMA(p_y, q_y) y la variable x_t sigue un proceso ARMA(p_x, q_x), la IDENTIFICACIÓN DEL MODELO DE REGRESIÓN DINÁMICA supone decidir:

- (1) La estructura de la función de transferencia $v(B)$.
- (2) El modelo ARMA(p_x, q_x) para la perturbación η_t .

(1) ESTRUCTURA DE LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA.

La expresión $v(B) = v_0 + v_1 B + v_2 B^2 + \dots$ de la función de transferencia no es útil para ser estimada en la práctica. Si el proceso x_t tiene alta autocorrelación, las variables $x_t, x_{t-1}, x_{t-2}, \dots$ estarán muy correlacionadas entre sí y será muy difícil separar sus efectos por el problema de multicolinealidad. Además, si la relación es larga, habrá que estimar muchos parámetros, con lo que el problema se complica.

Por tanto es mejor escribir la función de transferencia como cociente de polinomios:

$$v(B) = \frac{w_m(B)}{\delta_a(B)} B^b$$

donde el término B^b tiene en cuenta que la rela-

ción puede establecerse con un retardo inicial b ,

$$w_m(B) = w_0 + w_1 B + \dots + w_m B^m$$

es el numerador de la función de transferencia y juega un papel similar a la parte MA de un modelo ARMA, y

$$\delta_a(B) = 1 - \delta_1 B - \dots - \delta_a B^a$$

es el denominador, que juega el papel de la parte AR.

La identificación de la función de transferencia consiste en obtener valores aproximados de los coeficientes de la función de respuesta a impulsos $v(B)$ para inferir los órdenes de los polinomios $w_m(B)$ y $\delta_a(B)$ y el tiempo muerto b .

Para ello se define la FUNCIÓN DE COVARIANZAS CRUZADAS entre x_t, y_t como:

$$\gamma_{xy}(k) = E[(x_t - \mu_x)(y_{t+k} - \mu_y)] \quad , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad \text{FCC}$$

que resume la dependencia temporal: para $k > 0$ mide la influencia de x en y , para $k = 0$ es la covarianza habitual y para $k < 0$ mide la influencia de y en x . Por tanto no es una función simétrica y aquí será $\gamma_{xy}(k) = 0$ para $k < 0$, pues se supone que no hay realimentación de y a x .

Si x_t, y_t son estacionarios de media cero y la función de transferencia tiene sus n primeros coeficientes no nulos y el resto nulos:

$$y_t = v_0 x_t + v_1 x_{t-1} + \dots + v_n x_{t-n} + n_t$$

premultiplicando por x_{t-k} para sucesivos valores de $k \geq 0$ y tomando esperanzas resulta:

$$\begin{cases} E[x_t y_t] = v_0 E[x_t^2] + v_1 E[x_t x_{t-1}] + \dots + v_n E[x_t x_{t-n}] + E[x_t n_t] \\ E[x_{t-1} y_t] = v_0 E[x_{t-1} x_t] + v_1 E[x_{t-1}^2] + \dots + v_n E[x_{t-1} x_{t-n}] + E[x_{t-1} n_t] \\ \vdots \\ E[x_{t-n} y_t] = v_0 E[x_{t-n} x_t] + v_1 E[x_{t-n} x_{t-1}] + \dots + v_n E[x_{t-n}^2] + E[x_{t-n} n_t] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_{xy}(0) = \psi_0 \gamma_{xx}(0) + \psi_1 \gamma_{xx}(1) + \dots + \psi_n \gamma_{xx}(n) \\ \gamma_{xy}(1) = \psi_0 \gamma_{xx}(1) + \psi_1 \gamma_{xx}(0) + \dots + \psi_n \gamma_{xx}(n-1) \\ \vdots \\ \gamma_{xy}(n) = \psi_0 \gamma_{xx}(n) + \psi_1 \gamma_{xx}(n-1) + \dots + \psi_n \gamma_{xx}(0) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_{xy}(0) \\ \gamma_{xy}(1) \\ \vdots \\ \gamma_{xy}(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{xx}(0) & \gamma_{xx}(1) & \dots & \gamma_{xx}(n) \\ \gamma_{xx}(1) & \gamma_{xx}(0) & \dots & \gamma_{xx}(n-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{xx}(n) & \gamma_{xx}(n-1) & \dots & \gamma_{xx}(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}$$

Partiendo de las estimaciones muestrales de la FCC:

$$\hat{\gamma}_{xy}(k) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k} (x_t - \bar{x})(y_{t+k} - \bar{y}) \quad , k \geq 0$$

se puede resolver el sistema para obtener las estimaciones $\hat{\psi}_0, \hat{\psi}_1, \dots, \hat{\psi}_n$ de los coeficientes de la función de respuesta a impulsos.

Representando la secuencia de valores $\hat{\psi}_i$ se puede decidir la estructura de la función de transferencia de forma similar a como se hace con el correlograma o FAS de un proceso ARMA:

- (1) Si los primeros b coeficientes $\hat{\psi}_i$ parecen iguales a cero, entonces la función empieza en el retardo b .
- (2) Si hay m coeficientes aparentemente significativos sin una pauta característica de variación, se toma ese grado para el numerador de la función.
- (3) Si se observa una estructura de decrecimiento geométrico en los coeficientes, se incluye un término de orden $a=1$ en el denominador. Si el decrecimiento es sinusoidal, se supone $a=2$.

De esta forma se establece una forma provisional para la función:

$$U(B) = \frac{W(B)}{\bar{\alpha}(B)} B^b$$

que se estimará eficientemente en la siguiente etapa.

* Alternativamente, la función de transferencia se puede identificar por PREBLANQUEO (propuesto originalmente por Box y Jenkins), aunque este método no se utiliza mucho porque no puede extenderse fácilmente para muchas variables y porque es más rápido estimar directamente el modelo.

Consiste en filtrar previamente las dos variables para transformar el sistema de ecuaciones anterior en un conjunto de ecuaciones que se puedan resolver por separado.

Si x_t sigue un proceso ARMA(p, q):

$$\Phi_x(B) x_t = \Theta_x(B) \alpha_t \Rightarrow \alpha_t = \Theta_x^{-1}(B) \Phi_x(B) x_t = \Psi^{-1}(B) x_t$$

donde α_t es ruido blanco, con variancia σ_α^2 .

Si los dos procesos x_t, y_t se relacionan por la ecuación:

$$y_t = U(B) x_t + n_t$$

aplicando $\Psi^{-1}(B)$ a los dos miembros se tiene:

$$\Psi^{-1}(B) y_t = U(B) \Psi^{-1}(B) x_t + \Psi^{-1}(B) n_t$$

y llamando $R_t = \Psi^{-1}(B) y_t$, $\varepsilon_t = \Psi^{-1}(B) n_t$:

$$R_t = U(B) \alpha_t + \varepsilon_t$$

Por tanto existe la misma función de transferencia entre las variables filtradas α_t, R_t que entre las originales x_t, y_t . La diferencia es que ahora la variable explicativa α_t es ruido blanco.

Multiplicando por α_{t-k} y tomando esperanzas:

$$E[R_t \alpha_{t-k}] = E[U(B) \alpha_t \alpha_{t-k}] + E[\varepsilon_t \alpha_{t-k}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma_{\alpha R}(k) = U_k \sigma_\alpha^2 \Rightarrow \boxed{U_k = \frac{\gamma_{\alpha R}(k)}{\sigma_\alpha^2} = J_{\alpha R}(k) \frac{\sigma_R}{\sigma_\alpha}, k \geq 0}$$

donde $J_{\alpha R}(k)$ es la función de correlación cruzada entre α_t, R_t .

Para obtener una estimación preliminar de $\hat{\theta}_k$ se sustituyen los coeficientes de correlación teóricos $\gamma_{\alpha\beta}(k)$ por los muestrales $\Gamma_{\alpha\beta}(k)$ y las varianzas teóricas por las estimadas:

$$\hat{\theta}_k = \Gamma_{\alpha\beta}(k) \frac{\hat{\Sigma}_{\beta}}{\hat{\Sigma}_{\alpha}}$$

y, aunque no es una estimación eficiente, su representación sirve para obtener una identificación inicial de los órdenes (m, a, b) .

(2) MODELO PARA LA PERTURBACIÓN

Una vez identificada una función de respuesta a impulsos y habiendo obtenido estimaciones para sus coeficientes $\hat{\theta}(B)$, se puede estimar la perturbación:

$$\hat{n}_t = y_t - \hat{\theta}(B)x_t$$

y aplicar los métodos habituales de identificación de procesos ARMA para seleccionar los órdenes p_n, q_n .

Otra alternativa es utilizar como modelo de la perturbación el de y_t , con $p_n = p_y, q_n = q_y$, pues si no existiese relación entre x_t, y_t , ~~la función~~ los coeficientes de la función de transferencia serían nulos y resultaría $y_t = n_t$.

En general el modelo final para n_t será más simple que el de y_t , pues es muy posible que x_t explique parte de la dinámica de la respuesta. Otra opción es tomar un modelo $AR(n) \times AR(m)$, para captar la autocorrelación regular y la estacional.

En cualquier caso, Box y Jenkins sugieren que, al identificar la función de transferencia, suele ser suficiente un modelo con estructurales AR o MA de orden 1 ó 2 (además del posible tiempo muerto b), por ejemplo:

$$y_t = \frac{w_0}{1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2} x_t + \phi'(B) \theta(B) a_t$$

$$6 \quad Y_t = \frac{\omega_0 - \omega_1 B - \omega_2 B^2}{1 - \delta_1 B} B^b X_t + \Phi'(B) \Theta(B) a_t$$

Siendo n_t un proceso $ARMA(p_n, q_n)$: $\Phi(B)n_t = \Theta(B)a_t$ con a_t ruido blanco.

Una vez establecida la forma de la función de transferencia y el modelo para la perturbación:

$$\boxed{Y_t = \frac{\omega_m(B)}{\delta_a(B)} B^b X_t + \frac{\Theta(B)}{\Phi(B)} a_t} \quad ,, \quad \Phi(B)n_t = \Theta(B)a_t$$

en la hipótesis de normalidad, la función de verosimilitud puede escribirse siguiendo el mismo procedimiento que en el caso univariante:

$$f(y_1, y_2, \dots, y_T) = \prod_{t=k+1}^T f(y_t / y_{t-1}, \dots, y_1) f(y_1, y_2, \dots, y_k) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log f(y_1, \dots, y_T) = \sum_{t=k+1}^T \log f(y_t / y_{t-1}, \dots, y_1) + \log f(y_1, \dots, y_k)$$

con $k = \max\{a, m+b\}$.

Despreciando el segundo término y prescindiendo de constantes, la función soporte condicionada para el vector de parámetros $\vec{\beta} = (b, \vec{\omega}, \vec{\delta}, \vec{\Theta}, \vec{\Phi})$ queda:

$$\boxed{L(\vec{\beta} / y_1, \dots, y_T) = -\frac{T-k}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=k+1}^T a_t^2}$$

Maximizar $L(\vec{\beta} / y_1, \dots, y_T)$ equivale a minimizar $\sum_{t=k+1}^T a_t^2$, que puede plantearse como un problema de mínimos cuadrados generalizados.

Ejemplo sencillo:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + n_t \quad , \text{ con } n_t = \beta n_{t-1} + a_t \text{ proceso AR}(1)$$

Si β fuese conocido, multiplicando por $(1 - \beta B)$ queda:

$$(1 - \beta B)Y_t = (1 - \beta B)\beta_0 + \beta_1(1 - \beta B)X_t + a_t$$

definiendo las nuevas variables $\tilde{Y}_t = Y_t - \beta Y_{t-1}$, $\tilde{X}_t = X_t - \beta X_{t-1}$, se pueden aplicar mínimos cuadrados a la regresión de \tilde{Y}_t sobre \tilde{X}_t :

$$\tilde{y}_t = c + u_0 \tilde{x}_t + a_t$$

y obtener u_0 .

Esto equivale a aplicar a las variables la transformación:

$$\begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \vdots \\ \tilde{y}_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\hat{\rho} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\hat{\rho} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_T \end{pmatrix}$$

que es, aproximadamente, el resultado de aplicar mínimos cuadrados generalizados.

En general, el modelo del proceso de inercia es desconocido, pero el procedimiento anterior puede aplicarse de forma iterativa:

(1) Se estima por mínimos cuadrados una regresión entre x_t, x_t :

$$\hat{y}_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_0 x_t$$

y se obtienen los residuos:

$$\hat{\eta}_t = y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_0 x_t$$

(2) Con estos residuos, se estima el AR(1):

$$\hat{\eta}_t = \hat{\rho} \hat{\eta}_{t-1}$$

(3) Con el coeficiente estimado $\hat{\rho}$ se transforman las variables x_t, x_t :

$$\tilde{y}_t = y_t - \hat{\rho} y_{t-1} \quad \tilde{x}_t = x_t - \hat{\rho} x_{t-1}$$

y con las nuevas variables \tilde{y}_t, \tilde{x}_t se repiten (1), (2), (3) hasta que los residuos de la regresión sean ruido blanco.

En general, para un modelo del tipo:

$$y_t = U(B)x_t + \frac{1}{T(B)}a_t$$

La estimación puede llevarse a cabo en las siguientes ETAPAS:

Etapa 1. Estimar una regresión entre y_t, x_t .

Obtener los residuos \hat{n}_t .

Estimar el modelo $\hat{n}_t = \hat{\pi}(B) a_t$ con ellos.

(Alternativamente se puede suponer como modelo inicial para la perturbación n_t el modelo univariante de y_t).

Etapa 2. Aplicar el modelo $\hat{\pi}(B)$ a la ecuación:

$$y_t = \psi(B)x_t + \frac{1}{\pi(B)} a_t$$

para que tenga residuos incorrelados, mediante:

$$\hat{\pi}(B)y_t = \psi(B)\hat{\pi}(B)x_t + \frac{\hat{\pi}(B)}{\pi(B)} a_t$$

Suponer $\frac{\hat{\pi}(B)}{\pi(B)} \approx 1$, transformar y_t, x_t en

$\hat{\pi}(B)y_t, \hat{\pi}(B)x_t$ y estimar los parámetros de la función de transferencia $\psi(B)$ por regresión entre las nuevas variables y_t, x_t :

$$\hat{y}_t = \hat{\psi}(B)\hat{x}_t$$

y obtener el proceso de inercia:

$$\hat{n}_t = y_t - \hat{\psi}(B)x_t$$

Etapa 3. Estimar los parámetros de la nueva serie del proceso de inercia:

$$\hat{n}_t = \hat{\pi}(B)a_t$$

Si el modelo estimado $\hat{\pi}(B)$ es prácticamente igual que el anterior, finalizar la estimación.

Si no, volver a la Etapa 2.

El algoritmo itera las etapas 2 y 3 hasta la convergencia. Si en la etapa 2 los parámetros de la función de transferencia $\psi(B)$ no pueden obtenerse mediante regresión porque hay términos

en el denominador, se sustituye por:

Etapas 2'. Calcular recursivamente los residuos del modelo \hat{a}_t , obteniendo primero el proceso de ruido y , a continuación sus residuos.

Por ejemplo, si $b=0, m=0, a=1, p=1, q=0$:

$$y_t = \frac{w_0}{1-\phi B} x_t + \frac{1}{1-\phi B} a_t$$

Entonces:

$$\begin{aligned} a_t &= (1-\phi B) \left[y_t - \frac{w_0}{1-\phi B} x_t \right] = \\ &= y_t - \phi y_{t-1} + w_0 x_t + (\phi + \phi) x_{t-1} + (\phi^2 + \phi^2 + \phi) x_{t-2} \dots \end{aligned}$$

que permite obtener los residuos a partir de unos valores iniciales.

Sea $S(\vec{B}) = \sum \hat{a}_t^2(\vec{B})$ con valor inicial $S(\vec{B}_0)$. Se calcula un nuevo valor de los parámetros \vec{B} que disminuya la suma de cuadrados mediante un algoritmo tipo Gauss-Newton y se itera hasta obtener convergencia.

Una vez seleccionado un modelo, antes de aceptarlo conviene efectuar CONTRASTES DIAGNÓSTICOS para comprobar que no presenta deficiencias detectables que puedan sugerir reformulaciones.

Conviene examinar:

- (1) Si el modelo puede simplificarse eliminando operadores con valores próximos en el numerador y en el denominador de la función de transferencia o en ambos miembros de la ecuación.

La presencia de raíces comunes o próximas

puede a veces mostrarse por correlaciones altas entre los parámetros estimados, lo que sugeriría buscar una forma de para meterizar el modelo para separar mejor los distintos efectos.

- (2) Si todos los parámetros incluidos son significativamente distintos de cero, comparando el valor obtenido con la desviación típica estimada mediante el estadístico t .
- (3) Si las raíces de los polinomios autoregresivos cumplen las condiciones de estacionariedad.

Consisten, como siempre, en comprobar si los residuos son una secuencia de variables Normales, independientes, de media cero y varianzas constante. Los contrastes que se utilizan son los mismos que para el caso univariante.

~~La~~ Una especificación incorrecta del modelo puede hacer que los residuos tengan autocorrelación y/o que estén correlacionados con las variables x_t .

Si el modelo verdadero es

$$y_t = \psi(B)x_t + \psi(B)a_t$$

pero se estima erróneamente por

$$y_t = \hat{\sigma}_1(B)x_t + \hat{\psi}_1(B)\hat{a}_t$$

igualando las dos expresiones

$$\psi(B)x_t + \psi(B)a_t = \hat{\sigma}_1(B)x_t + \hat{\psi}_1(B)\hat{a}_t$$

luego los residuos estimados \hat{a}_t verificarán el modelo

$$\hat{a}_t = \frac{\psi(B) - \hat{\sigma}_1(B)}{\hat{\psi}_1(B)} x_t + \frac{\psi(B)}{\hat{\psi}_1(B)} a_t$$

y pueden darse los casos:

(1) La función de transferencia es correcta: $\psi(B) = \hat{\psi}_1(B)$, pero el modelo de la perturbación es incorrecto: $\psi(B) \neq \hat{\psi}_1(B)$.

Los residuos \hat{a}_t tendrán estructura dinámica

$$\hat{a}_t = \frac{\psi(B)}{\hat{\psi}_1(B)} a_t$$

y por tanto presentarán autocorrelación, que puede detectarse con su correlograma.

Para contrastar si hay autocorrelación se puede utilizar el estadístico de Ljung-Box:

$$Q(h) = T(T+2) \sum_{k=1}^h \frac{\hat{r}_k^2}{T-k} \approx \chi^2_{h-(m+a)+2}$$

donde m, a son los órdenes de los polinomios MA y AR de la función de transferencia y no dependen del modelo del ruido.

(2) La función de transferencia es incorrecta: $\psi(B) \neq \hat{\psi}_1(B)$.

Habría correlación cruzada entre \hat{a}_t y x_t y, aunque el modelo de la perturbación ~~fuese~~ sea adecuado ($\psi(B) = \hat{\psi}_1(B)$), también habría autocorrelación entre los residuos \hat{a}_t pues

$$\hat{a}_t = \frac{\psi(B) - \hat{\psi}_1(B)}{\hat{\psi}_1(B)} x_t + a_t^*$$

La correlación cruzada entre los residuos estimados \hat{a}_t y la variable explicativa x_t se puede detectar estudiando su FCC.

Cuando la FCC entre \hat{a}_t y x_t no sea muy clara, debido a la propia estructura de dependencia de x_t , se puede estudiar la correlación entre \hat{a}_t y x_t , siendo x_t los residuos del modelo univariante de x_t ($\phi_x(B)x_t = \theta_x(B)a_t$), pues al ser a_t ruido blanco, la imagen será mucho más clara.

EN RESUMEN:

• Si $FCC(\hat{a}_t, x_t) \neq 0$, sugiere que la función de transferencia $U(B)$ no está bien especificada, y además es posible que también sea necesario reformular el modelo del ruido.

• Si $FCC(\hat{a}_t, x_t) \approx 0$, la función de transferencia $U(B)$ es correcta y habrá que estudiar el correlograma de los residuos: si hay autocorrelación, el modelo de la perturbación debe modificarse; si no la hay, el modelo es correcto.

(Al final)

Las PREDICCIONES de un modelo de regresión dinámica se calculan con los mismos principios que en el caso univariante.

El PREDICTOR que minimiza el ECM de los errores es la esperanza condicional a la información disponible:

$$\hat{y}_t(k) = E[y_{t+k} / y_t, \dots, y_1; x_t, \dots, x_1]$$

y las predicciones se obtienen de forma recursiva:

$$y_t = \psi(B)x_t + \psi(B)a_t$$

$$y_{t+k} = (\psi_0 x_{t+k} + \psi_1 x_{t+k-1} + \dots + \psi_m x_{t+k-m}) + a_{t+k} + \psi_1 a_{t+k-1} + \dots + \psi_h a_{t+k-h}$$

Tomando esperanzas condicionadas a la información hasta t y suponiendo que se conocen los parámetros y por tanto las perturbaciones a_t hasta el origen de la predicción:

$$\hat{y}_t(k) = \psi_0 \hat{x}_t^u(k) + \dots + \psi_k x_t + \dots + \psi_k a_t + \dots + \psi_{k+h} a_{t+h}$$

donde las predicciones $\hat{x}_t^u(k)$ son las de x_t dada su historia y se obtienen con el modelo univariante para x_t :

$$x_t = \psi_x(B)a_t \Rightarrow y_t = \psi(B)\psi_x(B)a_t + \psi(B)a_t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_t = \psi^*(B)a_t + \psi(B)a_t$$

$$\hat{y}_t(k) = \psi_k^* a_k + \psi_{k+1}^* a_{k+1} + \dots + \psi_k a_t + \psi_{k+1} a_{t+1} + \dots$$

$$V(\hat{y}_t(k)) = E[(y_{t+k} - \hat{y}_t(k))^2] = \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{k-1} \psi_j^{*2} + \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{k-1} \psi_j^2$$

lo que permite calcular intervalos de confianza suponiendo los parámetros del modelo conocidos.

Si se incorpora la incertidumbre, el intervalo de confianza se puede calcular de forma aproximada para un número de observaciones suficiente-

mente grande, sustituyendo los parámetros por sus estimaciones.

Toda esta metodología se puede generalizar fácilmente para p VARIABLES EXPLICATIVAS:

$$y_t = \frac{w_1(B)B^{b_1}}{\delta_1(B)} x_{1t} + \dots + \frac{w_p(B)B^{b_p}}{\delta_p(B)} x_{pt} + v_t$$

Como las series explicativas pueden estar correladas entre sí, en lugar de identificar la función de transferencia para cada una, conviene estimar directamente el modelo conjunto y reformulando a la vista del resultado.

Un procedimiento sencillo es tomar como modelo inicial para la perturbación el modelo univariante de y_t y suponer estructuras simples iniciales para todas las variables, del tipo

$$\frac{w_0 + w_1 B}{1 - \delta B}$$

En función de los coeficientes significativos encontrados se irá reformulando el modelo hasta obtener la estructura adecuada.

La estimación y diagnóstico del modelo se efectúa con los mismos principios que en el caso de una sola variable explicativa.