Tema 6. MODELOS DINÁMICOS

1. MODELOS DINÁMICOS

- Concepto de relac. dinámica (vs estática) → retardos
- Ejemplos económicos | inversión sobre producción; oferta monetaria sobre precios; inercia de var. económ.
- Algunas definiciones → f.r. impulso, f.r. escalón, retardo medio, retardo mediano, ganancia ...
- Distinción entre retardos en var. exógena ó var. endógena.

a) Todos los retardos en X_t → estimación MCO habitual

Dificultades $\begin{cases} \text{Retardos correlacionados} \to \text{multicolinealidad} \\ \text{Retardos infinitos} \Rightarrow \text{hay que acotarlos (pto 3)} \end{cases}$

b) Existen retardos en Y → incumple hptsis MLG. (pto 4)

u_t $\begin{cases} \text{sin autocorrelación} \Rightarrow \hat{\beta}_{MCO} \text{ sesgado, pero consistente} \\ \text{con autocorrelación} \Rightarrow \hat{\beta}_{MCO} \text{ no consistente} \end{cases}$

- Diferencia entre var. exógena y var. predeterminada

2. JUSTIFICACIÓN TEÓRICA

- Modelo de expectativas adaptativas

+ En $\frac{M_t}{P_t} = \beta_1 + \beta_2 E_t \Pi_{t+1} + u_t$ (Saldo monetario, tasa inflac. futura)

las expectativas son de la forma $E_t \Pi_{t+1} = \lambda \Pi_t + (1-\lambda) E_{t-1} \Pi_t$

Iterando, se obtiene

$E_t \Pi_{t+1} = \lambda \Pi_t + \lambda (1-\lambda) \Pi_{t-1} + \lambda (1-\lambda)^2 \Pi_{t-2} + \ldots$

Incorporando las expectativas al modelo original:

$$\frac{M_t}{P_t} = \lambda \beta_1 + \lambda \beta_2 \Pi_t + (1-\lambda) \left(\frac{M_{t-1}}{P_{t-1}} \right) + v_t$$

↳ Se estima y se despejan los coef. originales $\begin{cases} \hat{\lambda} \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_1 \end{cases}$

- Modelo de ajuste parcial de Nerlove

En $K_t^* = \beta_1 + \beta_2 Y_t + u_t$ ← ec. de demanda a largo plazo

K_t^* Capital deseado en función del nivel de producción

se formula una hipótesis sobre el comportamiento del stock de capital K_t

$K_t = \delta K_t^* + (1-\delta) K_{t-1}$ $\quad 0<\delta<1$ ← ec. de ajuste parcial

Iterando, se llega a

$K_t = \delta K_t^* + \delta (1-\delta) K_{t-1}^* + \delta (1-\delta)^2 K_{t-2}^* + \ldots$

que, introducido en el modelo original

↳ $K_t = \delta \beta_1 + \delta \beta_2 Y_t + (1-\delta) K_{t-1} + \delta u_t$

Una vez estimado, se pueden despejar los estim. orig $\begin{cases} \hat{\delta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_1 \end{cases}$

3. MODELO de RETARDOS INFINITOS.

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 X_{t-1} + \beta_4 X_{t-2} + \ldots + u_t .$$

- Hay que reducir el nº de parám. a estimar $\Rightarrow$ establecer hipótesis.
- Modelo de Koyck $\longrightarrow$ $\beta_i = \delta \beta_{i-1}$ $|\delta|<1$, $\forall i \geq 3$.
- El modelo queda $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \delta\beta_2 X_{t-1} + \delta^2 \beta_2 X_{t-2} + \ldots + u_t$
- Truncar dividiendo en dos partes: hasta δ^t y en adelante.

Truncado $Y_t = \beta_1 + \beta_2 Z_t + \delta^t \cdot \gamma + u_t$, $Z_t \rightarrow$ V.I.
$\gamma \rightarrow$ parám. desc.

- u normal $\Rightarrow$ $\hat{\beta}_{MV} = \hat{\beta}_{MCO}$.
- Realizar $\neq$ estim. para $0<\delta<1$ y elegir mejor R^2.

4. ESTIMACIÓN con RETARDOS de la VAR. ENDÓGENA.

- u_t NO tiene autocorrelación $\Rightarrow$ MCO válido.

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 Y_{t-1} + \beta_3 X_t + u_t \qquad |\beta_2|<1$$

tq. u_t ruido blanco
$E(X_t u_t) = 0$
$E(Y_{t-1} u_t) = 0$
$\text{plim}\left(\frac{X'X}{T}\right) = \Sigma_{XX}$ simétr, def(+)

$\Big\}$ $\hat{\beta}_{MCO}$ sesgado, consistente, asintóticamente normal

- u_t SÍ tiene autocorrelación $\Rightarrow$ Variables Instrumentales

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 Y_{t-1} + \beta_3 X_t + u_t \qquad |\beta_2|<1$$

$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$, ε_t ruido blanco, $|\rho|<1$.

$E[Y_{t-1} u_t] \neq 0 \Rightarrow \hat{\beta}$ no consistente $\Rightarrow$ estim. var. instrum.

- Z_t es VI de Y si:
  - $\rightarrow$ no está incluida en el modelo
  - $\rightarrow$ incorrelacionada con u
  - $\rightarrow$ correlacionada con Y

$\hat{\beta}_{VI} = (Z'X)^{-1} Z'Y$ es sesgado, pero consistente.

5. CONTRASTE de EXOGENEIDAD de HAUSMAN.

- Antes de utilizar VI, ¿son todas las demás exógenas?
- En caso contrario, estimadores inconsistentes.

$Y = X\beta + u \longrightarrow Y_1 \alpha + Z_1 \delta + u$ $\begin{cases} Y_1 \rightarrow \text{correlac. con } u \Rightarrow VI. \\ Z_1 \rightarrow \text{no correlac.} \end{cases}$

Procedimiento:
1 _ Estimar MCO modelo original $\rightarrow SR_0$
2 _ Regresiones auxiliares de Y_1 sobre VI y sustituir $Y_1 = \hat{Y}_1$
3 _ Estimar MCO modelo con $\hat{Y}_1 \longrightarrow SR_1$.

Contraste de exogeneidad de Hausman:

H_0: Todas las var. explicativas son exógenas

Estadístico del contraste, $I_d = \frac{SR_0 - SR_1}{\hat{\sigma}_u^2}$

Bajo H_0 cierta, $I_d \longrightarrow \chi^2_r$ ($r \equiv$ nº var. correl. con u)

Decisión: Si $I_d \geq \chi^2_r$ (tablas) $\Rightarrow$ rechazo H_0

6_ EFICIENCIA RELATIVA de los ESTIMADORES V.I.

- El nº de VI debe ser exactamente igual al nº de var. explicativas del modelo original, para que la estimac. sea consistente.
- Generar las VI + correlacionada con la var. explicativa a instrumentar.
- Surge el EMínCuad en 2 etapas.
- $\hat{\beta}_{MC2E}$ es relativamente más eficiente que otro estim. de VI.

7_ EXPECTATIVAS RACIONALES.

- La var. endógena depende de las expectativas de los agentes.
- Expectativas racionales
  + No impone ninguna forma funcional a las expectativas
  + Los agentes explotan de manera óptima la información
  + La mejor expectativa es la esperanza condicional

1 _ INTRODUCCIÓN.

Relación entre var. endógena y var. explicativas DINÁMICA,

porque X_{t-k} influye sólo en Y_t

X_{t-k} influye sobre $Y_{t-k}, Y_{t-k+1}, \ldots$

las dos cosas a la vez.

aparecen retardos de la var. exóg y/o de la v. endóg

Hasta ahora sp. relación estática → X_t relac. con Y_t solamente.

Ejemplos económicos:

+ Inversión productiva (puntual) influye sobre el nivel de producción
  - → no de manera instantánea (hace falta que pase tiempo)
  - → durante varios años (el efecto permanece en + de 1 período)
+ Crecimiento en la oferta monetaria ⇒ influye sobre los precios.
+ Inercia de las var. económica (Y_t depende de su propio pasado)

Observación: La relac. dinámica depende de la unidad de medición temporal de los datos.

Relac. dinámica mensual puede ser estática anual.

~~Algunas definiciones~~

⇒ Primeras propiedades

influye ahora, influirá mañana, influirá pasado

En el modelo $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 X_{t-1} + \beta_4 X_{t-2} + u_t$

un cambio (puntual) ~~en~~ X_t supone cambios para Y_t, Y_{t+1}, Y_{t+2}

- Función de respuesta al impulso: Sucesión de los efectos que provoca un cambio transitorio en X_t sobre Y_t ahora y + adelante. (En el modelo, sería $\beta_2, \beta_3, \beta_4, 0, 0, \ldots$)

- Función de respuesta al escalón: Sucesión de los efectos que provoca un cambio permanente de X_t sobre Y_t ahora y luego ($Y_t, Y_{t+1}, \ldots$)

Otras definiciones: retardo medio, retardo mediano, ganancia

Todos estos conceptos son diferentes cuando en el modelo aparecen retardos de la var. endógena: $Y_t = \alpha + \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 X_t + u_t$ (retardo en v. endóg.)

→ respuesta a corto plazo

→ respuesta a largo plazo

Por tanto, el tratamiento estadístico de los modelos difiere según haya retardos en las var. exógenas, endógenas o en las 2.

(a) Todos los retardos en var. exógenas

- Las var. exógenas, aunque retardadas, siguen siendo deterministas $\Rightarrow$ se puede MCO sin problemas.

Posibles dificultades:

1 – Retardos correlacionados entre sí $\Rightarrow$ multicolinealidad

2 – Estructura de retardos de orden infinito $\Rightarrow$ estimación imposible.

Hay que imponer alguna restric. a los coef, para que su número sea limitado. $\longrightarrow$ lo veremos luego

(b) Aparecen valores retardados de la var. endógena

- Se incumple una de las hipótesis del MLG, pues alguna de las var. explicativas no es determinista, sino estocástica.

Distinguimos dos situaciones:

b.1. u_t no tiene autocorrelación (∃ var. predeterm.)

Las distrib. de Y_t y de u_t NO son indep, ya que al aparecer el pasado de Y como var. explicativa, resulta que Y_t depende de u_t y de valores retardados de u_t.

~~Bajo det. cond~~ $\hat{\beta}_{MCO}$ será sesgado, aunque consistente (bajo det. condic)

b.2. u_t SÍ tiene autocorrelación

En este caso Y_{t-1} está correlacionada con u_{t-1} y con u_t.

$\hat{\beta}_{MCO}$ ya no es consistente (~~es~~ sesgado, claro)

Diferencias: $E[X_{t\pm s} u_t] = 0$, $\forall s$ (pasado y futuro)

$X_t \rightarrow$ var. exógena

$$E[Y_{t-s} u_t] = 0, \; s \geq 0$$

$Y_{t-s} \rightarrow$ var. predeterminada

exógena $\Rightarrow$ predeterminada, siempre

Y_{t-1} es predeterminada si u_t es ruido blanco (no autocorr.)

Y_{t-1} NO es predeterminada si u_t tiene autocorrelación

2 - JUSTIFICACIÓN TEÓRICA

a) Modelo de expectativas adaptativas. (1956, Cagan)

Demanda de saldos monetarios depende del valor esperado de la tasa de inflac. futura. $\boxed{\frac{M_t}{P_t} = \beta_1 + \beta_2 E_t \Pi_{t+1} + u_t}$

El modelo tiene distintas especificaciones ~~expectativas~~, según la hipótesis sobre cómo los agentes económicos forman sus expectativas sobre la tasa de inflación futura.

Expectativas adaptativas → los agentes modifican la expectativa realizada en el periodo anterior atendiendo únicamente al error de predicción cometido.

$$\boxed{E_t \Pi_{t+1} = \lambda \Pi_t + (1-\lambda) E_{t-1} \Pi_t} \leftarrow \lambda \cdot \text{observ} + (1-\lambda)\,\text{expect.}$$

c.l.c.

$\lambda = 0 \Rightarrow$ expectativas estáticas $\cancel{E_t}\; E_t \Pi_{t+1} = E_{t-1} \Pi_t$

$\lambda = 1 \Rightarrow$ exp. tot. adaptativas $E_t \Pi_{t+1} = \Pi_t$

Iterando, se obtiene

$$E_t \Pi_{t+1} = \lambda \Pi_t + (1-\lambda)\left[\lambda \Pi_{t-1} + (1-\lambda) E_{t-2} \Pi_{t-1}\right] =$$

$$\boxed{E_t \Pi_{t+1} = \lambda \Pi_t + \lambda(1-\lambda)\Pi_{t-1} + \lambda(1-\lambda)^2 \Pi_{t-2} + \dots}$$

$0 < \lambda < 1 \Rightarrow$ Cuanto más lejano sea el pasado, menor importancia tiene el valor

Si se incorporan las expectativas al modelo de regresión ??

$$\frac{M_t}{P_t} = \lambda \beta_1 + \lambda \beta_2 \Pi_t + (1-\lambda)\left(\frac{M_{t-1}}{P_{t-1}}\right) + v_t \leftarrow$$

Aunque la estim. del modelo no es fácil:

$\hat{\lambda} \leftarrow \hat{M}_{t-1} \quad \hat{P}_{t-1}$

$\hat{\lambda}$ coef. de $\frac{M_{t-1}}{P_{t-1}}$

$\hat{\beta}_2 = \frac{\widehat{(\lambda\beta_2)}}{\hat{\lambda}}$

$\hat{\beta}_1 = \frac{(\lambda\hat{\beta}_1)}{\hat{\lambda}}$

2) Modelo de ajuste parcial de Nerlove

$K^* \to$ capital deseado.

Sp. capital deseado es función del nivel de producto

$$K^*_t = \beta_1 + \beta_2 Y_t + u_t$$

← ec. de demanda a largo plazo

Hptsis. sobre el comportamiento de K_t, mecanismo de ajuste del stock de capital al capital deseado.

$$K_t = \delta K^*_t + (1-\delta) K_{t-1} \quad 0<\delta<1$$

← ec. de ajuste parcial

$\delta = 0 \Rightarrow K_t = K_{t-1} \to$ stock fijo, no alcanza K^*_t.

$\delta = 1 \Rightarrow K_t = K^*_t \to$ no hace falta ajuste, irreal.

→ Iterando:

$$K_t = \delta K^*_t + \delta(1-\delta) K^*_{t-1} + \delta(1-\delta)^2 K^*_{t-2} + \dots$$

Al introducir el mecanismo de ajuste parcial en el modelo original:

$$K_t = \delta\beta_1 + \delta\beta_2 Y_t + (1-\delta) K_{t-1} + \delta u_t$$

que, una vez estimado, da lugar a los estim. originales $\begin{cases} \hat{\delta} \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_1 \end{cases}$

---

3. MODELO de RETARDOS INFINITOS

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 X_{t-1} + \beta_4 X_{t-2} + \dots + u_t$$

Aparecen infinitos retardos de la (una) variable exógena.

Estimación imposible, nos quedamos sin grados de libertad.

Hay que reducir el nº de parámetros a estimar $\Rightarrow$ establecer hptsis sobre la evolución de los coef. de los retardos sucesivos de la var. exógena.

Un supuesto muy habitual es el de Koyck:

Modelo de Koyck

Pasado pierde importancia

$\beta_i = \delta \beta_{i-1} \quad |\delta|<1 \quad \forall\ i \geq 3$ → con expansión.

El modelo original $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 X_{t-1} + \beta_4 X_{t-2} + \dots + u_t$ queda de la forma

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \delta\beta_2 X_{t-1} + \delta^2 \beta_2 X_{t-2} + \dots + u_t =$$
$$= \beta_1 + \beta_2 (X_t + \delta X_{t-1} + \delta^2 X_{t-2} + \dots) + u_t$$

que depende solamente de β_1, β_2 y δ.

Para poder estimar este modelo es preciso truncar el polinomio de retardos, tratar la 1ª parte como una variable Z_t y tratar la 2ª parte (infinita) como un parámetro desconocido, γ.

El modelo transformado es

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 Z_t + \delta^t \cdot \gamma + u_t$$

Sp. u_t es Normal, entonces el estimador MV coincide con el estimador MCO.

Normalmente, se supone $0<\delta<1$. Para distintos valores de δ se estima el modelo y se escoge aquel con R^2 mayor, con sus respectivas $\hat{\beta}_1$ y $\hat{\beta}_2$.

4_ ESTIMACIÓN con RETARDOS de la VAR. ENDÓGENA

En la parte explicativa aparecen retardos de Y.
El tratamiento es muy distinto según el término de error presente autocorrelación o no.

a) u_t no tiene autocorrelación

Sea $Y_t = \beta_1 + \beta_2 Y_{t-1} + \beta_3 X_t + u_t \qquad |\beta_2|<1$ (estac)

con las siguientes propiedades:

→ u_t ruido blanco, $E(u_t)=0, \forall t$; $V(u) = \sigma_u^2 I_T \Rightarrow$ no autocorr.

→ $E(X_t u_t) = 0, \forall t$ porque X_t es determinista

→ $E(Y_{t-1} u_t) = 0$, pq u_t es ruido blanco (influye sobre el presente y el futuro, nunca sobre el pasado)

JFF! → $p\lim \left(\frac{X'X}{T}\right) = \Sigma_{XX}$, matriz simétrica definida (+).

donde $X'X$ incluye valores de la var. endógena, por aparecer en la parte explicativa.

En estas circunstancias, $\hat{\beta}_{MCO}$ es consistente ($\hat{\beta}_{MCO} \to \beta$) y tiene distrib. asintótica Normal

Por tanto, si u_t no tiene autocorrelación, puede utilizarse MCO aunque el modelo incluya retardos de la var. endógena. (indep. del nº de retardos que aparezcan, basta con que los coef. cumplan las condic. de estacionariedad).

b) u_t Sí tiene autocorrelación

Consideremos el modelo

$$\boxed{\begin{array}{lll} Y_t = \beta_1 + \beta_2 Y_{t-1} + \beta_3 X_{t} + u_t & |\beta_2|<1 & \\ u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t & |\rho|<1 & , \varepsilon_t \text{ ruido blanco} \end{array}}$$

En este caso, $E[Y_{t-1} u_t] \neq 0$, pq Y_t está relacionado con u_t, que a su vez está relacionado con u_{t-1} (autocorr)

$\hat{\beta}_{MCO}$ será sesgado, pero no consistente.

obviamente, para modelos + complejos ocurre igual.

El procedimiento para obtener estimadores consistentes es utilizar un estimador de var. instrumentales.

una var. instrumental, Z

→ no está incluida en el modelo

→ incorrelacionada con u

→ correlacionada con la var. para la que hace de instrumento.

Los vectores X_t y Z_t tendrán en común las var. incorrelac. con u.

El estimador de var. instrumentales

$$\hat{\beta}_{VI} = (Z'X)^{-1} Z'y$$

En general, $\hat{\beta}_{VI}$ sesgado, pero consistente bajo ciertas condic.

5_ CONTRASTE de EXOGENEIDAD de HAUSMAN

Antes de utilizar var. instrumentales con los retardos de las var. endógenas en presencia de autocorrelación, es conveniente asegurarse de la exogeneidad del resto de var. explicativas. De no darse, estimadores inconsistentes.

Hausman sugiere distinguir entre las var. explicativas correlacionadas y las no correlac. con el término de error.

$$Y = X\beta + u \longrightarrow Y_1\alpha + Z_1\delta + u \quad \begin{cases} Y_1 \to r \text{ var. correlac. con } u \\ Z_1 \to k-r \text{ var. no correlac.} \end{cases}$$

1°. Estimar por MCO el modelo y obtener SR_0.
2°. Regresiones auxiliares de las var. Y_1 sobre los instrumentos, sustituir Y_1 por $\hat{Y}_1$
3°. Estimar por MCO ~~el completo~~ modelo con $\hat{Y}_1$ y obtener SR_1.

El estadístico es:

$$(\hat{\beta}_{MCO} - \hat{\beta}_{VI})' \left[Var(\hat{\beta}_{VI}) - Var(\hat{\beta}_{MCO})\right]^{-1} (\hat{\beta}_{MCO} - \hat{\beta}_{VI}) = \frac{SR_0 - SR_1}{\hat{\sigma}_u^2}$$

Bajo H_0 cierta, $I_d \longrightarrow \chi^2_r$

H_0: Todas las var. explicativas son exógenas

$I_d > \chi^2_{tablas} \Rightarrow$ rechazo H_0

6 _ EFICIENCIA RELATIVA de los estimadores de V. I.

Nº instrumentos
- = nº var. explicativas → estim. consistente
- > nº var. explic. → sobreidentificación
- < nº var. explic. → no se puede estimar consistentemente

La dim. del vector de var. instrumentales debe ser $= K$, $=$ nº var. explicativas del modelo original. (En caso contrario, $Z'X$ no sería cuadrada ni invertible)

Además, el modo en que los instrumentos se combinan para generar var. instrumentales influye sobre la eficiencia del estimador.

↳ Generar la var. instrumental + correlacionada con la var. explicativa que requiera el instrumento.
Se estima una regresión auxiliar sobre los instrumentos que disponemos, para obtener la var. generada $\hat{y}$ como c.l. de los instrumentos.

Surge el estimador de mínimos cuadrados en 2etapas, $\hat{\beta}_{MC2E}$.

El estimador $\hat{\beta}_{MC2E}$ es relativamente más eficiente que otro estimador de dichas var. instrumentales.

Es importante disponer de un contraste de validez de los posibles instrumentos.

~~El valor numérico del~~

7_ ESTIMACIÓN de modelos con EXPECTATIVAS RACIONALES

La var. endógena depende, entre otros factores, de las expectativas que los agentes económicos tienen o tuvieron acerca de los valores futuros de alguna var. exógena o de la var. endógena.

$E[X_{t+1}/\Omega_t]$ ($_tX_{t+1}$) ≡ expectativa que los agentes tienen del valor de X en t+1 con información hasta t.

Estrategias:

1_ Suponer que los agentes forman sus expectativas de modo adaptativo

$0<\lambda<1$. $E[X_{t+1}/\Omega_t] = E[X_t/\Omega_{t-1}] + (1-\lambda)(X_t - E[X_t/\Omega_{t-1}])$

$_tX_{t+1} = {}_{t-1}X_t + (1-\lambda)(X_t - {}_{t-1}X_t)$

2_ Completar el modelo estructural con una ec. de formación de expectativas

$E[X_{t+1}/\Omega_t] = \delta_0 + z_t'\delta$, utilizando esta ec. para eliminar la expectativa de X_{t+1}.

3_ Suponer que los agentes forman sus expectativas utilizando un mecanismo de retardos del tipo:

$$E[X_{t+1}/\Omega_t] = \sum_{s=0}^{\infty} \delta_s X_{t-s} \xrightarrow{p.ej.} (1-\delta)\sum_{s=0}^{\infty}\delta^s X_{t-s}$$

Expectativas racionales

- No impone ninguna forma funcional a la expectativas
- Sólo dice que los agentes explotan de modo óptimo la información de que disponen.

En Novales, hasta ahora expectativa ≡ $_tX_{t+1}$.

expectativa racional $= E[X_{t+1}/\Omega_t]$ ≡ esperanza condicional

La esperanza condicional es el estimador óptimo.

El error racional de previsión queda definido por:

$$\varepsilon_{t+1} = X_{t+1} - E[X_{t+1}/\Omega_t]$$ expectativa

Tomando esperanzas condicionales

$$E[\varepsilon_{t+1}/\Omega_t] = E[X_{t+1}/\Omega_t] - E[X_{t+1}/\Omega_t] = 0.$$

Los errores de previsión racionales en un período hacia el futuro son impredecibles $\Rightarrow$ no hay autocorrelación.

Inconveniente: Para calcular la esperanza condicional hay que tener la distrib. cjta de todas las variables en $\Omega_t + \varepsilon_{t+1}$ $\Rightarrow$ imposible.

Si se supone normalidad es más fácil

Entonces, un modelo del tipo $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \beta_2 \underset{\text{expectativa}}{X_{t+1}} + u_t$

se convierte en $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \beta_2 X_{t+1} + v_t$

con $v_t = u_t - \beta_2 \varepsilon_{t-1} = u_t - \beta_2 (X_{t+1} - E[X_{t+1}/\Omega_t])$

Si u_t ruido blanco, entonces v_t no autocorrelado.

Tal ausencia de autocorrelación depende del horizonte temporal de las expectativas incluidas en el modelo.

Tema 6 _ ECTRÍA | Modelos dinámicos

1. INTRODUCCIÓN

Hasta ahora hemos supuesto una relación contemporánea entre las variables. (Y_t con X_t)

Sin embargo, la Tª Económica sugiere que, en la mayoría de los casos, las relac. entre variables son dinámicas (Y_t con X_{t-K})

El impacto de una variable puede ser o no instantáneo, y además se deja notar durante un cierto nº de periodos.

Por otra parte, las var. económicas tienen bastante inercia, lo que hace que una variable dependa de su propio pasado.

Nota: La relación dinámica depende de la frecuencia de las observaciones. Una var. influye ahora y 2 meses + tarde sobre otra. Si los datos son mensuales, relac. dinámica; si los datos son anuales, relac. estática.

Ejemplos:

X_t impulso $\Rightarrow$ ~~Y_t~~ Función de respuesta al impulso de Y_t ~~se~~ nota durante algunos periodos, luego desaparece.

X_t escalón $\Rightarrow$ Y_t tb. cambia de manera permanente. La función de respuesta al ~~impulso~~ escalón es una sucesión de valores acumulados de la f.r. al impulso.

Retardo medio $= \dfrac{\sum i\beta_i}{\sum \beta_j}$. Un valor bajo implica ajuste rápido.

Si consideramos un modelo: $Y_t - \alpha_1 Y_{t-1} - \ldots - \alpha_p Y_{t-p} = \delta + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \ldots + u$

abreviado $A(L)Y_t = \delta + B(L)X + u_t$

Ganancia $= \dfrac{B(1)}{A(1)}$ (donde pone L pon 1).

Cuando hay retardos de la var. endógena:

Condición estacionariedad $\begin{cases} \text{f.r. al impulso} \longrightarrow 0 \\ \text{f.r. al escalón} \longrightarrow K. \end{cases}$

ECTRÍA – T6

+ Cuando todos los retardos son de var. exógenas:

+ Todas las var. explicativas son deterministas.
  Peligro de multicolinealidad (autocorrelación de una var. exógena).
  Si el nº de retardos es ∞, modelo imposible de estimar.

+ Si aparecen retardos de la var. endógena:
  - Alguna var. explicativa es aleatoria (Y_t lo es).
  - Si el término de error no tiene autocorrelación, el estimador MCO será en general sesgado, pero consistente.
  - u_t tiene autocorrelación, no podemos garantizar la consistencia de MCO.

Para que MCO sea consistente, $E[X_{t-s}u_t]=0 \ \forall s \geq 0 \ \forall X_t$.
$\Rightarrow X_t$ predeterminado.
Pasa con u_t ruido blanco sin autocorrelación.

ECTRÍA - T6

2 JUSTIFICACIÓN TEÓRICA

a) Modelo de expectativas adaptativas (Cagan - 1956).

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 \underbrace{E(X_{t+1}/\Omega_t)}_{{}_tX_{t+1}} + u_t$$

$Y \equiv$ demanda saldos monetarios
$X \equiv$ tasa inflación

donde $E(X_{t+1}/\Omega_t) = E(X_t/\Omega_{t-1}) + \lambda\,(X_t - E(X_t/_{t-1}))$ $0<\lambda<1$

$${}_tX_{t+1} = {}_{t-1}X_t + \lambda(X_t - {}_{t-1}X_t)$$

Los agentes modifican la expectativa que se formaron en el periodo anterior teniendo en cuenta únicamente el error de predicción cometido.

Otra forma,

$$E(X_{t+1}/\Omega_t) = \lambda X_t + (1-\lambda)\,E(X_t/\Omega_{t-1}) \qquad \text{c.l.t.c.}$$

$\lambda = 0 \longrightarrow$ expectativas estáticas, no dependen del error cometido.
$\lambda = 1 \longrightarrow$ expectativas totalmente adaptativas

Se puede iterar esta expresión con los valores pasados y sustituir en el modelo

$$Y_t = \lambda\beta_1 + \lambda\beta_2 X_t + (1-\lambda)\,Y_{t-1} + v_t \quad \rightarrow \text{se puede obtener}$$

$$\hat{Y} \rightarrow \hat{\lambda}\ ;\ \hat{\beta}_2 = \frac{\widehat{\lambda\beta_2}}{\hat{\lambda}}\ ;\ \beta_1$$

b) Modelo de ajuste parcial (Nerlove)

$$Y_t^* = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t$$, se añade una ec. estabilizadora

$Y^* \rightarrow$ deseado
$Y \rightarrow$ observado

$$Y_t - Y_{t-1} = \delta\,(Y_t^* - Y_{t-1}) \quad 0<\delta<1$$

$\delta = 1 \rightarrow$ observado = Esperado
$\delta = 0 \rightarrow Y_t = Y_{t-1} \Rightarrow$ no cambia, indep. deseo

Otra forma:

$$Y_t = \delta Y_t^* + \delta(1-\delta)\,Y_{t-1}^*$$, que iterando

$$Y_t = \delta Y_t^* + \delta(1-\delta)\,Y_{t-1}^* + \delta(1-\delta)^2 Y_{t-2}^* + \dots$$

Incorporando el mecanismo de ajuste parcial al modelo:

$$Y_t = \delta\beta_1 + \delta\beta_2 X_1 + (1-\delta)\,Y_{t-1} + \delta u_t$$

Una vez estimado el modelo, se obtienen δ y β_2 y β_1.

3 – MODELOS de RETARDOS INFINITOS

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 X_{t-1} + \dots + u_t$$

No se puede estimar, nos quedaríamos sin grados de libertad.
Hay que reducir el nº de parámetros.

a) Modelo de Koyck

$\beta_i = \delta \beta_{i-1} \qquad |\delta| < 1 \qquad$ para $i \geq 3$.

El modelo queda:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \delta \beta_2 X_{t-1} + \delta^2 \beta_2 X_{t-2} + \dots + u_t =$$

$$= \beta_1 + \beta_2 (X_t + \delta X_{t-1} + \delta^2 X_{t-2} + \dots) + u_t \Longrightarrow \text{Sólo 3 parám. } |\delta| < 1$$

Ganancia $= \beta_2$

Retardo medio $= \dfrac{1}{(1-\delta)^2}$

Para estimar el modelo hay que truncarlo.

b) EMV del modelo de Koyck.

$u_t \rightarrow N(0, \sigma_u^2) \quad \Rightarrow$ EMV = EMCO.

En general, se supone $0 < \delta < 1$

Se hace una partición de este intervalo y se estima por MCO el modelo para cada valor de δ.

Se escoge el valor de δ con SR menor $\sim$ R^2 mayor.

La matriz de covarianzas apropiada es la inversa de la matriz de información.

Observación: $Var(\hat{\sigma}_u^2)$ indep. de $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ y $\hat{\delta}$.
la matriz no coincide con MCO, ignora el hecho de que la última var. explicativa depende de δ.

4_ESTIMACIÓN con RETARDOS de la VAR. ENDÓGENA

a) u_t SIN autocorrelación

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 Y_{t-1} + \beta_3 X_t + u_t \qquad |\beta_2| < 1$$, que satisface

a) $E[u] = 0_T$, $E[uu'] = \sigma_u^2 I_t$ → no autocorrelación

b) $E[X_t u_t] = 0$, $\forall t$ porque X_t es determinista

c) $E[Y_{t-1} u_t] = 0$ (y no depende del futuro)

d) $\text{plim}\left(\frac{X'X}{T}\right) = \Sigma_{XX}$, matriz definida positiva, donde

$$X'X = \begin{pmatrix} T-1 & \sum_2 Y_{t-1} & \sum_2 X_t \\ & \sum_2 Y_{t-1}^2 & \sum_2 Y_{t-1} X_t \\ & & \sum_2 X_t^2 \end{pmatrix}$$

incluye valores de Y. $|\beta_2| < 1$

$\hat{\beta}_{MCO}$ es consistente ($\hat{\beta}_{MCO} \xrightarrow[T\to\infty]{} \beta$) y es asint. normal.

Si la muestra es sufic. grande, puede utilizarse MCO aunque haya retardos de la var. endógena. Puede utilizarse la matriz de covarianzas como aprox, $\hat{\beta}_{MCO}$ se distribuye como una Normal. Los resultados de inferencia son aprox. válidos.

b) u_t CON autocorrelación

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 Y_{t-1} + \beta_3 X_t + u_t \qquad |\beta_2| < 1$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t \qquad |\rho| < 1$$, $\varepsilon_t \equiv$ ruido blanco

Autocorrelación ⇒ $E[u_t u_{t-1}] \neq 0$ ⇒ $E[Y_{t-1} u_t] \neq 0$ ⇒ $\hat{\beta}_{MCO}$ sesgado

El sesgo no desaparece al aumentar el tamaño muestral.

$\hat{\beta}_{MCO}$ NO es consistente

Para obtener estimaciones consistentes ⇒ variables instrumentales

Estimador de var. instrumentales

Z_t es var. instrumental ~~de~~ de Y_t si:

- no está incluida en el modelo como var. explicativa
- $E(Z_t u_t) = 0$ → incorrelacionada con error
- Está correlacionada con Y_t (var. que necesita el instrumento)

El vector de var. explicativas y el vector ~~estimador~~ de var. instrumentales tienen en común las var. que están incorrelacionadas con u_t.

El estimador de var. instrumentales viene dado por:

$$\hat{\beta}_{VI} = (Z'X)^{-1} Z'y \qquad , \text{ sp. } Z'X \text{ invertible no simétrica}$$

Var. instrumento y var. explicativa correlacionadas:

- Sí, porque la sustituye parcialmente
- Pero no mucho, pq entonces estaría correlacionada con u_t.

El estimador de var. instrumentales es

- sesgado
- consistente bajo ciertas hipótesis.

Dinám – 1. tutorí.

$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 X_{t-1} + \beta_4 X_{t-2}$ ← retardos en var. exógenas , X^*, Y^* valores de equilibrio

En t_0 , $X_{t_0} = X^* + \Delta$ } IMPULSO.
Para $t > t_0$, $X_t = X^*$

$$Y_{t_0} = \beta_1 + \beta_2 (X^* + \Delta) + \beta_3 X_{t-1} + \beta_4 X_{t-2} = Y^* + \beta_2 \Delta .$$

$$Y_{t_0+1} = \beta_1 + \beta_2 X^* + \beta_3 (X^* + \Delta) + \beta_4 X^* = Y^* + \beta_3 \Delta .$$

$$Y_{t_0+2} = Y^* + \beta_4 \Delta .$$

$$Y_t = Y^* \ , \forall t > t_0 + 2 .$$

$X_t = X^*$ para $t < t_0$ } ESCALÓN
$X_t = X^* + \Delta$ para $t \geq t_0$

$$Y_{t_0} = Y^* + \beta_2 \Delta$$
$$Y_{t_0+1} = Y^* + \beta_2 \Delta + \beta_3 \Delta$$
$$Y_{t_0+2} = Y^* + \beta_2 \Delta + \beta_3 \Delta + \beta_4 \Delta$$

⇒ f. resp. escalón: β_2 , $\beta_2 + \beta_3$, $\beta_2 + \beta_3 + \beta_4$, $\beta_2 + \beta_3 + \beta_4$ ...

$\cancel{Y_{t_0+3} = Y^*}$ $Y_t = Y^* + \beta_2 \Delta + \beta_3 \Delta + \beta_4 \Delta$, $t \geq t_0 + 2$

$Y_t = \alpha + \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 X_t + u_t$ ← retardo en var. endógena

$X_{t_0} = X^* + \Delta$

$Y_{t_0} = Y^* + \beta_2$ ⟶ f.r.i. = β_2

$Y_{t_0+1} = \alpha + \beta_1 (Y^* + \beta_2) + \beta_2 X^*$ ⟶ f.r.i. = $\cancel{\beta_1}\ \beta_2 \beta_1$

f.r.i. $\beta_2 \beta_1^2$

– – – .

f.r.e. (~~β_2, $\beta_2 + \beta_1\beta_1$, β_2 +~~ ← progr. geométrica
β_2 , $\beta_2 (1 + \beta_1)$, $\beta_2 (1 + \beta_1 + \beta_1^2)$, ...

Modelo estac. ⇒ $|\beta_1| < 1$ ⇒ suma converg. si $\beta_2 < 1$.

MODELOS DINÁMICOS

Aparecen retardos de la var. exógena y/o endógena

- Sólo en var. exógenas ⇒ MCO sin problemas
  - ↳ Posibles problemas de multicolinealidad
  - ↳ ~~Retardos con orden infinito~~ ⇒ imponer condic.
- Retardos en var. endógena
  - u_t no autocorrelación → $\hat{\beta}_{MCO}$ sesgado, pero consistente
  - u_t SÍ autocorrelación → $\hat{\beta}_{MCO}$ sesgado y no consist

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 X_{t-1} + \beta_4 X_{t-2} + \dots + \varepsilon_t = \beta_1 + \beta_2 (X_t + \delta X_{t-1} + \dots) + u_t$$

↳ Para retardos infinitos, Koyck impone $\beta_i = \delta \beta_{i-1}$, $|\delta| < 1$, $\forall i \geq 3$

⇒ Estimar β_1, β_2 y δ en el modelo truncado $Y_t = \beta_1 + \beta_2 Z_t + \delta^t r + u_t$

u_t normal ⇒ $\hat{\beta}_{MV} = \hat{\beta}_{MCO}$

↳ Para retardos en la var. endógena,

Tratamiento muy ≠ dependiendo de la autocorrelación de u_t

a) u_t NO autocorrelación ⇒ $\hat{\beta}_{MCO}$ consistente y asint. normal (MCO sin probl)

$Y_t = \beta_1 + \beta_2 Y_{t-1} + \beta_3 X_t + u_t$ $\quad |\beta_2| < 1$ ⇒ Estac; u_t ruido blanco → $\begin{cases} E[X_t u_t] = 0 \text{ pq } X_t \text{ det.} \\ E[Y_{t-1} u_t] = 0 \text{ ruido blan} \end{cases}$

↳ Utilizar MCO

b) u_t SÍ autocorrelación ⇒ $\hat{\beta}_{MCO}$ sesgado, no consist

$$\left.\begin{aligned} Y_t &= \beta_1 + \beta_2 Y_{t-1} + \beta_3 X_t + u_t \\ u_t &= \rho u_{t-1} + \varepsilon_t \end{aligned}\right\}$$

$|\beta_2| < 1$ ⇒ Estac.; $|\rho| < 1$ ⇒ estac.; ε_t ruido blanco → $E[Y_{t-1} u_t] \neq 0$

↳ Utilizar var. instrumentales, Z_t } no en el modelo; incorrelac. con u; correlac. con la que hace de instrumento ⇒ (X_t, u_t) incorr y (Z_t, u_t) incorr

$$\hat{\beta}_{VI} = (Z'X)^{-1} Z'Y$$

sesgado, pero consist.

↳ Para evitar estimadores inconsistentes, antes de VI, contrastar que el resto de var. son exógenas (Hausman)

Expectativas racionales → Los agentes explotan de modo óptimo la información disponible
- sin imponer forma funcional a la expectativa

↳ $E[X_{t+1} / \Omega_t]$ = esperanza condicional

ECONOMETRIA – 16

1_ MODELOS DINÁMICOS

- Concepto
- Situaciones
  - Todos los retardos en var. exógenas → MCO
  - Retardos en la var. endógena
    + u_t no autocorr. → $\hat{\beta}_{MCO}$ sesgado, pero consistente
    + u_t sí autocorr. → $\hat{\beta}_{MCO}$ sesgado e inconsistente

2_ JUSTIFICACIÓN TEÓRICA

- Modelo de expectativas adaptativas
- Modelo de ajuste parcial de Nerlove

¡?

3_ MODELO de RETARDOS INFINITOS

- Concepto
- Modelo de Koyck

4_ ESTIMACIÓN con RETARDOS en la var. ENDÓGENA

- u_t NO autocorrelación
  + $\hat{\beta}_{MCO}$ consistente y asint. normal
- u_t SÍ autocorrelación
  + $\hat{\beta}_{MCO}$ sesgado e inconsistente
  + Variable Instrumental : $\hat{\beta}_{VI} = (Z'X)^{-1} Z'Y$
    sesgado, consistente

5_ CONTRASTE EXOGENEIDAD HAUSMAN

- Hipótesis nula
- Procedimiento
- Estadístico

6_ EFICIENCIA RELATIVA de las VAR. INSTRUMENTALES

- Nº de var's instrumentales
- $\hat{\beta}_{MC2E}$

7_ ESTIMACIÓN de MODELOS CON EXPECTATIVAS RACIONALES

- Expectativas
- Expectativas racionales → error racional