Master en Estadística Aplicada y Estadística para el Sector Público

Teoría de la Probabilidad

Cuarto Tomo

Pilar Más Rodríguez

Universidad de Alcalá

Instituto Nacional de Estadística

CIFF
Centro Internacional de Formación Financiera

2008
2009

Problemas de Cálculo de Probabilidades

1. En una urna en la que hay 20 bolas rojas y 40 bolas verdes, se extraen al azar 10 bolas, una a una y sin reemplazamiento.
   Se pide calcular:

a) La probabilidad de obtener 5 bolas rojas y 5 verdes.
b) Sabiendo que de las 10 bolas extraídas exactamente 4 son rojas, la probabilidad de que las dos primeras extraídas sean rojas.
c) Supuesto que las 10 bolas extraídas se reparten al azar entre dos urnas, la probabilidad de que en una urna se introduzcan todas las bolas rojas y en la otra todas las verdes.

2. En una urna tenemos 100 bolas numeradas del 1 al 100. Se realizan extracciones sucesivas con reemplazamiento hasta que se repite uno de los números obtenidos. Calcular la probabilidad de que sean necesarias 60 extracciones hasta obtener la primera repetición.

3. En un campeonato de parchís entre dos contrincantes el juego continúa hasta que uno de los dos jugadores obtiene 5 puntos. Se contabiliza cada partida ganada con un punto y cada una perdida con cero puntos. Supuesto que ambos jugadores son igualmente buenos, calcular la probabilidad de que cuando acaba el campeonato el jugador que ha perdido tenga k puntos $(k = 0,1,2,3,4,5)$.

4. Cierto médico tarda 15 minutos, por término medio, en visitar a un paciente. Sabiendo que la duración de la visita sigue una distribución exponencial ¿cuál es el número máximo de pacientes que podrá atender en dos horas con una probabilidad de 0,9?

5. Por una determinada calle del centro de una ciudad pasan motocicletas de acuerdo con una distribución de Poisson, a razón de 6 motocicletas por minuto. Calcular:

a) Probabilidad de que transcurran más de 20 segundos desde el instante en que ha pasado una motocicleta hasta el instante en que han pasado cinco motocicletas más.
b) Si un perro se lanza a cruzar la calle inmediatamente después de que ha pasado una motocicleta, calcular la probabilidad de que sea arrollado por una motocicleta sabiendo que invierte 10 segundos en cruzar.

6. En una escuela de Karate hay x alumnos cinturón blanco (nivel 0), y alumnos cinturón amarillo (nivel 1) y z alumnos cinturón verde (nivel 2). De entre los $x+y+z$ alumnos se seleccionaron dos al azar. Sabiendo que uno tiene mayor nivel que el otro, calcular la probabilidad de que uno de ellos sea cinturón amarillo y el otro cinturón verde.

7. Un examen de Estadística tipo test consta de 40 preguntas y cada pregunta de 4 alternativas, de las cuales sólo una es correcta. Cada alumno debe contestar eligiendo una sola alternativa o puede dejar la pregunta en blanco. La puntuación de cada pregunta acertada es de un punto, las preguntas en blanco se contabilizan con cero puntos y por cada pregunta fallada se resta $\frac{1}{3}$ de punto.
   a) Si un alumno contesta a las 40 preguntas al azar, sin dejar ninguna en blanco, ¿cuál es la probabilidad de que el alumno saque más de 15 puntos? Calcular la calificación esperada así como su varianza.
   b) Calcular la probabilidad de que el alumno saque más de 20 puntos sabiendo que contestó 20 preguntas correctamente, en 10 preguntas escogió la respuesta al azar y las demás las dejó en blanco.

8. Una partícula se mueve por el plano (X,Y) con desplazamientos paralelos a los ejes, de modo que la probabilidad de pasar del punto (x,y) al $(x+1,y)$ en un salto es $1/3$ y $2/3$ la de pasar de (x,y) a $(x,y+1)$. Se pide calcular:

a) La probabilidad de ir del punto $(0,0)$ al $(4,5)$.
b) El número medio de desplazamientos necesarios hasta alcanzar por primera vez el punto $(3,3)$ partiendo desde el origen.

9. De una estación sale un autobús dejando alternativamente 10 y 20 minutos después de la última salida. Sea X la variable que mide el tiempo de espera de un viajero desde el momento en que llega a la estación hasta que sale el próximo autobús.

a) Determinar la distribución de X.
b) Calcular la esperanza de X.
c) Calcular la probabilidad de que una persona tenga que esperar menos de 8 minutos.
d) Comparar los resultados con los de una estación en la que las salidas se producen cada 15 minutos.

10. Sea X una variable aleatoria con función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{2^{[x]}} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Calcular su esperanza y su varianza.

11. Los dos lados iguales de un triángulo isósceles tienen longitud L cada uno y el ángulo α entre ellos es el valor de una variable aleatoria X con función de densidad proporcional a $\alpha(\pi-\alpha)$ para cada $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Calcular la distribución del área del triángulo y su esperanza.

12. Sea X una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} & si\ |x| < 1 \\ 0 & si\ |x| \geq 1 \end{cases}$$

Calcular su función característica.

13. Sea X una variable aleatoria discreta y simétrica con función de masa

$$P(X = \frac{1}{k}) = P(X = -\frac{1}{k}) = (k!2e)^{-1} \quad \forall k \in N$$
$$P(X = 0) = e^{-1}$$

Determinar la distribución de las variables $Y = |X|$ y $Z = [X]$.

14. Se define una variable aleatoria bidimensional (X,Y) cuyo soporte está formado por los valores (x,y) tal que $x,y \in N$. Su función de masa se define como sigue:

$$P(x,y) = \frac{1}{2^{x+y}}$$

Se pide:

a) Calcular la función característica de (X,Y).
b) Calcular la función característica de (Z,W) siendo $Z = |X-Y|$ y $W = |X+Y|$.

15. Sean X,Y dos variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de densidad:

$$f(x) = e^{-x} \quad x > 0$$

¿Son independientes las variables $Z = X+Y$ y $W = \dfrac{X}{X+Y}$?

16. Sea $(X_1,...,X_n)$ un vector aleatorio n-dimensional con función de densidad:

$$f(x_1,...,x_n) = \begin{cases} n!\lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i} & si\ x_i > x_{i-1}\ \forall i = 1,...,n\ (x_0 = 0) \\ 0 & resto \end{cases}$$

Se pide calcular la función de densidad conjunta de $Y = (Y_1,...,Y_n)$, siendo:

$Y_1 = nX_1$
$Y_2 = (n-1)(X_2 - X_1)$
$Y_3 = (n-2)(X_3 - X_2)$
…………………………
$Y_n = X_n - X_{n-1}$

17. Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional con función de densidad:

$$f(x,y) = \frac{1}{4\pi} \quad si\ (x,y) \in \{(x,y)/x^2 + y^2 \leq 4\}$$

Se pide:

a) Calcular $P(Y > X)$
b) Calcular $P(|X| < 1 / Y = 1/3)$

18. Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional absolutamente continua con distribución uniforme en el triángulo de vértices $(1,0), (0,1)$ y $(1,1)$. Se pide:

Determinar la función de densidad conjunta, así como las marginales.

a) Calcular $P(2XY > 1)$
b) Calcular $P(X + Y \leq \frac{3}{2})$

19. Sean X e Y variables aleatorias independientes con funciones de densidad:

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad x > 0$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|y|} \quad y \in R$$

Se definen dos nuevas variables, $Z = minimo\{X,Y\}$ y $W = \frac{1}{2}|X - Y|$.

Se pide:

a) Obtener la distribución conjunta de (Z,W), así como las distribuciones marginales.
b) Calcular la función característica de $T = X + Y$.

20. Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional con función de densidad conjunta:

$$f(x,y) = k^2 e^{-ky} \quad si\ 0 < x < y$$

a) Hallar la línea general de regresión y la recta de regresión de Y/X.
b) ¿Son X e $Y - X$ independientes?

21. Sean X e Y variables aleatorias independientes distribuidas ambas según una $N(0,1)$. Se definen dos nuevas variables como sigue:

$$Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$W = \frac{X}{Y}$$

Se pide hallar la distribución conjunta de (Z,W) y la curva de regresión de Z/W.

22. Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional con función de densidad:

$$f(x,y) = e^{-x-y} \quad si\ 0 < y < 1,\ x > -y$$

Calcular la distribución conjunta de (X^2, Y^2).

23. Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional normal bivariante tal que X e Y están incorreladas. Se pide:

a) Calcular $\mathrm{E}\left(X^2/Y\right)$ y $\mathrm{E}\left(X^2 + 3XY/Y\right)$
b) ¿Cómo se distribuyen $\mathrm{E}\left(X^2/Y\right)$ y $\mathrm{E}\left(X^2 + 3XY/Y\right)$?

24. Sea $(X_1,...,X_n)$ una muestra aleatoria simple de una $Poisson(\lambda)$. Se pide calcular:

a) $P\left(S_j = a/S_n = b\right)$, $j = 1,...,(n-1)$, siendo $S_j = \sum_{i=1}^{j} X_i$, $j = 1,...,n$.
b) Varianza de la distribución obtenida en a).

25. Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional con función de densidad:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4} e^{-x/2} & si\ x > 0 \quad -1 < y < 1 \\ 0 & resto \end{cases}$$

$(X_1,...,X_n)$ son variables independientes e igualmente distribuidas a X. Se pide:

a) Calcular la distribución de $Y_n = X_1 + ... + X_n$.

b) Estudiar la convergencia en ley de la sucesión de variables $\left\{\frac{Y_n}{n^2}\right\}_{n\in N}$.

c) Definimos una variable aleatoria Z_n tal que $Z_n / X = x$ se distribuye según una Poisson(nx). Calcular la distribución marginal de Z_n, así como la convergencia en ley de la sucesión $\{Z_n\}_{n\in N}$.

26. Sea $\{X_n\}_{n\in N}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Se definen unas nuevas variables:

$$Y_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{X_i}{2^{n+1-i}}$$

Estudiar la convergencia en ley de la sucesión $\{Y_n\}_{n\in N}$ en los siguientes casos:

a) $X_n \approx N(0,\sigma) \ \ \forall n$

b) $X_n \approx Cauchy(0,1) \ \ \forall n$

27. Sea $\{X_n\}_{n\in N}$ una sucesión de variables aleatorias tal que X_n tiene por función de densidad:

$$f_n(x) = \frac{1}{\pi}\frac{n}{\left(1+n^2x^2\right)} \quad x \in R$$

Probar que esta sucesión converge en probabilidad a cero pero no converge en media cuadrática.

28. Sea $\{X_n\}_{n\in N}$ una sucesión de variables aleatorias independientes tal que X_n tiene como función de masa:

$$X_n = \begin{cases} 0 & \text{con probabilidad } 1-\frac{1}{n} \\ 1 & \text{con probabilidad } \frac{1}{n} \end{cases}$$

Demostrar que $\{X_n\}_{n\in N}$ converge en probabilidad pero no casi-seguro. Extraer una subsucesión que converja casi-seguro.

29. Sea $\{X_n\}_{n\in N}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con función de masa:

$$P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

$$P(X_n = 2^n) = P(X_n = -2^n) = \frac{1}{2^{n+1}}$$

Se pide probar que esta sucesión cumple la Ley Fuerte de los Grandes Números.

30. Sea $\{X_n\}_{n\in N}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función característica:

$$\varphi(t) = \exp(-|t|)$$

Hallar la distribución límite de $\frac{S_n}{n}$ siendo $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

31. Sea la sucesión de variables aleatorias independientes $\{X_n^{(a)}\}_{n\in N}$ definida como sigue:

$$P(X_n^{(a)} = -n^{2a}) = P(X_n^{(a)} = n^{2a}) = \frac{1}{n^2}$$

$$P(X_n^{(a)} = -n^{a}) = P(X_n^{(a)} = n^{a}) = \frac{1}{n^3}$$

$$P(X_n^{(a)} = 0) = 1 - \frac{2(1+n)}{n^3}$$

a es un valor real fijo.

a) ¿Para qué valores de a se cumple la condición suficiente de la Ley Fuerte de los Grandes Números?
b) Estudiar la convergencia en probabilidad y en ley de $\{X_n^{(a)}\}_{n\in N}$.
c) Para $a = 1$ se define una nueva sucesión de variables aleatorias $\{Y_n\}_{n\in N}$ tal que $Y_n / X_n^{(1)} = x$ se distribuye según una $N(x,1)$ si $x \le 0$ y según una $\gamma(x,x)$ si $x > 0$. ¿Converge en ley esta sucesión?

32. La duración media de una pila es de un mes. Cuando se gasta una pila ésta es reemplazada por otra y así sucesivamente. ¿Cuántas pilas debemos tener para que podamos asegurar tener carga durante un año con una probabilidad del 95%?

33. En una fábrica el tiempo que transcurre hasta que falla una máquina se distribuye según una Weibull cuya función de distribución es la siguiente:

$$P(T \le t)) = 1 - e^{-2\sqrt{t}}$$

Calcular la probabilidad de que fallen al menos N máquinas en el intervalo de tiempo $(0,t)$.

34. Se elige un número entero positivo al azar con probabilidad $\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Se sabe que el número elegido es par. Calcular la probabilidad de que sea divisible por 6.

35. Sea $f(x,y) = \begin{cases} \alpha e^{-y} & 0 < x < y \\ 0 & resto \end{cases}$

Función de densidad de (X,Y). Calcular el valor de alpha y probar si X e Y son independientes.

36. El número N de individuos de una población sigue la distribución:

$$P(N = k) = p(1 - p)^{k-1} \quad k = 1,2,... \quad 0 < p < 1$$

Los tiempos de vida de los individuos de la población son va iid con distribución exponencial de parámetro a>0, y son independientes de N. Determinar la distribución del tiempo de vida más corto.

37. Una va (X,Y) tiene como función de densidad:

$$f(x, y) = \begin{cases} xe^{-x} \; 0 < xy < 1 \\ 0 \quad resto \end{cases}$$

   a. Determinar sus distribuciones marginales y condicionadas.
   b. Probar que X y XY son va independientes.

38. Sea X una va con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \theta x^{\theta - 1} \; 0 < x < 1 \\ 0 \quad resto \end{cases}$$

Dada una mas de tamaño n, calcular la media del máximo muestral.

39. En una carrera olímpica de 100 metros, los tiempos de recorrido, en segundos, se distribuyen según una U(9,8; 10,2). Se supone que hay 8 competidores. ¿Cuál es la probabilidad de que se bata el récord mundial de 9,88 segundos?

40. La probabilidad de que un determinado índice industrial tenga un incremento mensual superior al 5% es 0,01.

   a. Determinar la probabilidad de que en una serie de 250 meses haya, como mínimo, dos meses en los que dicho índice se incrementase por encima del 5%.
   b. Aproxime la probabilidad anterior mediante la distribución de Poisson.
   c. Aproxime la probabilidad del apartado a) mediante el Teorema de Moivre-Laplace.

41. Sea (X,Y) una va con función de densidad:

$$f(x, y) = \begin{cases} 8xy \quad 0 < x < y < 1 \\ 0 \quad resto \end{cases}$$

   a. Hallar la función de densidad condicionada de X dado Y=y.
   b. Calcular la varianza de X condicionada por Y=y.
   c. Obtener la media de Y condicionada por X=x.

Problemas de Cálculo de Probabilidades

1. En una urna en la que hay 20 bolas rojas y 40 bolas verdes, se extraen al azar 10 bolas, una a una y sin reemplazamiento.
   Se pide calcular:

a) La probabilidad de obtener 5 bolas rojas y 5 verdes.
b) Sabiendo que de las 10 bolas extraídas exactamente 4 son rojas, la probabilidad de que las dos primeras extraídas sean rojas.
c) Supuesto que las 10 bolas extraídas se reparten al azar entre dos urnas, la probabilidad de que en una urna se introduzcan todas las bolas rojas y en la otra todas las verdes.

Solución

a)

$$\boxed{P(5R,5V) = \frac{\binom{20}{5}\binom{40}{5}}{\binom{60}{10}}}$$

donde R representa 'bola roja' y V 'bola verde'.

b) Sea A ="Las dos primeras bolas extraídas son rojas".

$$\boxed{P(A/4R,6V) = \frac{P(4R,6V/A)P(A)}{P(4R,6V)} = \frac{\dfrac{\binom{18}{2}\binom{40}{6}}{\binom{58}{8}}\dfrac{20}{60}\dfrac{19}{59}}{\dfrac{\binom{20}{4}\binom{40}{6}}{\binom{60}{10}}}}$$

c) Sea B ="En una urna están todas las bolas rojas y en la otra todas las verdes"

$$P(B) = \sum_{k=0}^{10} P(B/C_k)P(C_k)$$

donde C_k ="Hay k bolas rojas entre las 10 seleccionadas"

$$P(B)=\sum_{k=0}^{10}P(B/C_k)P(C_k)=\sum_{k=0}^{10}\frac{1}{2^{10}}P(C_k)=\frac{1}{2^{10}}\sum_{k=0}^{10}P(C_k)=\frac{1}{2^{10}}$$

2. En una urna tenemos 100 bolas numeradas del 1 al 100. Se realizan extracciones sucesivas con reemplazamiento hasta que se repite uno de los números obtenidos. Calcular la probabilidad de que sean necesarias 60 extracciones hasta obtener la primera repetición.

Solución

Sea X la variable aleatoria que mide "el número de extracciones hasta obtener la primera repetición".

$$\boxed{P(X=60)=100\binom{59}{1}\frac{V_{99}^{58}}{VR_{100}^{60}}=100\frac{99\cdot 98\cdot\ldots\cdot 42}{100^{60}}=\frac{59\cdot 99\cdot 98\cdot\ldots\cdot 42}{100^{59}}}$$

3. En un campeonato de parchís entre dos contrincantes el juego continúa hasta que uno de los dos jugadores obtiene 5 puntos. Se contabiliza cada partida ganada con un punto y cada una perdida con cero puntos. Supuesto que ambos jugadores son igualmente buenos, calcular la probabilidad de que cuando acaba el campeonato el jugador que ha perdido tenga k puntos $(k=0,1,2,3,4,5)$.

Solución

Sea X la variable aleatoria correspondiente al "número de puntos que tiene el perdedor al acabar el juego".

Puesto que ambos jugadores son igualmente buenos, ambos tendrán la misma probabilidad de ganar el juego. Llamaremos I al suceso "Gana el juego el jugador I" y II al suceso "Gana el juego el jugador II".

$$P(X=k)=P(X=k/I)\mathrm{P(I)}+(X=k/II)\mathrm{P(II)}=2P(X=k/I)\mathrm{P(I)}$$

$$=2\mathrm{P}(\text{"el juego dure k + 5 partidas"})=2\binom{5+\mathrm{k}}{\mathrm{k}}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{5}$$

$$\boxed{P(X=k)=\binom{5+\mathrm{k}}{\mathrm{k}}\left(\frac{1}{2}\right)^{4+k}\qquad k=0,1,2,3,4}$$

Si $k=5$ al acabar el juego, el jugador no podría ser el perdedor, como mucho habría un empate. En este problema no se plantea la posibilidad de empates, por lo que $P(X=5)=0$.

4. Cierto médico tarda 15 minutos, por término medio, en visitar a un paciente. Sabiendo que la duración de la visita sigue una distribución exponencial ¿cuál es el número máximo de pacientes que podrá atender en dos horas con una probabilidad de 0,9?

Solución

Sea T la variable aleatoria que mide la "duración de la visita médica por paciente".

$T \approx Exp\left(\lambda = \frac{1}{15}\right)$ si expresamos el tiempo en minutos, mientras que si lo expresamos en horas $T \approx Exp(\lambda = 4)$.

Definimos la variable X, que mide "el número de pacientes visitados por el médico en dos horas".

$$X \approx Poisson(\lambda = 8)$$

Nos piden, por tanto, calcular n tal que, $P(X \leq n) = 0{,}9$.

Podríamos aproximar $X \approx Poisson(\lambda = 8)$ por una $N(8, \sqrt{8})$.

$P(X \leq n) = P\left(Z \leq \frac{n-8}{\sqrt{8}}\right) = 0{,}9$ siendo $Z \approx N(0,1)$.

Mirando en las tablas de la $N(0,1)$, se observa que $\frac{n-8}{\sqrt{8}} = z_{0.9} = 1{,}29$.

$$\boxed{n = 11{,}64 \approx 12}$$

5. Por una determinada calle del centro de una ciudad pasan motocicletas de acuerdo con una distribución de Poisson, a razón de 6 motocicletas por minuto. Calcular:

a) Probabilidad de que transcurran más de 20 segundos desde el instante en que ha pasado una motocicleta hasta el instante en que han pasado cinco motocicletas más.
b) Si un perro se lanza a cruzar la calle inmediatamente después de que ha pasado una motocicleta, calcular la probabilidad de que sea arrollado por una motocicleta sabiendo que invierte 10 segundos en cruzar.

Solución

a) Sea X la variable aleatoria que mide el "número de motocicletas que pasan por la calle por minuto", $(X \approx Poisson(\lambda = 6))$, y T la variable que representa "el tiempo que transcurre hasta que pasan 5 motocicletas".

$$P(T > 20) = P(Y < 5)$$

siendo Y la variable que mide "el número de motocicletas que pasan en 20 segundos". $\left(Y \approx Poisson(\lambda = 2)\right)$

$$\boxed{P(T > 20) = P(Y < 5) = \sum_{y=0}^{4} \frac{e^{-2} 2^{y}}{y!}}$$

b) La probabilidad de que el perro sea arrollado por una motocicleta si tarda 10 segundos en cruzar la calle, será igual a la probabilidad de que pase alguna moto en esos 10 segundos, por tanto la probabilidad que nos piden será igual a:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$$

siendo X la variable que mide "el número de motocicletas que pasan en 10 segundos". $\left(X \approx Poisson(\lambda = 1)\right)$
Luego,

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-1}$$

6. En una escuela de Karate hay x alumnos cinturón blanco (nivel 0), y alumnos cinturón amarillo (nivel 1) y z alumnos cinturón verde (nivel 2). De entre los $x + y + z$ alumnos se seleccionaron dos al azar. Sabiendo que uno tiene mayor nivel que el otro, calcular la probabilidad de que uno de ellos sea cinturón amarillo y el otro cinturón verde.

Solución

Sea X_1="Nivel del primer alumno seleccionado" y X_2="Nivel del segundo alumno seleccionado". La probabilidad pedida será:

$$P(X_1 = 1, X_2 = 2 / X_1 \neq X_2) + P(X_1 = 2, X_2 = 1 / X_1 \neq X_2) = 2P(X_1 = 1, X_2 = 2 / X_1 \neq X_2)$$

$$= \frac{\dfrac{yz}{\binom{x+y+z}{2}}}{\dfrac{xy}{\binom{x+y+z}{2}} + \dfrac{xz}{\binom{x+y+z}{2}} + \dfrac{yz}{\binom{x+y+z}{2}}} = \frac{yz}{xy + xz + yz}$$

7. Un examen de Estadística tipo test consta de 40 preguntas y cada pregunta de 4 alternativas, de las cuales sólo una es correcta. Cada alumno debe contestar eligiendo una sola alternativa o puede dejar la pregunta en blanco. La puntuación de cada pregunta acertada es de un punto, las preguntas en blanco se contabilizan con cero puntos y por cada pregunta fallada se resta $\frac{1}{3}$ de punto.

a) Si un alumno contesta a las 40 preguntas al azar, sin dejar ninguna en blanco, ¿cuál es la probabilidad de que el alumno saque más de 15 puntos? Calcular la calificación esperada así como su varianza.
b) Calcular la probabilidad de que el alumno saque más de 20 puntos sabiendo que contestó 20 preguntas correctamente, en 10 preguntas escogió la respuesta al azar y las demás las dejó en blanco.

Solución

Sea A ="Número de aciertos", F ="Número de fallos" y B ="Número de preguntas en blanco".

La puntuación total será: $X = A - \frac{F}{3}$

a) Supuesto que contesta todas, $B = 0$ y $F = 40 - A$

$$P(X > 15) = P\left(A - \frac{F}{3} > 15\right) = P\left(A - \frac{40 - A}{3} > 15\right) = P\left(A > \frac{85}{4}\right)$$

Además, $A \approx Bin\left(40, \frac{1}{4}\right) \approx N\left(10, \frac{15}{2}\right)$

$$P(X > 15) = P\left(A > \frac{85}{4}\right) = P\left(Z > \frac{\frac{85}{4} - 10}{\sqrt{\frac{15}{2}}}\right) = 1 - F_{N(0,1)}(4{,}1) \approx 0$$

b) $P(X > 20 / A = 20{,}10 \text{ al azar}, B = 10)$

$$= \sum_{k=0}^{10} P(X > 20 / A = 20 + k, F = 10 - k, B = 10) P(\text{"de las 10 acierta k"})$$

$$\boxed{P(X > 20 / A = 20{,}10 \text{ al azar}, B = 10) = \sum_{k=3}^{10} 1 \cdot \binom{10}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{10-k}}$$

Para que $X > 20$ sabiendo que $(A = 20{,}10 \text{ al azar}, B = 10)$, debe cumplirse que $k > \frac{10}{4} = 2{,}5$.

8. Una partícula se mueve por el plano (X, Y) con desplazamientos paralelos a los ejes, de modo que la probabilidad de pasar del punto (x, y) al $(x+1, y)$ en un salto es $1/3$ y $2/3$ la de pasar de (x, y) a $(x, y+1)$. Se pide calcular:

a) La probabilidad de ir del punto $(0{,}0)$ al $(4{,}5)$.

b) El número medio de desplazamientos necesarios hasta alcanzar por primera vez el punto $(3,3)$ partiendo desde el origen.

Solución

Nota: La partícula sólo puede moverse hacia la derecha y hacia arriba con saltos unitarios.

a) Para pasar del punto $(0,0)$ al $(4,5)$ tendrá que desplazarse 4 unidades hacia la derecha y 5 hacia arriba. Como no son posibles los desplazamientos hacia la izquierda ni hacia abajo, del punto $(0,0)$ al $(4,5)$ sólo se podrá ir en 9 desplazamientos (4 hacia la derecha y 5 hacia arriba).

$$\boxed{P_{AB} = \binom{9}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^5}$$

b) Sea X la variable que mide el "número de desplazamientos necesarios para pasar desde $(0,0)$ a $(3,3)$".

Sólo podemos pasar de $(0,0)$ a $(3,3)$ en 6 desplazamientos, tres a la derecha y tres hacia arriba. Luego X es una variable aleatoria degenerada en el punto 6, por lo que:

$$\boxed{E(X) = 6}$$

9. De una estación sale un autobús dejando alternativamente 10 y 20 minutos después de la última salida. Sea X la variable que mide el tiempo de espera de un viajero desde el momento en que llega a la estación hasta que sale el próximo autobús.

a) Determinar la distribución de X.
b) Calcular la esperanza de X.
c) Calcular la probabilidad de que una persona tenga que esperar menos de 8 minutos.
d) Comparar los resultados con los de una estación en la que las salidas se producen cada 15 minutos.

Solución

a) $P(X \le x) = P(X \le x / \mathrm{A})P(A) + P(X \le x / \mathrm{B})P(B)$

siendo A="El viajero llega entre dos autobuses entre los que hay 10 minutos entre sus salidas" y B="El viajero llega entre dos autobuses entre los que hay 20 minutos entre sus salidas"

$$X / A \approx U(0,10)$$
$$X / B \approx U(0,20)$$

$$P(X \leq x) = \left(\int_0^x \frac{1}{10}dx\right)\frac{1}{3} + \left(\int_0^x \frac{1}{20}dx\right)\frac{2}{3} = \frac{x}{15}$$

Luego,

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ \dfrac{x}{15} & si \quad 0 \leq x < 10 \\ \dfrac{1}{3} + \dfrac{x}{30} & si \quad 10 \leq x < 20 \\ 1 & si \quad x \geq 20 \end{cases}$$

Por tanto, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{15} & si \quad 0 < x < 10 \\ \dfrac{1}{30} & si \quad 10 < x < 20 \\ 0 & resto \end{cases}$

b) $E(X) = \int_0^{10} \frac{x}{15}dx + \int_{10}^{20} \frac{x}{30}dx = \frac{25}{3} = 8{,}3$

c) $P(X < 8) = \int_0^8 \frac{1}{15}dx = \frac{8}{15}$

d) Si las salidas se producen cada 15 minutos, entonces $X \approx U(0{,}15)$.

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ \dfrac{x}{15} & si \quad 0 \leq x < 15 \\ 1 & si \quad x \geq 15 \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{15}{2} = 7{,}5$$

10. Sea X una variable aleatoria con función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{2^{[x]}} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Calcular su esperanza y su varianza.

Solución

$P(X=1)=F(1)-F(1^{-})=\dfrac{1}{2}$

$P(X=2)=F(2)-F(2^{-})=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2^2}$

……..

$P(X=k)=F(k)-F(k^{-})=\dfrac{1}{2^{k-1}}-\dfrac{1}{2^k}$

- $E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\dfrac{1}{2^{k-1}}-\dfrac{1}{2^k}\right)=2$
- $E(X^2)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2\left(\dfrac{1}{2^{k-1}}-\dfrac{1}{2^k}\right)=6\Rightarrow V(X)=2$

11. Los dos lados iguales de un triángulo isósceles tienen longitud L cada uno y el ángulo α entre ellos es el valor de una variable aleatoria X con función de densidad proporcional a $\alpha(\pi-\alpha)$ para cada $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. Calcular la distribución del área del triángulo y su esperanza.

Solución

Sea X la variable aleatoria que mide el ángulo e Y la que mide el área del triángulo.

$$f(x)=kx(\pi-x)\quad con\quad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

Para que $f(x)$ sea función de densidad debe cumplirse que $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=1$ y esto ocurre sólo cuando $k=\dfrac{12}{\pi^3}$.

Sabemos que $Y=\dfrac{BH}{2}$ donde B es la base y H la altura del triángulo.

Haciendo uso de la trigonometría resulta:

$$\cos\left(X/2\right)=\frac{H}{L}\quad y\quad \mathrm{sen}\left(X/2\right)=\frac{B}{2L}$$

Por tanto, $Y=\dfrac{BH}{2}=L^2\cos\left(X/2\right)\mathrm{sen}\left(X/2\right)=L^2\dfrac{\mathrm{sen}(X)}{2}$

Además, $0 \le \operatorname{sen}(X) \le 1$, por lo que $0 \le Y \le \frac{L^2}{2}$

$$f_Y(y) = f_Y\left(\operatorname{arcsen}\frac{2y}{L^2}\right)\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2y}{L^2}\right)}}\frac{2}{L^2} = \frac{12}{\pi^3}\operatorname{arcsen}\frac{2y}{L^2}\left(\pi - \operatorname{arcsen}\frac{2y}{L^2}\right)\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2y}{L^2}\right)}}\frac{2}{L^2}$$

$$con \quad y \in \left(0, \frac{L^2}{2}\right)$$

$$E(Y) = E\left(\frac{L^2}{2}\operatorname{sen} X\right) = \frac{L^2}{2}E(\operatorname{sen} X) = \frac{L^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x f(x)dx = \frac{L^2}{2}\frac{12}{\pi^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\pi - x)\operatorname{sen} x dx$$

$$\boxed{E(Y) = \frac{L^2 12}{\pi^3}}$$

12. Sea X una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} & si\ |x| < 1 \\ 0 & si\ |x| \ge 1 \end{cases}$$

Calcular su función característica.

Solución

$$\varphi(t) = E\left(e^{itX}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(it)^k E(X^k)}{k!}$$

Los momentos de orden impar se anulan, por lo que:

$$\varphi(t) = E\left(e^{itX}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(it)^{2k} E(X^{2k})}{(2k)!}$$

$$E\left(X^{2k}\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x^{2k}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{x^{2k}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{y^k}{\sqrt{1-y}}\frac{1}{2\sqrt{y}}dy$$

La última igualdad es consecuencia del cambio de variable $y = x^2$.

$$E\left(X^{2k}\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 y^{k-1/2}(1-y)^{-1/2}dy = \frac{1}{\pi}\beta\left(k+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\pi}\frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(k+1)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{k!}$$

Por tanto,

$$\boxed{\varphi(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(it)^{2k}E(X^{2k})}{(2k)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(it)^{2k}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}(2k)!k!}}$$

13. Sea X una variable aleatoria discreta y simétrica con función de masa

$$P(X=\frac{1}{k})=P(X=-\frac{1}{k})=(k!2e)^{-1}\quad \forall k\in N$$
$$P(X=0)=e^{-1}$$

Determinar la distribución de las variables $Y=|X|$ y $Z=[X]$.

Solución

El soporte de $Y=|X|$ será $S_Y=\left\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...\right\}$ y el de $Z=[X]$ $S_Z=\{-1,0,1\}$

$$P\left(Y=\frac{1}{k}\right)=P\left(X=\frac{1}{k}\right)+P\left(X=-\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{k!e}\quad k=1,2,3,...$$

$$P(Y=0)=P(X=0)=e^{-1}$$
$$P(Z=-1)=\sum_{k=1}^{\infty}P\left(X=-\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{2e}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}=\frac{e-1}{2e}$$
$$P(Z=0)=\sum_{k=2}^{\infty}P\left(X=\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{2e}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}=\frac{e-2}{2e}$$
$$P(Z=1)=P(X=1)=\frac{1}{2e}$$

14. Se define una variable aleatoria bidimensional (X,Y) cuyo soporte está formado por los valores (x,y) tal que $x,y\in N$. Su función de masa se define como sigue:

$$P(x,y)=\frac{1}{2^{x+y}}$$

Se pide:

a) Calcular la función característica de (X,Y).
b) Calcular la función característica de (Z,W) siendo $Z=|X-Y|$ y $W=|X+Y|$.

Solución

a) Función característica de (X,Y)

$$\varphi_{XY}(t_1,t_2)=E\left(e^{it_1X+it_2Y}\right)=\sum_{x=1}^{\infty}\sum_{y=1}^{\infty}\frac{e^{it_1x+it_2y}}{2^{x+y}}=\sum_{x=1}^{\infty}\frac{e^{it_1x}}{2^x}\sum_{y=1}^{\infty}\frac{e^{it_2y}}{2^y}=\frac{e^{i(t_1+t_2)}}{\left(2-e^{it_1}\right)\left(2-e^{it_2}\right)}$$

b) $Z=\left|X-Y\right|=\begin{cases}X-Y & si \quad X\geq Y\\ Y-X & si \quad X<Y\end{cases}$

$W=\left|X+Y\right|=X+Y$ puesto que $x,y\in N$.

$$\varphi_{ZW}(t_1,t_2)=E\left(e^{it_1Z+it_2W}\right)=\sum_{y=1}^{\infty}\sum_{x=y}^{\infty}\frac{e^{it_1(x-y)+it_2(x+y)}}{2^{x+y}}+\sum_{x=1}^{\infty}\sum_{y=x+1}^{\infty}\frac{e^{it_1(y-x)+it_2(x+y)}}{2^{x+y}}=$$

$$=\sum_{y=1}^{\infty}\frac{e^{-it_1y+it_2y}}{2^y}\sum_{x=y}^{\infty}\frac{e^{it_2x+it_2x}}{2^x}+\sum_{x=1}^{\infty}\frac{e^{it_1y+it_2y}}{2^y}\sum_{y=x+1}^{\infty}\frac{e^{-it_2x+it_2x}}{2^x}=$$

$$=\frac{\frac{e^{-it_1+it_2}}{2}}{1-\frac{e^{-it_1+it_2}}{2}}\frac{\left(\frac{e^{i(t_1+t_2)}}{2}\right)^y}{1-\frac{e^{i(t_1+t_2)}}{2}}+\frac{\frac{e^{it_1+it_2}}{2}}{1-\frac{e^{it_1+it_2}}{2}}\frac{\left(\frac{e^{i(-t_1+t_2)}}{2}\right)^{x+1}}{1-\frac{e^{i(-t_1+t_2)}}{2}}$$

15. Sean X,Y dos variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de densidad:

$$f(x)=e^{-x} \qquad x>0$$

¿Son independientes las variables $Z=X+Y$ y $W=\dfrac{X}{X+Y}$?

Solución

Una condición necesaria y suficiente para que Z y W sean independientes es que se cumpla:

$$f_{ZW}(z,w)=f_Z(z)\,f_W(w)$$

$$\begin{matrix}Z=X+Y & & X=ZW\\ & \Leftrightarrow & \\ W=\dfrac{X}{X+Y} & & Y=Z(1-W)\end{matrix}$$

$$f_{ZW}(z,w)=f_{XY}(zw,z(1-w))z=f_X(zw)\,f_Y(z(1-w))z=e^{-z}z \quad si \quad z>0,\,0<w<1$$

$$f_Z(z)=\int_0^1 e^{-z}zdw=e^{-z}z \quad si \quad z>0$$

$$f_W(w) = \int_0^{\infty} e^{-z} z dz = 1 \quad si \quad 0 < w < 1$$

Luego, en efecto, $f_{ZW}(z,w) = f_Z(z) f_W(w)$ y por tanto Z y W son independientes.

16. Sea $(X_1,..., X_n)$ un vector aleatorio n-dimensional con función de densidad:

$$f(x_1,...,x_n) = \begin{cases} n!\lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i} & si\ x_i > x_{i-1} \ \forall i = 1,...,n \ (x_0 = 0) \\ 0 & resto \end{cases}$$

Se pide calcular la función de densidad conjunta de $Y = (Y_1,...,Y_n)$, siendo:

$$\begin{aligned} &Y_1 = nX_1 \\ &Y_2 = (n-1)(X_2 - X_1) \\ &Y_3 = (n-2)(X_3 - X_2) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &Y_n = X_n - X_{n-1} \end{aligned}$$

Solución

$$\begin{cases} Y_1 = nX_1 \\ Y_2 = (n-1)(X_2 - X_1) \\ Y_3 = (n-2)(X_3 - X_2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Y_n = X_n - X_{n-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = \frac{1}{n} Y_1 \\ X_2 = \frac{1}{n-1} Y_2 + \frac{1}{n} Y_1 \\ X_3 = \frac{1}{n-2} Y_3 + \frac{1}{n-1} Y_2 + \frac{1}{n} Y_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_n = Y_n + \frac{1}{2} Y_{n-1} + ... + \frac{1}{n} Y_1 \end{cases}$$

El Jacobiano de la transformación será:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{n} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{n}\frac{1}{n-1}...1 = \frac{1}{n!}$$

$$\boxed{f_Y(y_1,\ldots,y_n) = f_X\left(\frac{1}{n}y_1,\ldots,y_n+\ldots+\frac{1}{n}y_1\right)\frac{1}{n!} = \lambda^n e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n} y_i} \quad si \quad y_i > 0\ \forall i = 1,\ldots,n}$$

17. Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional con función de densidad:

$$f(x,y) = \frac{1}{4\pi} \quad si\ (x,y) \in \{(x,y)/x^2+y^2 \le 4\}$$

Se pide:

a) Calcular $P(Y > X)$
b) Calcular $P(|X| < 1/Y = 1/3)$

Solución

a) El recinto de integración es el círculo de centro el origen y radio 2. $P(Y > X)$ es justamente el área bajo medio círculo, por lo que $P(Y > X) = \frac{1}{2}$.

b) $$P(|X| < 1/Y = 1/3) = \frac{P\left(-1 < X < 1, Y = \frac{1}{3}\right)}{P\left(Y = \frac{1}{3}\right)} = \int_{-1}^{1} f\left(x / y = \frac{1}{3}\right)dx = \int_{-1}^{1} \frac{f\left(x, y = \frac{1}{3}\right)}{f\left(y = \frac{1}{3}\right)}dx$$

$$f_Y(y) = \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{+\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{4\pi}dx = \frac{\sqrt{4-y^2}}{2\pi}$$

Resulta,

$$\boxed{P(|X| < 1/Y = 1/3) = \int_{-1}^{1} \frac{f\left(x, y = \frac{1}{3}\right)}{f\left(y = \frac{1}{3}\right)}dx = \int_{-1}^{1} \frac{2\pi}{4\pi\sqrt{4-\frac{1}{9}}}dx = \frac{3}{\sqrt{35}}}$$

18. Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional absolutamente continua con distribución uniforme en el triángulo de vértices $(1,0), (0,1)$ y $(1,1)$. Se pide:

Determinar la función de densidad conjunta, así como las marginales.

a) Calcular $P(2XY > 1)$
b) Calcular $P(X + Y \le \frac{3}{2})$

Solución

$$f(x,y)=\begin{cases}2 & si \quad (x,y)\in S\\ 0 & resto\end{cases}$$

siendo S el triángulo de vértices $(1,0), (0,1)$, $(1,1)$.

a) $P(2XY>1)=\int_{1/2}^{1}\int_{1/2x}^{1}2dydx=\int_{1/2}^{1}2\left(1-\frac{1}{2x}\right)dx=\left(2x-\ln x\right)_{1/2}^{1}=1+\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

b) $P\left(X+Y\le\frac{3}{2}\right)=1-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{\frac{3}{2}-x}^{1}2dydx=1-\int_{\frac{1}{2}}^{1}2\left(1-\frac{3}{2}+x\right)dx=\frac{3}{4}$

19. Sean X e Y variables aleatorias independientes con funciones de densidad:

$$f_X(x)=\lambda e^{-\lambda x}\qquad x>0$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|y|}\qquad y\in R$$

Se definen dos nuevas variables, $Z=minimo\{X,Y\}$ y $W=\frac{1}{2}|X-Y|$.

Se pide:

a) Obtener la distribución conjunta de (Z,W), así como las distribuciones marginales.
b) Calcular la función característica de $T=X+Y$.

Solución

a) Distribución conjunta de (Z,W)

$$f_{XY}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{2}\lambda^2e^{-\lambda(x+|y|)}\qquad x>0, y\in R$$

Podemos distinguir los siguientes casos:

1. Si $X<Y\Rightarrow\begin{cases}Z=X\\ W=\frac{1}{2}(Y-X)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}X=Z\\ Y=2W+Z\end{cases}\qquad |J_1|=2$

2. Si $X>Y\Rightarrow\begin{cases}Z=Y\\ W=\frac{1}{2}(X-Y)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}X=2W+Z\\ Y=Z\end{cases}\qquad |J_2|=|-2|=2$

Los recintos transformados son los siguientes:

S1. $\begin{cases} X > 0 \\ X < Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Z > 0 \\ Z < 2W + Z \Leftrightarrow W > 0 \end{cases}$

S2. $\begin{cases} X > 0 \\ X > Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2W + Z > 0 \\ 2W + Z > Z \Leftrightarrow W > 0 \end{cases}$

$$\boxed{f_{ZW}(z,w) = \begin{cases} f_{XY}(z,2w+z)2 + f_{XY}(2w+z,z)2 = 2\lambda^2 e^{-\lambda 2(z+w)} & si \quad z > 0\,,\, w > 0 \\ f_{XY}(2w+z,z)2 = \lambda^2 e^{-2\lambda w} & si \quad w > 0\,,\, 2w+z > 0 \end{cases}}$$

Distribuciones marginales de Z y W

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_{-\frac{z}{2}}^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda 2w} dw = \frac{\lambda}{2} e^{\lambda z} & si \quad z < 0 \\ \int_0^{\infty} 2\lambda^2 e^{-\lambda 2(w+z)} dw = \lambda e^{-2\lambda z} & si \quad z > 0 \end{cases}$$

$$f_W(w) = \int_{-2w}^{0} \lambda^2 e^{-\lambda 2w} dz + \int_0^{\infty} 2\lambda^2 e^{-\lambda 2(w+z)} dz = \lambda e^{-2\lambda w}(2\lambda w + 1) \quad si \quad w > 0$$

b) $T = X + Y$

$\varphi_T(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$ por ser X e Y independientes.

Puesto que $X \approx Exp(\lambda)$,

$$\varphi_X(t) = \int_0^{\infty} e^{itx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{1 - \frac{it}{\lambda}} = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

$$\varphi_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ity} \frac{1}{2} \lambda e^{-\lambda |y|} dy = \int_{-\infty}^{0} e^{ity} \frac{1}{2} \lambda e^{\lambda y} dy + \int_0^{\infty} e^{ity} \frac{1}{2} \lambda e^{-\lambda y} dy = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + t^2}$$

Luego,

$$\boxed{\varphi_T(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t) = \frac{1}{1 - \frac{it}{\lambda}} \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + t^2} = \frac{\lambda^3}{(\lambda - it)(\lambda^2 + t^2)}}$$

20. Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional con función de densidad conjunta:

$$f(x,y) = k^2 e^{-ky} \quad si \; 0 < x < y$$

a) Hallar la línea general de regresión y la recta de regresión de Y/X .
b) ¿Son X e $Y-X$ independientes?

Solución

a) Es fácil comprobar que $f(x,y)$ es función de densidad para cualquier valor de $k>0$.

Línea de regresión

$$E(Y/X)=\int_R yf(y/x)dy=\int_R y\frac{f(x,y)}{f_1(x)}dy$$

$$f_1(x)=\int_x^{\infty}k^2e^{-ky}dy=ke^{-kx} \quad si \quad x>0 \Rightarrow X \approx Exp(k)$$

$$\boxed{E(Y/X)=\int_x^{\infty}yke^{-k(y-x)}dy=ke^{kx}\int_x^{\infty}ye^{-ky}dy=x+\frac{1}{k}}$$

La última integral se ha resuelto por partes.

Se observa que la línea de regresión es una recta, por lo que coincide con la recta de regresión de Y/X .

b) Veamos si X e $Y-X$ son independientes.

Una condición necesaria y suficiente de independencia de variables es que la función de distribución conjunta sea igual al producto de las marginales. Veremos si se cumple o no dicha condición.

Sea $Z=Y-X$

$$F_Z(z)=P(Y-X\le z)=\int_0^{\infty}\int_x^{x+z}f(x,y)dydx=\int_0^{\infty}ke^{-kx}\left(1-e^{-kz}\right)dx=1-e^{-kz} \quad si \quad z\ge 0$$

Luego $Z\approx Exp(k)$

Como $X\approx Exp(k)$, entonces $F_X(x)=1-e^{-kx} \quad si \quad x\ge 0$

$$F_{XZ}(x,z)=P(X\le x,Y-X\le z)=\int_0^{x}\int_x^{x+z}f(x,y)dydx=\int_0^{x}ke^{-kx}\left(1-e^{-kz}\right)dx=1+e^{-kx}\left(e^{-kz}-1\right)-e^{-kz}$$

$$F_{XZ}(x,z)=F_X(x)F_Z(z) \quad si \quad z\ge 0, x\ge 0$$

Por tanto X e $Z=Y-X$ son independientes.

21. Sean X e Y variables aleatorias independientes distribuidas ambas según una $N(0,1)$. Se definen dos nuevas variables como sigue:

$$Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$W = \frac{X}{Y}$$

Se pide hallar la distribución conjunta de (Z,W) y la curva de regresión de Z/W .

Solución

Distribución conjunta de (Z,W)

Aplicamos el siguiente cambio a polares: $\begin{matrix} X = R\cos\theta \\ Y = R\,\mathrm{sen}\,\theta \end{matrix}$ siendo $|J| = R$ el jacobiano de la transformación. Además $R > 0$ y $\theta \in [0,2\pi]$.

$$f_{R\theta}(r,\theta) = f_{XY}(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)r = f_X(r\cos\theta)\,f_Y(r\,\mathrm{sen}\,\theta)r = \frac{r}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}r^2\cos^2\theta}e^{-\frac{1}{2}r^2\mathrm{sen}^2\theta} = \frac{r}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}r^2}$$

$$f_{R\theta}(r,\theta) = \frac{r}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}r^2} \quad si \quad r > 0\,,\theta \in [0,2\pi]$$

Además, $Z = R$ y $W = \cot g\theta$, por lo que $R = Z$ y $\theta = \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{W}\right)$.

El jacobiano de esta transformación es $|J| = \frac{1}{1+w^2}$

$$\boxed{f_{ZW}(z,w) = f_{R\theta}\left(z, \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{w}\right)\right)\frac{1}{1+w^2} = \frac{z}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}z^2}\frac{1}{1+w^2} \quad z > 0\,, w \in R}$$

Curva de regresión de Z/W

$$E(Z/W) = \int_0^\infty zf(z/w)dz = \int_0^\infty z\frac{f(z,w)}{f_W(w)}dz$$

$$f_W(w) = \int_0^\infty \frac{z}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}z^2}\frac{1}{1+w^2}dz = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1+w^2}\int_0^\infty ze^{-\frac{1}{2}z^2}dz = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1+w^2} \quad w \in R$$

$$\boxed{E(Z/W) = \int_0^\infty z\frac{f(z,w)}{f_W(w)}dz = \int_0^\infty z^2e^{-\frac{z^2}{2}}dz = \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

22. Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional con función de densidad:

$$f(x,y) = e^{-x-y} \quad si\ 0 < y < 1,\ x > -y$$

Calcular la distribución conjunta de (X^2,Y^2).

Solución

$$F_{ZW}(z,w) = P(X^2 \le z, Y^2 \le w) = P(-\sqrt{z} \le X \le \sqrt{z}, -\sqrt{w} \le Y \le \sqrt{w})$$

<u>Caso 1</u>: Si $0 < w < z < 1$

$$F^{(1)}{}_{ZW}(z,w) = \int_0^{\sqrt{w}} \int_{-y}^{\sqrt{z}} e^{-x-y} dxdy = \int_0^{\sqrt{w}} e^{-y}\left(e^{y} - e^{-\sqrt{z}}\right)dy = \sqrt{w} + e^{-\sqrt{z}}\left(e^{-\sqrt{w}} - 1\right)$$

<u>Caso 2</u>: Si $0 < z < w < 1$

$$F^{(2)}{}_{ZW}(z,w) = \int_{-\sqrt{z}}^{0} \int_{-x}^{\sqrt{w}} e^{-x-y} dydx + \int_0^{\sqrt{z}} \int_0^{\sqrt{w}} e^{-x-y} dydx = 1 + \sqrt{z} + e^{-\sqrt{w}}\left(e^{-\sqrt{z}} - e^{\sqrt{z}}\right) - e^{-\sqrt{z}}$$

<u>Caso 3</u>: Si $0 < z < 1$ y $w > 1$

$$F^{(3)}{}_{ZW}(z,w) = F^{(2)}{}_{ZW}(z,1) = 1 + \sqrt{z} + e^{-1}\left(e^{-\sqrt{z}} - e^{\sqrt{z}}\right) - e^{-\sqrt{z}}$$

<u>Caso 4</u>: Si $0 < w < 1$ y $z > 1$

$$F^{(4)}{}_{ZW}(z,w) = F^{(1)}{}_{ZW}(z,w) = \sqrt{w} + e^{-\sqrt{z}}\left(e^{-\sqrt{w}} - 1\right)$$

<u>Caso 5</u>: Si $z > 1$ y $w > 1$

$$F^{(5)}{}_{ZW}(z,w) = F^{(4)}{}_{ZW}(z,1) = 1 + e^{-\sqrt{z}}\left(e^{-1} - 1\right)$$

23. Sea $\left(X, Y\right)$ una variable aleatoria bidimensional normal bivariante tal que X e Y están incorreladas. Se pide:

a) Calcular $\mathrm{E}\left(X^2/Y\right)$ y $\mathrm{E}\left(X^2 + 3XY/Y\right)$
b) ¿Cómo se distribuyen $\mathrm{E}\left(X^2/Y\right)$ y $\mathrm{E}\left(X^2 + 3XY/Y\right)$?

Solución

a) $\mathrm{E}\left(X^2/Y\right) = \mathrm{E}\left(X^2\right) = V(X) + \left(E(X)\right)^2 = \sigma_X^2 + \mu_X^2$

$$\mathrm{E}\left(X^2 + 3XY/Y\right) = \mathrm{E}\left(X^2/Y\right) + 3\mathrm{E}\left(XY/Y\right) = E\left(X^2\right) + 3YE\left(X\right) = \left(\sigma_X^2 + \mu_X^2\right) + 3Y\mu_X$$

b) $\mathrm{E}\left(X^2/Y\right)$ tiene una distribución degenerada en el punto $\sigma_X^2 + \mu_X^2$.

$$\mathrm{E}\left(X^2 + 3XY/Y\right) = \left(\sigma_X^2 + \mu_X^2\right) + 3Y\mu_X \approx N\left(\mu, \sigma^2\right)$$

siendo $\mu = \left(\sigma_X^2 + \mu_X^2\right) + 3\mu_Y\mu_X$ y $\sigma^2 = 9\mu_X^2\sigma_Y^2$

24. Sea $(X_1,...,X_n)$ una muestra aleatoria simple de una $Poisson(\lambda)$. Se pide calcular:

a) $P(S_j = a / S_n = b),\ j = 1,...,(n-1)$, siendo $S_j = \sum_{i=1}^{j} X_i\ ,\ j = 1,...,n$.

b) Varianza de la distribución obtenida en a).

Solución

a)

$$P(S_j = a/S_n = b) = \frac{P(S_j = a, S_n = b)}{P(S_n = b)} = \frac{P\left(\sum_{i=1}^{j} X_i = a, \sum_{i=j+1}^{n} X_i = b-a\right)}{P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = b\right)} =$$

$$= \frac{P\left(\sum_{i=1}^{j} X_i = a\right) P\left(\sum_{i=j+1}^{n} X_i = b-a\right)}{P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = b\right)} = \frac{\frac{e^{-\lambda j}(\lambda j)^a}{a!}\ \frac{e^{-\lambda(n-j)}(\lambda(n-j))^{b-a}}{(b-a)!}}{\frac{e^{-\lambda n}(\lambda n)^b}{b!}} = \binom{b}{a}\left(\frac{j}{n}\right)^a \left(1-\frac{j}{n}\right)^{b-a}$$

Luego $P(S_j = a/S_n = b) \approx Bin\left(b, \frac{j}{n}\right)$

a) $V(S_j = a/S_n = b) = b\frac{j}{n}\left(1-\frac{j}{n}\right)$

25. Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional con función de densidad:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}e^{-x/2} & si\ x > 0 \quad -1 < y < 1 \\ 0 & resto \end{cases}$$

$(X_1,...,X_n)$ son variables independientes e igualmente distribuidas a X. Se pide:

a) Calcular la distribución de $Y_n = X_1 + ... + X_n$.

b) Estudiar la convergencia en ley de la sucesión de variables $\left\{\frac{Y_n}{n^2}\right\}_{n\in N}$.

c) Definimos una variable aleatoria Z_n tal que $Z_n / X = x$ se distribuye según una $\text{Poisson}(nx)$. Calcular la distribución marginal de Z_n, así como la convergencia en ley de la sucesión $\{Z_n\}_{n\in N}$.

Solución

a) Calculemos en primer lugar la distribución de X.

$$f_X(x) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{4} e^{-x/2} dy = \frac{1}{2} e^{-x/2} \quad si \quad x > 0$$

Por tanto $X \approx Exp\left(\lambda = \frac{1}{2}\right) \equiv G\left(1, \frac{1}{2}\right)$. Al ser $(X_1, ..., X_n)$ una muestra aleatoria simple de X, $X_i \approx Exp\left(\frac{1}{2}\right) \equiv G\left(p = 1, a = \frac{1}{2}\right) \quad \forall i = 1, ..., n$ y además son independientes. Por ser la Gamma reproductiva respecto de p,

$$\boxed{Y_n = X_1 + ... + X_n \approx G\left(n, \frac{1}{2}\right)}$$

b) Convergencia en ley de $\left\{\frac{Y_n}{n^2}\right\}_{n \in N}$

$$\varphi_{\frac{Y_n}{n^2}}(t) = E\left(e^{it\frac{Y_n}{n^2}}\right) = \varphi_{Y_n}\left(\frac{t}{n^2}\right) = \left(1 - 2i\frac{t}{n^2}\right)^{-n} \text{ por ser } Y_n \approx G\left(n, \frac{1}{2}\right).$$

Tomando límites cuando $n \to \infty$ resulta:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 - 2i\frac{t}{n^2}\right)^{-n} = e^0 = 1$$

siendo dicho límite la función característica de una variable aleatoria degenerada en el punto 0, por lo que:

$$\boxed{\frac{Y_n}{n^2} \xrightarrow{L} Y \equiv 0}$$

c) Distribución de Z_n

$$P(Z_n = z) = \int_0^{\infty} P(Z_n = z / X = x) f_X(x) dx = \int_0^{\infty} \frac{e^{-nx}(nx)^z}{z!} \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} dx = \frac{n^z}{2z!} \frac{\Gamma(z+1)}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^{z+1}}$$

$$\boxed{P(Z_n = z) = \frac{n^z}{2\left(n + \frac{1}{2}\right)^{z+1}} \quad z = 0,1,2,...}$$

Convergencia en Ley de Z_n

$$\varphi_{Z_n}(t) = \sum_{z=0}^{\infty} \frac{e^{itz} n^z}{2\left(n+\frac{1}{2}\right)^{z+1}} = \frac{1}{2\left(n+\frac{1}{2}\right)} \sum_{z=0}^{\infty} \left(\frac{e^{it} n}{n+\frac{1}{2}}\right)^z = \frac{1}{2\left(n+\frac{1}{2}\right)} \frac{1}{1-\frac{e^{it} n}{n+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{1+2n\left(1-e^{it}\right)}$$

Tomando límites cuando $n \to \infty$ resulta:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+2n\left(1-e^{it}\right)} = \begin{cases} 1 & si \quad e^{it} = 1 \Leftrightarrow t = 2k\pi \\ 0 & si \quad e^{it} \neq 1 \Leftrightarrow t \neq 2k\pi \end{cases}$$

Luego,

$$\varphi_{Z_n}(t) \longrightarrow \varphi(t) = \begin{cases} 1 & si \quad t = 2k\pi \\ 0 & si \quad t \neq 2k\pi \end{cases}$$

Pero $\varphi(t)$ no es continua por lo que no es función característica. Por tanto Z_n no converge en Ley.

26. Sea $\{X_n\}_{n\in N}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Se definen unas nuevas variables:

$$Y_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{X_i}{2^{n+1-i}}$$

Estudiar la convergencia en ley de la sucesión $\{Y_n\}_{n\in N}$ en los siguientes casos:

a) $X_n \approx N(0,\sigma) \quad \forall n$
b) $X_n \approx Cauchy(0,1) \quad \forall n$

Solución

a) $X_n \approx N(0,\sigma) \quad \forall n$

$$\varphi_{Y_n}(t) = \prod_{i=0}^{n} \varphi_{X_i}\left(\frac{t}{2^{n+1-i}}\right) = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 \sum_{i=0}^{n} \frac{t^2}{2^{2n+2-2i}}} = e^{-\frac{t^2}{24}\sigma^2 \frac{4^{n+1}-1}{4^n}} \xrightarrow{n\to\infty} e^{-\frac{t^2}{6}\sigma^2} \equiv \varphi_{N(0,\frac{\sigma}{\sqrt{3}})}$$

Por tanto,

$$\boxed{Y_n \xrightarrow{L} N\left(0, \frac{\sigma}{\sqrt{3}}\right)}$$

b) $X_n \approx Cauchy(0,1) \quad \forall n$

$$\varphi_{Y_n}(t)=\prod_{i=0}^{n}\varphi_{X_i}\left(\frac{t}{2^{n+1-i}}\right)=e^{-\sum_{i=0}^{n}\left|\frac{t}{2^{n+1-i}}\right|}=e^{-\frac{|t|}{2^{n+1}}\sum_{i=0}^{n}2^i}=e^{-\frac{|t|}{2^{n+1}}\frac{2^{n+1}-1}{1}}=e^{-|t|\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)}\xrightarrow{n\to\infty}e^{-|t|}\equiv\varphi_{C(0,1)}$$

Por tanto,

$$\boxed{Y_n\xrightarrow{L}C(0,1)}$$

27. Sea $\{X_n\}_{n\in N}$ una sucesión de variables aleatorias tal que X_n tiene por función de densidad:

$$f_n(x)=\frac{1}{\pi}\frac{n}{(1+n^2x^2)}\qquad x\in R$$

Probar que esta sucesión converge en probabilidad a cero pero no converge en media cuadrática.

Solución

Convergencia en probabilidad

Debemos probar que $P\{w\in\Omega/|X_n(w)-0|<\varepsilon\}\xrightarrow{n\to\infty}1$.

$$P\{w\in\Omega/|X_n(w)-0|<\varepsilon\}=\frac{1}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{n}{(1+n^2x^2)}dx=\frac{1}{\pi}[\operatorname{arctg}(nx)]_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}=\frac{1}{\pi}[\operatorname{arctg}(n\varepsilon)-\operatorname{arctg}(-n\varepsilon)]$$

Tomando límites,

$$\frac{1}{\pi}[\operatorname{arctg}(n\varepsilon)-\operatorname{arctg}(-n\varepsilon)]\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=1$$

Luego $X_n\xrightarrow{P}X\equiv 0$

Convergencia en media cuadrática

$E\left[(X_n-0)^2\right]=E\left(X_n^2\right)=\infty$ puesto que

$$E(|X_n|)=\int_R|x|\frac{1}{\pi}\left(\frac{n}{1+n^2x^2}\right)dx=\frac{1}{n\pi}\left[\ln(1+n^2x^2)\right]_0^\infty=\infty$$

Por tanto X_n no converge en media cuadrática a $X=0$.

28. Sea $\{X_n\}_{n\in N}$ una sucesión de variables aleatorias independientes tal que X_n tiene como función de masa:

$$X_n = \begin{cases} 0 \quad \text{con probabilidad } 1 - \dfrac{1}{n} \\ 1 \quad \text{con probabilidad } \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

Demostrar que $\{X_n\}_{n\in N}$ converge en probabilidad pero no casi-seguro. Extraer una subsucesión que converja casi-seguro.

Solución

Convergencia en probabilidad

$$E(X_n) = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$
$$V(X_n) = E(X_n^2) - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Luego $X_n \xrightarrow{P} X = 0$

Convergencia casi-segura

Una condición necesaria y suficiente para la convergencia casi-segura es que se cumpla:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\left\{ \bigcap_{m=n}^{\infty} \{ w \in \Omega / |X_m(w) - 0| < \varepsilon \} \right\} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

Veamos que esta condición no se cumple. Tomemos $\varepsilon = 1$

$$P\left\{ \bigcap_{m=n}^{\infty} \{ w \in \Omega / |X_m(w)| < 1 \} \right\} = P\left\{ \bigcap_{m=n}^{\infty} \{ w \in \Omega / |X_m(w)| = 0 \} \right\} = \prod_{m=n}^{\infty} P\{ w \in \Omega / |X_m(w)| = 0 \}$$
$$= \prod_{m=n}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{m}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \neq 1$$

Luego hemos encontrado un valor de ε para el que la condición no se cumple, por lo que no se da la convergencia casi-segura.

Falta probar que, en efecto, $\prod_{m=n}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{m}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

$$\prod_{m=n}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{m}\right) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \dots = 1 - \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m} + \sum_{\substack{i<j \\ i,j=n}}^{\infty} \frac{1}{i}\frac{1}{j} - \sum_{\substack{i<j<k \\ i,j,k=n}}^{\infty} \frac{1}{i}\frac{1}{j}\frac{1}{k} + \dots \geq 1 - \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Buscaremos una subsucesión que converja casi-seguro a $X = 0$

Nos quedamos con los términos de la forma 2^m.

$$P\left\{\bigcap_{m=n}^{\infty}\left\{w\in\Omega/\left|X_m(w)\right|<\varepsilon\right\}\right\}\geq\prod_{m=n}^{\infty}P\left\{X_m=2^m\right\}=\prod_{m=n}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^m}\right)$$

$$=1-\sum_{m=n}^{\infty}\frac{1}{2^m}+\sum_{\substack{i<j\\ i,j=n}}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{1}{2^j}-\sum_{\substack{i<j<k\\ i,j,k=n}}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{1}{2^j}\frac{1}{2^k}+...\geq 1-\sum_{m=n}^{\infty}\frac{1}{2^m}=1-\frac{1}{2^{n-1}}\xrightarrow{n\to\infty}1$$

Por tanto, $\left\{X_{2^m}\right\}_m\xrightarrow{cs}X=0$

29. Sea $\left\{X_n\right\}_{n\in N}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con función de masa:

$$P(X_n=1)=P(X_n=-1)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

$$P(X_n=2^n)=P(X_n=-2^n)=\frac{1}{2^{n+1}}$$

Se pide probar que esta sucesión cumple la Ley Fuerte de los Grandes Números.

Solución

X_n puede expresarse como suma de dos sucesiones, es decir, $X_n=Y_n+Z_n$ siendo

$$Y_n=\begin{cases}X_n & si\quad \left|X_n\right|=1\\ 0 & si\quad \left|X_n\right|\neq 1\end{cases}\qquad\qquad Z_n=\begin{cases}X_n & si\quad \left|X_n\right|\neq 1\\ 0 & si\quad \left|X_n\right|=1\end{cases}$$

Si Y_n y Z_n cumplen la LFGN entonces X_n también la cumplirá.

- Y_n

$E(Y_n)=0$ y $V(Y_n)=E(Y_n^2)=1-\dfrac{1}{2^n}$

Por la condición suficiente de Kolmogorov,

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V(Y_n)}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\frac{1}{2^n}}{n^2}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty$ (la penúltima desigualdad es consecuencia de que $1-\dfrac{1}{2^n}\leq 1$).

Por tanto Y_n cumple la LFGN.

- Z_n

$E(Z_n)=0$ y $V(Z_n)=E(Z_n^2)=2^n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{V(Z_n)}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} = +\infty$$

No se cumple la condición suficiente de Kolmogorov.
Usaremos el siguiente resultado: "Si Z_n es una sucesión de variables aleatorias independientes tal que $E(Z_n) = \mu \ \forall n$ y $Z_n \xrightarrow{cs} \mu$, entonces Z_n cumple la LFGN".

Basta ver que $Z_n \xrightarrow{cs} 0$

$$P\left\{\bigcap_{m=n}^{\infty} \{w \in \Omega / |Z_m(w)| < \varepsilon\}\right\} = \prod_{m=n}^{\infty} P\{|Z_m| < \varepsilon\} \geq \prod_{m=n}^{\infty}\left(1 - \frac{V(Z_m)}{\varepsilon^2}\right)$$

La penúltima desigualdad es consecuencia de aplicar la Desigualdad de Chebychev.

$$\prod_{m=n}^{\infty}\left(1 - \frac{V(Z_m)}{\varepsilon^2}\right) = \prod_{m=n}^{\infty}\left(1 - \frac{2^m}{\varepsilon^2}\right) = 1 - \sum_{m=n}^{\infty} \frac{2^m}{\varepsilon^2} + \sum_{\substack{i<j \\ i,j=n}}^{\infty} \frac{2^{i+j}}{\varepsilon^2} - \ldots \geq 1 - \sum_{m=n}^{\infty} \frac{2^m}{\varepsilon^2} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

Luego Z_n cumple la LFGN y por tanto X_n también lo cumple.

30. Sea $\{X_n\}_{n\in N}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función característica:

$$\varphi(t) = \exp(-|t|)$$

Hallar la distribución límite de $\frac{S_n}{n}$ siendo $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Solución

$X_n \approx C(0,1) \ \forall n$

$$\varphi_{\frac{S_n}{n}}(t) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}\left(\frac{t}{n}\right) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\left|\frac{t}{n}\right|} = e^{-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|t|} = e^{-|t|}$$

Luego $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{L} C(0,1)$

31. Sea la sucesión de variables aleatorias independientes $\{X_n^{(a)}\}_{n\in N}$ definida como sigue:

$$P(X_n^{(a)} = -n^{2a}) = P(X_n^{(a)} = n^{2a}) = \frac{1}{n^2}$$

$$P(X_n^{(a)} = -n^{a}) = P(X_n^{(a)} = n^{a}) = \frac{1}{n^3}$$

$$P(X_n^{(a)} = 0) = 1 - \frac{2(1+n)}{n^3}$$

a es un valor real fijo.

a) ¿Para qué valores de a se cumple la condición suficiente de la Ley Fuerte de los Grandes Números?
b) Estudiar la convergencia en probabilidad y en ley de $\{X_n^{(a)}\}_{n\in N}$.
c) Para $a=1$ se define una nueva sucesión de variables aleatorias $\{Y_n\}_{n\in N}$ tal que $Y_n / X_n^{(1)} = x$ se distribuye según una $N(x,1)$ si $x \le 0$ y según una $\gamma(x,x)$ si $x>0$. ¿Converge en ley esta sucesión?

Solución

a) Si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{V(X_n^{(a)})}{n^2} < \infty$, por la condición suficiente de Kolmogorov podremos asegurar que $X_n^{(a)}$ satisface la LFGN.

$$E\left(X_n^{(a)}\right) = 0$$
$$V\left(X_n^{(a)}\right) = E\left(\left(X_n^{(a)}\right)^2\right) = \frac{n^{4a}2}{n^2} + \frac{n^{2a}2}{n^3} = 2n^{2a-2}\left(n^{2a} + \frac{1}{n}\right)$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{V(X_n^{(a)})}{n^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty} n^{2a-4}\left(n^{2a} + \frac{1}{n}\right) = 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{4-4a}} + 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{5-2a}} < \infty \Leftrightarrow \begin{cases} 4-4a > 1 \\ 5-2a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow a < \frac{3}{4}$$

$X_n^{(a)}$ satisface la LFGN sólo si $a < \frac{3}{4}$.

b) Convergencia en Ley

$$\varphi_{X_n^{(a)}}(t) = e^{-itn^{2a}} \frac{1}{n^2} + e^{-itn^a} \frac{1}{n^3} + 1 - \frac{2(1+n)}{n^3} + e^{itn^{2a}} \frac{1}{n^2} + e^{itn^a} \frac{1}{n^3}$$

$$= \frac{1}{n^2} 2\cos\left(tn^{2a}\right) + \frac{1}{n^3} 2\cos\left(tn^a\right) + 1 - \frac{2+2n}{n^3} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

Luego $X_n^{(a)} \xrightarrow{L} X = 0$

Convergencia en probabilidad

Como $X_n^{(a)}$ converge en ley a una degenerada, entonces también converge en probabilidad, es decir, $X_n^{(a)} \xrightarrow{P} X = 0$.

c) $\left(Y_n / X_n^{(1)} = x\right) \approx N(x,1) \quad si \quad x \le 0$
$\left(Y_n / X_n^{(1)} = x\right) \approx G(x,x) \quad si \quad x > 0$

$$X_n^{(1)} = \begin{cases} -n^2 & \text{con probabilidad } \frac{1}{n^2} \\ -n & \text{con probabilidad } \frac{1}{n^3} \\ 0 & \text{con probabilidad } 1 - \frac{2+2n}{n^3} \\ n & \text{con probabilidad } \frac{1}{n^3} \\ n^2 & \text{con probabilidad } \frac{1}{n^2} \end{cases}$$

$$f_{Y_n}(y) = \sum_x f\left(y / X_n^{(1)} = x\right) P\left(X_n^{(1)} = x\right)$$

- Si $Y \leq 0$

$$f_{Y_n}(y) = f\left(y / X_n^{(1)} = -n^2\right) P\left(X_n^{(1)} = -n^2\right) + f\left(y / X_n^{(1)} = -n\right) P\left(X_n^{(1)} = -n\right) + f\left(y/0\right) P\left(X_n^{(1)} = 0\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(y+n^2\right)^2} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(y+n)^2} \frac{1}{n^3} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} \left(1 - \frac{2+2n}{n^3}\right)$$

- Si $Y > 0$

$$f_{Y_n}(y) = f\left(y / X_n^{(1)} = n^2\right) P\left(X_n^{(1)} = n^2\right) + f\left(y / X_n^{(1)} = n\right) P\left(X_n^{(1)} = n\right) + f\left(y/0\right) P\left(X_n^{(1)} = 0\right) +$$

$$+ f\left(y / X_n^{(1)} = -n^2\right) P\left(X_n^{(1)} = -n^2\right) + f\left(y / X_n^{(1)} = -n\right) P\left(X_n^{(1)} = -n\right) = \frac{n^{2n^2}}{\Gamma(n^2)} e^{-n^2 x} x^{n^2-1} \frac{1}{n^2} +$$

$$+ \frac{n^n}{\Gamma(n)} e^{-nx} x^{n-1} \frac{1}{n^3} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} \left(1 - \frac{2+2n}{n^3}\right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(y+n^2\right)^2} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(y+n)^2} \frac{1}{n^3}$$

Convergencia en Ley

$$\varphi_{Y_n}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ity} f\left(y / X_n^{(1)} = -n^2\right) P\left(X_n^{(1)} = -n^2\right) dy + \int_{-\infty}^{\infty} e^{ity} f\left(y / X_n^{(1)} = -n\right) P\left(X_n^{(1)} = -n\right) dy +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} e^{ity} f\left(y / X_n^{(1)} = 0\right) P\left(X_n^{(1)} = 0\right) dy + \int_{0}^{\infty} e^{ity} f\left(y / X_n^{(1)} = n^2\right) P\left(X_n^{(1)} = n^2\right) dy +$$

$$+ \int_{0}^{\infty} e^{ity} f\left(y / X_n^{(1)} = n\right) P\left(X_n^{(1)} = n\right) dy = \frac{1}{n^2} \left(e^{-itn^2 - \frac{1}{2}t^2} \right) + \frac{1}{n^3} \left(e^{-itn - \frac{1}{2}t^2} \right) + \left(1 - \frac{2+2n}{n^3}\right) e^{-\frac{t^2}{2}} +$$

$$+ \frac{1}{n^2} \left(1 - \frac{it}{n^2}\right)^{-n^2} + \frac{1}{n^3} \left(1 - \frac{it}{n}\right)^{-n}$$

Tomando límites cuando $n \to \infty$ resulta:

$$\varphi_{Y_n}(t) \xrightarrow{n\to\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \equiv \varphi_{N(0,1)}$$

Por lo que $Y_n \xrightarrow{L} N(0,1)$.

32. La duración media de una pila es de un mes. Cuando se gasta una pila ésta es reemplazada por otra y así sucesivamente. ¿Cuántas pilas debemos tener para que podamos asegurar tener carga durante un año con una probabilidad del 95%?

Solución

Sea T_i la variable aleatoria que mide "la duración (en meses) de la i-ésima bombilla". $T_i \approx Exp(\lambda = 1) \equiv G(1,1)$

Debemos determinar n tal que se cumpla:

$$P(T_1 + ... + T_n \geq 24) = 0,95$$

$T_1 + ... + T_n \approx G(n,1)$, por la reproductividad de la Gamma.

$E\left(\sum_{i=1}^{n} T_i\right) = n \qquad V\left(\sum_{i=1}^{n} T_i\right) = n$

Aplicando el Teorema Central del Límite podemos asegurar que

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} T_i - n}{\sqrt{n}} \approx N(0,1)$$

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} T_i - n}{\sqrt{n}} \geq \frac{24-n}{\sqrt{n}}\right) = 0,95 \Leftrightarrow \frac{24-n}{\sqrt{n}} = z_{0.05} = -1,64 \Leftrightarrow n = 33,5$$

Por tanto n debe ser igual a 34.

33. En una fábrica el tiempo que transcurre hasta que falla una máquina se distribuye según una Weibull cuya función de distribución es la siguiente:

$$P(T \leq t)) = 1 - e^{-2\sqrt{t}}$$

Calcular la probabilidad de que fallen al menos N máquinas en el intervalo de tiempo $(0,t)$.

Solución

Sea X_t la variable aleatoria que mide "el número de fallos en el intervalo $(0,t)$". Nos piden calcular $P(X_t \geq N)$.
Llamaremos Y_i al "Tiempo que transcurre hasta que falla la i-ésima máquina".
$Y_i \approx Weibull$

$$P(X_t \geq N) = P(Y_1 + ... + Y_N < t)$$

Al ser las Y_i independientes e idénticamente distribuidas podemos aplicar el Teorema Central del Límite, por lo que:

$$P(X_t \geq N) = P(Y_1 + ... + Y_N < t) = P\left(N(0,1) < \frac{t - E\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i\right)}{\sqrt{V\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i\right)}} \right)$$

$$E\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i\right) = \sum_{i=1}^{N} E(Y_i) = \frac{N}{2}$$
$$V\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i\right) = \sum_{i=1}^{N} V(Y_i) = \frac{5N}{4}$$

Por tanto,

$$\boxed{P(X_t \geq N) = P(Y_1 + ... + Y_N < t) = P\left(N(0,1) < \frac{t - \frac{N}{2}}{\sqrt{\frac{5N}{4}}} \right) = F_{N(0,1)}\left(\frac{t - \frac{N}{2}}{\sqrt{\frac{5N}{4}}} \right)}$$