ESTADÍSTICA – T2

1. PROBABILIDAD CONDICIONADA.
   - Definición
   - Espacio de probabilidad < Ωs σ-álgebr
     Ps probab.

2. TEOREMAS de la PROBAB. CONDICIONADA
   - Teorema axiomático extendido
   - Teorema del producto

3. TEOREMA de la PROBAB. TOTAL

4. TMA. BAYES

5. INDEPENDENCIA de SUCESOS
   - Definición < $\cap$
     /
   - Extensión
   - Implicaciones: A y B indep $\Rightarrow$ | A y $\overline{B}$ / $\overline{A}$ y B / $\overline{A}$ y $\overline{B}$ indep.

OJO

ESTAD _ T2 . PROBABILIDAD CONDICIONADA.

BUSCAR → TEOREMAS de la PROB. CONDIC.
INDEPENDENCIA de SUCESOS.
TEOREMA de la PROBAB. TOTAL
TEOREMA de BAYES.

Extender la forma de la axiomática Kolmogorov al caso de condic.

---

1 _ PROBABILIDAD CONDICIONADA. Sea (E, Ω, P) e.p. y $S \subset \Omega$ tq $P(S)>0$

DEF: $P(S_1/_S) = \dfrac{P(S_1 \cap S)}{P(S)}$, siempre que $P(S)>0$

donde $S_1 \to$ suceso condicionado
$S \to$ suceso condicionante ó condición

Idea: Partiendo de la definición de Laplace $\dfrac{CF}{CP}$ $\dfrac{P(\text{ocurra } S_1 \text{ y ocurra } S)}{P(\text{ocurra } S)}$

El espacio de probabilidad resultante es
$E_S(S, \Omega_S, P_S)$, siempre que $P(S)>0$ es un espacio de probab.
donde el espacio muestral es $E_S = S = E \cap S$ (q'to menos elementales)
la estructura de σ-álg es $\Omega_S = \Omega \cap S$ (q'to menos posibles)
y la medida de probab es $P_S = P(S_i/_S)$ para $S_i \in \Omega$.

Ω_S tiene estructura de σ-álgebra:

1_ $E_S \in \Omega_S \to E_S = E \cap S \in (\Omega \cap S)$ porque $E \in \Omega$, σ-álg.

2_ Si $A_S \in \Omega_S$, entonces $\bar{A}_S \in \Omega_S$

$A_S = A \cap S$, donde $A \in \Omega \Rightarrow \bar{A} \in \Omega$ por ser Ω σ-álg.

$\bar{A}_S = S - A = S \cap \bar{A} \in \Omega_S = \Omega \cap S$.

3_ Si $A_{iS} \in \Omega_S$, entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{iS} \in \Omega_S$

$A_{iS} = A_i \cap S$, donde $A_i \in \Omega$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{iS} = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap S) = \underbrace{\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)}_{\substack{\in \Omega \\ \text{por ser σ-álg}}} \cap S \in \Omega \cap S$$

ESTAD_T2.

P_S es una medida de probabilidad, ya que verifica los tres axiomas de Kolmogorov:

$P_S = P(S_1/S)$ para $P(S)>0$. (la probab. asociada a cq. suceso es un nº no negativo)

Ax1. $P(S_1/S) \geq 0$ por ser un cociente de probab., $P(S) \neq 0$.

Ax2. $P(E/S) = 1$ (la probab. del espacio muestral es 1)

Por definición, $P(E/S) = \dfrac{P(E \cap S)}{P(S)} = \dfrac{P(S)}{P(S)} = 1$.

Ax3. Dada una sucesión numerable de sucesos condicionados a S, disjuntos 2 a 2, la probab. de la unión disjunta coincide con la suma de las probab. individuales.

$S_1/S, \ldots, S_i/S, \ldots$ tq $(S_i/S) \cap (S_j/S) = \emptyset \;\; \forall i \neq j$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (S_i/S)\right) = \frac{P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right) \cap S\right)}{P(S)} = \frac{P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (S_i \cap S)\right)}{P(S)}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{\infty} P(S_i \cap S)}{P(S)} = \sum_{i=1}^{\infty} P(S_i/S).$$

La definición de probabilidad condicionada se extiende fácilmente a 2 o más sucesos. Así,

$$P(S_1/S_2 \cap S_3) = \frac{P(S_1 \cap (S_2 \cap S_3))}{P(S_2 \cap S_3)}$$

ó

$$P(S_1 \cap S_2/S_3) = \frac{P((S_1 \cap S_2) \cap S_3)}{P(S_3)}$$

etcétera.

ESTAD _ T2

2_ TEOREMAS de la PROBAB. CONDICIONADA. → enteramente + pract.

▶ Teorema del producto (Regla de la multiplicación).

Dados n sucesos, $S_1, S_2 \ldots S_n$, se verifica

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} S_i\right) = P(S_1) \cdot P(S_2/S_1) \cdot P(S_3/S_1 \cap S_2) \cdot \ldots \cdot P(S_n/S_1 \cap \ldots \cap S_{n-1})$$

Dem: Por inducción:

1_ n = 2

$$P(S_1 \cap S_2) = P(S_1) \cdot P(S_2/S_1)$$ → se deduce fácilmente de la def. de $P(S_2/S_1)$.

2_ Sp. n-1 cierto, lo demostramos para n.

n-1 cierto ⇒ $P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} S_i\right) = P(S_1)P(S_2/S_1) \ldots P(S_{n-1}/S_1 \cap \ldots \cap S_{n-2})$

la demostración para n se hace a partir de la def. de probab. condicionada.

$$P\left(S_n / \bigcap_{i=1}^{n-1} S_i\right) \overset{def}{=} \frac{P\left(S_n \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} S_i\right)\right)}{P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} S_i\right)} \overset{\text{tomando n-1 cierto}}{=}$$

$$= \frac{P(S_1 \cap \ldots \cap S_{n-1} \cap S_n)}{P(S_1)P(S_2/S_1) \ldots P(S_{n-1}/S_1 \cap \ldots \cap S_{n-2})}$$

y, despejando el numerador queda:

$$P(S_1 \cap \ldots \cap S_n) = P(S_1)P(S_2/S_1) \ldots P(S_{n-1}/S_1 \cap \ldots \cap S_{n-2}) P(S_n/S_1 \cap \ldots \cap S_{n-1})$$

cqd.

Para mí, los tmas de la probab. condicionada son:

1_ Tma. producto
2_ TPT
3_ Tma Bayes

} ¿ hay más?

MIRAR

ESTAD - T2

Teorema de la unión y de la intersección

$P(A \cup B / C) =$

$P(A \cap B / C) =$

(1) $P(A \cup B / C) \overset{\text{def}}{=} \dfrac{P((A \cup B) \cap C)}{P(C)} \overset{\text{p.distrib}}{=} \dfrac{P[(A \cap C) \cup (B \cap C)]}{P(C)} =$

$\overset{\text{unión}}{=} \dfrac{P(A \cap \cancel{B}C) + P(B \cap C) - P((A \cap C) \cap (B \cap C))}{P(C)} =$

$= \dfrac{P(A \cap C)}{P(C)} + \dfrac{P(B \cap C)}{P(C)} - \dfrac{P((A \cap B) \cap C)}{P(C)} =$

$= P(A/C) + P(B/C) - P(A \cap B / C)$.

(2) $P(A \cap B / C) = \dfrac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} = \dfrac{P((A \cap C) \cap (B \cap C))}{P(C)} = ?$

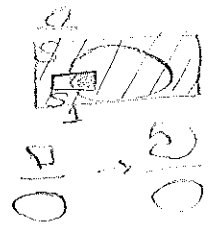
T1 — $P(\emptyset / S) = 0$

T2 — $P(S_1/S \cup \ldots \cup S_n/S) = \sum^{n} P(S_i/S)$ $\quad S_i/S \cap S_j/S = \emptyset$

T3 — $P(S_1/S \cup S_2/S) = P(S_1/S) + P(S_2/S) - P(S_1 \cap S_2 / S)$

T4 — $\forall\ S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow P(S_1/S) \leq P(S_2/S)$.

T5 — $P(S_1/S) \leq P(S) \leq 1$



¿? T6 — $P(S_1^c/S) = 1 - P(S_1/S)$

$P(S_1/S) = \dfrac{P(S_1 \cap S)}{P(S)}$

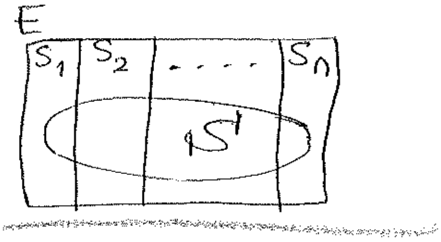
$P(S_1^c/S) = \dfrac{P(\bar{S}_1 \cap S)}{P(S)}$

$P(S_1/S) + P(S_1^c/S) = 1$ porque $(S_1 \cap S) \cup (S_1^c \cap S) = S$

3_ TEOREMA de la PROBABILIDAD TOTAL.

Sean $S_1 \dots S_n$, una partición del espacio muestral

$$\left.\begin{array}{l} S_i \cap S_j = \emptyset, \forall i \neq j \text{ (disjuntos 2 a 2)} \\ \bigcup_{i=1}^{n} S_i = E \end{array}\right\} \rightarrow$$



y sea S un suceso tq $S \cap S_i \neq \emptyset$

entonces se verifica $P(S) = \sum_{i=1}^{n} P(S/S_i) \cdot P(S_i)$

Demostración:

Al ser S_i disjuntos, se puede escribir S como la unión disjunta de $S_i \cap S$ y su probab será la suma

$$S = (S_1 \cap S) \cup (S_2 \cap S) \dots \cup (S_n \cap S) = \bigcup_{i=1}^{n} (S_i \cap S).$$

$$P(S) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (S_i \cap S) \right) = \sum_{i=1}^{n} P(S_i \cap S) = (*)$$

Por otro lado, de la def. de probab. condicionada se despeja la probab. conjunta

$$P(S/S_i) = \frac{P(S_i \cap S)}{P(S_i)} \Longrightarrow P(S_i \cap S) = P(S/S_i) P(S_i)$$

luego (*)

$$P(S) = \sum_{i=1}^{n} P(S/S_i) P(S_i) \quad \text{cqd}.$$

Nota: Este teorema puede extenderse de manera natural, de una sucesión finita de S_i a una sucesión numerable, ya que Ω tiene estructura de σ-álgebra.

ESTAD _ T2

4_ TEOREMA de BAYES.

El tma de Bayes permite calcular las probab. a posteriori a partir de las probab. a priori, donde

$P(S_i) \rightarrow$ probab. a priori (probab. de que ocurra S_i sin imponerle ninguna condición y sin ofrecer informac. adicional)

$P(S_i/S) \rightarrow$ probab. a posteriori (probab. de que ocurra S_i condic. a la ocurrencia de S, S es la información adicional).

$P(S/S_i) \rightarrow$ verosimilitudes (conectan prob. a priori y a posteriori)

Las hipótesis del tma de Bayes son las mismas que las del TPT, y además se suponen conocidas las verosimilit.

$S_1 \dots S_n$ partición de E $\begin{cases} S_i \cap S_j = \emptyset & \forall i \neq j \\ \bigcup_{i=1}^{n} S_i = E \end{cases}$
con $P(S_i) > 0$

S suceso tq $\quad S \cap S_i \neq \emptyset$
$\quad P(S/S_i)$ conocidas

Entonces se verifica
Para cada j, $P(S_j/S) = \dfrac{P(S/S_j)P(S_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(S/S_i)P(S_i)} = \dfrac{CF}{CP}$

Dem:

$P(S_j/S) = \dfrac{P(S_j \cap S)}{P(S)}$
desc.

$\rightarrow P(S_j \cap S) = P(S/S_j) \cdot P(S_j)$ conocidas

$\rightarrow P(S) \overset{TPT}{=} \sum_{i=1}^{n} P(S/S_i)P(S_i)$

luego $P(S_j/S) = \dfrac{P(S/S_j) \cdot P(S_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(S/S_i)P(S_i)}$ para cada S_j de la partición

Nota: Al igual que TPT se puede extender a una colección numerable

ESTAD _ T2

5_ INDEPENDENCIA de SUCESOS.

Definición: Dos sucesos son independientes cuando la probab. de la ocurrencia conjunta coincide con el producto de las probab. marginales.

A y B son indep. $\Leftrightarrow$ $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Relación con la probab. condicionada:
Dos sucesos son indep. cuando la probab. condicionada coincide con la probab. marginal.

A y B indep $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} P(A/B) = P(A) & \text{, siempre que } P(B)>0 \\ P(B/A) = P(B) & \text{, siempre que } P(A)>0 \end{cases}$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)\,\cancel{P(B)}}{\cancel{P(B)}} = P(A).$$

La extensión a tres sucesos es un poco más compleja, ya que ha de darse la independencia dos a dos y la conjunta, es decir:

A, B y C son mutuamente independientes $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} P(A \cap B) = P(A)P(B) \\ P(A \cap C) = P(A)P(C) \\ P(B \cap C) = P(B)P(C) \\ P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) \end{cases}$

En general, $\left.\begin{cases} S_1 \ldots S_n & \text{, cjto finito de sucesos} \\ S_1 \ldots S_i \ldots & \text{cjto numerable de sucesos} \end{cases}\right\}$ son mutuamente independientes si se verifica:

$P(S_1 \cap \ldots \cap S_n) = P(S_1) \cdot \ldots \cdot P(S_n)$

$\cancel{P(S_1 \cap \ldots \cap S_i \cap \ldots) = P(S_1) \cdot \ldots \cdot P(S_i) \ldots}$

(caso numerable, se verifica para subcjtos numerables)

De la definición de independencia se deduce la indep. entre los complementarios.

Sea A y B indep $\Rightarrow \begin{cases} A \text{ y } \overline{B} \text{ indep} & (1) \\ \overline{A} \text{ y } B \text{ indep} & (2) \\ \overline{A} \text{ y } \overline{B} \text{ indep} & (3) \end{cases}$

(1) A y $\overline{B}$ indep. si $P(A\cap\overline{B}) = P(A)P(\overline{B})$

$A\cap\overline{B} = A - B$

$A = (A-B)\cup(A\cap B)$ disjuntos $\Rightarrow P(A) = P(A-B) + P(A\cap B)$.

Al ser A y B indep, $P(A\cap B) = P(A)P(B)$

$$P(A) = P(A-B) + P(A)P(B)$$
$$P(A-B) = P(A)\,[1 - P(B)]$$
$$P(A\cap\overline{B}) = P(A)\cdot P(\overline{B}) \text{ , cqd}$$

(2) Análogo a (1).

(3) $\overline{A}$ y $\overline{B}$ son indep $\Leftrightarrow P(\overline{A}\cap\overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B})$

Por las leyes de Morgan,

$\overline{A}\cap\overline{B} = \overline{(A\cup B)}$

$$P(\overline{A}\cap\overline{B}) = P(\overline{A\cup B}) = 1 - P(A\cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - \underbrace{P(A\cap B)}_{\text{indep}}] =$$
$$\overset{A \text{ indep } B}{=} 1 - [P(A) + P(B) - P(A)P(B)] =$$
$$= 1 - [P(A)(1-P(B)) + P(B)] =$$
$$= 1 - P(A)(1-P(B)) - P(B) = 1 - P(B) - P(A)(1-P(B)) =$$
$$= [1-P(B)][1-P(A)] = P(\overline{B})P(\overline{A}).$$