Caza's gordo ①

ESTAD_T7 . Esperanza de una v.a. bidim. Propiedades.
Momentos de una v.a. bidim.
Propiedades de la varianza y la cov.
Desigualdad de Schwarz.
Coeficiente de correlación.
Función característica bidimensional.

---

1. ESPERANZA de una V.A. BIDIMENSIONAL

Dada (ξ, η) una v.a. bidimensional, y una función $g(\xi, \eta)$, que será una v.a. unidim.

Llamamos esperanza de $g(\xi,\eta)$ a:

$$E[g(\xi,\eta)] = \begin{cases} \sum_i \sum_j g(x_i, y_j) \cdot P(\xi = x_i, \eta = y_j) & \text{discr.} \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) f(x,y)\, dx\, dy & \text{cont.} \end{cases}$$

Como sucedía en el caso unidimensional, la esperanza es un nº y para que exista el valor esperado es necesario que la correspondiente serie/integral sea absolutamente convergente (converja en valor absoluto), esto es, que $E[|g(\xi,\eta)|] < +\infty$.

→ Si la función de la v.a. bidimensional es el producto, $g(\xi,\eta) = \xi \cdot \eta$

entonces

$$E[\xi \cdot \eta] = \begin{cases} \sum_i \sum_j x_i y_j P(\xi = x_i, \eta = y_j) = \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij} \\ \text{ó bien} \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\, f(x,y)\, dx\, dy . \end{cases}$$

ESTAD _ T7

2. PROPIEDADES

P1 _ La esperanza de la combinación lineal de dos variables aleatorias unidim. coincide con la c.l. de las esperanzas. (tienen que existir $E[\xi], E[\eta]$).

$$E[a\xi + b\eta] = aE[\xi] + bE[\eta].$$

Dem:

a) ξ, η discretas

$$E[a\xi+b\eta] = \sum_i \sum_j (ax_i+by_j)P(\xi = x_i, \eta = y_j) =$$

$$= a\sum_i \sum_j x_i\, p_{ij} + b\sum_i \sum_j y_j\, p_{ij} =$$

$$= a\sum_i x_i \sum_j p_{ij} + b\sum_j y_j \sum_i p_{ij} = a\sum_i x_i\, p_{i\cdot} + b\sum_j y_j\, p_{\cdot j} =$$

$$= aE[\xi] + bE[\eta].$$

b) ξ, η continuas

$$E[a\xi+b\eta] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (ax+by)f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} ax f(x,y)\,dx\,dy + \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} by f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= a\int_{-\infty}^{+\infty} x\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy\right]dx + b\int_{-\infty}^{+\infty} y\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\right]dy =$$

$$= a\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_1(x)\,dx + b\int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_2(y)\,dy =$$

$$= aE[\xi] + bE[\eta].$$

Esta propiedad se puede extender a la esperanza de ~~la~~ la c.l. de funciones:

$$E[g(\xi) + h(\eta)] = E[g(\xi)] + E[h(\eta)].$$

P2 → (Extensión de P1 a la suma finita de v.a.)

$$E[a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \dots + a_n\xi_n] = a_1E[\xi_1] + \dots + a_nE[\xi_n]$$

Dem: Extensión de P1.

P3 → La esperanza del producto de dos v.a. indep. es el producto de sus esperanzas marginales. (si existen)

$$\xi \text{ indep } \eta \Rightarrow E[\xi\cdot\eta] = E[\xi]\cdot E[\eta]$$

Dem:

a) ξ, η discretas:

$$E[\xi\cdot\eta] = \sum_i\sum_j x_i\cdot y_j\, p_{ij} \overset{p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}}{=} \sum_i\sum_j x_i\, y_j\, p_{i\cdot}\, p_{\cdot j} =$$

$$= \sum_i x_i\, p_{i\cdot} \sum_j y_j\, p_{\cdot j} = E[\xi]\cdot E[\eta].$$

b) ξ, η continuas:

$$E[\xi\cdot\eta] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\,y\,f(x,y)\,dx\,dy \overset{\text{indep}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\,y\,f_1(x)\,f_2(y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x\,f_1(x)\,dx \int_{-\infty}^{+\infty} y\,f_2(y)\,dy = E[\xi]\cdot E[\eta].$$

Esta propiedad se puede generalizar al caso de dos funciones:

$$\xi, \eta \text{ indep} \Rightarrow E[g(\xi)\cdot h(\eta)] = E[g(\xi)]\cdot E[h(\eta)]$$

Ambos resultados se pueden generalizar al caso de más de dos variables, obteniéndose P4 y P5.

P4 _ Si $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n$ son v.a. independientes y sus valores esperados $E[\xi_i]$ existen, entonces:

$$E[\xi_1 \cdot \dots \cdot \xi_n] = E[\xi_1] \cdot \dots \cdot E[\xi_n]$$

P5 _ Si $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n$ son v.a. independientes y existen $E[g_i(\xi_i)]$, $i = 1 \dots n$, entonces:

$$E[g_1(\xi_1) \cdot \dots \cdot g_n(\xi_n)] = E[g_1(\xi_1)] \cdot \dots \cdot E[g_n(\xi_n)]$$

3. MOMENTOS de una V.A. BIDIMENSIONAL.

De manera análoga al caso unidimensional, vamos a definir los momentos para las v.a. bidimensionales:

a) Momentos respecto al origen de orden r, s (si existe)

$$\alpha_{rs} = E[\xi^r \cdot \eta^s] = \begin{cases} \sum_i \sum_j x_i^r \cdot y_j^s \cdot P(\xi = x_i, \eta = y_j) & \text{, discr.} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^r \cdot y^s \cdot f(x,y)\, dx\, dy & \text{, cont.} \end{cases}$$

para $r, s = 0, 1, 2 \dots$

Los momentos respecto al origen más utilizados son:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{10} &= E[\xi^1 \cdot \eta^0] = E[\xi] \\ \alpha_{01} &= E[\xi^0 \cdot \eta^1] = E[\eta] \end{aligned}\right\} \text{ medias marginales}$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{20} &= E[\xi^2 \cdot \eta^0] = E[\xi^2] \\ \alpha_{02} &= E[\xi^0 \cdot \eta^2] = E[\eta^2] \\ \alpha_{11} &= E[\xi^1 \cdot \eta^1] = E[\xi \cdot \eta] \end{aligned}\right\} \text{ para cálculo de var. marginales y covarianza.}$$

b) Momentos respecto a las medias, μ_{rs} : (si existe)

Para $r,s = 0,1,2\ldots$

$$\mu_{rs} = E\left[(\xi - E[\xi])^r \cdot (\eta - E[\eta])^s\right] =$$
$$= E\left[(\xi-\alpha_{10})^r \cdot (\eta-\alpha_{01})^s\right] =$$
$$= \begin{cases} \sum_i \sum_j (x_i-\alpha_{10})^r \cdot (y_j-\alpha_{01})^s P(\xi = x_i, \eta = y_j) & \text{, discr.} \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\alpha_{10})^r \cdot (y-\alpha_{01})^s \, f(x,y)\,dx\,dy & \text{, cont} \end{cases}$$

Se observa que:

$\mu_{10} = \mu_{01} = 0$

Los momentos respecto a las medias más frecuentes son:

$$\left.\begin{array}{l} \mu_{20} = E\left[(\xi-\alpha_{10})^2(\eta-\alpha_{01})^0\right] = E\left[(\xi-\alpha_{10})^2\right] = V(\xi) \quad \sigma_\xi^2 \\ \mu_{02} = E\left[(\xi-\alpha_{10})^0 \cdot (\eta-\alpha_{01})^2\right] = E\left[(\xi-\alpha_{01})^2\right] = V(\eta) \quad \sigma_\eta^2 \end{array}\right\rangle \text{var. marg.}$$

$$\mu_{11} = E\left[(\xi-\alpha_{10})^1 \cdot (\eta-\alpha_{01})^1\right] = \operatorname{COV}(\xi,\eta) \leftarrow \text{covarianza } \sigma_{\xi\eta}$$

Importancia de la covarianza:

- Permite dar una medida de la dependencia lineal entre X e Y

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_{\xi\eta} > 0 \Rightarrow \text{relac. directa } (X\uparrow Y\uparrow) \\ \sigma_{\xi\eta} < 0 \Rightarrow \text{relac. inversa } (X\uparrow Y\downarrow) \end{array}\right\} \text{lineal}$$

$\sigma_{\xi\eta} = 0 \Rightarrow$ relac. lineal nula $\not\Rightarrow$ Indep.

↳ Tipo de relación lineal. Para medir el grado de relac. lineal es mejor una medida adimensional, el coef. de correlac. lineal (+ adelante)

4. PROPIEDADES de la VARIANZA y de la COVARIANZA.

P1 → La covarianza se puede expresar en función de los momentos respecto al origen.

$$\mathrm{COV}(\xi,\eta) = E[\xi\cdot\eta] - E[\xi]E[\eta]$$

$$\mu_{11} = \alpha_{11} - \alpha_{10}\alpha_{01}$$

Dem: Desarrollando la expresión de covarianza,

$$\mathrm{COV}(\xi,\eta) = E\left[(\xi-E(\xi))\cdot(\eta-E(\eta))\right] = E\left[(\xi-\alpha_{10})\cdot(\eta-\alpha_{01})\right] =$$

$$= E\left[\xi\eta - \xi\alpha_{01} - \alpha_{10}\eta + \alpha_{10}\alpha_{01}\right] =$$

$$= E[\xi\cdot\eta] - \alpha_{01}\underbrace{E[\xi]}_{\alpha_{10}} \cancel{- \alpha_{10}\cdot\underbrace{E[\eta]}_{\alpha_{01}}} \cancel{+ \alpha_{10}\alpha_{01}} =$$

$$= \alpha_{11} - \alpha_{10}\cdot\alpha_{01}$$

P2 → ξ y η indep ⇒ $\mathrm{COV}(\xi,\eta) = 0$.

Dem: Teniendo en cuenta la expresión anterior,

$\mathrm{COV}(\xi,\eta) = E[\xi\cdot\eta] - E[\xi]\cdot E[\eta]$. Al ser indep, $E(\xi\cdot\eta) = E[\xi]E[\eta]$, por lo que la dif es 0.

Nótese que la implicación es de un solo sentido. La recíproca ~~inversa~~ no se cumple, pues existen var. dependientes, cuya dependencia es distinta a la dependencia lineal, con covarianza 0. Así, no se puede utilizar la cov. como prueba de independencia.

$$\mathrm{COV}(\xi,\eta) = 0 \overset{\Leftarrow}{\not\Rightarrow} \xi \text{ indep } \eta$$

$$\mathrm{COV}(\xi,\eta) \neq 0 \Rightarrow \xi \text{ dep } \eta$$

ESTAD _ T7

P3 → Covarianza ante cambios de escala $\begin{cases} \text{no le afectan c. orig.} \\ \text{sí le afectan c. esc.} \end{cases}$

$$\text{cov}[a\xi, b\eta] = a \cdot b\, \text{cov}[\xi,\eta]$$

Dem: $\text{cov}[a\xi, b\eta] = E[(a\xi - E[a\xi])\cdot(b\eta - E[b\eta])] =$

$= E[(a\xi - aE[\xi])\cdot(b\eta - bE[\eta])] =$

$= E[a(\xi - E[\xi])\cdot b(\eta - E[\eta])] =$

$= a\cdot b\, E[(\xi - E[\xi])(\eta - E[\eta])] =$

$= a\cdot b\, \text{cov}[\xi,\eta]$.

¿Y cambio origen + cambio escala? No le afectan los cambios de origen, lo vemos:

$\text{cov}[a+b\xi, c+d\eta] = E[(a+b\xi - E(a+b\xi))\cdot(c+d\eta - E(c+d\eta))] =$

$= E[(\cancel{a} + b\xi - \cancel{a} - bE[\xi])\cdot(\cancel{c}+d\eta - \cancel{c} - dE[\eta])] =$

$=$ caso anterior, fuay.

$$\text{cov}[a+b\xi, c+d\eta] = b\cdot d\, \text{cov}[\xi,\eta].$$

P4 → $\text{cov}(\xi,\eta) = \text{cov}(\eta,\xi)$ PROP. CONMUTATIVA

Dem: Por definición, la covarianza es la esperanza de un producto de variables aleatorias, que, al ser conmutativo hace que la covarianza tb lo sea.

P5 → $\text{cov}(\xi,\xi) = V(\xi)$

Dem: $\text{cov}(\xi,\xi) = E[(\xi - E(\xi))\cdot(\xi - E(\xi))] =$

$= E[(\xi - E(\xi))^2] = V(\xi)$

P6 → la covarianza de una v.a. con una constante es 0.

$$\mathrm{cov}(\xi, a) = 0 \quad , \forall a \in \mathbb{R} .$$

<u>Dem</u>: $\mathrm{cov}(\xi, a) = \underbrace{E\left[(\xi - E(\xi)) \cdot \underbrace{(a - \underbrace{E(a)}_{=a})}_{=0}\right]}_{=0} = E(0) = 0.$

P7 → Propiedad distributiva.

$$\mathrm{Cov}(\xi+\eta, \gamma) = \mathrm{cov}(\gamma, \xi+\eta) = \mathrm{cov}(\xi, \gamma) + \mathrm{cov}(\eta, \gamma)$$

<u>Dem</u>: $\mathrm{cov}(\xi+\eta, \gamma) = E\left[(\xi+\eta - E(\xi+\eta)) \cdot (\gamma - E(\gamma))\right] =$

$= E\left[(\xi + \eta - E(\xi) - E(\eta)) \cdot (\gamma - E(\gamma))\right] =$

$= E\left[\left[(\xi - E(\xi)) + (\eta - E[\eta])\right] \cdot (\gamma - E[\gamma])\right] =$

= ~~xxx~~ deshaciendo el paréntesis, esperanza de la suma es la suma de las esperanzas . . .

$= \mathrm{cov}(\xi, \gamma) + \mathrm{cov}(\eta, \gamma)$.

P8 $\rightarrow$ $Var(\xi \pm \eta) = Var(\xi) + Var(\eta) \pm 2cov(\xi, \eta)$

y si ξ indep η, queda:
$Var(\xi \pm \eta) = Var(\xi) + Var(\eta)$.

Dem: $Var(\xi \pm \eta) = E\left[\left((\xi \pm \eta) - E(\xi \pm \eta)\right)^2\right] =$

$= E\left[\left[(\xi - E(\xi)) \pm (\eta - E(\eta))\right]^2\right] =$

$= E\left[(\xi - E(\xi))^2 + (\eta - E(\eta))^2 \pm 2(\xi - E(\xi)) \cdot (\eta - E(\eta))\right] =$

$= E\left[(\xi - E(\xi))^2\right] + E\left[(\eta - E(\eta))^2\right] \pm 2E\left[(\xi - E(\xi)) \cdot (\eta - E(\eta))\right] =$

$= Var(\xi) + Var(\eta) \pm 2cov(\xi, \eta)$.

ξ indep $\eta \overset{P2}{\Rightarrow} cov(\xi, \eta) = 0 \Rightarrow Var(\xi \pm \eta) = Var(\xi) + Var(\eta)$

P9 $\rightarrow$ Generalización al caso de n var. aleatorias:
Sean $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n$ v.a. unid. cualesquiera.

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(\xi_i) + 2\sum_{\substack{i=1 \\ i<j}}^{n} cov(\xi_i, \xi_j)$$

$\hookrightarrow$ sumo $\frac{n^2-n}{2}$ cov $\neq$.

Pregunta: ¿Da lo mismo $2\sum_{\substack{i=1 \\ i<j}}^{n}$ que $\sum_{i \neq j}$? Creo que sí

Para n var, tienes $n \times n$ var-cov — n var $\rightarrow$ $n \times n - n = (n-1) \times n$ covarianzas

donde $cov(X,Y) = cov(Y,X)$, es decir $\frac{(n-1) \times n}{2}$ cov $\neq \frac{n^2-n}{2}$

$\sum_{i=1}^{n} \rightarrow$ n sumandos

$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \rightarrow n^2$ sumandos $\Big\}\ n^2 - n$

$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \rightarrow n^2 - n$ (matriz sin la diag)

$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^{n} \rightarrow (n-1) + (n-2) + (n-3) + \dots (n-n) =$ (triang. sup)

$= n \cdot n - [1+2+\dots+n] = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n^2-n)}{2}$

$= n^2 - \frac{n^2-n}{2} = \frac{2n^2-n^2-n}{2} = \frac{n^2-n}{2}$

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \mu_{12} & \cdots & \mu_{1n} \\ \mu_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \mu_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mu_{n1} & & & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

OK

P10 → Cambio de escala a la varianza de la suma.

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(\xi_i) + 2 a_i a_j \sum_{\substack{i=1 \\ i<j}}^{n} cov(\xi_i ; \xi_j)$$

Dem: de P9 y P10 paso, pero:

$$Var(a\xi_1 + b\xi_2) \overset{P8}{=} Var(a\xi_1) + Var(b\xi_2) + 2cov(a\xi_1, b\xi_2) =$$

$$= a^2 Var(\xi_1) + b^2 Var(\xi_2) + 2ab\, cov(\xi_1, \xi_2).$$

5. DESIGUALDAD de SCHWARZ.

Dada una distrib. bidimensional (ξ, η) en la que existen los momentos de orden 2 α_{20} y α_{02}, entonces:

$$\left(E[\xi \cdot \eta]\right)^2 \leq E[\xi^2] \cdot E[\eta^2]$$

$$\alpha_{11}^2 \leq \alpha_{20} \cdot \alpha_{02}$$

Dem: Vamos a utilizar la esperanza del cuadrado de una c.l. de las v.a. centradas (al ser $E[\;^2] \Rightarrow$ será ≥ 0 siempre).

$$E\left[\left(a(\xi - E(\xi)) + b(\eta - E(\eta))\right)^2\right] = E\left[a^2(\xi - E[\xi])^2 + b^2(\eta - E[\eta])^2 + \right.$$

$$\left. + 2ab(\xi - E[\xi])(\eta - E[\eta])\right] = a^2 E\left[(\xi - E[\xi])^2\right] + b^2 E\left[(\eta - E[\eta])^2\right] +$$

$$+ 2ab E\left[(\xi - E[\xi]) \cdot (\eta - E[\eta])\right] = a^2 \cdot V(\xi) + b^2 \cdot V(\eta) + 2ab\, cov(\xi, \eta)$$

que, en forma matricial, resulta:

$$= (a, b) \begin{pmatrix} V(\xi) & cov(\xi,\eta) \\ cov(\xi,\eta) & V(\eta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Al ser la expresión inicial ≥ 0 siempre, la forma cuadrática asociada será no negativa, por lo que su determinante será ≥ 0 siempre.

Es decir, $\begin{vmatrix} V(\xi) & cov(\xi,\eta) \\ cov(\xi,\eta) & V(\eta) \end{vmatrix} \geq 0 \iff$

$$V(\xi)\cdot V(\eta) - (cov(\xi,\eta))^2 \geq 0 \iff$$

$$V(\xi)\cdot V(\eta) \geq (cov(\xi,\eta))^2$$

La desig. de Schwart es un caso particular de este resultado, en el que $E[\xi] = E[\eta] = 0$. ¿¿VALE??

Relacionando los momentos centrados con los no centrados,

$$\mu_{20}\cdot\mu_{02} \geq \mu_{11}^2$$

$$[\alpha_{20}-(\alpha_{10})^2]\cdot[\alpha_{02}-(\alpha_{01})^2] \geq (\alpha_{11}-\alpha_{10}\cdot\alpha_{01})^2$$

$$\alpha_{20}\cdot\alpha_{02}-\alpha_{20}\,\alpha_{01}^2-\alpha_{10}^2\cdot\alpha_{02}+\cancel{\alpha_{10}^2\alpha_{01}^2} \geq \alpha_{11}^2+\cancel{\alpha_{10}^2\alpha_{01}^2}-2\alpha_{11}\alpha_{10}\alpha_{01}$$

6. COEFICIENTE de CORRELACIÓN

La covarianza informa sobre la relación lineal existente entre dos var. aleatorias.

Tipo → signo covarianza

Grado → ¡problema!

Las unidades de la covarianza son el producto de las ~~dos~~ unidades de las dos v.a., por lo que resulta difícil determinar el grado de la relación lineal, siendo necesario estandarizar cada una de estas medidas, dividiendo por las desviaciones típicas.

La nueva medida, el coeficiente de correlación lineal, mide el tipo y el grado de la relación lineal entre las dos v.a.

<u>Def</u>: Sean ξ, η dos v.a. con varianzas finitas y $\neq 0$,

$$\rho_{\xi\eta} = \frac{cov(\xi,\eta)}{\sigma_\xi \sigma_\eta} = \frac{\sigma_{\xi\eta}}{\sigma_\xi \sigma_\eta} = \frac{cov(\xi,\eta)}{\sqrt{Var(\xi)Var(\eta)}} =$$

$$= \frac{E[(\xi - E(\xi))\cdot(\eta - E(\eta))]}{\sigma_\xi \sigma_\eta \ \forall \cdots \text{des}} = E\left[\left(\frac{\xi - E(\xi)}{\sigma_\xi}\right)\cdot\left(\frac{\eta - E(\eta)}{\sigma_\eta}\right)\right]$$

es decir, ρ es el valor esperado del producto de los valores tipificados o estandarizados de ξ → covarianza de las variables estandarizadas

ESTAD_ T7

P1 → $\boxed{\xi \text{ indep } \eta \Rightarrow \rho_{\xi\eta} = 0}$

Dem: Por P2 de la cov sale directamente.

ξ indep $\eta \Rightarrow cov(\xi,\eta) = 0$.

$$\Rightarrow \rho = \frac{cov(\xi,\eta)}{\sigma_\xi \sigma_\eta} = \frac{0}{\sigma_\xi \sigma_\eta} = 0$$

Esta propiedad puede generalizarse al caso de n var, pues si son indep. ~~2 a 2~~ tb lo serán 2 a 2.

P2 → $\boxed{-1 \leq \rho_{\xi\eta} \leq 1}$ (siempre que $V(\xi)>0, V(\eta)>0$)

Esta propiedad se deduce de la desigualdad de Schwarz,
No exactamente, se deduce de la desig. anterior

$E[(a(\xi - E[\xi]$

Otra forma: $\rho =$ Co[var estandar]

|var estand| $\leq 1 \Rightarrow |\rho| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \rho \leq 1$

7 _ FUNCIÓN CARACTERÍSTICA BIDIMENSIONAL

Sea (ξ, η) v.a. bidimensional, definimos, $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\varphi(t_1, t_2) = E[e^{it_1\xi + it_2\eta}] = \begin{cases} \sum_i \sum_j e^{itx} e^{ity} p_{ij} \\ \iint e^{itx} e^{ity} f(x,y)\,dx\,dy \end{cases}$$

Propiedades:

P1 _ $\varphi(t_1, t_2)$ existe siempre

$e^{it_1\xi + it_2\eta} = \cos(t_1\xi + t_2\eta) + i\,\text{sen}(t_1\xi + t_2\eta)$, son func. trigonométricas acotadas $\Longrightarrow$ serie / integral convergente

P2 _ $\varphi(0,0) = 1$

$E[e^{i\cdot 0\cdot \xi + i \cdot 0 \cdot \eta}] = E[e^0] = E[1] = 1.$

P3 _ $|\varphi(t_1, t_2)| \leq 1$

$|e^{it_1\xi + it_2\xi}| = |\cos(t_1\xi + t_2\eta) + i\,\text{sen}(t_1\xi + t_2\eta)| =$

$= \sqrt{\cos^2(\ ) + \text{sen}^2(\ )} = 1.$

P4 _ Si existen α_{rs}, entonces

$$\alpha_{rs} = \frac{\left.\dfrac{\partial \varphi(t_1, t_2)}{\partial t_1^r \, \partial t_2^s}\right|_{\substack{t_1 = 0 \\ t_2 = 0}}}{i^{r+s}}$$

$$\alpha_{10} = \frac{\left.\dfrac{\partial \varphi}{\partial t_1}\right|_{t_1 = t_2 = 0}}{i} \quad ; \quad \alpha_{01} = \frac{\left.\dfrac{\partial \varphi}{\partial t_2}\right|_{t_1 = t_2 = 0}}{i}$$

$$\alpha_{20} = \frac{\left.\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial t_1^2}\right|_{t_1 = t_2 = 0}}{i^2} \quad ; \quad \alpha_{02} = \frac{\left.\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right|_{t_1 = t_2 = 0}}{i^2}$$

$$\alpha_{11} = \frac{\left.\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial t_1 \partial t_2}\right|_{t_1 = t_2 = 0}}{i^2}$$

P5 _ $\varphi(t_1, t_2)$ es única

P6 – Sean (ξ,η) v.a. bidimensional y $\gamma = \xi+\eta$

$$\varphi_\gamma(t) = \varphi_{\xi\eta}(t_1,t_2)$$

si además ξ indep η, entonces

$$\varphi_\gamma(t) = \varphi_{\xi}(t_1)\,\varphi_{\eta}(t_2)$$

Funciones características marginales:

$$\varphi_1(t_1) = \varphi(t_1,0) = E[e^{it_1\xi + i\cdot 0\cdot\eta}] = E[e^{it_1\xi}]$$

$$\varphi_2(t_2) = \varphi(0,t_2) = E[e^{i\cdot 0\cdot\xi + it_2\eta}] = E[e^{it_2\eta}]$$

si ξ,η son estad. independientes:

$$\varphi(t_1,t_2) = \varphi_1(t_1)\cdot\varphi_2(t_2)$$

Dem: $\varphi(t_1,t_2) = E[e^{it_1\xi+it_2\eta}] = E[e^{it_1\xi}e^{it_2\eta}] \overset{\text{indep}}{=}$

$$= E[e^{it_1\xi}]\,E[e^{it_2\eta}] = \varphi_1(t_1)\cdot\varphi_2(t_2).$$

Función característica n-dimensional

$$\varphi(t_1\cdots t_n) = E[e^{it_1\xi_1+\dots+it_n\xi_n}]$$