

Capítulo 7

PROCESOS ARIMA ESTACIONALES

Evgeny Evgenievich Slutsky (1880- 1948)

Estadístico ruso. Fue expulsado de la Universidad de Kiev en 1902 por su actividades políticas. Estudió ciencias políticas y trabajó en la administración soviética. Interesado por la estadística demostró en 1927 que la aplicación de medias móviles a datos independientes genera secuencias periódicas. Introdujo los procesos de media móvil para explicar ciclos económicos y en 1938 pasó a trabajar en el Instituto de Matemáticas de la Academia de Ciencias de la URSS.

7.1 El concepto de estacionalidad

Un tipo especial de falta de estacionaridad en muchas series es la *estacionalidad*. Diremos que una serie es estacional cuando su valor esperado no es constante pero varía con una pauta cíclica. Por ejemplo, una serie mensual tiene estacionalidad si sus valores esperados en distintos meses son distintos, de manera que la serie toma valores similares en el mes de enero de distintos años, y lo mismo ocurre en los meses de febrero, etc, siendo además diferente el comportamiento en los distintos meses. Por ejemplo, la serie de contenido de ozono en la atmósfera de la figura 7.1 presenta una pauta estacional muy fuerte. Además de una tendencia global decreciente, cada año la serie sigue un comportamiento cíclico que se repite los distintos años de la muestra.

Como definimos en el capítulo 2 (sección 2.4) llamaremos periodo estacional, s , al número de observaciones que forman el ciclo estacional. Por ejemplo, $s = 12$ para series mensuales, $s = 4$ para series trimestrales, etc. Supondremos que el valor de s es fijo en la serie. Esto puede ser no ser exactamente cierto: por ejemplo, si tenemos datos diarios y el periodo estacional es la longitud del mes s será aproximadamente 30, pero varía de unos meses a otros. También puede existir más de un tipo de estacionalidad. Por ejemplo, con datos diarios podemos tener una estacionalidad semanal, con $s = 7$, otra mensual, con $s = 30$ y otra anual, con $s = 365$. Supondremos inicialmente que existe sólo un tipo de estacionalidad y al final del capítulo veremos como extender los métodos presentados cuando existen varios periodos estacionales.

El modelo más simple para la estacionalidad es el estudiado en el capítulo 2 donde se supone que la estacionalidad es un efecto constante que se suma a los valores de la serie. Por ejemplo, supongamos una serie que, salvo por el efecto estacional, es estacionaria. Un modelo simple para esta serie es escribirla como en el capítulo 2 como suma de un componente estacional $S_t^{(s)}$, y un proceso estacionario, n_t . Entonces la serie será:

$$z_t = S_t^{(s)} + n_t \quad (7.1)$$

Esta serie (7.1) no es estacionaria, ya que si tomamos esperanzas

$$E(z_t) = E(S_t^{(s)}) + \mu$$

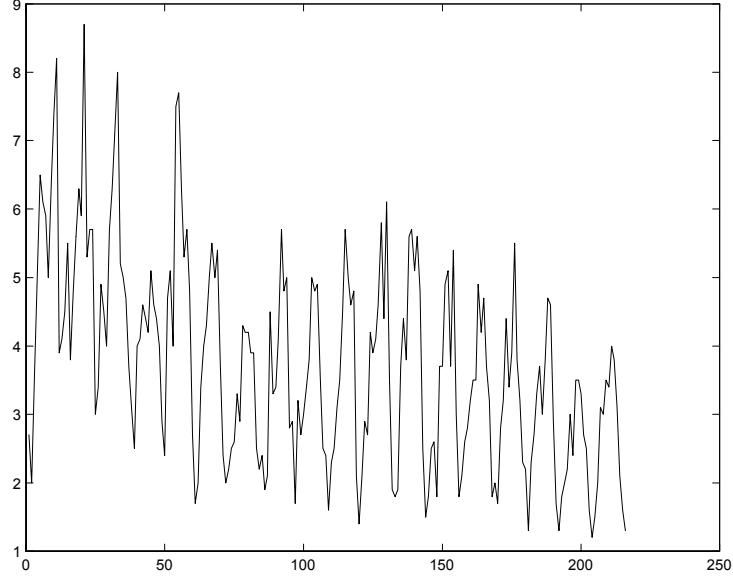


Figura 7.1: Serie de contenido de Ozono en la atmósfera entre Enero de 1955 y Diciembre de 1972

donde μ es la media del proceso n_t . Como el componente estacional toma valores medios distintos en meses diferentes, la serie no será estacionaria al no tener media constante. Sin embargo, vamos a comprobar que una serie con esta estructura se convierte en estacionaria al tomar diferencias estacionales, que son las diferencias entre observaciones separadas por el periodo estacional s . Definimos la diferencia estacional como:

$$\nabla_s = 1 - B^s$$

(nótese que $\nabla_s \neq \nabla^s = (1 - B)^s$). Si aplicamos este operador ∇_s en (7.1), tenemos:

$$\nabla_s z_t = \nabla_s S_t^{(s)} + \nabla_s n_t$$

Vamos a considerar dos situaciones posibles para el componente estacional.

La primera es que $S_t^{(s)}$ sea determinista, es decir, una función constante para el mismo mes en distintos años o una función que varía de forma estable alrededor de un valor constante. En el primer caso tenemos:

$$S_t^{(s)} = S_{t+ks}^{(s)} \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7.2)$$

y $\nabla_s S_t^{(s)} = S_t^{(s)} - S_{t-s}^{(s)} = 0$. Por ejemplo, los coeficientes estacionales pueden seguir una función sinusoidal, como ocurre con series climatológicas por la rotación de la tierra alrededor del sol. También pueden seguir una pauta más compleja. Por ejemplo, en una serie de producción todos los meses pueden tener el mismo valor esperado menos el mes de Agosto, donde la fábrica se cierra por vacaciones. La condición (7.2) supone que al tomar diferencias estacionales:

$$\nabla_s z_t = \nabla_s n_t$$

y como al diferenciar un proceso estacionario, $\nabla_s n_t$, se obtiene otro proceso estacionario, la diferencia ∇_s transforma la serie no estacionaria z_t dada por (7.1) en estacionaria. Observemos que en este caso el modelo para $\nabla_s z_t$ tiene un coeficiente de media móvil $(1 - \Theta B^{12})$ con $\Theta = 1$. Obtenemos la misma situación si los coeficientes varían alrededor de un valor medio con:

$$S_t^{(s)} = \mu^{(s)} + v_t$$

donde $\mu^{(s)}$ es una constante que depende del mes y v_t es un proceso estacionario. En efecto, en este caso si sustituimos en (7.1)

$$z_t = \mu^{(s)} + n'_t$$

donde el nuevo proceso estacionario n'_t es la suma de los procesos n_t y v_t . Entonces, al tomar diferencias de orden s como $\nabla_s S_t^{(s)} = \nabla_s v_t$ será estacionaria, se obtiene de nuevo un proceso estacionario, y el modelo para $\nabla_s z_t$ tiene un coeficiente de media móvil $(1 - \Theta B^{12})$ con $\Theta = 1$.

En el segundo caso la estacionaridad varía a lo largo del tiempo de forma no estacionaria. Diremos entonces que la estacionalidad no es contante sino evolutiva o estocástica. Si suponemos el caso más simple de que siga un paseo aleatorio:

$$S_t^{(s)} = S_{t-s}^{(s)} + v_t$$

donde v_t es un proceso estacionario. Sustituyendo esta expresión en (7.1) y tomando diferencias estacionales se obtiene :

$$\nabla_s z_t = v_t + \nabla_s n_t$$

y de nuevo obtendremos un proceso estacionario pero ahora el modelo tendrá un coeficiente de media móvil invertible $(1 - \Theta B^{12})$, con $\Theta < 1$.

En conclusión, en condiciones bastante generales para la estructura estacional, y tanto para procesos con estacionalidad determinista como estocástica, el operador ∇_s convierte un proceso estacional en estacionario.

7.2 El modelo ARIMA estacional

Cuando exista dependencia estacional podemos generalizar el modelo ARIMA para incorporar además de la dependencia *regular*, que es la asociada a los intervalos naturales de medida de la serie, la dependencia *estacional*, que es la asociada a observaciones separadas por s periodos. La dependencia regular se refiere a la dependencia entre observaciones consecutivas, mientras que la estacional a las separadas por s periodos. Vamos a estudiar como modelar estos dos tipos de dependencias.

La primera solución es incorporar la dependencia estacional a la regular ya estudiada, incorporando a los operadores AR o MA términos del tipo B^s para representar la dependencia entre observaciones separadas por s periodos. El inconveniente de esta formulación es que llevaría a polinomios muy largos en la parte AR y MA. Por ejemplo, con datos mensuales, $s = 12$, si un mes esta relacionado con el mismo mes en tres años anteriores necesitamos un AR o MA de orden 36 para representar esta dependencia. Un enfoque más simple, y que funciona bien en la práctica, es modelar de forma separada la dependencia regular y la estacional, y construir el modelo incorporando ambas. Se obtiene así el modelo ARIMA estacional multiplicativo que tiene la forma :

$$\Phi_P(B^s) \phi_p(B) \nabla_s^D \nabla^d z_t = \theta_q(B) \Theta_Q(B^s) a_t \quad (7.3)$$

donde $\Phi_P(B^s) = (1 - \Phi_1 B^s - \dots - \Phi_P B^{sP})$ es el operador AR estacional de orden P , $\phi_p = (1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p)$ es el operador AR regular de orden p , $\nabla_s^D = (1 - B^s)^D$ representa las diferencias estacionales que aplicamos, donde D toma en la práctica los valores 0 o 1, $\nabla^d = (1 - B)^d$ son las diferencias regulares, donde en la práctica $d = (0, 1, 2)$, $\Theta_Q(B^s) = (1 - \Theta_1 B^s - \dots - \Theta_Q B^{sQ})$ es el operador media móvil estacional de orden Q , $\theta_q(B) = (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q)$ es el operador media móvil regular de orden q y a_t es un proceso de ruido blanco. Esta clase de modelos, introducidos por Box y Jenkins (1976), representan bien muchas series estacionales que encontramos en la práctica y se escriben de forma simplificada como el modelo ARIMA $(P, D, Q)_s \times (p, d, q)$.

Para justificar estos modelos y explicar las hipótesis en que se basan, consideremos una serie estacional z_t con período s . Como ejemplo, supondremos que los datos son mensuales, que el primer dato es de Enero y que disponemos de h años completos con un total de $T = 12h$ observaciones. Para modelar la dependencia estacional de esta serie mensual podemos dividir la serie total en 12 series anuales, cada una de ellas con h datos, el número de años disponibles. Llamemos a estas series anuales $y_\tau^{(j)}$, donde $j = 1, \dots, 12$ indica el mes que define la serie y el índice temporal de la serie, τ , es el año que varía entre $\tau = 1, \dots, h$. En efecto, estas series se refieren siempre al mismo mes, j , y relacionan el valor de ese mes en una año con ese mes en años anteriores. La forma de obtener estas series anuales a partir de la serie original mensual, z_t , es mediante la relación :

$$y_{\tau}^{(j)} = z_{j+12(\tau-1)} \quad (\tau = 1, \dots, h) \quad (7.4)$$

Por ejemplo, la serie anual del mes de enero, $j = 1$, comienza, $\tau = 1$, con el primer dato observado z_t y continua, $\tau = 2$, tomando el dato 12 meses después, es decir z_{13} , que corresponderá al dato de Enero en el segundo año. Las observaciones de los restantes eneros corresponden a los datos originales z_{25}, z_{37}, \dots moviendo 12 posiciones de la serie original. En general, la serie anual del mes j se obtiene tomando los datos de la serie z_t para $t = j + 12(\tau - 1)$ tomando $\tau = 1, \dots, h$.

Cada una de estas 12 series anuales suponemos que sigue un modelo ARIMA:

$$\begin{aligned} \Phi^{(j)}(B) (1 - B)^D y_{\tau}^{(j)} &= c_j + \Theta^{(j)}(B) u_{\tau}^{(j)}; \\ \tau &= 1, \dots, h \end{aligned} \quad (7.5)$$

donde $\Phi^{(j)}(B) = (1 - \Phi_1^{(j)} B - \dots - \Phi_P^{(j)} B^P)$ y $\Theta^{(j)}(B) = (1 - \Theta_1^{(j)} B - \dots - \Theta_Q^{(j)} B^Q)$. Se comprueba en la práctica que es frecuente que todos los modelos para estas series sean idénticos, con los mismos valores de los parámetros. Supongamos que efectivamente los 12 modelos son idénticos. Entonces, forzosamente este modelo común debe ser no estacionario con $D = 1$. En efecto, si $D = 0$ las series de cada mes oscilarían alrededor de un valor $c_j \neq 0$ y para que el modelo sea común $c_j = c$. Ahora bien, en un modelo estacionario la constante es proporcional a la media del proceso y como las medias de los meses son distintas por hipótesis, ya que estamos suponiendo que la serie es estacional, las constantes c_j deberían ser distintas. Por tanto, no podemos tener $D = 0$ y el mismo modelo. Sin embargo, si el modelo común tiene $D = 1$, al tomar esta diferencia en cada serie las medias de los meses desaparecen, y las diferencias entre el mismo mes de un año y del anterior seguirán un proceso estacionario de media cero.

Si las 12 series anuales pueden escribirse conjuntamente bajo un modelo común, utilizando que, según (7.4):

$$B y_{\tau}^{(j)} = y_{\tau-1}^{(j)} = z_{j-12(\tau-2)} = z_{j-12+12(\tau-1)} = B^{12} z_{j+12(\tau-1)}$$

es decir, aplicar B a las series anuales $y_{\tau}^{(j)}$, produce el mismo mes del año anterior y esto equivale a aplicar el operador B^{12} en la serie original z_t . Entonces, el modelo común de las series anuales puede escribirse en términos de los datos originales como:

$$(1 - \Phi_1 B^{12} - \dots - \Phi_P B^{12P}) (1 - B^{12}) z_t = (1 - \Theta_1 B^{12} - \dots - \Theta_Q B^{12Q}) \alpha_t \quad (7.6)$$

donde $t = 1, \dots, n$ y ahora el modelo ARIMA se formula en B^{12} (B^s en general para datos de periodo s) ya que estamos relacionando meses de distintos años. Como el modelo es el mismo para todos los meses podemos aplicar este modelo a la serie original z_t y obtener la serie de residuos α_t . Esta serie de residuos del modelo estacional no será normalmente un proceso de ruido blanco, ya que no hemos tenido en cuenta la dependencia entre un dato y los inmediatamente anteriores. Suponiendo que α_t sigue el proceso ARIMA regular:

$$\phi_p(B) \nabla^d \alpha_t = \theta_q(B) a_t \quad (7.7)$$

sustituyendo este *modelo regular* (7.7) en el *modelo estacional* (7.6) se obtiene el *modelo completo* para el proceso observado, que es el dado en (7.3).

En resumen el modelo ARIMA estacional multiplicativo se basa en la hipótesis central de que *la relación de dependencia estacional* (7.6) *es la misma para todos los períodos*. La experiencia indica que esta situación, aunque muy frecuente, no se cumple siempre, y conviene, siempre que se disponga de datos suficientes, contrastarla construyendo los modelos (7.6) y viendo si presentan la misma estructura.

Ejemplo 7.1

Estudiemos la constancia de la estructura de autocorrelación entre las observaciones de los distintos meses para los datos de las lluvias en Santiago que presentamos en el capítulo 1 y que hemos utilizado en el capítulo 2. La figura 7.2 muestra los dos primeros coeficientes de autocorrelación calculados siempre en el mismo mes para distintos años. Es decir formamos 12 series anuales cada una correspondiente a un mes del año y calculamos en cada serie la correlación entre un mes y el mismo mes del año anterior, que representamos

como r_1 , y entre un mes y y el mismo mes hace dos años, que es r_2 . Estos coeficientes se han representado para cada uno de los doce meses como una línea continua en la figura 7.2. Los valores menores de estos coeficientes aparecen en Junio, para r_1 y en Julio para r_2 , mientras que los más altos son para Septiembre, para r_1 y r_2 . La figura sugiere que es posible que haya más semejanza entre los meses de otoño de distintos años que entre los meses de verano, pero como la variabilidad al estimar estos coeficientes es alta, no podemos concluir que son claramente distintos, ya que necesitaríamos series más largas. Por ejemplo, la desviación típica aproximada de estimar cada coeficiente es $1/\sqrt{T}$ y en este caso $1/\sqrt{10} = .31$, por lo que no podemos concluir que los coeficientes son significativamente distintos (en el apéndice 7.1 se indica un posible test para estos coeficientes).

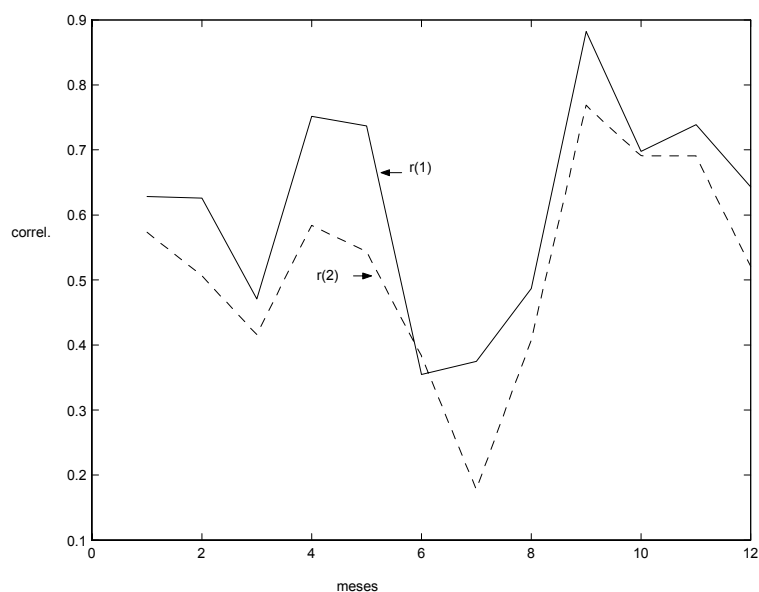


Figura 7.2: Representación de los dos primeros coeficientes de autocorrelación entre meses de distintos años para los datos de las lluvias de Santiago.

Ejemplo 7.2

La figura 7.3 presenta los dos primeros coeficientes de autocorrelación calculados con las 12 series anuales de cada mes del año con los datos de la serie de consumo de gasolina en España. Como ahora la serie es muy larga, 55 años de datos, los coeficientes varían muy poco de unos meses a otros. Es de destacar que en gráfico de r_1 se observa que los meses de Marzo y Abril son los que presentan menor correlación, y en el de r_2 el valor mínimo de la correlación corresponde al mes de marzo. Este efecto puede ser debido al efecto de Semana Santa. Como esta festividad puede caer en uno de esos meses o entre los dos, y cuando ocurre en un mes aumenta el consumo de gasolina del mes por los desplazamientos de vacaciones, al no ser este efecto constante todos los años disminuye algo la estructura de dependencia entre estos meses. Podemos concluir que, aparte de este efecto, las correlaciones del resto de los meses son similares.

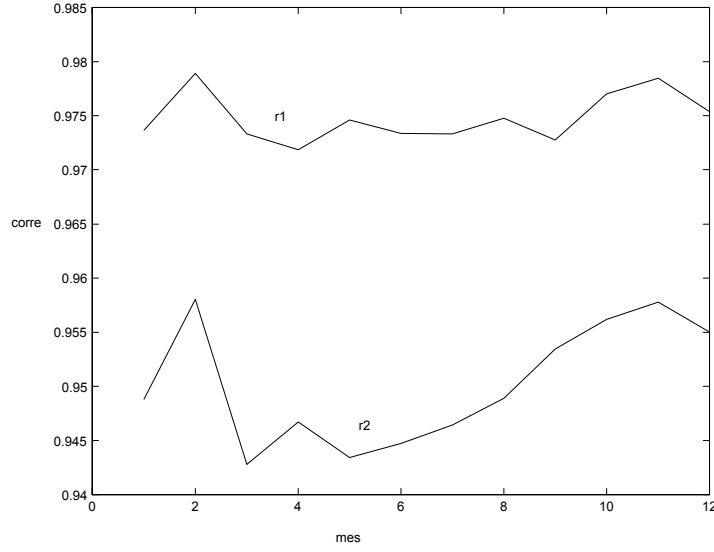


Figura 7.3: Coeficientes de autocorrelación de orden uno y dos para las series de los meses con los datos de consumo de gasolina 1945- 1999.

7.3 Función de autocorrelación simple de un proceso estacional

Sea $w_t = \nabla^d \nabla_s^D z_t$ el proceso estacionario obtenido al diferenciar la serie d veces de forma regular (con $\nabla = 1 - B$) y D veces de forma estacional (con $\nabla_s = 1 - B^s$). Entonces, ω_t sigue el proceso ARMA estacional multiplicativo

$$\Phi_P(B^s) \phi_p(B) \omega_t = \theta_q(B) \Theta_Q(B^s) a_t \quad (7.8)$$

La función de autocorrelación simple de este proceso es una mezcla de las funciones de autocorrelación correspondientes a las partes regular y estacional. Puede demostrarse (Peña, 1984) que si llamamos r_i a los coeficientes de autocorrelación del proceso ARMA (p, q) «regular»:

$$\phi_p(B) x_t = \theta_q(B) u_t \quad (7.9)$$

R_{si} a los coeficientes de autocorrelación en los retardos $s, 2s, 3s, \dots$ del proceso ARMA (P, Q) estacional:

$$\Phi_P(B^s) y_t = \Theta_Q(B^s) v_t \quad (7.10)$$

y ρ_j a los coeficientes de autocorrelación del proceso completo (7.8), se verifica:

$$\rho_j = \frac{r_j + \sum_{i=1}^{\infty} R_{si} (r_{si+j} + r_{si-j})}{1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} r_{si} R_{si}} \quad (7.11)$$

Si suponemos $s = 12$ y admitimos que $r_j \simeq 0$ para retardos altos (por ejemplo, para $j \geq 8$), el denominador de (7.11) es la unidad y la función de autocorrelación será:

1. En los retardos bajos ($j = 1, \dots, 6$) se observará únicamente la parte regular, es decir:

$$\rho_j \simeq r_j \quad j = 1, \dots, 6$$

2. En los retardos estacionales se observará básicamente la parte estacional, es decir:

$$\rho_{12i} \simeq R_{12i} (r_{24i} + r_0) + R_{24i} (r_{36i} + r_{12i})$$

y suponiendo que $r_{12i} \simeq 0$ para $i \geq 1$, con $r_0 = 1$ esta expresión se reduce a:

$$\rho_{12i} \simeq R_{12i} \quad (i = 1, 2, \dots)$$

3. Alrededor de los retardos estacionales observaremos la «interacción» entre la parte regular y estacional que se manifestará en la repetición a ambos lados de cada retardo estacional de la función de autocorrelación simple de la parte regular. Concretamente, si la parte regular es media móvil de orden q habrá a ambos lados de cada retardo estacional no nulo q coeficientes distintos de cero. Si la parte regular es autorregresiva a ambos lados de los retardos estacionales observaremos el decrecimiento impuesto por esta estructura AR.

La figura 7.4 presenta algunos ejemplos, combinando partes AR(1) y MA(1) estacionales con distintas estructuras regulares. Si combinamos estas estructuras con un MA(1) regular observaremos interacción sólo en los retardos contiguos al estacional, mientras que si lo combinamos con un AR regular tendremos una estructura larga de interacción donde se repite a ambos lados de los retardos estacionales la estructura regular. En la práctica lo recomendable es fijarse en los retardos iniciales 1,2,3,4... para identificar la estructura regular y en los retardos estacionales, $s, 2s, 3s, \dots$ para identificar la estructura estacional. La interacción alrededor de los coeficientes estacionales puede entonces utilizarse como confirmación de la identificación realizada.

Ejemplo 7.3

La figura 7.5 presenta la fas de la serie de lluvias. Se observa que en la parte regular hay estructura AR decreciente, mientras que en los retardos 12, 24, 36 se observa un decrecimiento lento de los coeficientes indicando un proceso no estacionario que es necesario diferenciar. La figura 7.6 presenta la serie diferenciada de forma estacional. En los retardos 1,2,3, se observa ahora una estructura débil que puede ser un AR(1) o MA(1) con coeficiente pequeño y en la parte estacional hay coeficientes significativos en 12, 24 y 36 indicando estructura AR que debe ser al menos de orden 2 debido al cambio de signos. Los coeficientes altos que aparecen alrededor de los retardos estacionales confirman que existe estructura regular, en particular los altos coeficientes en los retardos 11 y 23 son señal clara de interacción entre la parte regular y la estacional.

Ejemplo 7.4

La figura 7.7 presenta la fas de la primera diferencia regular de la serie de ozono. Como hemos visto en la figura 7.1, la serie original tiene una tendencia decreciente, por lo que es necesario diferenciarla para obtener una serie sin tendecia. Este gráfico muestra claramente que existe una fuerte dependencia estacional, con coeficientes altos en 12, 24, 36,... que se amortiguan lentamente con el retardo, sugiriendo la necesidad de una diferencia estacional también.

La figura 7.8 presenta la fas de las series con una diferencia regular y otra estacional. En los retardos inicales correspondientes a la parte regular se observa o bien un MA(2) o bien un AR de al menos orden 2. En los retardos estacionales es significativo el coeficiente en 12 y esta en el limite el de 24, sugiriendo también una estructura similar a la regular.

Ejemplo 7.5

Escribir la función de autocorrelación simple teórica de la serie ω_t obtenida al aplicar una diferencia regular y otra de periodo siete a la serie diaria, z_t , con estacionalidad semanal que sigue el modelo:

$$\omega_t = \nabla \nabla_7 z_t = (1 - 0.5B) (1 - 0.8B^7) a_t$$

La componente regular es MA(1) y producirá un único coeficiente de autocorrelación distinto de cero. Los coeficientes generados por la parte regular son:

$$r_t = \frac{-0.5}{1 + 0.5^2} = -0.4; \quad r_j = 0 \quad j \geq 2$$

La componente estacional es también MA(1)₇ con coeficientes generados:

$$R_7 = \frac{-0.8}{1.64} = -0.49; \quad R_j = 0 \quad j \neq 7$$

Para obtener los coeficientes del proceso que serán la superposición de ambas partes, particulando la ecuación (7.11) para $j = 1$:

$$\rho_1 = \frac{r_1 - R_7(r_8 + r_6) + R_{14}(r_{15} + r_{13}) + \dots}{1 + 2(r_7 R_7 + r_{14} R_{14} + \dots)}$$

y como $r_j = 0$ para $j > 1$, se obtiene que :

$$\rho_1 = r_1 = -0.4$$

Aplicando la fórmula general se obtiene análogamente que :

$$\begin{aligned} \rho_j &= 0; & j &= 2, \dots, 5 \\ \rho_6 &= r_6 + R_7(r_{13} + r_1) + R_{14}(r_{20} + r_8) + \dots = R_7 r_1 = 0.195 \\ \rho_7 &= r_7 + R_7(r_{14} + r_0) + \dots = R_7 = -0.49 \\ \rho_8 &= r_8 + R_7(r_{15} + r_1) + \dots = R_7 r_1 = 0.195 \\ \rho_j &= 0; & j &> 8 \end{aligned}$$

con lo que la *fas* tendrá el aspecto de la figura 7.4 (d).

7.4 Función de autocorrelación parcial

La función de autocorrelación parcial de un proceso estacional multiplicativo es compleja, porque es una superposición no sólo de las funciones de autocorrelación parciales de las partes regular y estacional, (7.9) y (7.10), sino que en la interacción alrededor de los retardos estacionales aparece a un lado la función de autocorrelación parcial de la parte regular y al otro la simple. En concreto, puede demostrarse, Hamilton y Watts (1978), que la función de autocorrelación parcial de un proceso estacional tiene la estructura siguiente:

1. En los primeros retardos aparecerá la *fap* de la estructura regular y en los estacionales la *fap* de la estacional.
2. A la derecha de cada coeficiente estacional (retardos $js + 1, js + 2, \dots$) aparecerá la *fap* de la parte regular. Si el coeficiente estacional es positivo la *fap* regular aparece invertida, mientras que si éste es negativo la *fap* aparece con su signo.
3. A la izquierda de los coeficientes estacionales (retardos $js - 1, js - 2, \dots$), observaremos la función de autocorrelación simple de la parte regular.

Se comprueba que en modelos estacionales los coeficientes de correlación parcial para los retardos estacionales suelen ser de magnitud mucho menor que la que correspondería a una estructura estacional pura.

Esta complejidad recomienda fijarse sólo en los retardos iniciales 1,2,3,4,... para identificar la estructura regular, y en los retardos estacionales, $s, 2s, 3s, \dots$ para identificar la estructura estacional.

Ejemplo 7.3 (continuación)

La figura 7.9 presenta la función de autocorrelación parcial de los datos de las lluvias en Santiago. Se observa en la parte regular que la estructura es AR o MA de orden bajo, probablemente uno, y en los retardos estacionales se observan dos coeficientes altos y significativos en 12 y 24 lo que sugiere un AR(2) para la parte estacional. Las interacciones explican los coeficientes relativamente altos alrededor del retardo 12.

Ejercicios 7

7.1 Calcular los coeficientes estacionales para una serie cuatrimestral que sigue el modelo $z_t = 10 + \cos(\pi t/2 + \pi/8) + a_t$.

7.2 Demostrar que la serie del ejercicio anterior puede modelarse con $\nabla_4 z_t = (1 - B^4)a_t$.

7.3 Supongamos que una serie mensual sigue el modelo $z_t = 30 + \cos(\pi t/6 + \pi/8) + V_t + a_t$, donde a_t es un proceso de ruido blanco con varianza σ_a^2 y el proceso V_t verifica $V_t = V_{t-12} + \epsilon_t$, donde ϵ_t es un proceso de ruido blanco con varianza σ_ϵ^2 . Demuestre que esta serie sigue el modelo ARIMA $\nabla_{12} z_t = (1 - \Theta B^{12})a_t$,

donde $\theta \leq 1$. (Sugerencia: demuestre que el proceso $\epsilon_t + a_t - a_{t-12}$ tiene estructura de $MA(1)_{12}$ y que la autocorrelación de orden doce es $-\sigma_a^2/(\sigma_\epsilon^2 + 2\sigma_a^2)$).

7.4 Calcular la función de autocorrelación teórica del proceso $(1 - .4B)w_t = (1 + .5B^{12})$.

7.5 Calcular la función de autocorrelación teórica del proceso $(1 - .4B)(1 - .8B^{12})w_t = a_t$.

7.6 Calcular la función de autocorrelación teórica del proceso estacional no multiplicativo $\nabla_{12}z_t = (1 - \theta B - \Theta B^{12})a_t$

Apendice 7.1 Un contraste simple de igualdad de la estructura estacional

Sea r_{ij} el coeficiente de autocorrelación de orden j calculado para el mes i . En la hipótesis de normalidad este coeficiente tiene una distribución asintóticamente normal, con media ρ_{ij} y varianza σ_{ij} . Podemos escribir

$$\sum \sum (r_{ij} - \bar{r})^2 = \sum \sum (r_{ij} - \bar{r}_{i.})^2 + \sum \sum (r_{ij} - \bar{r}_{.j})^2 + \sum \sum (r_{ij} - r_{.j} - r_{i.} + \bar{r})^2$$

En esta descomposición las observaciones no son independientes, ya que las estimaciones de los coeficientes de correlación son dependientes entre sí. Por otro lado, sabemos que los coeficientes de autocorrelación de distintos retardos son distintos. Para comprobar si son distintos los diferentes meses, podemos hacer un contraste aproximado mediante el estadístico

$$F = \frac{\sum \sum (r_{ij} - \bar{r}_{i.})^2}{\sum \sum (r_{ij} - r_{.j} - r_{i.} + \bar{r})^2}$$

Bajo la hipótesis de independencia este estadístico se distribuirá aproximadamente como una F con $I-1$ y $(I-1)(J-1)$ grados de libertad. Cuando existe dependencia esto es sólo una aproximación que puede indicarnos si vale la pena construir modelos más complejos.

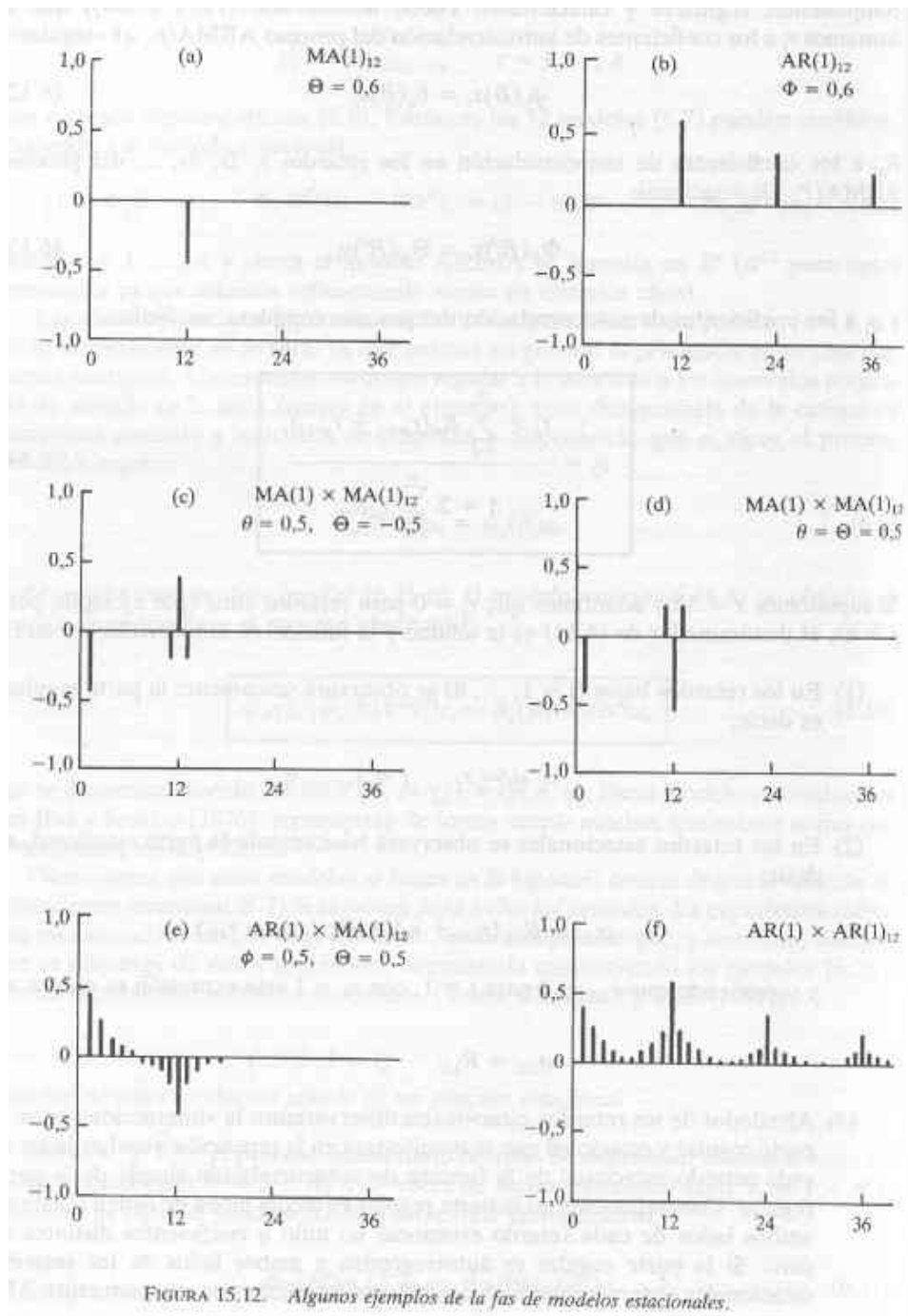


Figura 7.4: Funciones de autocorrelación para algunos procesos estacionales simples.

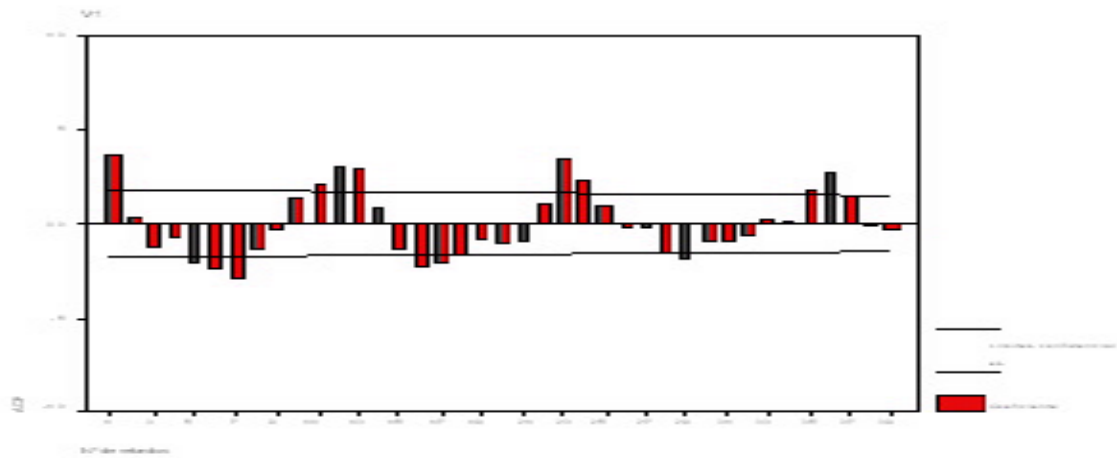


Figura 7.5: Función de autocorrelación de las lluvias en Santiago de Compostela. Datos mensuales desde 1/88 a 12/97.



Figura 7.6: Función de autocorrelación de la primera diferencia estacional de la serie de lluvias en Santiago de Compostela. Datos mensuales desde 1/88 a 12/97.



Figura 7.7: Fas de la serie de Ozono 1/55 a 12/74.



Figura 7.8: Fas estimada de la serie de ozono con una diferencia regular y otra estacional



Figura 7.9: Función de autocorrelación parcial de la primera diferencia estacional de la serie de lluvias en Santiago de Compostela. Datos mensuales desde 1/88 a 12/97.