universidad san pablo - ceu

CARRERA

APELLIDOS

ASIGNATURA

Características de un p.e.:

Media $\rightarrow \mu_t = E[Y_t]$

Varianza $\rightarrow V[Y_t] = E[(Y_t - \mu_t)^2] = \gamma_{tt}$

Autocovar $\rightarrow \gamma_{ts} = cov(Y_t, Y_s) = E[(Y_t - \mu_t)(Y_s - \mu_s)]$

Autocorr $\rightarrow \rho_{ts} = \frac{\gamma_{ts}}{\sqrt{\gamma_{tt}\gamma_{ss}}} = \frac{cov(Y_t Y_s)}{\sqrt{Var(Y_t) Var(Y_s)}}$

PROCESO ESTOCÁSTICO

Se define como una familia de variables aleatorias ~~que cor~~ que corresponden a momentos sucesivos del tiempo.

Se designa como $Y(t,u)$ donde $t \rightarrow$ tiempo

$u \rightarrow$ var. aleatoria

t fijo, t_0 Y será una var. aleatoria con f. probabilidad	u ~~Tiempo~~ fijo, u_0, para cada t Y sólo toma 1 valor. T var, Y en función del tiempo (serie temporal)

Se determinan sus características de dos formas:

1 _ A partir de f. distrib. conjuntas $\rightarrow$ complicado

2 _ A partir de los momentos $\rightarrow$ se utiliza éste.

Para cada instante de tiempo concreto, el proceso estocástico pasa a ser una var. aleatoria con distrib. de probabilidad. Para un cjto finito de valores de tiempo, se obtiene una función de distrib. conjunta

$$F[Y(t_1), Y(t_2), \ldots, Y(t_n)]$$

Se dice que un proceso estocástico está perfectamente caracterizado cuando se pueden determinar las funciones de distrib. conjunta para cada conjunto finito de var. del proceso.

Características del proceso estocástico Y_t.

$\mu_t = E[Y_t]$ distinta para cada t.

$Var[Y_t] = E[Y_t - \mu_t]^2 = \gamma_{t,t}$

$\gamma_{t,s} = Cov(Y_t; Y_s) = E[(Y_t - \mu_t)(Y_s - \mu_s)] \rightarrow$ Autocovarianza

Otra forma alternativa son los coef. de autocorrelación:

$$\rho_{t,s} = \frac{Cov(Y_t, Y_s)}{\sqrt{Var(Y_t) \cdot Var(Y_s)}}$$

Las autocorrelaciones + varianzas proporcionan idéntica información que las autocovarianzas. Son mejores, ya que son medidas relativas.

La caracterización por momentos es más incompleta que por f. distrib. conjunta, pero si el proceso es normal queda perfectamente caracterizado a través de los momentos.

Una serie temporal se considera como una realización de un proceso estocástico. En una serie temporal el dato extraído para un período concreto dependerá de los valores ocurridos en el pasado, no hay independencia.

Se dice que un proceso estocástico es estacionario en sentido estricto cuando al realizar un desplazamiento en el tiempo de todas las variables de cualquier distrib. conjunta finita, resulta que esta distrib. no varía. función de distrib. conjunta es invariante frente a cambios de origen ($t \to t+m$)

$$F(Y_{t_1+m}, Y_{t_2+m}, \dots, Y_{t_k+m}) = F(Y_{t_1}, Y_{t_2} \dots Y_{t_k}).$$

Un proceso es estacionario (en media) de primer orden si

$E[Y_t] = \mu, \forall t$ (esperanza permanece cte)

Un p.e. es estacionario de segundo orden (o en sentido amplio) si:

1 _ Varianza finita y cte a lo largo del tiempo
$$E[Y_t - \mu]^2 = \sigma^2 < +\infty, \forall t.$$

2 _ Autocovarianza sólo depende del lapso de tiempo
$$E[(Y_{t+k} - \mu)(Y_t - \mu)] = \gamma_k, \forall t.$$

Al definir un proceso estocástico estacionario en sentido amplio, se asume implícitamente que lo es en media.

P. Estacionario en sentido estricto $\Rightarrow$ Estac. en sent. ampl.
$\not\Leftarrow$
$\Leftarrow$ Amplio + Normal

En un proceso estacionario las autocorrelaciones pueden definidas de la forma:

$$\boxed{\begin{array}{l} \rho_K = \dfrac{\gamma_K}{\gamma_0}, \quad K \geq 0 \\ \gamma_K = \gamma_{-K} \Rightarrow \rho_K = \rho_{-K} \end{array}}$$

La repr. gráfica de ρ_K, $K = 0, 1, 2, \ldots$ se llama correlograma

Cuando el proceso es estacionario, se pueden estimar los parámetros a partir de una sola realización

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} Y_t$$

$$\hat{\gamma}_0 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} (Y_t - \hat{\mu})^2$$

$$\hat{\gamma}_K = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-K} (Y_{t+K} - \hat{\mu})(Y_t - \hat{\mu})$$

Concepto de ergodicidad (definición compleja, sólo idea)

Si valores de la serie temporal alejados en el tiempo están muy correlacionados (ρ_K grande si K es alto), entonces al aumentar el tamaño de la muestra se añade poca información nueva $\Longrightarrow$ estimadores no consistentes.

Si el proceso es ergódico, entonces los estimadores obtenidos anteriormente son consistentes.

Si el proceso es ergódico, entonces $\lim_{K \to \infty} \rho_K = 0$.

Tma. Descomposición WALD:

Cualquier proceso estacionario puede representarse de manera única como la suma de dos procesos mut. incorrelac.

Y_t = Señal + Ruido

$Y_t = D_t + U_t$

$D_t \to$ linealm. determinista

$U_t \to$ Proceso MA(∞)

PROCESOS LINEALES

Son una clase especial de procesos estacionarios y ergódicos, que se caracterizan porque se pueden representar como una combinación lineal de var. aleat.

Ejemplos de procesos lineales son Ruido blanco, AR, MA y ARMA (los vemos).

Proceso puramente aleatorio $\equiv$ RUIDO BLANCO

$$\boxed{Y_t = \varepsilon_t \text{, donde } \begin{array}{ll} E[\varepsilon_t] = 0 & \forall t \\ E[\varepsilon_t^2] = \sigma_\varepsilon^2 & \forall t \\ E[\varepsilon_t \varepsilon_{t'}] = 0 & t \neq t' \end{array}}$$

Proceso autorregresivo de orden $p \equiv AR(p)$

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

Proceso medias móviles de orden $q \equiv MA(q)$

$$Y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

Proceso ARMA (p, q)

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

Operador de diferencias Δ

$\boxed{\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}}$, $\Delta(\Delta Y_t) = \Delta(Y_t - Y_{t-1}) = \Delta Y_t - \Delta Y_{t-1} =$
$= Y_t - Y_{t-1} - (Y_{t-1} - Y_{t-2}) = \Delta^2 Y_t$

$\Delta_s \equiv$ diferencias estacionales de período s

Operador de retardos L

$\boxed{L Y_t = Y_{t-1}}$; $L^2 Y_t = L(L Y_t) = L(Y_{t-1}) = Y_{t-2} \dots L^k Y_t = Y_{t-k}$
$L(a Y_t) = a L(Y_t)$; $L^k L^s (Y_t) = L^{k+s}(Y_t)$.

Relación entre operadores

$\Delta = 1 - L$; $\Delta_s = 1 - L^s$

universidad san pablo - ceu

CARRERA			
APELLIDOS		NOMBRE	
ASIGNATURA	FECHA		GRUPO

MODELOS AUTORREGRESIVOS (AR)

$AR(p) \longrightarrow Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$ / ε_t ruido blanco

Utilizando el operador polinomial de retardos

$$\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p$$

el modelo puede expresarse de forma compacta

$$\phi(L) Y_t = \varepsilon_t$$

¿dónde está el orden de $\phi(L)$?

ya que $Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$

$$Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \dots - \phi_p Y_{t-p} = \varepsilon_t$$

$$\underbrace{(1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p)}\, Y_t = \varepsilon_t$$

$$\phi_p(L) Y_t = \varepsilon_t$$

En al[illegible] [illegible] $\phi^p(L) Y_t = \varepsilon_t$

Modelo AR(1)

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t \longrightarrow (1 - \phi_1 L) Y_t = \varepsilon_t$$

ε_t al ser ruido blanco ejerce influencia sobre la var. en el mismo periodo de tiempo, pero no en instantes futuros ni en instantes pasados $\Rightarrow$ están incorrelacionados.

Para que el proceso sea estacionario, la raíz del polinomio característico debe caer fuera del círculo unidad.

$$1 - \phi_1 L = 0 \underset{\text{raíz}}{\longrightarrow} |L| > 1 \iff \left|\frac{1}{\phi_1}\right| > 1 \iff |\phi_1| < 1$$

Si $|\phi_1| \geq 1$, entonces varianza infinita, proceso explosivo

En general, se considera que un proceso estocástico se inició en un periodo infinitamente lejano.

Si $|\phi_1|<1$, entonces $E(Y_t) \xrightarrow{\text{decrece}}$ si se inició en $-\infty$ $E(Y_t)=0$

En adelante, se supone que el proceso arranca en $-\infty$ y que es estacionario, ~~para~~ es decir:

$$\left.\begin{array}{l} |\phi_1|<1 \\ + \\ \text{Arranco en } -\infty \end{array}\right\} \boxed{E(Y_t)=0}$$

Si en el modelo se incluye una constante

$$Y_t = \delta + \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\left.\begin{array}{l} |\phi_1|<1 \equiv \text{estacionario} \\ + \\ \text{Modelo arranca en } -\infty \end{array}\right\} E(Y_t) = E[Y_{t-1}] = \mu, \quad \forall t$$

donde $\mu = \frac{\delta}{1-\phi_1}$

Sin pérdida de generalidad, se supondrá $\delta=0$.

Si el proceso es estacionario ($|\phi_1|<1$) y se ha iniciado en $-\infty$ se verifica que

(varianza) $\boxed{\gamma_0 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi_1^2}}$

$Var(Y_t) = Var(\phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t) =$
$= \phi_1^2 Var(Y_{t-1}) + Var(\varepsilon_t)$

Si multiplicamos ambos miembros por $Y_{t-\tau}$, y tomando esperanzas:

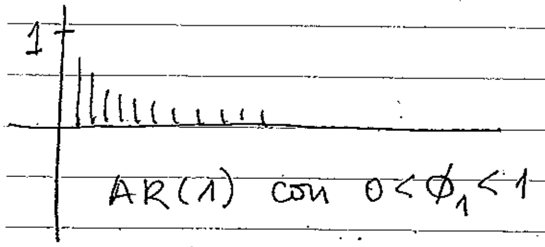
$$\gamma_\tau = E[Y_t Y_{t-\tau}] = \phi_1 E[Y_{t-1} Y_{t-\tau}) + \underbrace{E(\varepsilon_t Y_{t-\tau})}_{0}$$

$$\boxed{\tau>0 \Rightarrow \gamma_\tau = \phi_1 \gamma_{\tau-1}}$$

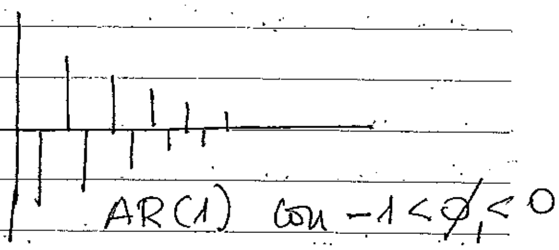
luego $\rho_\tau = \frac{\gamma_\tau}{\gamma_0} = \phi_1 \frac{\gamma_{\tau-1}}{\gamma_0} = \phi_1 \rho_{\tau-1}$, $\tau>0$

Realizando sustituciones sucesivas:

$\boxed{\rho_\tau = \phi_1^\tau \rho_0 = \phi_1^\tau}$ ($\rho_0 = 1$ siempre)



AR(1) con $0<\phi_1<1$



AR(1) con $-1<\phi_1<0$

En un AR(1) se puede despejar Y_t

$$Y_t = \phi^{-1}(L)\,\varepsilon_t = \frac{1}{1-\phi_1(L)}\,\varepsilon_t$$

Partiendo de un AR(1) se puede pasar a un MA $(+\infty)$, ya que si $|\phi_1 L| < 1$, $\frac{1}{1-\phi_1 L}$ = suma progr. geométrica infinita convergente de razón $\phi_1 L$, es decir

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} (\phi_1 L)^j \varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j \varepsilon_{t-j}$$

Modelo AR(2)

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

$$Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \phi_2 Y_{t-2} = \varepsilon_t \longrightarrow (1-\phi_1 L - \phi_2 L^2)Y_t = \varepsilon_t$$

Para que el proceso sea estacionario, las raíces de la ecuación

$$1-\phi_1 L - \phi_2 L^2 = 0$$

estén fuera del círculo unidad.

Autocovarianzas:

$$\gamma_0 = \phi_1\gamma_1 + \phi_2\gamma_2 + \sigma_\varepsilon^2$$

$\tau > 0$, $\gamma_\tau = \phi_1 \gamma_{\tau-1} + \phi_2\gamma_{\tau-2}$)

$$\rho_\tau = \phi_1 \rho_{\tau-1} + \phi_2 \rho_{\tau-2}$$

Podemos determinar ϕ_1 y ϕ_2 a partir del correlograma haciendo $\tau = 1$, $\tau = 2$.

$$\left.\begin{array}{l} \tau = 1 \rightarrow \rho_1 = \phi_1 + \phi_2\rho_1 \\ \tau = 2 \rightarrow \rho_2 = \phi_1\rho_1 + \phi_2 \end{array}\right\} \text{ec. de Yule-Walker}$$

(porque $\rho_t = \rho_{-t}$)

Solución: $\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\rho_1\\ \rho_2\end{pmatrix}$

$$Y_t = \phi^{-1}(L)\,\varepsilon_t = \frac{1}{1-\phi_1 L - \phi_2 L^2}\,\varepsilon_t$$

Modelo AR(p)

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

$\phi(L) Y_t = \varepsilon_t$ donde $\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p$

Para que el proceso sea estacionario:

$1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p = 0$, raíces fuera círculo unidad

Si en el modelo incluimos un término independiente

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \delta + \varepsilon_t$$

bajo el supuesto de estacionariedad, con $\mu = E(Y_t)\ \forall t$.

$$\mu = \phi_1 \mu + \dots + \phi_p \mu + \delta \Rightarrow \mu = \frac{\delta}{1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_p}$$

Multiplicando ambos miembros por $Y_{t-\tau}$ y tomando esperanzas:

$$\gamma_\tau = \phi_1 \gamma_{\tau-1} + \dots + \phi_p \gamma_{\tau-p} + E[\varepsilon_t Y_{t-\tau}]$$

Para $\tau = 0 \Rightarrow \gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \dots + \phi_p \gamma_p + \sigma_\varepsilon^2$

Para $\tau > 0 \Rightarrow \gamma_\tau = \phi_1 \gamma_{\tau-1} + \dots + \phi_p \gamma_{\tau-p}$

Para las autocorrelaciones:

$$\rho_\tau = \phi_1 \rho_{\tau-1} + \dots + \phi_p \rho_{\tau-p}$$

Tomando $\rho_0, \rho_1 \dots \rho_{p-1}$, como las p condic. iniciales

$$\left.\begin{aligned} \rho_1 &= \phi_1 + \phi_2 \rho_1 + \dots + \phi_p \rho_{p-1} \\ \rho_2 &= \phi_1 \rho_1 + \phi_2 + \dots + \phi_p \rho_{p-2} \\ &\dots \\ \rho_p &= \phi_1 \rho_{p-1} + \dots + \phi_p \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & \dots & \rho_{p-2} \\ \vdots & & & \\ \rho_{p-1} & & & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$Y_t = \phi^{-1}(L) \varepsilon_t = \frac{1}{\phi(L)} \varepsilon_t$$

Un proceso autorregresivo de orden finito y estacionario es equivalente a un MA(∞).

universidad san pablo - ceu

CARRERA		
APELLIDOS		NOMBRE
ASIGNATURA	FECHA	GRUPO

MODELOS MEDIAS MÓVILES (MA)

$$Y_t = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q\varepsilon_{t-q}$$

Utilizando el operador polinomial de retardos

$$Y_t = (1-\theta_1 L - \theta_2 L^2 - \dots - \theta_q L^q)\varepsilon_t = \theta(L)\varepsilon_t$$

Su media es 0, si incorporamos una constante será $E[Y_t]=\delta$

Modelo MA(1)

$$Y_t = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} = (1-\theta_1 L)\varepsilon_t$$

$$\gamma_0 = E[Y_t Y_t] = E[(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_t-\theta_1\varepsilon_{t-1})] = E[\varepsilon_t^2] - 2\theta_1 E[\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}]$$

$$+\theta_1^2 E[\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-1}] \overset{\varepsilon_t \text{ ruido blanco}}{=} \sigma_\varepsilon^2 + 0 + \theta_1^2\sigma_\varepsilon^2 = (1+\theta_1^2)\sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_1 = E[Y_t Y_{t-1}] = E[(\varepsilon_t-\theta_1\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-1}-\theta_1\varepsilon_{t-2})] = -\theta_1\sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_2 = \gamma_3 = \dots = 0$$

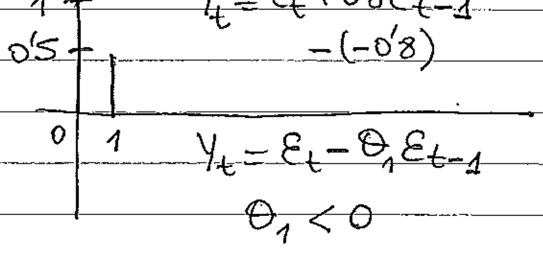
Autocorrelaciones:

$$\rho_0 = 1$$

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{-\theta_1\sigma_\varepsilon^2}{(1+\theta_1^2)\sigma_\varepsilon^2} = \frac{-\theta_1}{1+\theta_1^2}$$

$$\rho_2 = \rho_3 = \dots = 0$$

Correlogramas:

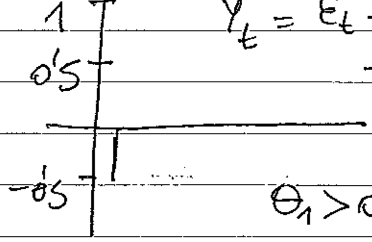


$Y_t = \varepsilon_t + 0'8\varepsilon_{t-1}$

$-(-0'8)$

$Y_t = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1}$

$\theta_1 < 0$



$Y_t = \varepsilon_t - 0'8\varepsilon_{t-1}$

$-(+0'8)$

$\theta_1 > 0$

~~Modelo MA(2)~~

Un modelo MA(1) es siempre estacionario con independencia del valor de θ_1.

A partir de $Y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$

Despejando ε_t, $\varepsilon_t = Y_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$

$$\varepsilon_t = Y_t + \theta_1 (Y_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-2}) = Y_t + \theta_1 Y_{t-1} + \theta_1^2 \varepsilon_{t-2}$$

$$\varepsilon_t = Y_t + \theta_1 Y_{t-1} + \theta_1^2 Y_{t-2} + \dots + \theta_1^N \varepsilon_{t-N-1}$$

$|\theta_1| < 1 \Rightarrow \theta_1^N \to 0$, luego $\varepsilon_t = Y_t + \theta_1 Y_{t-1} + \theta_1^2 Y_{t-2} + \dots$

Se ha pasado de un MA(1) a un AR(∞)

$|\theta_1| < 1$ $\equiv$ Condición de invertibilidad

La condición de invertibilidad en un MA(1) es equivalente a la condición de ~~∄~~ estacionariedad en un AR(1).

A cada proceso no invertible le corresponde otro proceso invertible con el mismo coef. de autocorrelación. Esto plantea problemas de identificación (a efectos prácticos, se considerá siempre invertible)

Al comparar un AR(1) estacionario con un MA(1)

AR(1) $\rightarrow$ FAC tiene infinitos términos no nulos

$|\rho_1| < 1$

MA(1) $\rightarrow$ FAC sólo tiene 1 término no nulo

$|\rho_1| \leq 1/2$.

Modelo MA(2)

$$Y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} = (1-\theta_1 L - \theta_2 L^2)\varepsilon_t$$
$$= \theta(L)\,\varepsilon_t$$

$$E[Y_t Y_{t-\tau}] = E[(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-\tau} - \theta_1\varepsilon_{t-\tau-1} - \theta_2\varepsilon_{t-\tau-2})]$$

$$\gamma_0 = \sigma_\varepsilon^2 + \theta_1^2\sigma_\varepsilon^2 + \theta_2^2\sigma_\varepsilon^2 = (1+\theta_1^2+\theta_2^2)\,\sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_1 = -\theta_1\sigma_\varepsilon^2 + \theta_1\theta_2\sigma_\varepsilon^2 = (-\theta_1+\theta_1\theta_2)\,\sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_2 = -\theta_2\,\sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_3 = \gamma_4 = \dots = 0$$

Coeficientes de autocorrelación

$$\rho_0 = 1$$
$$\rho_1 = \frac{-\theta_1+\theta_1\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}$$
$$\rho_2 = \frac{-\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}$$
$$\rho_3 = \rho_4 = \dots = 0$$

Para que un MA(2) sea invertible, las raíces del polinomio característico

$$1-\theta_1 L - \theta_2 L^2 = 0$$

caigan fuera del círculo unidad.

Modelo MA(q)

$Y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \longrightarrow Y_t = (1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \dots - \theta_q L^q)\varepsilon_t$

Autocovarianzas

$$\gamma_0 = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2)\,\sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_\tau = \begin{cases} (-\theta_\tau + \theta_1\theta_{\tau+1} + \dots + \theta_{q-\tau}\theta_q)\,\sigma_\varepsilon^2 & ,\ \tau = 1 \dots q \\ 0 & \tau > q \end{cases}$$

Existe un corte brusco en q.

$$\rho_\tau = \begin{cases} \dfrac{-\theta_\tau + \theta_1\theta_{\tau+1} + \dots + \theta_{q-\tau}\theta_q}{1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2} & \tau = 1, \dots, q \\ 0 & \tau > q \end{cases}$$

En general, los coeficientes de autocorrelación, ρ_τ, están acotados.

Para que un MA(q) sea invertible, las raíces de

$$1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \dots - \theta_q L^q = 0$$

deben caer fuera del círculo unidad.

CARRERA		
APELLIDOS		NOMBRE
ASIGNATURA	FECHA	GRUPO

MODELOS MIXTOS AUTORREGRESIVOS-MEDIAS MÓVILES, ARMA

ARMA (p,q) $\begin{cases} AR(p) \rightarrow Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \ldots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t \\ MA(q) \rightarrow Y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \end{cases}$

$$ARMA(p,q) \Rightarrow Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \ldots - \phi_p Y_{t-p} = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

$$(1-\phi_1 L - \ldots - \phi_p L^p) Y_t = (1-\theta_1 L - \ldots - \theta_q L^q)\varepsilon_t$$

$$\phi(L) Y_t = \theta(L)\varepsilon_t$$

Para que el modelo sea estacionario, las raíces de la ecuación $\phi(L) = 0$ deben caer fuera del círculo unidad.

Si es estacionario, entonces ARMA(p,q) se puede expresar como un MA(∞)

$$Y_t = \frac{\theta(L)}{\phi(L)}\varepsilon_t = \Psi(L)\varepsilon_t \,/\, \Psi(L) = 1 + \Psi_1 L + \Psi_2 L^2 \ldots$$

Los coef. de $\Psi(L)$ deben cumplir $\phi(L)\Psi(L) = \theta(L)$

Por ejemplo, en un ARMA$(1,1)$:

$(1-\phi_1 L)(1+\Psi_1 L + \Psi_2 L^2 + \ldots) = (1-\theta_1 L)$, de donde

$1 + \Psi_1 L + \Psi_2 L^2 + \ldots - \phi_1 L - \phi_1 \Psi_1 L^2 - \phi_1 \Psi_2 L^3 - \ldots = 1 - \theta_1 L$

Agrupando

$1 = 1$

$\Psi_1 - \phi_1 = -\theta_1 \Rightarrow \Psi_1 = \phi_1 - \theta_1$

$\Psi_2 - \phi_1 \Psi_1 = 0 \Rightarrow \Psi_2 = \phi_1(\phi_1 - \theta_1) = \phi_1^2 - \phi_1\theta_1$

$\Psi_3 - \phi_1 \Psi_2 = 0 \Rightarrow \Psi_3 = \phi_1 \Psi_2 = \phi_1^3 - \phi_1^2 \theta_1$

$\Psi_\tau = \phi_1^\tau - \phi_1^{\tau-1}\theta_1^1$

Para que ARMA (p,q) sea invertible, se requiere que las raíces de $\Theta(L)=0$ caigan fuera del círculo unidad.

Si se cumplen las condiciones de invertibilidad, un ARMA (p,q) se puede expresar mediante un AR(∞), es decir:

$$\phi(L)Y_t=\Theta(L)\varepsilon_t \xrightarrow[\text{invertible}]{} \varepsilon_t=\frac{\phi(L)}{\Theta(L)}Y_t=\Pi(L)Y_t$$

donde: $\Pi(L)=1-\Pi_1L-\Pi_2L^2-\dots$

los coef. deben cumplir

$$\Pi(L)\,\Theta(L)=\phi(L)$$

En un ARMA(1,1)

$$(1-\Pi_1L-\Pi_2L^2-\dots)(1-\theta_1L)=(1-\phi_1L)\text{, de donde}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} 1=1 & \\ -\Pi_1L-\theta_1L=-\phi_1L & \Rightarrow \Pi_1=\phi_1-\theta_1 \\ \Pi_1\theta_1L^2-\Pi_2=0 & \Rightarrow \Pi_2=\Pi_1\theta_1=\phi_1\theta_1-\theta_1^2 \\ \text{NO se} & \quad\; \Pi_\tau=\theta_1\Pi_{\tau-1}=\phi_1\theta_1^{\tau-1}-\theta_1^{\tau} \end{array}\right.$$

Para $\tau>p$, $\Pi_\tau=\theta_1\Pi_{\tau-1}+\dots+\theta_q\Pi_{\tau-q}$

la media sin cte es 0, si se le añade una cte δ

$$E[\phi(L)Y_t]=\delta+E[\Theta(L)\varepsilon_t] \longrightarrow \phi(L)E(Y_t)=\delta$$

Si el proceso es estacionario, $E[Y_t]=\mu, \forall t$

$$\mu=\frac{\delta}{1-\phi_1L-\dots-\phi_pL^p}=\frac{\delta}{1-\phi_1-\dots-\phi_p}$$

ya que al aplicar el operador L a una constante, se obtiene el valor de la constante.

Modelo ARMA (1,1)

$$Y_t - \phi_1 Y_{t-1} = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

Autocovarianzas:

$$\gamma_\tau = E[Y_t Y_{t-\tau}] = \phi_1 \underbrace{E[Y_{t-1} Y_{t-\tau}]}_{= \gamma_{\tau-1}} + E[\varepsilon_t Y_{t-\tau}] - \theta_1 E[\varepsilon_{t-1} Y_{t-\tau}]$$

Sabiendo que $E[\varepsilon_t Y_t] = \sigma_\varepsilon^2$

y que $E[\varepsilon_{t-1} Y_t] = E[\varepsilon_{t-1}(\phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1})] =$
$= \phi_1 \sigma_\varepsilon^2 + 0 - \theta_1 \sigma_\varepsilon^2 = (\phi_1 - \theta_1)\sigma_\varepsilon^2$

Se obtiene:

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \sigma_\varepsilon^2 - \theta_1 (\phi_1 - \theta_1)\sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_1 = \phi_1 \gamma_0 + 0 - \theta_1 \sigma_\varepsilon^2 = \phi_1 \gamma_0 - \theta_1 \sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_\tau = \phi_1 \gamma_{\tau-1} + 0 - \theta_1 \cdot 0 = \phi_1 \gamma_{\tau-1} \quad , \tau > 1$$

Operando resulta:

$$\gamma_0 = \frac{1 - 2\theta_1\phi_1 + \theta_1^2}{1 - \phi_1^2} \sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_1 = \frac{(1 - \phi_1\theta_1)(\phi_1 - \theta_1)}{1 - \phi_1^2} \sigma_\varepsilon^2 \quad ??$$

$$\gamma_\tau = \phi_1 \gamma_{\tau-1}$$

De donde:

$$\rho_0 = 1 \quad , \rho_1 = \frac{(1 - \phi_1\theta_1)(\phi_1 - \theta_1)}{1 - 2\theta_1\phi_1 + \theta_1^2}$$

$$\rho_\tau = \phi_1 \rho_{\tau-1} \quad , \tau > 1 .$$

Modelos ARMA (p,q)

Autocovarianzas:

$$\gamma_\tau - \phi_1 \gamma_{\tau-1} - \dots - \phi_p \gamma_{\tau-p} = E[\varepsilon_t Y_{t-\tau}] - \theta_1 E[\varepsilon_{t-1} Y_{t-\tau}] - \dots - \theta_q E[\varepsilon_{t-q} Y_{t-\tau}]$$

Teniendo en cuenta que $E(\varepsilon_t Y_{t'}) = 0$ para $t' < t$
se verifica

$$\gamma_\tau - \phi_1 \gamma_{\tau-1} - \dots - \phi_p \gamma_{\tau-p} = 0 \quad \text{para } \tau > q$$

$$\rho_\tau - \phi_1 \rho_{\tau-1} - \dots - \phi_p \rho_{\tau-p} = 0 \quad \text{para } \tau > q.$$

en la determinación de $\rho_1 \dots \rho_q$ interviene la parte MA.

En los modelos ARMA (p,q) es conveniente factorizar la parte autorregresiva y la parte de medias móviles, para ver si tienen raíces comunes
Sean $\lambda_1 \dots \lambda_p$ las raíces de $\lambda^p - \phi_1 \lambda^{p-1} - \dots - \phi_p \lambda^0 = 0$

Sean $\delta_1 \dots \delta_q$ las raíces de $\delta^q - \theta_1 \delta^{q-1} - \dots - \theta_q \delta^0 = 0$.

Una forma alternativa sería

$$(1-\lambda_1 L) \dots (1-\lambda_p L) Y_t = (1-\delta_1 L) \dots (1-\delta_q L) \varepsilon_t$$

Si existiera una raíz común, $\lambda_i = \delta_j$, entonces el modelo estaría sobreparametrizado

universidad san pablo - ceu

ECTRIA - T11

CARRERA		
APELLIDOS	NOMBRE	
ASIGNATURA	FECHA	GRUPO

Proceso estocástico: Familia de variables aleatorias que corresponden a momentos sucesivos del tiempo.

Amplia concepto

A una serie temporal se le considera como una realización de un proceso estocástico.

P.e. ESTACIONARIO en sentido ESTRICTO:
Al realizar un mismo desplazamiento en el tiempo de todas las var. de cualquier distrib. conjunta finita, resulta que esta distrib. no varía.

$$F(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_k}) = F(Y_{t_1+m}, \dots Y_{t_k+m})$$

P.e. ESTACIONARIO de primer orden, o en media:

$$E[Y_t] = \mu, \forall t.$$

P.e. ESTACIONARIO de segundo orden, o en sentido amplio:

1º. Var. finita y cte a lo largo del tiempo

$$E[Y_t - \mu]^2 = \sigma^2 < +\infty, \forall t$$

2º. La autocovarianza sólo depende del tiempo transcur.:

$$E[Y_{t+k} - \mu][Y_t - \mu] = \gamma_k, \forall t.$$

indep. de t

P.e. Estacionario en sent. estricto $\Rightarrow$ P.e. estac. en sent. amplio
$\not\Leftarrow$

P.e. estac. en sentido estricto $\Leftarrow$ P.e. estac. en sent. amplio + Normal

Ruido blanco

Es un proceso estacionario y ergódico ($\lim_{k\to\infty} \rho_k = 0$, c.n.u)

Es un proceso lineal (c.l. de var. aleatorias)

Es el más simple de todos, proceso puramente aleatorio:

$$Y_t = \varepsilon_t, \quad \text{donde} \quad \varepsilon_t \;/\; E[\varepsilon_t] = 0, \forall t$$
$$\cancel{V}[\varepsilon_t]^2 = \sigma_\varepsilon^2, \forall t$$
$$E[\varepsilon_t \varepsilon_{t'}] = 0, \forall t \neq t'$$

las características de ε_t son idénticas a las que tiene la perturbación aleatoria en el modelo de regresión lineal múltiple bajo las hipótesis básicas.

Tma. Descomposición de Wold

Cualquier proceso estacionario Y_t puede representarse de manera única como la suma de dos procesos mutuamente incorrelacionados.

$$Y_t = D_t + X_t$$

$D_t \to$ linealmente determinista

$X_t \to$ proceso MA(∞)

Resumen:

AR(p) $\to Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \ldots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$

$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \ldots + \phi_p \gamma_p + \sigma_\varepsilon^2$

$\gamma_\tau = \phi_1 \gamma_{\tau-1} + \ldots + \phi_p \gamma_{\tau-p}, \; \tau > 0$

$\rho_0 = 1$

$\rho_\tau = \phi_1 \rho_{\tau-1} + \ldots + \phi_p \rho_{\tau-p}, \; \tau > 0$

Procesos AR

Autorregresivo de orden p, AR(p)

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \ldots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad \text{donde } \varepsilon_t \text{ es ruido blanco}$$

$$\phi(L) Y_t = \varepsilon_t$$

AR(1) $\to Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$

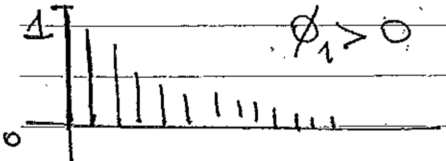
$E[\varepsilon_t Y_{t-\tau}] = 0, \forall \tau > 0.$

Para que AR(1) sea estacionario, la raíz del polinomio característico $1 - \phi_1 L = 0$ debe caer fuera del círculo unidad, $|L| > 1 \iff \left|\frac{1}{\phi_1}\right| > 1 \iff |\phi_1| < 1$.

$$\gamma_0 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi_1^2}, \quad \gamma_1 = \phi_1 \gamma_0, \quad \gamma_2 = \phi_1 \gamma_1 = \phi_1^2 \gamma_0, \ldots \gamma_\tau = \phi_1^\tau \cdot \gamma_0.$$

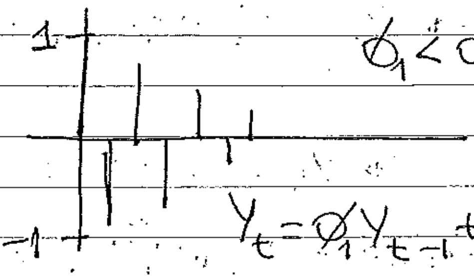
$$\rho_0 = \frac{\gamma_0}{\gamma_0} = 1, \quad \rho_1 = \phi_1, \ldots, \rho_k = \phi_1^k$$

Correlograma AR(1)



$\phi_1 > 0$

$Y_1 = \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$



$\phi_1 < 0$

$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$

AR(2) $\rightarrow Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2) Y_t = \varepsilon_t$$

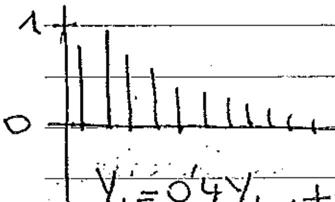
Para que sea estacionario, las raíces de la ecuación $1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 = 0$ están situadas fuera del círculo unidad

$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + \sigma_\varepsilon^2$, ... $\gamma_\tau = \phi_1 \gamma_{\tau-1} + \phi_2 \gamma_{\tau-2}$, $\tau > 0$

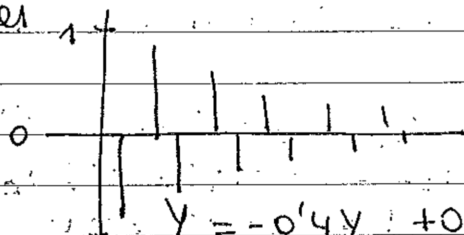
$\rho_0 = 1$, $\gamma_\tau = \phi_1 \rho_{\tau-1} + \phi_2 \rho_{\tau-2}$, $\tau > 0$

Correlograma AR(2)

Raíces reales

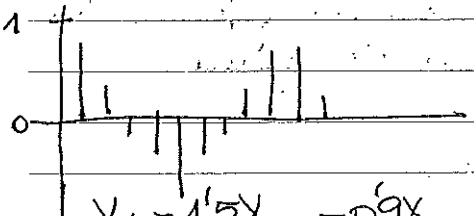


$Y_t = 0'4 Y_{t-1} + 0'5 Y_{t-2} + \varepsilon_t$

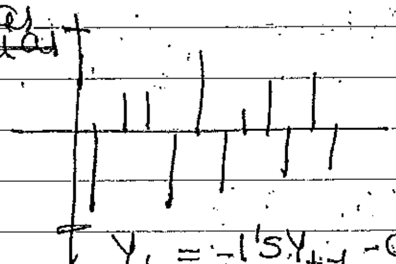


$Y_t = -0'4 Y_{t-1} + 0'5 Y_{t-2}$

Raíces ~~imaginarias~~ complejas



$Y_t = 1'5 Y_{t-1} - 0'9 Y_{t-2} + \varepsilon_t$



$Y_t = -1'5 Y_{t-1} - 0'9 Y_{t-2} + \varepsilon_t$

Modelo AR(p) $\rightarrow Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \ldots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$

Para que sea estacionario, las raíces de $1 - \phi_1 L - \ldots - \phi_p L^p = 0$ deben estar fuera del círculo unidad.

$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \ldots + \phi_p \gamma_p + \sigma_\varepsilon^2$

$\gamma_\tau = \phi_1 \gamma_{\tau-1} + \ldots + \phi_p \gamma_{\tau-p}$, $\tau > 0$

$\rho_\tau = \phi_1 \rho_{\tau-1} + \ldots + \phi_p \rho_{\tau-p}$, $\rho_0, \rho_1 \ldots \rho_p$ cond. inic.

Procesos Medias Móviles

$MA(q) \rightarrow Y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$

$MA(1) \rightarrow Y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$

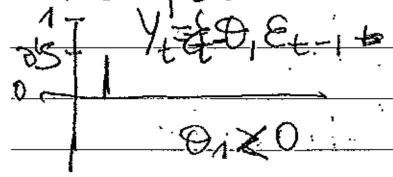
$\gamma_0 = E[Y_t Y_t] = \sigma_\varepsilon^2 + \theta_1^2 \sigma_\varepsilon^2 = (1+\theta_1^2)\sigma_\varepsilon^2$

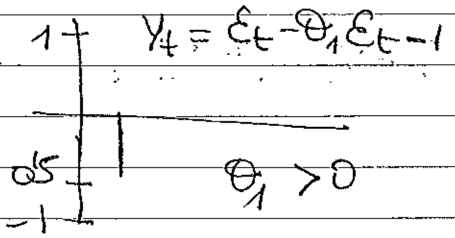
$\gamma_1 = E[Y_t Y_{t-1}] = -\theta_1 \sigma_\varepsilon^2$

$\gamma_2 = 0 \quad \dots \quad \gamma_\tau = 0, \ \forall \tau > 1$

$\rho_0 = 1; \quad \rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{-\theta_1 \sigma_\varepsilon^2}{(1+\theta_1^2)\sigma_\varepsilon^2} = \frac{-\theta_1}{1+\theta_1^2}, \quad \rho_2, \rho_\tau = 0, \ \forall \tau > 1.$

Correlograma





Un MA(1) es siempre estacionario

Para que sea invertible $|\theta_1| < 1$

$MA(2) \rightarrow Y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2}$

$\gamma_0 = E[Y_t Y_t] = (1+\theta_1^2+\theta_2^2)\sigma_\varepsilon^2$

$\gamma_1 = E[Y_t Y_{t-1}] = -\theta_1 \sigma_\varepsilon^2 + \theta_1\theta_2 \sigma_\varepsilon^2$

$\gamma_2 = E[Y_t Y_{t-2}] = -\theta_2 \sigma_\varepsilon^2$

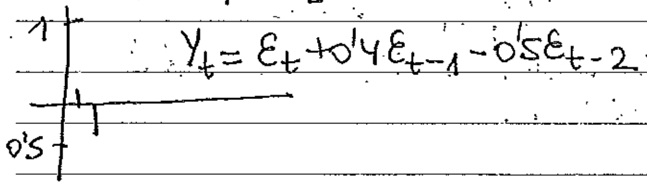
$\gamma_3 = 0, \quad \dots \quad \gamma_\tau = 0, \ \forall \tau > 2.$

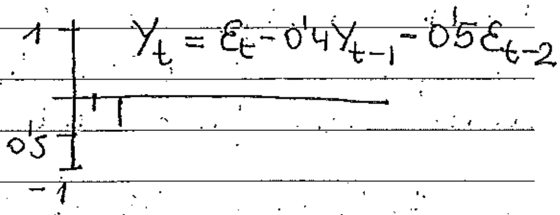
Para que sea invertible las raíces de $1-\theta_1 L - \theta_2 L^2 = 0$ deben caer fuera del círculo unidad

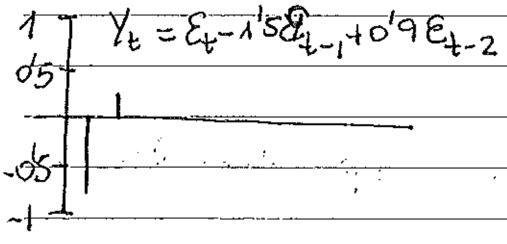
$\rho_0 = 1,$

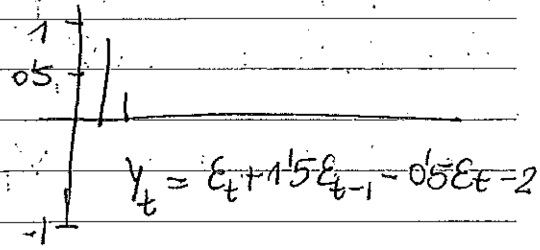
$\rho_1 = \frac{-\theta_1 + \theta_1\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}$

$\rho_2 = \frac{-\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} \qquad \rho_3, \rho_\tau = 0 \quad \forall \tau > 2.$









universidad san pablo - ceu

CARRERA		
APELLIDOS		NOMBRE
ASIGNATURA	FECHA	GRUPO

MA(q) $\rightarrow Y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$

$$\gamma_0 = (1+\theta_1^2+\dots+\theta_q^2)\sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_\tau = \begin{cases} (-\theta_\tau + \theta_1\theta_{\tau+1} + \dots + \theta_q\theta_{q-\tau})\sigma_\varepsilon^2 & \tau = 1 \dots q \\ 0 & \tau > q \end{cases}$$

$$\rho_0 = 1 \qquad \rho_\tau = \begin{cases} \dfrac{-\theta_\tau + \theta_1\theta_{\tau+1} + \dots + \theta_{q-\tau}\theta_q}{1+\theta_1^2+\dots+\theta_q^2} & \tau = 1 \dots q \\ 0 & \tau > q \end{cases}$$

Para que un MA(q) sea invertible, las raíces de $1-\theta_1 L - \dots - \theta_q L^q = 0$ deben caer fuera del círculo unidad.

Modelos mixtos autorregresivos - medias móviles (ARMA)

ARMA(p,q) $\rightarrow Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \dots - \phi_p Y_{t-p} = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$

En forma compacta, $\phi(L) Y_t = \theta(L) \varepsilon_t$.

Estacionario si raíces de $1-\phi_1 L - \dots - \phi_p L^p = 0$ fuera del círc. unidad

Si es estacionario, se puede expresar como un MA(∞)

$$\phi(L) Y_t = \theta(L)\varepsilon_t \Rightarrow Y_t = \frac{\theta(L)}{\phi(L)} \varepsilon_t = \psi(L)\varepsilon_t.$$

Para obtener $\psi(L)$, hay que $\phi(L)\psi(L) = \theta(L)$ y despejar.

El polinomio $\psi(L)$ es de la forma: $\psi(L) = 1 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \dots$

Invertible si raíces de $1-\theta_1 L - \dots - \theta_q L^q = 0$ fuera círculo unidad

Si es invertible, se puede expresar como un AR(∞).

$$\phi(L) Y_t = \theta(L)\varepsilon_t \Rightarrow \frac{\phi(L)}{\theta(L)} Y_t = \varepsilon_t \Rightarrow \pi(L) Y_t = \varepsilon_t$$

donde $\pi(L) = 1 - \pi_1 L - \pi_2 L^2 - \dots$

$\pi(L)\theta(L) = \phi(L)$ y despejar.

ARMA (1, 1) $\quad Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$

Hay que tener en cuenta que $E[\varepsilon_t Y_t] = \sigma_\varepsilon^2$ y que

$E[\varepsilon_{t-1} Y_t] = E[\varepsilon_{t-1}(\phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1})] = (\phi_1 - \theta_1)\sigma_\varepsilon^2$

$$\left.\begin{array}{l} \gamma_0 = E[Y_t Y_t] = \phi_1 \gamma_1 + \sigma_\varepsilon^2 - \theta_1(\phi_1 - \theta_1)\sigma_\varepsilon^2 \\ \gamma_1 = E[Y_t Y_{t-1}] = \phi_1 \gamma_0 - \theta_1 \sigma_\varepsilon^2 \\ \gamma_\tau = \phi_1 \gamma_{\tau-1}, \ \tau > 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \gamma_0 = \dfrac{1 - 2\theta_1\phi_1 + \theta_1^2}{1 - \phi_1^2}\sigma_\varepsilon^2 \\ \gamma_1 = \dfrac{(1-\phi_1\theta_1)(\phi_1 - \theta_1)}{1 - 2\theta_1\phi_1 + \theta_1^2}\sigma_\varepsilon^2 \\ \gamma_\tau = \phi_1 \gamma_{\tau-1}, \ \tau > 1 \end{array}$$

Autocorrelaciones

$\rho_0 = 1, \quad \rho_1 = \dfrac{(1-\phi_1\theta_1)(\phi_1-\theta_1)}{1-2\theta_1\phi_1+\theta_1^2}, \quad \rho_\tau = \phi_1 \rho_{\tau-1}, \ \tau > 1.$

ARMA (p, q)

Hay que tener en cuenta que $E[\varepsilon_t Y_{t'}] = 0$ para $t' < t$.

Se verifica que

$$\gamma_\tau - \phi_1 \gamma_{\tau-1} - \dots - \phi_p \gamma_{\tau-p} = 0, \ \text{para } \tau > q$$

(resolver la ec. en diferencias)

Análogamente,

$$\rho_\tau - \phi_1 \rho_{\tau-1} - \dots - \phi_p \rho_{\tau-p} = 0, \ \text{para } \tau > q$$

En la determinación de los q primeros valores de ρ_τ ~~hay~~ intervienen la parte de medias móviles del modelo.

Es conveniente factorizar la parte autorregresiva y la parte de medias móviles para encontrar raíces comunes, ya que en ese caso el modelo estaría sobreparametrizado.