1

ESTAD_T6. VARIABLES ALEATORIAS BIDIMENSIONALES.

(BUSCAR)

Funciones de distrib. bidimensionales. [Cont. por la dcha]
Distrib. discretas y absolut. continuas.
Absorbidas ← Distrib. marginales y condicionadas.
Independencia de variables aleatorias.
Cambio de variable.
Extensión a dimensiones mayores.

---

1. VARIABLES ALEATORIAS BIDIMENSIONALES.

En el caso de que el experimento aleatorio se traduzca en dos observaciones simultáneas (conjuntas) estamos ante una variable aleatoria bidimensional.
En términos matemáticos, el valor de una v.a. bidimensional es un vector en el plano, $\mathbb{R}^2$, cuyas dos componentes son variables aleatorias unidimensionales.

(ξ, η) v.a. bidim $\longrightarrow$ ξ v.a. unidim.
$\searrow$ η v.a. bidim.

(MIRAR) si es verdad:

Formalmente, sea (E, Ω, P) espacio de probabilidad, donde $E \longrightarrow$ espacio muestral conjunto.
$\Omega \longrightarrow$ cjto de todos los sucesos posibles q' hay, con estructura de σ-álgebra sobre E.
$P \longrightarrow$ medida de probabilidad.

y sea $\mathbb{R}^2$ con los borelianos de $\mathbb{R}^2$.
(ξ, η) es una v.a. bidimensional si:

$$(\xi, \eta) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \Big| \quad (\xi,\eta)^{-1}(b) \subset \Omega.$$
$$S \longmapsto b$$

la antiimagen de cq. vector de $\mathbb{R}^2$ es un suceso de Ω.

ESTAD_T6.

El vector aleatorio (ξ, η) tendrá un campo de variación y una distrib. de probabilidad conjunta.

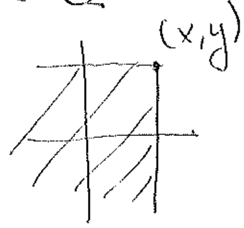
De una v.a. bidimensional podemos estudiar los fenóm. aleatorios desde 3 enfoques diferentes:

- ambas var ~~sucesos~~ de manera simultánea ~~conjunta~~ → distrib. conjunta.
- Cada ~~suceso~~ ~~(de cada var~~ variable por separado → distrib. marginal
- una variable restringida a valores concretos de la otra | → distr. condicionada.

2. FUNCIONES de DISTRIB. BIDIMENSIONALES.

Análogamente al caso unidimensional, definimos la func. de distrib. conjunta $F(x,y)$ asociada a la v.a. bidimensional (ξ, η) como

$$F(x,y) = P(\xi \leq x, \eta \leq y) \qquad -\infty < x < +\infty, \quad -\infty < y < +\infty$$



Al igual que en el caso unidimensional, pasamos a exponer las principales propiedades:

P1 → $F(-\infty, -\infty) = 0$
$F(+\infty, +\infty) = 1$
$F(-\infty, y) = 0$
$F(x, -\infty) = 0$

} Dem → tomando límites y por def. $P(\emptyset) = 0$.

P2 → la f. distrib. es monótona no decreciente.

$x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1, y) \leq F(x_2, y)$
$y_1 < y_2 \Rightarrow F(x, y_1) \leq F(x, y_2)$

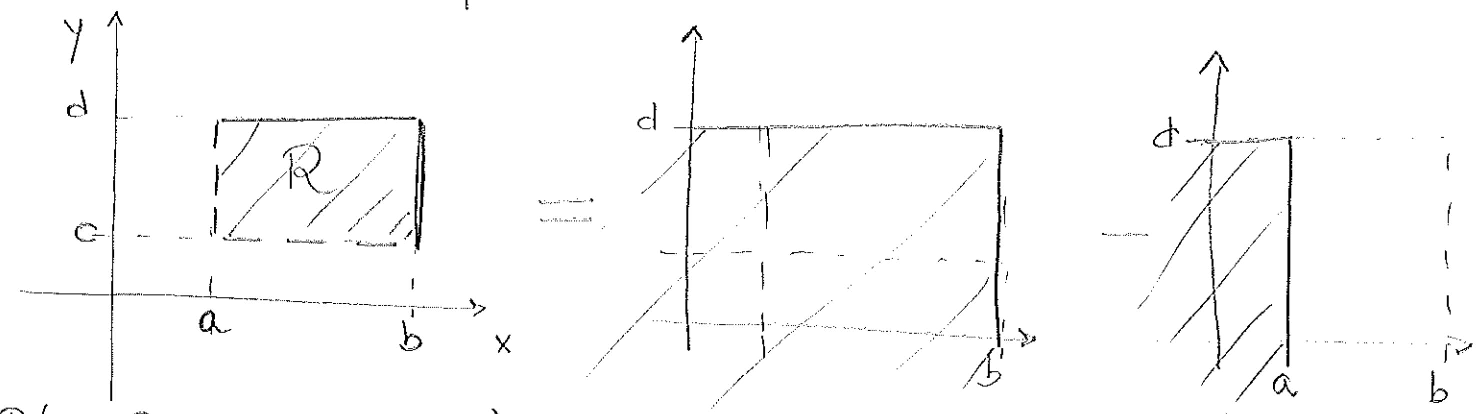
(Por def. f. distrib = prob. acumulada

¿ CONTINUA por la DERECHA?

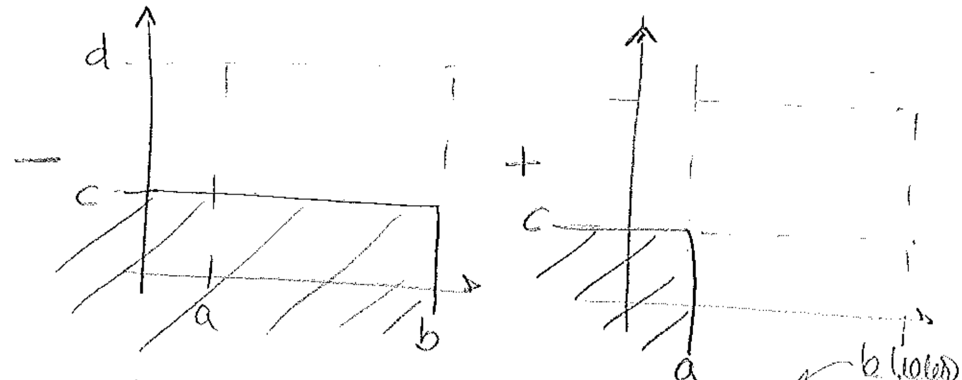
ESTAD – T6

P3 – $P(a<\xi\leq b,\ c<\eta\leq d)$ se puede ~~expresar~~ calcular a través de la función de distrib. conjunta.

No se puede obtener directamente como en el caso unidimensional, hay que acudir a un gráfico.



$$P(a<\xi\leq b;\ c<\eta\leq d) = F(b,d) \quad - \quad F(a,d)$$



$$- F(b,c) \quad + F(a,c)$$ b (todo) quedo 2 veces

Analíticamente, $P(a<\xi\leq b,\ c<\eta\leq d) = F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c)$

ya que $F(b,d) = P(\xi\leq b,\ \eta\leq d) = P(-\infty<\xi\leq b,\ -\infty<\eta\leq d)$

$$F(a,d) = P(-\infty<\xi\leq a,\ -\infty<\eta\leq d)$$

$$F(b,c) = P(-\infty<\xi\leq b,\ -\infty<\xi\leq c)$$

$$F(a,c) = P(-\infty<\xi\leq a,\ -\infty<\eta\leq c).$$

Una vez definida la función de distrib. conjunta de la v.a. bidimensional (ξ, η) se pueden obtener dos tipos de distrib. derivadas de gran interés: las f. distrib. marginales y las f. distrib. condicionadas.

La función de distrib. marginal es el resultado de observar los valores de una de las v.a., ignorando los posibles valores de la otra, dejándola libre. Así,

$$F_1(x) = P(\xi \leq x, \eta \in \mathbb{R}) = P(\xi \leq x, \eta < +\infty) = F(x, +\infty)$$

func. distrib. marginal de ξ / η

$$F_2(y) = P(\xi \in \mathbb{R}, \eta \leq y) = P(\xi < +\infty, \eta \leq y) = F(+\infty, y)$$

Sería la probab. acumulada en un valor concreto de una de las v.a. unidim, dejando que la otra recorra todo su campo de variación.

Las funciones de distrib. marginales son funciones de distrib. unidimensionales con sus propiedades.

La función de distrib. condicionada estudian el comportamiento probabilístico de una de las v.a. unidim. cuando la otra está sujeta a determinadas condiciones.
Obviamente, habrá tantas distrib. condicionales como condiciones se nos ocurran, pero a modo de ejemplo:

$$F(x/y) = P(\xi \leq x / \eta \leq y) = \frac{P(\xi \leq x, \eta \leq y)}{P(\eta \leq y)} = \frac{F(x,y)}{F_2(y)}$$

$$F(y/x) = P(\eta \leq y / \xi \leq x) = \frac{P(\xi \leq x, \eta \leq y)}{P(\xi \leq x)} = \frac{F(x,y)}{F_1(x)}$$

3. DISTRIBUCIONES DISCRETAS y ABSOLUT. CONTINUAS.

a) Distrib. discretas

Una v.a. bidimensional (ξ, η) es discreta cuando las dos variables que la componen son discretas, es decir, la masa de probabilidad se concentra en un cjto finito ó numerable de puntos, en este caso, vectores de dimensión 2.

La función que asigne probabilidades a los puntos será la función de cuantía conjunta

$$P(\xi = x_i, \eta = y_j) = p_{ij} \geq 0 \quad (\text{Ax } 1)$$

Ax2 y 3 $\rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$

→ verifican los ax.

las funciones de cuantía marginales serán:

Para $\xi \rightarrow P(\xi = x_i, \eta \in \mathbb{R}) = P(\xi = x_i, \eta < +\infty) = \sum_{j=1}^{\infty} P(\xi = x_i, \eta = y_j) = p_{i\cdot}$

$\sum p_{i\cdot} = 1$ → son probab.

Para $\eta \rightarrow P(\xi \in \mathbb{R}, \eta = y_j) = P(\xi < +\infty, \eta = y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\xi = x_i, \eta = y_j) = p_{\cdot j}$

$\sum p_{\cdot j} = 1$

Las funciones de cuantía condicionadas:

Para $\xi \rightarrow P(\xi = x_i / \eta = y_j) = \frac{P(\xi = x_i, \eta = y_j)}{P(\eta = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$

def. de probab. condic.

Para $\eta \rightarrow P(\eta = y_j / \xi = x_i) = \frac{P(\xi = x_i, \eta = y_j)}{P(\xi = x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}$

Si recordamos que la f. de distrib. representa la probabilidad acumulada y que en las v.a. discretas las probabilidades se encuentran en los puntos, el cálculo de las distintas f. de distrib. se hará a través de sumatorios.

F. de distrib. conjunta:

$$F(x,y) = P(\xi \le x, \eta \le y) = \sum_{x_i \le x} \sum_{y_j \le y} p_{ij}$$

F. distrib. marginales:

$$F_1(x) = P(\xi \le x, \eta < +\infty) = \sum_{x_i \le x} p_{i\cdot} = \sum_{x_i \le x} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}$$

$$F_2(y) = P(\xi < +\infty, \eta \le y) = \sum_{y_j \le y} p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{y_j \le y} p_{ij}$$

F. distrib. condicionadas:

$$F(x/y) = P(\xi \le x / \eta \le y) = \frac{P(\xi \le x, \eta \le y)}{P(\eta \le y)} = \frac{F(x,y)}{F_2(y)} =$$

$$= \frac{\sum_{x_i \le x} \sum_{y_j \le y} p_{ij}}{\sum_{y_j \le y} p_{\cdot j}}$$

$$F(y/x) = P(\eta \le y / \xi \le x) = \frac{P(\xi \le x, \eta \le y)}{P(\xi \le x)} = \frac{F(x,y)}{F_1(x)} =$$

$$= \frac{\sum_{x_i \le x} \sum_{y_j \le y} p_{ij}}{\sum_{x_i \le x} p_{i\cdot}}$$

Otro ejemplo:

$$F(y/a < x \le b) = P(\eta \le y / a < \xi \le b) = \frac{\sum_{a < x_i \le b} \sum_{y_j \le y} p_{ij}}{\sum_{a < x_i \le b} p_{i\cdot}}$$

b) Distrib. absolutamente continuas

Una variable aleatoria bidimensional es continua cuando la función de distribución conjunta $F(x,y)$ es continua y la segunda derivada $(\partial x \partial y)$ existe y es continua

Otra forma, (ξ, η) es v.a. bidimensional continua si lo son ξ y η. En este caso, $P(\xi = x, \eta = y) = 0$.

Como función de probabilidad, tendremos la función de densidad conjunta, que se obtiene tomando límites en un intervalo de amplitud infinitésimo (aplicando el tma del valor medio).

$$\lim_{\Delta x \to 0\ \Delta y \to 0} \frac{P(x < \xi \leq x + \Delta x,\ y < \eta \leq y + \Delta y)}{\Delta x \Delta y} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y)$$

$$\iint f(x,y)\,dx\,dy = 1$$

Función de distrib. conjunta:

$$F(x,y) = P(\xi \leq x, \eta \leq y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dx\,dy$$

↳ Probab. acumulada = volumen que genera $f(x,\eta)$ en el recinto $(-\infty, x], (-\infty, y]$

Func. ~~distrib.~~ densidad marginales:

Para ξ, $f_1(x) = F_1'(x) = \dfrac{\partial F_1(x)}{\partial x}$

puede obtenerse integrando la función de densidad conjunta respecto a y en todo el campo de variación de η.

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\eta)\,dy \quad \longrightarrow F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} f_1(x)\,dx$$

Para η, $f_2(y) = F_2'(y) = \dfrac{\partial F_2(y)}{\partial y} \longrightarrow F_2(y) = \int_{-\infty}^{y} f_2(y)\,dy$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

F. distrib. ~~marg~~ condicionadas:

$$P(\xi \leq x / \eta \leq y) = \frac{P(\xi \leq x, \eta \leq y)}{P(\eta \leq y)} = \frac{\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dx\,dy}{\int_{-\infty}^{y} f_2(y)\,dy} = \frac{F(x,y)}{F_2(y)}$$

$$P(\eta \leq y / \xi \leq x) = \frac{P(\xi \leq x, \eta \leq y)}{P(\xi \leq x)} = \frac{\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dx\,dy}{\int_{-\infty}^{x} f_1(x)\,dx} = \frac{F(x,y)}{F_1(x)}$$

Otro ejemplo:

$$P(\eta \leq y / a < \xi \leq b) = \frac{P(a < \xi \leq b, \eta \leq y)}{P(a < \xi \leq b)} = \frac{\int_{a}^{b}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dx\,dy}{\int_{a}^{b} f_1(x)\,dx}$$

En el caso de que la condición sea que la v.a. tome un valor concreto ($\xi = x$ ó $\eta = y$) surge un problema al ser v.a. continuas. Se subsana tomando límites

$$F(y/x) = P(\eta \leq y / \xi = x) = \lim_{\varepsilon \to 0} P(\eta \leq y / x - \varepsilon < \xi \leq x + \varepsilon) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{P(x-\varepsilon < \xi \leq x+\varepsilon, \eta \leq y)}{P(x-\varepsilon < \xi \leq x+\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dx\,dy}{\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f_1(x)\,dx} =$$

MIRAR $\to$ $$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\int_{-\infty}^{y}\left[\frac{\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(x,y)\,dx}{2\varepsilon}\right] dy}{\frac{\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f_1(x)\,dx}{2\varepsilon}} = \frac{\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dy}{f_1(x)} = \int_{-\infty}^{y} f(y/x)\,dy.$$

donde $f(y/x) = \dfrac{f(x,y)}{f_1(x)}$ ← f. densidad condicional

Análogamente,

$$F(x/y) = \int_{-\infty}^{x} f(x/y)\,dx \quad , \text{ donde } f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}$$

4. INDEPENDENCIA de VAR. ALEATORIAS

Recordemos que dos sucesos son indep. si la probab. de la ocurrencia conjunta coincide con el producto de las probabilidades individuales o bien si la probab. condic. coincide con la probab. marginal.

A y B son indep $\Leftrightarrow \begin{cases} P(A\cap B) = P(A)P(B) \\ P(A/B) = P(A) \text{ y } P(B/A) = P(B) \end{cases}$.

Siguiendo esta idea, ξ y η son indep. si la f. distrib. condicionada coincide con la marginal:

$$P(\xi \leq x/_{\eta\leq y}) = P(\xi \leq x)$$

$$\frac{F(x,y)}{F_2(y)} = F_1(x) \Longrightarrow F(x,y) = F_1(x)F_2(y)$$

En variables discretas: $p_{ij} = p_{i\cdot}\, p_{\cdot j} \quad \forall\, i,j$.

En variables continuas: $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$

5. CAMBIO de VARIABLE → mirar ampliación (pág 11)

Dada una v.a. bidimensional (ξ,η) con función de distrib. $F(x,y)$. Esta variable se puede transformar de modo que tanto la nueva función de distrib. como el campo de variación dependen de la variable original.

En el caso de v.a. discretas se calcula la nueva función de cuantía.

En el caso de v.a. continuas la nueva f. densidad conjunta depende de la existencia de la transformación inversa y del Jacobiano de la transformación inversa.

$$h(u,v) \cancel{du\,dv} = f[x(u,v), y(u,v)]\,|J|\,\cancel{dx\,dy}$$

El campo de variación se puede complicar más o menos, dependiendo de la transformación.

6. VARIABLES ALEATORIAS n-DIM.

La extensión de la definición de v.a. 2-dimensional a la v.a. n-dimensional se hace de manera natural, pudiendo demostrarse de la misma manera todos los resultados.

A modo de ejemplo resumen podemos definir la función de distrib. conjunta de la v.a. $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ con campo de variación $-\infty < x_i < +\infty$, $i = 1 \dots n$, como:

$$F(x_1, x_2 \dots x_n) = P(\xi_1 \leq x_1, \xi_2 \leq x_2 \dots \xi_n \leq x_n)$$

Las funciones de distrib. marginales pueden ser de 1 ó de más variables (hasta n-1), dejando el resto de valores libres.

$$F_{1\dots q}(x_1 \dots x_q) = F(x_1 \dots x_q, \infty \dots \infty) =$$
$$= P(\xi_1 \leq x_1 \dots \xi_q \leq x_q, \xi_{q+1} < +\infty \dots \xi_n \leq +\infty)$$

Lo mismo ocurre con las distrib. condicionadas.

Cabe destacar la def. de INDEPENDENCIA: $\xi_1 \dots \xi_n$ son estad. indep. si $F(x_1 \dots x_n) = F_1(x_1) \dots F_n(x_n)$, tb se puede hacer por subgrupos

La extensión al caso discreto y absol. continuos se hace de manera análoga al caso bidimensional.

TRANSFORMACIÓN de V.A. BIDIM.

Sea (ξ,η) con $F(x,y)$

Transformación : $(\xi,\eta) \longrightarrow (\omega,\tau)$ / $(\omega,\tau)\in T \Leftrightarrow (\xi,\eta)\in S$

$\omega = \omega(\xi,\eta)$ $\qquad P[(\omega,\tau)\in T] = P((\xi,\eta)\in S]$

$\tau = \tau(\xi,\eta)$ $\qquad$ ~~luego $G(\omega,\tau)$ deter~~

luego f. distrib. transformación, $G(\cancel{\omega,\tau})$ u, v, puede determinarse por la f. distrib. original $F(x,y)$.

Discretas : $P(\omega=u,\tau=v) = P[(\xi,\eta)\in S] = \sum_{(x,y)\in S} P(\xi=x,\eta=y)$.

Se calcula el nuevo campo de variación y la nueva función de cuantía.

Continuas : (ω,τ) / $h(u,v)$ f. densidad.

La transformación tiene inversa única

$x = x(u,v)$ $\quad$ y $\quad J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$

$y = y(u,v)$

luego $h(u,v) = f[x(u,v), y(u,v)]\,|J|$.

Hay que determinar el nuevo campo de variación, lo que puede implicar alguna dificultad.

Ejemplo 1 : $\omega = \xi+\eta$

(Definimos una var. adicional $\tau = \eta$, p. ej)

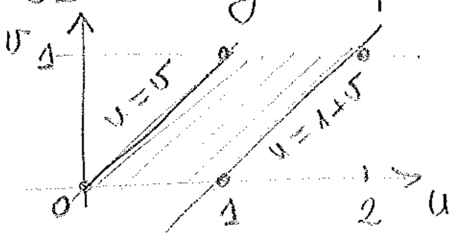
$\left.\begin{matrix} u = x+y \\ v = y \end{matrix}\right| \Rightarrow \left| \begin{matrix} x = u-v \\ y = v \end{matrix}\right.$ $\qquad J = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$h(u,v) = f[u-v, v]\,|1|$

si $f(x,y) = 1$ en $0\leq x\leq 1$ y $0\leq y\leq 1$

$0 \leq u-v \leq 1$

$0 \leq v \leq 1$



$(0,0) \to (0,0)$
$(0,1) \to (1,1)$
$(1,0) \to (1,0)$
$(1,1) \to (2,1)$

$h(u,v) = 1$ en $0 \leq u-v \leq 1$
$\qquad\qquad\qquad\;\; 0 \leq v \leq 1$

ATRÁS