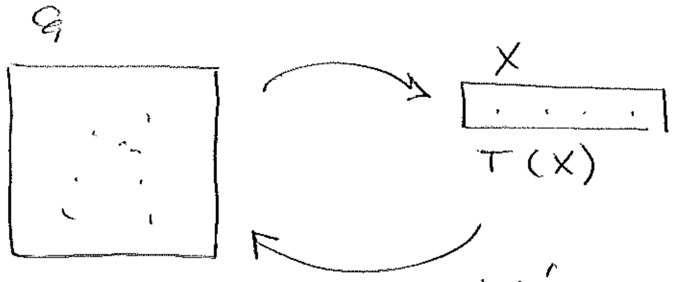
ESTAD_T25. CONTRASTES de HIPÓTESIS.
ERRORES y POTENCIA de un CONTRASTE.
HIPÓTESIS SIMPLES.
LEMA de NEYMAN-PEARSON

Contraste ≡ prueba, test

Según Ho < param. / no param.

H_0 H_1 < simples / compuestas



Regla decisión

$T \in RC \Rightarrow$ rechazo

$T \in RA \Rightarrow$ acepto

Decisiones	Estados naturaleza: Ho cierta	Ho falsa ⇒ H_1 cierta
Aceptar Ho	✓ $1-\alpha$	β
Rechazar Ho	α	✓ $1-\beta$
	1	1

Error tipo I = α = P(Rechazar Ho / Ho cierta) ← nivel de significación

Error tipo II = β = P(Aceptar Ho / Ho falsa)

Potencia del contraste = $1-\beta$

Hipótesis simples (Para contrastes paramétricos)

$$\begin{cases} H_0: \theta = \theta_0 \\ H_1: \theta = \theta_1 \end{cases}$$

Lema Neyman Pearson:
Sean $\mathcal{L}(X,\theta_0)$ y $\mathcal{L}(X,\theta_1)$ las f. verosimilitud muestrales particularizadas para cada hipótesis. La región crítica viene determinada por: (y es la RC más potente para el mismo tamaño).

$$\frac{\mathcal{L}(\bar{X},\theta_0)}{\mathcal{L}(\bar{X},\theta_1)} \leq K \longrightarrow \alpha = P(\bar{X} \in RC/H_0) = P\left[\frac{\mathcal{L}(\bar{X},\theta_0)}{\mathcal{L}(\bar{X},\theta_1)} \leq K / H_0\right] =$$

$$= P\left(T(\bar{X};\theta_0,\theta_1) \leq K_1 / H_0\right).$$

INFERENCIA. CONTRASTES.

Esquema:

1_ Introducción:
- ¿Historia?
- Descriptiva e Inferencia

2_ Inferencia estadística:
- Introducción
- Muestra → población
- Base: cálculo de probabilidades.
- Inferencia < estimación de parámetros / contrastes de hipótesis

3_ Contraste de hipótesis:
- Definición
- Hipótesis nula e hipótesis alternativa
- Región crítica y región de aceptación
- Errores asociados (ETI, ETII)
- Hipótesis simples → α y $1-\beta$.
- Hipótesis compuestas → $P(\theta)$
- Contrastes no paramétricos.

universidad san pablo - ceu   Inferencia. Contrastes.

CARRERA	Inferencia estadística. Tests de hipótesis.		
APELLIDOS		NOMBRE	
ASIGNATURA	FECHA	GRUPO	

La Estadística se preocupa de los métodos de recogida y descripción de datos (Estadística Descriptiva), así como de generar técnicas para el análisis de esta información apoyándose en el Cálculo de Probabilidades (Inferencia estadística).

En la investigación empírica existen conjuntos de elementos sometidos a análisis, denominados poblaciones, que estadísticamente se sintetizan en modelos caracterizados por expresiones matemáticas conteniendo uno o varios parámetros, con valores que permiten diferenciar unas poblaciones de otras de la misma familia.

El conocimiento completo del modelo hace posible el tratamiento estadístico poblacional. Sin embargo, en la realidad, la situación no es ésta, pues lo frecuente es hallarnos ante el desconocimiento de la expresión matemática y de los parámetros, conduciendo a la inutilidad práctica del modelo, siendo preciso obtener aproximaciones.

El tamaño de la población que, a efectos prácticos, puede suponerse infinito o inabarcable, impide o dificulta su análisis completo, por lo que sólo será factible estudiar una parte que se llama muestra, generalizando a la población las conclusiones obtenidas a partir de la muestra.

El proceso de paso de lo particular (muestra) a lo general (población) es lo que se denomina inferencia estadística (inferencia inductiva) y tiene como característica inherente que sus resultados no son exactos sino probables, frente a las conclusiones de la inferencia deductiva exactas y válidas en todas circunstancias.

Basándose en la información proporcionada por la muestra, el proceso de la inferencia estadística contempla dos ámbitos: estimación de parámetros, procedimientos que proporcionan valores aproximados de los parámetros desconocidos (bien sea mediante estimación puntual ó bien mediante estimación por intervalos de confianza), y contrastación de hipótesis: métodos que permiten optar por una de dos hipótesis establecidas sobre el valor de un parámetro o sobre el tipo de modelo matemático supuesto.

CONTRASTE DE HIPÓTESIS

Un contraste o test de hipótesis es una regla de decisión mediante la cual optamos por una u otra hipótesis, a la luz de la información proporcionada por una muestra extraída de la población objeto de estudio.

Una hipótesis ~~no es más~~ estadística no es más que una conjetura sobre el valor o los valores concretos que pueda tomar un parámetro (~~contraste~~ en el caso de los contrastes paramétricos) o sobre el modelo que se supone ~~o~~ característico de la población (contraste no paramétrico).

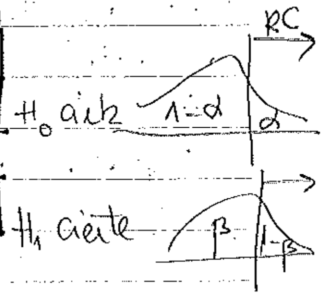
A la hipótesis que se desea contrastar la denominamos hipótesis nula H_0, y a la otra, hipótesis alternativa H_1. La asignación del término nula* o alternativa a una u otra hipótesis es arbitraria si bien, tradicionalmente, se denomina nula la hipótesis que implica el valor existente del parámetro o la que suponemos más estable, siendo precisa una elevada evidencia para rechazarla. Utilizando el símil de un juicio la hipótesis nula es la que se pone en tela de juicio, partiendo de la base de que todo acusado es inocente hasta que se demuestre lo contrario (presunción de inocencia).

* El término hipótesis nula fue empleado por primera vez por Fisher en su exposición sobre el caso de la dama y el té con leche para representar la hipótesis defendida por este investigador: la nula posibilidad de que la dama pudiera distinguir el orden en que vertieron el té y la leche.

El procedimiento para llevar a cabo un contraste es el siguiente: se procede a una partición del espacio muestral X (espacio muestral del parámetro) en dos subconjuntos disjuntos, C y C^*, de tal forma que si el punto muestra X pertenece a uno de ellos, por ejemplo a C, llamado región crítica, se rechaza la hipótesis nula y, si por el contrario, pertenece al subconjunto complementario C^*, región de aceptación, se acepta la hipótesis nula. El rechazo de la hipótesis nula equivale a la aceptación de la alternativa, y viceversa. Debiendo entender la aceptación o rechazo de una hipótesis en el sentido de que la muestra ha proporcionado evidencia suficiente, pero no absoluta, para que sea razonable la aceptación o el rechazo de la hipótesis.

La solución dada al problema de la contrastación de las dos hipótesis implica la posibilidad de acertar o fracasar en la elección al no saber con certeza cuál es la verdadera. La situación queda reflejada en el cuadro siguiente:

		Decisión	
		Aceptar H_0	Rechazar H_0
Hipótesis cierta	H_0	Correcta $1-\alpha$	Errónea (α)
	H_1	Errónea β	Correcta $(1-\beta)$



que expresado de otra manera dice que

- Si la hipótesis nula es correcta y se acepta, la decisión es correcta.
- Si la hipótesis nula es cierta y se rechaza, la decisión es errónea y a este error se le denomina error de Tipo I, o de primera especie.

- Si la hipótesis alternativa es cierta (H_0 falsa) y se rechaza H_0, entonces la decisión es correcta.
- Si la hipótesis alternativa es cierta (H_0 falsa) y se acepta H_0, entonces la decisión es errónea, error denominado error de tipo II o de segunda especie.

Estos dos errores no pueden controlarse simultáneamente. Ante la pregunta de cuál de los dos es más grave todo depende de lo que signifique cada hipótesis en cada caso. Suponiendo que la hipótesis nula es la que nos interesa que sea cierta, será más grave el error de tipo I, es decir, rechazar H_0 siendo ésta cierta. Volviendo al símil del juicio, es más grave condenar a un acusado que resulta ser inocente que dejar libre a un culpable.

Las situaciones de error, como las de acierto, son desconocidas e incontrolables de manera cierta, sin embargo, ~~por~~ ~~eso~~ procuraremos establecer controles sobre ellas mediante el conocimiento de las probabilidades de cometer los mencionados errores. Para ello distinguiremos el caso de hipótesis simple del relativo a hipótesis compuestas.

Hipótesis simples

~~En el caso~~ Si la hipótesis nula se refiere a un parámetro θ, y tanto la hipótesis nula como la hipótesis alternativa se componen de un solo elemento ($H_0: \theta = \theta_0$, $H_1: \theta = \theta_1$) nos encontramos ante lo que denominamos hipótesis simples (formadas por un solo elemento).

5 2

universidad san pablo - ceu Inferencia. Contrastes.

CARRERA		
APELLIDOS		NOMBRE
ASIGNATURA	FECHA	GRUPO

La probabilidad de cometer el error de tipo I (rechazar la hipótesis nula siendo cierta) se llama nivel de significación del test, o tamaño de la región crítica del contraste, y se designa por α.

La probabilidad de cometer el error de Tipo II (aceptar la hipótesis nula siendo falsa) no tiene nombre particular y se representa por β, utilizándose preferentemente su complementario a la unidad, probabilidad llamada potencia del contraste que es la probabilidad de rechazar la hipótesis nula siendo falsa (este suceso equivale a aceptar la hipótesis alternativa siendo cierta), que viene a ser la probabilidad de acertar rechazando.

El cálculo de las probabilidades anteriores se realiza de la siguiente forma. El suceso que el punto muestra X pertenezca a la región crítica, $X \in C$, implica rechazar la hipótesis nula y si ésta es cierta designaremos el suceso por $\{X \in C / H_0\}$, y si la alternativa es cierta por $\{X \in C / H_1\}$.

Según esto, el nivel de significación del contraste es

$$\alpha = P(\text{error de Tipo I}) = P(\text{Rechazar } H_0 \text{ siendo cierta}) =$$

$$= P(X \in RC / H_0)$$

y

$$\beta = P(\text{error de Tipo II}) = P(\text{aceptar } H_0 \text{ siendo falsa}) =$$

$$= P(X \in \overset{RA}{C^*} / H_1).$$

En la práctica, en vez de utilizar β, se recurre a su complementario, la potencia del contraste

$$1-\beta = P(\text{Rechazar } H_0 \text{ siendo falsa}) = 1 - P(\text{aceptar } H_1 \text{ siendo falsa}) =$$

$$= 1 - P(X \in \underset{RA}{C^*} / H_1) = P(X \in \underset{RC}{C} / H_1).$$

Dado que el desconocimiento del experimentador tiene sobre qué hipótesis es la correcta no sabrá en cuál de las cuatro situaciones descritas se encuentra, dos correctas y dos incorrectas. Ante la posibilidad de cometer un error, el experimentador pretende protegerse (intenta controlar la aparición de errores) haciendo que la probabilidad de cometerlo sea mínima, siendo la situación ideal fijar el nivel de significación lo menor posible por ser la probabilidad de cometer un error y, simultáneamente hacer la potencia lo mayor posible por ser la probabilidad de un acierto. α fijo y min β

Este planteamiento no puede llevarse a cabo simultáneamente pues el nivel de significación y la potencia del contraste no son independientes, es decir, no se pueden fijar arbitrariamente por separado.

No obstante, es preciso establecer alguna clase de control sobre las probabilidades de los dos errores a fin de minimizar alguna de ellas. La elección entre el mínimo nivel de significación o la máxima potencia depende del coste que suponga cometer el error de Tipo I o el error de Tipo II. Convencionalmente, se fija el nivel de significación en valores reducidos, por ejemplo, 0'10, 0'05, 0'01, etc.

Hipótesis compuestas

Si la hipótesis nula, o la alternativa, o ambas se refiere a más de un elemento estamos ante una hipótesis compuesta.

En el caso en que la hipótesis nula es simple y la alternativa es compuesta, podemos considerar dos tipos:

1 – $H_0: \theta = \theta_0$, $H_1: \theta > \theta_0$ ó $H_0: \theta = \theta_0$, $H_1: \theta < \theta_0$ — contrastes unilaterales

2 – $H_0: \theta = \theta_0$, $H_1: \theta \neq \theta_0$ — contrastes bilaterales

En los contrastes unilaterales la región crítica se compone de un solo intervalo, siendo del tipo $T(X) \geq K$ o $T(X) \leq K$, pues la hipótesis alternativa se verifica para valores del parámetro mayores o menores que θ_0, según sea el caso, sin que tenga que haber necesaria correspondencia en el sentido de la desigualdad inicial y el final de la región crítica.

Por el contrario, en los test bilaterales la hipótesis alternativa se verifica para cualquier valor del parámetro distinto de θ_0, mayores o menores que θ_0, y la región crítica adopta la forma $|T(X)| \geq K$, es decir,

$$\{[T(x) \leq -k]\} \cup \{[T(x) \geq k]\}$$

Para una hipótesis nula simple $H_0: \theta = \theta_0$ a la que se opone una hipótesis alternativa compuesta H_1, definimos la <u>función de potencia</u> como

$$P(\theta) = P(\text{Rechazar la hipótesis nula } H_0) = P(X \in C),$$

resultando que $P(\theta)$ es función del parámetro θ y obteniéndose para cada valor de θ compatible con la hipótesis alternativa H_1, la potencia que tendría la alternativa simple correspondiente a ese valor de θ.

Cuando la hipótesis nula es simple, $\theta = \theta_0$, la función de potencia particularizada para ella es igual al nivel de significación, $P(\theta) = \alpha$, puesto que

$$P(\theta_0) = P(X \in C / H_0) = P(X \in C / \theta = \theta_0) = \alpha$$

Contrastes no paramétricos

En los contrastes paramétricos las hipótesis vienen referidas a valores que se asignan a un parámetro (o conjunto de parámetros) que caracterizan una distribución de probabilidad $f(x;\theta)$.

Todo el proceso deriva de la hipótesis de partida de que la muestra obtenida procede de una población cuya distribución de probabilidad se supone conocida y donde los procedimientos estadísticos inferenciales se centraban en los parámetros desconocidos de la supuesta distribución poblacional, lo que exige la propiedad de robustez.

Para obviar este problema se han desarrollado las técnicas no paramétricas, donde el conjunto de hipótesis de partida se reducen, o incluso, desaparecen, con lo cual disminuye el riesgo de contaminación del proceso inferencial por una errónea especificación del cuadro de hipótesis iniciales.

Dentro de las técnicas no paramétricas se incluyen dos tipos de situaciones, no mutuamente excluyentes:

- Técnicas no paramétricas, en sentido estricto, donde no aparecen ningún tipo de hipótesis acerca de un determinado parámetro θ de una población, sino que el proceso se basa en un estadístico sin referencia a ningún parámetro poblacional.

- Métodos de distribución libre, en los que el estadístico utilizado presenta una distribución de probabilidad que no depende de la distribución de probabilidad de la población de la que se ha extraído la muestra que suministra información al estadístico.

universidad san pablo - ceu   Inferencia. Contrastes.

CARRERA		
APELLIDOS		NOMBRE
ASIGNATURA	FECHA	GRUPO

En este tipo de técnicas no suele utilizarse directamente la información muestral sobre los valores de la variable objeto de estudio, sino más bien la frecuencia con que aparecen dichos valores en la muestra, la posición de los mismos en una muestra ordenada, el orden o rango que ocupa un valor en la muestra ordenada.

Por otra parte, las técnicas no paramétricas son las únicas que pueden utilizarse si las observaciones se recogen en una escala ordinal o nominal.

Por último, reseñamos que los contrastes no paramétricos son algo menos eficientes (en el sentido de presentar una menor potencia del contraste para un mismo nivel de significación α) que sus correspondientes paramétricos, cuando la población sigue una distribución normal, y más eficientes cuando la distribución de la población no es normal.