ESTAD_T10. 1. DISTRIB. GEOMÉTRICA.
2. DISTRIB. BINOMIAL NEGATIVA.
3. DISTRIB. HIPERGEOMÉTRICA.
(a brortaido) PROPIEDADES.

---

1. DISTRIB. GEOMÉTRICA, G(p)

La distrib. geométrica (al igual que la Bin y la Bin Neg) modeliza fenómenos de tipo dicotómico, en los que:

- El experimento consta de un nº indeterminado de ensayos
  $n =$ nº fracasos + 1 éxito (Repetir la prueba hasta conseguir 1er éxito)
- Los sucesos son dicotómicos: Éxito / Fracaso, con probab. p y q.
- Las probab. son complementarias: $p+q=1$

} pruebas de Bernoulli

- Las probab. son constantes a lo largo de todo el experim.
- Los ensayos son independientes entre sí.

La var. aleatoria que sigue una distrib. geométrica mide el nº de fracasos antes de conseguir el 1er éxito.

$\xi =$ nº fracasos antes 1º éxito, $\xi = 0, 1, 2, \ldots$

~~La funci~~

Función de cuantía

$$P(\xi = x) = q^x \cdot p \quad , \; x = 0,1,2,\ldots \quad \text{(no hay combinac. posibles)}$$

$$\underbrace{q \cdot q \cdot \ldots \cdot q}_{x \text{ fracasos}} \cdot \underbrace{p}_{1 \text{ éxito}}$$

Está bien definida porque:

1 – $p_i \geq 0 \longrightarrow$ Producto de probab >0

2 – $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1 \longrightarrow \sum_{x=0}^{\infty} q^x \cdot p = p \sum_{x=0}^{\infty} q^x \overset{p(1+q+q^2+\ldots)}{=} p \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1.$

progr. geométrica razón q $\left(\frac{1^{\text{er}} \text{ térm. partido}}{1 - \text{razón}}\right)$

último término por la razón menos el 1º, partido por la razón menos 1.

Función de distribución, $F(x)$

$$P(\xi \leq x) = \sum_{x_i=0}^{x} q^{x_i} \cdot p = p \sum_{x_i=0}^{x} q^{x_i} = p \, \frac{q^x \cdot q - 1}{q-1} =$$

$$= p \, \frac{q^{x+1}-1}{q-1} = \cancel{p} \, \frac{1-q^{x+1}}{\cancel{1-q}_{p}} = 1 - q^{x+1}.$$

Función característica

$$\varphi(t) = E[e^{itx}] = \sum_{x=0}^{\infty} e^{itx} P(\xi = x) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{itx} \cdot q^x \cdot p =$$

$$= p \sum_{x=0}^{\infty} (e^{it} \cdot q)^x = p \cdot \frac{1}{1-qe^{it}} = p(1-qe^{it})^{-1}.$$

A partir de la función característica se pueden deducir sus características.

Características

$$E[\xi] = \alpha_1 = \frac{1}{i} \left| \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \frac{1}{i} \cdot \frac{ipq}{(1-q)^2} = \frac{pq}{p^2} = \frac{q}{p}.$$

$$\frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} = \frac{-p(-iqe^{it})}{(1-qe^{it})^2} = \frac{ipq\,e^{it}}{(1-qe^{it})^2}$$

$$E[\xi^2] = \alpha_2 = \frac{1}{i^2} \left| \frac{\partial \varphi^2(t)}{\partial t^2} \right|_{t=0} = \frac{1}{i^2} \cdot \frac{i^2pq(1-q) + 2i^2pq^2}{(1-q)^3} = \frac{1}{i^2} \cdot \frac{i^2p^2q + 2i^2pq^2}{p^3} =$$

$$\frac{\partial^2 \varphi(t)}{\partial t} = \frac{i^2pqe^{it}(1-qe^{it})^{\cancel{2}} - ipqe^{it} \cdot 2(1-qe^{it})^1(-iqe^{it})}{(1-qe^{it})^{\cancel{4}3}} =$$

$$= \frac{i^2pqe^{it}(1-qe^{it}) + 2i^2pq^2e^{2it}}{(1-qe^{it})^3}$$

$$= \frac{1}{i^2}\left(i^2 \frac{q}{p} + 2i^2 \frac{q^2}{p^2}\right) = \frac{q}{p} + 2\frac{q^2}{p^2}$$

luego

$$V[\xi] = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \frac{q}{p} + 2\frac{q^2}{p^2} - \left(\frac{q}{p}\right)^2 = \frac{q}{p} + \frac{q^2}{p^2} =$$

$$= \frac{pq+q^2}{p^2} = \frac{q(p+q)}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

Propiedades

P1 → No tiene la propiedad aditiva o reproductiva.
Lógico, nº fracasos hasta 1er éxito no puede sumarse y salir 1 solo éxito, sería una BN

P2 → Falta de memoria: La probab. de que haya "a+b" fracasos antes del 1er éxito sabiendo que ya han ocurrido "a" fracasos es la misma que obtener "b" fracasos ~~desde el principio~~.

porque es discreta

$$P(\xi \geq a+b / \xi \geq a) = P(\xi \geq b)$$

Dem: $P(\xi \geq a+b / \xi \geq a) = \dfrac{P(\xi \geq a+b ; \xi \geq a)}{P(\xi \geq a)} = \dfrac{P(\xi \geq a+b)}{P(\xi \geq a)} =$

$$= \frac{1 - P(\xi < a+b)}{1 - P(\xi < a)} = \frac{1 - [1 - q^{a+b}]}{1 - [1 - q^a]} = \frac{q^{a+b}}{q^a} = q^b =$$

$$= 1 - [1 - q^b] = 1 - P(\xi < b) = P(\xi \geq b).$$

Aplicaciones: Duración de tiempos de espera

2_DISTRIB. BINOMIAL NEGATIVA, BN(r, p)

La distribución Binomial Negativa modeliza los mismos fenómenos que la distrib. Binomial y la distrib. Geométrica, pero mide algo distinto. Conceptualmente, estos fenóm. se caracterizan por:

- El experimento consta de un nº indeterminado de ensayos: $n = fr + éx$ (realizar la prueba hasta llegar al r-ésimo éxito)
- Los sucesos son dicotómicos, el fenómeno sólo presenta dos características A y no A (éxito / fracaso) con probabilidades p y q, respect.
- Las probabilidades son complementarias: $p + q = 1$

Proble
Berno

- Las probab. se mantienen constantes a lo largo de todo el experimento.
- Los ensayos son independientes entre sí.

La distrib. BN mide el nº de fracasos antes de que se produzca el r-ésimo éxito.

ξ = nº fracasos hasta r-ésimo éxito, $\xi = 0, 1, 2 \ldots$

Función de cuantía

$0 \leq p \leq 1$
$r = 1, 2, \ldots$

$$P(\xi = x) = \binom{r+x-1}{x} \cdot q^x \cdot p^r \quad , \text{para } x = 0, 1, 2 \ldots$$

donde $\binom{r+x-1}{x} = \binom{r+x-1}{r-1} = P^{r-1,\, x}_{r+x-1}$ → permutaciones con repetición del nº ensayos − 1 (último = éxito) en grupos de fr y éx.

$\dfrac{(r+k-1)!}{k!\,(r-1)!}$

q^x ≡ probab. de fracaso, x veces.

p^r ≡ probab. de éxito, r veces.

ESTAD _ T10

la distrib. está bien definida porque:

1. $p_i \geq 0, \forall i$ → producto nº posit.
2. $\sum p_i = 1$ → $\sum_{x=0}^{\infty} \binom{r+x-1}{x} q^x p^r = p^r \underbrace{\sum_{x=0}^{\infty} \binom{r+x-1}{x} \cdot q^x}_{?}$?

Teniendo en cuenta que

$$\binom{x+r-1}{x} = (-1)^x \binom{-r}{x}$$

la función de cuantía también puede expresarse como:

$$P(\xi = x) = \binom{-r}{x} (-1)^x q^x p^r = \binom{-r}{x} (-q)^x p^r$$

lo que justifica el nombre de Binomial Negativa, pues se parece mucho a la f. de cuantía de una Bin.

Dado que $(1-q)^{-r} = \sum_{x=0}^{\infty} \binom{-r}{x} (-q)^x$

entonces $\sum_{x=0}^{\infty} P(\xi = x) = \sum_{x=0}^{\infty} \binom{-r}{x} (-q)^x p^r = p^r \sum_{x=0}^{\infty} \binom{-r}{x} (-q)^x =$

$$= p^r (1-q)^{-r} = p^r \cdot p^{-r} = p^0 = 1.$$

Función de distribución, $F(x)$

$$F(x) = P(\xi \leq x) = \sum_{k=0}^{x} P(\xi = k) = \sum_{k=0}^{x} \binom{k+r-1}{k} p^r q^k$$

Función característica, $\varphi(t)$

$$\varphi(t) = E[e^{itx}] = \sum_{x=0}^{\infty} e^{itx} P(\xi = x) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{itx} \binom{-r}{x} (-q)^x p^r =$$

$$= p^r \sum_{x=0}^{\infty} \cancel{e^{itx}} \binom{-r}{x} (-qe^{it})^x = p^r (1 - qe^{it})^{-r}$$

sale + fácil como suma de $G(p)$

ESTAD_T10

A partir de la f. característica, se pueden deducir la esperanza y la varianza.

Características

$$E[\xi] = \alpha_1 = \frac{1}{i} \left| \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \frac{1}{i} \cdot ir\frac{q}{p} = r\frac{q}{p}$$

$$\frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} = p^r(-r)(1-qe^{it})^{-r-1}(-qie^{it}) = irqp^r e^{it}(1-qe^{it})^{-r-1}$$

$$\left.\frac{\partial \varphi(t)}{\partial t}\right|_{t=0} = irqp^r(1-q)^{-r-1} = irqp^r(p)^{-r-1} = irqp^{-1}$$

$$E[\xi^2] = \alpha_2 = \frac{1}{i^2} \left| \frac{\partial^2 \varphi(t)}{\partial t^2} \right|_{t=0} = r\frac{q}{p} + r(r+1)\frac{q^2}{p^2}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi(t)}{\partial t^2} = irqp^r\left[ie^{it}(1-qe^{it})^{-r-1} + e^{it}(-r-1)(1-qe^{it})^{-r-2}(-iqe^{it})\right]$$

$$\left.\frac{\partial^2 \varphi(t)}{\partial t^2}\right|_{t=0} = irqp^r\left[i(1-q)^{-r-1} + (r+1)(1-q)^{-r-2}(+iq)\right] =$$

$$= i^2 rqp^r p^{-r-1} + i^2 rq^2 p^r (r+1) p^{-r-2} =$$

$$= i^2 r\, q/p + i^2 r(r+1)\, q^2/p^2$$

$$V[\xi] = \mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = r\frac{q}{p} + r(r+1)\frac{q^2}{p^2} - \left(r\frac{q}{p}\right)^2 =$$

$$= r\frac{q}{p} + \cancel{r^2\frac{q^2}{p^2}} + r\frac{q^2}{p^2} - \cancel{r^2\frac{q^2}{p^2}} = r\left(\frac{q}{p} + \frac{q^2}{p^2}\right) =$$

$$= r\left(\frac{pq+q^2}{p^2}\right) = r\frac{q(p+q)}{p^2} = r\frac{q}{p^2}.$$

Observación $\to$ $BN(r=1, p) \equiv G(p)$, lo que conlleva a la siguiente propiedad:

P1 $\to$ La suma de Geométricas independientes es una Binomial Negativa.

$\xi_1, \dots, \xi_n$ v.a.i.i.d. $\to G(p)$

$\xi = \xi_1 + \dots + \xi_n$, $\xi \longrightarrow BN(r=n, p)$.

Dem: Utilizando la f. característica.

$$\varphi_{\xi_1+\dots+\xi_n}(t) \overset{\text{indep}}{=} \varphi_{\xi_1}(t) \cdot \varphi_{\xi_2}(t) \cdot \dots \cdot \varphi_{\xi_n}(t) =$$
$$= \overbrace{p(1-qe^{it})^{-1} \cdot \dots \cdot p(1-qe^{it})^{-1}}^{n} =$$
$$= p^n(1-qe^{it})^{-n} \equiv \varphi_{BN(n,p)}(t).$$

P2 $\to$ La suma de BN indep. tb. es BN.

$$\left.\begin{array}{l} \xi_1 \to BN(r_1, p) \\ \xi_2 \to BN(r_2, p) \end{array}\right\} \text{indep} \quad \xi_1 + \xi_2 \longrightarrow BN(r_1 + r_2, p)$$

Dem:

$$\varphi_{\xi_1+\xi_2}(t) = \varphi_{\xi_1}(t) \cdot \varphi_{\xi_2}(t) = p^{r_1}(1-qe^{it})^{-r_1} \cdot p^{r_2}(1-qe^{it})^{-r_2} =$$
$$= p^{r_1+r_2}(1-qe^{it})^{-(r_1+r_2)} \equiv \varphi_{BN(r_1+r_2, p)}(t).$$

3. DISTRIB. HIPERGEOMÉTRICA

~~Conceptualmente~~, la distribución hipergeométrica es la única de los modelo discretos univariantes (Binom, Poisson, Geométrica y Bin. Negativa) en la que no se verifica la condición de independencia.

Conceptualmente, un fenómeno aleatorio se comporta con arreglo a una distrib. Hipergeométrica si:

- El experimento consiste en la realización de n ensayos. (n determinado, como binomial)
- Los sucesos son dicotómicos: Éxito/Fracaso, con probabilidades (p y q)*. (Para multicotómicos → hipergeométrica multiv.)
- Las probabilidades son complementarias (p+q = 1)(*)
- Las probab. NO permanecen constantes a lo largo del experimento.
- Los ensayos NO son independientes entre sí.

La distrib. hipergeométrica proporciona la probabilidad de que en un experimento con n ensayos, haya x éxitos y n−x fracasos, siendo el experimento evaluar un colectivo de N individuos, de los que N_1 son éxitos y N_2 son fracasos. Una vez evaluado un individuo, NO puede volver al colectivo (extrac. SIN reposición).

Las probab. son ≠ en cada ensayo, por lo que habría que hablar de p_i, q_i. Al hablar de p y q nos referimos a las probab. INICIALES.

ESTAD_T10

~~Pob~~	Población		Muestra	Probab. Inicial
~~Individ~~ Éx	N_1	$\longrightarrow$	x	$p = N_1/N$
Fr.	N_2	$\longrightarrow$	$n-x$	$q = N_2/N$
Total	$N = N_1 + N_2$	$\longrightarrow$	n	$p+q = 1$

ξ = "nº éxitos en una muestra sin reposic. de tamaño n"

$\xi = 0, 1, \ldots \min\{n, N_1\}$

$\xi \longrightarrow H(N, n, p)$ donde $N \to$ tamaño poblac.
$n \to$ tamaño muestral
$p \to$ probab. inicial de Éxito

~~La idea de la~~.

El esquema de la distrib. hipergeométrica coincide con el de la distrib. Binomial, con la diferencia de que las probabilidades cambian en cada extracción.

Función de cuantía

$\max\{0, n-N_2\} \leq x \leq \min\{n, N_1\}$ (*)

$$P(\xi = x) = \frac{\binom{N_1}{x}\binom{N_2}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad , \quad \text{para } \begin{array}{l} x = 0, 1, \ldots \min\{n, N_1\} \\ n-x = 0, 1, \ldots \min\{n, N_2\} \end{array}$$

$$P(\xi = x) \underset{\uparrow}{=} P(\underbrace{E, \ldots, E}_{x}, \underbrace{F, \ldots, F}_{n-x}) = \frac{N_1}{N} \cdot \frac{N_1 - 1}{N-1} \cdot \ldots \cdot \frac{N_1 - (x-1)}{N-(x-1)} \cdot$$

sin tener en cuenta las ≠ posib.

$$\cdot \frac{N_2}{N-x} \cdot \frac{N_2 - 1}{N-x-1} \cdot \ldots \cdot \frac{N_2 - (n-x-1)}{N-x-(n-x-1)}$$

$$= \frac{\frac{N_1!}{(N_1-x)!} \cdot \frac{N_2!}{[N_2-(n-x)]!}}{\frac{N!}{(N-n)!}}$$

Considerando las ≠ posibilidades:

Permutaciones con repetición de n en grupos de x y n−x

$$P_n^{x,n-x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!} = \binom{n}{x}$$

$$P(\xi = x) = \frac{n!}{x!\,(n-x)!} \cdot \frac{\frac{N_1!}{(N_1-x)!} \cdot \frac{N_2!}{[N_2-(n-x)]!}}{\frac{N!}{(N-n)!}} =$$

$$= \frac{\frac{N_1!}{x!\,(N_1-x)!} \cdot \frac{N_2!}{[N_2-(n-x)]!\,(n-x)!}}{\frac{N!}{n!\,(N-n)!}} = \frac{\binom{N_1}{x}\binom{N_2}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

los posibles valores x serán los nº naturales tq

⊗ $\max\{0, n-N_2\} \leq x \leq \min\{n, N_1\}$

por lo que

Función de distribución, $F(x)$

$$F(x) = P(\xi \leq x) = \begin{cases} 0 & x < \max\{0, n-N_2\} \\ \sum_{k=0}^{x} \frac{\binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}}{\binom{N}{n}} & k \leq x < k+1 \\ 1 & x \geq \min\{n, N_1\} \end{cases}$$

⊗ $n - x \leq \min\{n, N_2\} \Rightarrow -x \leq \min\{n-n, N_2-n\}$ multipl. por (−1)

$x \geq \max\{0, n-N_2\}$

Otra manera de escribir la f. de cuantía es:

$$P(\xi=x)=\frac{\binom{N\cdot p}{x}\cdot\binom{N\cdot q}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad \max\{0,n-Nq\}\leq x\leq \min\{n,Np\}$$

Esta función de probabilidad está bien definida porque:

1 - $p_i \geq 0, \forall i$

2 - $\sum p_i = 1 \longrightarrow \sum_x \frac{\binom{Np}{x}\cdot\binom{Nq}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{Np+Nq}{x+n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{N}{n}}{\binom{N}{n}} = 1$

Con esta forma, la f. distrib. sería:

$$F(x)=P(\xi\leq x)=\begin{cases} 0 & x<\max\{0,n-Nq\} \\ \sum_{i=0}^{x}\frac{\binom{Np}{x}\cdot\binom{Nq}{n-x}}{\binom{N}{n}} & \max\{0,n-Nq\}\leq x<\min\{n,Np\} \\ 1 & x\geq \min\{n,Np\}\end{cases}$$

Características (Por def, la f. característica no aparece).

$$E[\xi]=\sum_x x\,P(\xi=x)=\sum_x x\cdot\frac{\binom{Np}{x}\cdot\binom{Nq}{n-x}}{\binom{N}{n}}=$$

$$=\frac{1}{\binom{N}{n}}\sum_x \cancel{x}\,\frac{Np(Np-1)\dots(Np-x+1)\cancel{(Np-x)!}\binom{Nq}{n-x}}{\cancel{(Np-x)!}\;\cancel{x}\,(x-1)!}=$$

$$=\frac{Np}{\binom{N}{n}}\sum_x\frac{(Np-1)!}{(x-1)!\,(Np-1-x)!}\cdot\binom{Nq}{n-x}=$$

$$=\frac{Np}{\binom{N}{n}}\sum_x\binom{Np-1}{x-1}\cdot\binom{Nq}{n-x}=\frac{Np}{\binom{N}{n}}\cdot\binom{Np-1+Nq}{x-1+n-x}=$$

$$=\frac{Np}{\binom{N}{n}}\cdot\binom{N-1}{n-1}=Np\cdot\frac{\frac{(N-1)!}{(n-1)!\,(N-1-n+1)!}}{\frac{N(N-1)!}{n(n-1)!\,(N-n)!}}=\frac{Np}{\frac{N}{n}}=\boxed{np}$$

$$V[\xi] = \mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$$

$$\alpha_2 = E[\xi^2] = \sum_x x^2 \cdot \frac{\binom{Np}{x}\binom{Nq}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \sum_x x^{\cancel{2}} \cdot \frac{\frac{Np}{\cancel{x}}\binom{Np-1}{x-1}\cdot\binom{Nq}{n-x}}{\binom{N}{n}} =$$

$$= \frac{Np}{\binom{N}{n}} \cdot \sum_x \underset{x+1-1}{\overset{}{x}} \binom{Np-1}{x-1}\binom{Nq}{n-x} = \frac{Np}{\binom{N}{n}}\left[\sum_x (x-1)\underbrace{\binom{Np-1}{x-1}}_{\frac{Np-1}{\cancel{x-1}}\binom{Np-2}{x-2}}\binom{Nq}{n-x} + \right.$$

$$\left. + \sum_x \binom{Np-1}{x-1}\binom{Nq}{n-x}\right] =$$

$$= \frac{Np}{\binom{N}{n}}\left[(Np-1)\sum_x \binom{Np-2}{x-2}\binom{Nq}{n-x} + \sum_x \binom{Np-1}{x-1}\binom{Nq}{n-x}\right] =$$

$$= \frac{Np}{\binom{N}{n}} \cdot \left[(Np-1)\binom{Np-2+Nq}{\cancel{x}-2+n-\cancel{x}} + \binom{Np-1+Nq}{\cancel{x}-1+n-\cancel{x}}\right] =$$

$$= \frac{Np}{\binom{N}{n}}\left[(Np-1)\binom{N-2}{n-2} + \binom{N-1}{n-1}\right] =$$

$$= \frac{Np \cdot n!\,(N-n)!}{N!}\left[(Np-1)\frac{\overset{\frac{(N-1)!}{N-1}}{(N-2)!}}{(n-2)!\,(N-n)!} + \frac{(N-1)!}{(n-1)!\,(N-n)!}\right] =$$

$$= \frac{Np\cdot n!\,(N-n)!}{N!}\left[(Np-1)\frac{(N-1)!\,(n-1)}{(N-1)\,(n-1)!\,(N-n)!} + \frac{(N-1)!}{(n-1)!\,(N-n)!}\right] =$$

$$= \frac{Np\cdot n!\,(N-n)!}{N!}\left[\frac{(Np-1)\cdot(N-1)!\,(n-1) + (N-1)(N-1)!}{(N-1)(n-1)!\,(N-n)!}\right] =$$

$$= \frac{\cancel{N}p\cdot n\cancel{(n-1)!}\cancel{(N-n)!}}{\cancel{N}\cancel{(N-1)!}}\left[\frac{(Np-1)\cdot\cancel{(N-1)!}\,(n-1) + (N-1)\cancel{(N-1)!}}{(N-1)\cancel{(n-1)!}\,\cancel{(N-n)!}}\right] =$$

$$= np\frac{[(Np-1)(n-1) + (N-1)]}{N-1}$$

luego $V[\xi] = np\dfrac{[(Np-1)(n-1)+(N-1)]}{N-1} - (np)^2 =$

$$= np\frac{[(Np-1)(n-1)+(N-1)-(N-1)(np)]}{N-1} =$$

$$= np\frac{[\cancel{Np}n - n - Np \cancel{+1} + N \cancel{-1} - \cancel{npN} + np]}{N-1} =$$

$$= \frac{np}{N-1}(N + np - Np - n) = \frac{np}{N-1}(N(\underbrace{1-p}_{q}) + n(\underbrace{p-1}_{-q})) = npq\frac{(N-n)}{N-1}$$

$$= npq\,\frac{N-n}{N-1}$$ ~~(no me sale)~~

Propiedades

P1 $\to H(N,n,p) \xrightarrow[N\to\infty]{} B(n,p)$

Dem

$$P(\xi = x) = \frac{\binom{Np}{x}\binom{Nq}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{(Np)!}{x!\,(Np-x)!}\,\frac{(Nq)!}{(n-x)!\,(Nq-n+x)!}\,\frac{n!\,(N-n)!}{N!} =$$

$$= \frac{n!}{x!\,(n-x)!}\cdot\frac{(Np)!\,(Nq)!\,(N-n)!}{(Np-x)!\,(Nq-n+x)!\,N!} =$$

$$= \binom{n}{x}\frac{Np(Np-1)\cdot\ldots\cdot(Np-x+1)\cdot\cancel{(Np-x)!}}{\cancel{(Np-x)!}}\,\frac{Nq(Nq-1)\ldots(Nq-n-x+1)\cancel{(Nq-n-x)!}}{\cancel{(Nq-n-x)!}}$$

$$\cdot\frac{\cancel{(N-n)!}}{N(N-1)\ldots(N-n+1)\cancel{(N-n)!}} =$$

El numerador es un polinomio en N de grado

$x + (n-x) \Rightarrow$ grado n.

El denominador tb. es un polinomio en N de grado n, por lo que tomando límites, el límite será el cociente de los coeficientes de mayor grado,

Num $\longrightarrow (Np)^x \cdot (Nq)^{n-x}$

Denom $\longrightarrow N^n$

$$\lim_{N \to \infty} P(\xi = x) = \binom{n}{x} \cdot \lim_{N \to \infty} \frac{(Np)^x (Nq)^{n-x}}{N^n} =$$

$$= \binom{n}{x} \cdot \frac{p^x \cdot q^{n-x}}{1} = \text{f. cuantía } B(n,p).$$