1. PROCESO ESTOCÁSTICO ESTACIONARIO

Proceso estocástico → familia de v.a. que corresponden a momentos suc. de tiemp

Caracterización
- F distrib. conjunta $F[Y(t_1), \ldots, Y(t_K)]$ mejor, + complicado
- Momentos $\begin{cases} \mu_t \\ \gamma_{tt} \\ \gamma_{ts} \longrightarrow \rho_{ts} \end{cases}$ peor; Normalidad ⇒ perfecto.

Estacionario en sentido estricto: $F[Y_{t_1+m}, Y_{t_2+m}, \ldots, Y_{t_K+m}] = F[Y_{t_1} \ldots Y_{t_K}]$.

Estacionario en sentido amplio (o de segundo orden):
- ↳ 1 – $E[Y_t - \mu]^2 = +\sigma^2 < +\infty, \forall t$
- ↳ 2 – $E[(Y_{t+k} - \mu)(Y_t - \mu)] = \gamma_K, \forall t$ (sólo depende del lapso de t)
- ↳ Se asume la estacionariedad en media (1er orden): $E[Y_t] = \mu, \forall t$.

Estac. sentido estricto ⇒ Estac. sentido amplio
$\not\Leftarrow$
$\Leftarrow$ + Normalidad

Estacionario ⇒ $\rho_K = \frac{\gamma_K}{\gamma_0}, K \geq 0$ y $\rho_K = \rho_{-K}$

$$\Rightarrow \hat{\mu} = \frac{1}{T} \sum^{T} Y_t ; \ \hat{\gamma}_0 = \frac{1}{T} \sum^{T} (Y_t - \hat{\mu})^2 ; \ \hat{\gamma}_K = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-K} (Y_{t+k} - \hat{\mu})(Y_t - \hat{\mu})$$

Ergodicidad → condición necesaria para estimador consistente ($|\rho_K| \xrightarrow[K \to \infty]{} 0$).

2. RUIDO BLANCO

Procesos lineales → procesos estacionarios y ergódicos que se pueden representar como c.l. de var. aleat.

Ruido Blanco (puramente aleat.) → $Y_t = \varepsilon_t$, donde (no especifica normalidad)
$E[\varepsilon_t] = 0, \forall t$
$V[\varepsilon_t] = E[\varepsilon_t^2] = \sigma^2_\varepsilon, \forall t$
$E[\varepsilon_t \varepsilon_{t'}] = 0, \forall t \neq t'$

3. TMA DESCOMPOSICIÓN de WALD

Cualquier proceso estocástico estacionario puede representarse de manera única como la suma de dos procesos mutuamente incorrelac:

$Y_t = D_t + U_t$ $\begin{cases} D_t \text{ (señal)} \to \text{lineal m. determinista} \\ U_t \text{ (ruido)} \to \text{Proceso MA } (\infty) \end{cases}$

4. MODELOS AUTORREGRESIVOS (AR)

AR(p) → $Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \ldots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$ / $\varepsilon_t \equiv$ ruido blanco

$$\phi^p(L)\, Y_t = \varepsilon_t$$

La variable depende de su pasado + ruido blanco

Operador de retardos: $\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \ldots - \phi_p L^p$

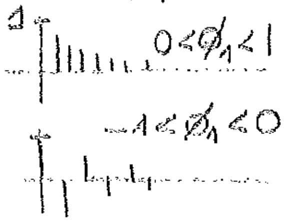
$AR(1) \longrightarrow Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t \sim (1-\phi_1 L) Y_t = \varepsilon_t$ (ε_t no influye ni en el pasado ni en el futuro de Y_t)

Estacionario si $|L|>1 \iff |\phi_1|<1$
($\neq$ explosivo)

Sp. $|\phi_1|<1$ y Arranca en $-\infty \Longrightarrow E[Y_t]=0$.

Si sp. $Y_t = \delta + \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t \Longrightarrow E[Y_t] = E[Y_{t-1}] = \mu = \dfrac{\delta}{1-\phi_1}$.

$\rightarrow$ Para $\mu = 0$, $\begin{cases} \gamma_0 = \dfrac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi_1^2} \\ \gamma_\tau = \phi_1 \gamma_{\tau-1}, \ \tau>0 \end{cases} \Longrightarrow \rho_\tau = \phi_1^\tau$



$AR(1) \sim MA(\infty)$, ya que $Y_t = \dfrac{1}{1-\phi_1 L}\varepsilon_t$ y si $|\phi_1 L|<1 \Rightarrow \dfrac{1}{1-\phi_1 L} \equiv$ suma progr. geom. de razón $|\phi_1 L|<1$
[illegible]

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} (\phi_1 L)^j \varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j \varepsilon_{t-j}$$

$AR(2) \longrightarrow Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t \sim (1-\phi_1 L - \phi_2 L^2) Y_t = \varepsilon_t$

Estacionario si raíces de $1-\phi_1 L - \phi_2 L^2 = 0$ fuera círculo unidad

Si estacionario y arranca en $-\infty \Rightarrow \mu = 0 \Rightarrow$

$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + \sigma_\varepsilon^2$

$\gamma_\tau = \phi_1 \gamma_{\tau-1} + \phi_2 \gamma_{\tau-2}, \ \tau>0 \Longrightarrow \rho_\tau = \phi_1 \rho_{\tau-1} + \phi_2 \rho_{\tau-2}, \ \tau>0$.

Podemos determinar ϕ_1 y ϕ_2 haciendo $\tau=1, \tau=2$ en el correlograma $\rightarrow$ Ec. de Yule-Walker:

$$\left.\begin{array}{l} \rho_1 = \phi_1 + \phi_2 \rho_1 \\ \rho_2 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \end{array}\right\} \longrightarrow \text{Soluc: } \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix}$$

$AR(2) \sim MA(+\infty)$, ya que $Y_t = \dfrac{1}{1-\phi_1 L - \phi_2 L^2}\varepsilon_t$
[illegible]

$AR(p) \rightarrow Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t \sim (1-\phi_1 L - \dots - \phi_p L^p) Y_t = \varepsilon_t$.

Estacionario si raíces de $\phi^p(L)=0$ fuera círculo unidad

Sp. estacionario y arranca en $-\infty$

Con cte $\rightarrow Y_t = \delta + \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_p Y_{t-p} \Longrightarrow \mu = \dfrac{\delta}{1-\phi_1-\dots-\phi_p}$

Sin cte $\rightarrow \mu = 0$

$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \dots + \phi_p \gamma_p + \sigma_\varepsilon^2$

$\gamma_\tau = \phi_1 \gamma_{\tau-1} + \dots + \phi_p \gamma_{\tau-p}, \ \tau>0$

$\rho_\tau = \phi_1 \rho_{\tau-1} + \dots + \phi_p \rho_{\tau-p}, \ \tau>0$

Tomando ..., $\rho_1 \dots \rho_p$ ..., como las p condiciones iniciales, se pueden obtener $\phi_1 \dots \phi_p$ a través del correlograma:

$$\left.\begin{array}{l} \rho_1 = \phi_1 + \phi_2\rho_1 + \dots + \phi_p\rho_{p-1} \\ \rho_2 = \phi_1\rho_1 + \phi_2 + \dots + \phi_p\rho_{p-2} \\ \dots \\ \rho_p = \phi_1\rho_{p-1} + \phi_2\rho_{p-2} + \dots + \phi_p \end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix}\phi_1 \\ \vdots \\ \phi_p\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{p-2} \\ \vdots & & & \\ \rho_{p-1} & \cdots & & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix}\rho_1 \\ \vdots \\ \rho_p\end{pmatrix}$$

AR(p) / p finito y proceso estacionario $\Rightarrow$ AR(p) $\sim$ MA(∞).

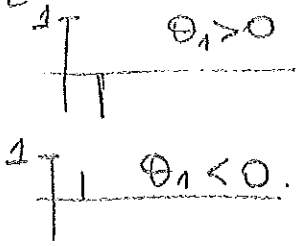
5. MODELOS MEDIAS MÓVILES

MA(q) $\rightarrow Y_t = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q\varepsilon_{t-q} \sim Y_t = \theta^q(L)\,\varepsilon_t$

$\mu = 0$, si incorporamos cte $\mu = \delta$

MA(1) $\rightarrow Y_t = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} \sim Y_t = (1-\theta_1 L)\,\varepsilon_t$

$$\left.\begin{array}{l} \gamma_0 = (1+\theta_1^2)\,\sigma_\varepsilon^2 \\ \gamma_1 = -\theta_1\sigma_\varepsilon^2 \\ \gamma_\tau = 0 \quad , \tau > 1 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} \rho_0 = 1 \\ \rho_1 = \dfrac{-\theta_1}{1+\theta_1^2} \\ \rho_\tau = 0 \ , \tau > 1 \end{array}$$



MA(MA(1) siempre estacionario
invertible si $|\theta_1| < 1$

MA(2) $\rightarrow Y_t = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2} \sim Y_t = (1-\theta_1 L - \theta_2 L^2)\,\varepsilon_t$

$$\left.\begin{array}{l} \gamma_0 = (1+\theta_1^2+\theta_2^2)\,\sigma_\varepsilon^2 \\ \gamma_1 = (-\theta_1 + \theta_1\theta_2)\,\sigma_\varepsilon^2 \\ \gamma_2 = -\theta_2\sigma_\varepsilon^2 \\ \gamma_\tau = 0 \quad , \tau > 2 \end{array}\right| \rightarrow \begin{array}{l} \rho_0 = 1 \\ \rho_1 = \dfrac{-\theta_1+\theta_1\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} \\ \rho_2 = \dfrac{-\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} \\ \rho_\tau = 0 \quad , \tau > 2. \end{array}$$

MA(2) invertible si raíces de $1-\theta_1 L - \theta_2 L^2 = 0$ fuera círculo unidad

MA(q) $\rightarrow Y_t = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q\varepsilon_{t-q} \sim Y_t = (1-\theta_1 L - \theta_2 L^2 - \dots - \theta_q L^q)\,\varepsilon_t$

$$\gamma_0 = (1+\theta_1^2+\dots+\theta_q^2)\,\sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_\tau = \begin{cases} (-\theta_\tau + \theta_1\theta_{\tau+1} + \dots + \theta_{q-\tau}\theta_q)\,\sigma_\varepsilon^2 & , \tau = 1 \dots q \\ 0 & , \tau > q \end{cases}$$

$$\rho_\tau = \begin{cases} \gamma_\tau / \gamma_0 \\ 0 \end{cases}$$

MA(q) invertible si las raíces de $1-\theta_1 L - \dots - \theta_q L^q = 0$ están fuera del círculo unidad.

6. MODELOS MIXTOS ARMA

ARMA $(p,q) \longrightarrow Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \dots - \phi_p Y_{t-p} = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$

$$(1-\phi_1 L - \dots - \phi_p L^p) Y_t = (1-\theta_1 L - \dots - \theta_q L^q)\varepsilon_t$$

$$\phi^p(L) Y_t = \theta^q(L)\varepsilon_t$$

Estacionario si raíces de $\phi(L)=0$ fuera círculo unidad

$\Rightarrow$ ARMA$(p,q) \sim$ MA$(+\infty) \rightarrow Y_t = \dfrac{\theta(L)}{\phi(L)}\varepsilon_t = \psi(L)\varepsilon_t$

con $\phi(L)\cdot\psi(L) = \theta(L)$

$\psi(L) = 1 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \dots$

Invertible si raíces de $\theta(L)=0$ fuera círculo unidad

$\Rightarrow$ ARMA$(p,q) \sim$ AR$(+\infty) \rightarrow \varepsilon_t = \dfrac{\phi(L)}{\theta(L)} Y_t = \pi(L) Y_t$

con $\pi(L)\cdot\theta(L) = \phi(L)$

$\pi(L) = 1 - \pi_1 L - \pi_2 L^2 - \dots$

ARMA $(1,1) \longrightarrow Y_t - \phi_1 Y_{t-1} = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$

$$\gamma_0 = \phi_1\gamma_1 + \sigma_\varepsilon^2 - \theta_1(\phi_1-\theta_1)\sigma_\varepsilon^2 = \phi_1\gamma_1 + [1-\theta_1\phi_1+\theta_1^2]\sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_1 = \phi_1\gamma_0 + 0 - \theta_1\sigma_\varepsilon^2 = \phi_1\gamma_0 - \theta_1\sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_\tau = \phi_1\gamma_{\tau-1} + 0 - \theta_1\cdot 0 = \phi_1\gamma_{\tau-1}, \quad \tau>1$$

de donde $\begin{cases} \rho_1 = \dfrac{(1-\phi_1\theta_1)(\phi_1-\theta_1)}{1-2\theta_1\phi_1+\theta_1^2} \\ \rho_\tau = \phi\,\rho_{\tau-1} \quad , \tau>1 \end{cases}$

ARMA $(p,q) \longrightarrow \gamma_\tau - \phi_1\gamma_{\tau-1} - \dots - \phi_p\gamma_{\tau-p} = 0 \quad , \tau > q$

$$\rho_\tau - \phi_1\rho_{\tau-1} - \dots - \phi_p\rho_{\tau-p} = 0 \quad , \tau > q$$

para $\rho_1 \dots \rho_q$ interviene la parte MA

¿Raíces comunes? Factorizar AR(p) y MA(q) y buscarlas

$$\lambda^p - \phi_1\lambda^{p-1} - \dots - \phi_p\lambda^0 = 0 \longrightarrow \lambda_1 \dots \lambda_p$$

$$\delta^q - \theta_1\delta^{q-1} - \dots - \theta_q\delta^0 = 0 \longrightarrow \delta_1 \dots \delta_q$$

RUIDO BLANCO → Proceso puramente aleatorio

$$Y_t = \varepsilon_t \quad , \text{donde } E[\varepsilon_t] = 0, \ \forall t$$
$$V[\varepsilon_t] = \sigma_\varepsilon^2 \ , \forall t$$
$$\operatorname{cov}(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0 \ , \forall t \neq s .$$

AR → Proceso autorregresivo, dependen de su propio pasado.

$$AR(p) = Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t \ / \ \varepsilon_t \text{ ruido blanco}$$

$$(1-\phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p) Y_t = \varepsilon_t \quad | \ L \equiv \text{operador de retardos}$$
$$L^p Y_t = Y_{t-p}$$

$$\phi(L) Y_t = \varepsilon_t$$

$AR(1) \to Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t \longrightarrow (1-\phi_1 L) Y_t = \varepsilon_t$

~~Para~~ Estacionario si las raíces de $1-\phi_1 L = 0$ fuera círculo unid

- Estacionario si $|\phi_1| < 1$.
- $\left.\begin{array}{l} |\phi_1| < 1 \\ \quad + \\ \text{Arranca en } -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow E(Y_t) = 0$

Si tiene cte.

$Y_t = \delta + \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$.

$E(Y_t) = \mu = \delta + \phi_1 \mu$

luego $\mu = \dfrac{\delta}{1-\phi_1}$.

$$\boxed{\begin{array}{ll} \Rightarrow \gamma_0 = \dfrac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi_1^2} & \Rightarrow \rho_0 = 1 \\ \Rightarrow \gamma_\tau = \phi_1 \gamma_{\tau-1} \ , \ \tau > 0 & \rho_\tau = \phi_1^\tau \end{array}}$$

$AR(1) \sim MA(\infty) \qquad Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j \varepsilon_{t-j}$

$AR(2) \to Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t \longrightarrow (1-\phi_1 L - \phi_2 L^2) Y_t = \varepsilon_t$

Estacionario si raíces de $1-\phi_1 L - \phi_2 L^2 = 0$ fuera círculo unidad etc.

$AR(p) \to Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t \to (1-\phi_1 L - \dots - \phi_p L^p) Y_t = \varepsilon_t$.

Estacionario si raíces de $\phi(L) = 0$ fuera círc. unidad

tirar con cte

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \dots + \phi_p \gamma_p + \sigma_\varepsilon^2$$
$$\tau > 0, \ \gamma_\tau = \phi_1 \gamma_{\tau-1} + \dots + \phi_p \gamma_{\tau-p} \longrightarrow \rho_\tau = \phi_1 \rho_{\tau-1} + \dots + \phi_p \rho_{\tau-p}$$

A partir de $\rho_0, \rho_1 \dots \rho_{p-1}$ se pueden obtener $\phi_1 \dots \phi_p$.

MA $\longrightarrow$ Proceso medias móviles, depende del ruido blanco en el momento actual y en el pasado.

$$MA(q) \rightarrow Y_t = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q\varepsilon_{t-q} \quad / \ \varepsilon \text{ ruido blanco}$$

$$Y_t = (1-\theta_1 L - \theta_2 L^2 - \dots - \theta_q L^q)\,\varepsilon_t$$

$$Y_t = \theta(L)\,\varepsilon_t$$

~~MA(1)~~

$$MA(1) \longrightarrow Y_t = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1}$$

Invertible si $|\theta_1| < 1$

Invertible $\equiv$ $MA(1) \sim AR(\infty) \Rightarrow$

$$\varepsilon_t = Y_t + \theta_1 Y_{t-1} + \theta_2 Y_{t-2} + \dots$$

$$\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j Y_{t-j}$$

$$\gamma_0 = (1+\theta_1^2)\sigma_\varepsilon^2$$
$$\gamma_1 = -\theta_1\sigma_\varepsilon^2 \qquad \Rightarrow \rho_1 = \frac{-\theta_1}{1+\theta_1^2}$$
$$\gamma_2 = \gamma_3 = \dots = 0 \qquad \Rightarrow \rho_2 = \rho_3 = \dots = 0$$

$$MA(q) \rightarrow Y_t = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q\varepsilon_{t-q}$$

$$Y_t = (1-\theta_1 L - \dots - \theta_q L^q)\,\varepsilon_t$$

Es invertible si las raíces de $1-\theta_1 L - \dots - \theta_q L^q = 0$ caen fuera del círculo unidad.

$MA(q) \sim AR(\infty)$

$$\gamma_0 = (1+\theta_1^2+\dots+\theta_q^2)\sigma_\varepsilon^2$$
$$\gamma_\tau = (-\theta_\tau + \theta_1\theta_{\tau+1} + \dots + \theta_{q-\tau}\theta_\tau)\sigma_\varepsilon^2 \qquad \tau = 1\dots q$$
$$\gamma_\tau = 0 \qquad \tau > q$$

$$\rho_\tau = \frac{-\theta_\tau + \theta_1\theta_{\tau+1} + \dots + \theta_{q-\tau}\theta_\tau}{1+\theta_1^2+\dots+\theta_q^2} \qquad \tau = 1\dots q$$
$$\rho_\tau = 0 \qquad \tau > q.$$

ARMA(p,q) $\longrightarrow$ $Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \dots - \phi_p Y_{t-p} = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q\varepsilon_{t-q}$

$$\phi(L)\,Y_t = \theta(L)\,\varepsilon_t$$

Estacionario si raíces de $\phi(L)=0$ fuera del círculo unidad

Estacionario $\Rightarrow$ $ARMA(p,q) \sim MA(\infty)$.

$$Y_t = \frac{\theta(L)}{\phi(L)}\varepsilon_t = \Psi(L)\,\varepsilon_t, \text{ donde } \Psi(L) = 1 + \Psi_1 L + \Psi_2 L^2 + \dots$$

$\Psi(L)\phi(L) = \theta(L)$ y despejar Ψ

Invertible si las raíces de $\Theta(L)=0$ fuera círculo unidad

Invertible $\Rightarrow$ ARMA $(p,q) \sim AR(\infty)$

Invertible $\Rightarrow$ $\dfrac{\phi(L)}{\Theta(L)} Y_t = \Pi(L) Y_t = \varepsilon_t$, donde $\Pi(L) = 1 - \Pi_1 L - \Pi_2 L^2 - \dots$

$\Pi(L)\Theta(L) = \phi(L)$ y despejar Π.

ARMA $(1,1) \longrightarrow Y_t - \phi_1 Y_{t-1} = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$

$$\gamma_0 = \frac{1 - 2\theta_1\phi_1 + \theta_1^2}{1-\phi_1^2}\sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_1 = \frac{(1-\phi_1\theta_1)(\phi_1-\theta_1)}{1-\phi_1^2}\sigma_\varepsilon^2 \Rightarrow \rho_1 = \frac{(1-\phi_1\theta_1)(\phi_1-\theta_1)}{1-2\theta_1\phi_1+\theta_1^2}$$

$$\gamma_\tau = \phi_1\gamma_{\tau-1} \ , \ \tau>1 \Rightarrow \rho_\tau = \phi_1 \rho_{\tau-1} \ , \ \tau>1$$

Estacionario si $Y_t = \Psi(L)\varepsilon_t$, donde $\Psi(L) = 1 + \Psi_1 L + \Psi_2 L^2 + \dots$

$$\Psi_1 = \phi_1 - \theta_1$$

$$\Psi_\tau = \phi_1 \Psi_{\tau-1} = \phi_1^\tau - \phi_1^{\tau-1}\theta_1 \ , \ \tau>1$$

Invertible si $\Pi(L) Y_t = \varepsilon_t$, donde $\Pi(L) = 1 - \Pi_1 L - \Pi_2 L^2 - \dots$

$$\Pi_1 = \phi_1 - \theta_1$$

$$\Pi_\tau = \theta_1 \Pi_{\tau-1} = \theta_1^{\tau-1}\phi_1 - \theta_1^\tau \ , \ \tau>1$$

---

observación: En un ARMA(p,q) es conveniente factorizar la parte autorregresiva y la parte media móvil por si tienen raíces comunes y se está sobreparametrizando el modelo.

EJERCICIOS ARMA URIEL

3.1. AR(1) $\to Y_t = 0'8Y_{t-1}+\varepsilon_t$, donde $\sigma^2_\varepsilon = 2$

a) ¿Es estacionario?

Para que un AR(1) sea estacionario, $|\phi_1|<1$.

$|\phi_1| = 0'8 < 1 \Rightarrow$ es estacionario.

b) ¿Es invertible?

Todos los AR(p) son invertibles, donde p es finito.

c) Autocovarianzas

$\gamma_0 = E[Y_tY_t] = 0'8\gamma_1 + \sigma^2_\varepsilon = 0'8^2\gamma_0 + \sigma^2_\varepsilon \Rightarrow \gamma_0 = \frac{\sigma^2_\varepsilon}{1-0'8^2}$

$\gamma_1 = E[Y_tY_{t-1}] = 0'8\gamma_0$

d) Autocorrelaciones

$\gamma_0 = \frac{\sigma^2_\varepsilon}{1-\phi_1^2} = \frac{2}{1-0'64} = 5'\widehat{5}$ $\longrightarrow \rho_0 = \frac{\gamma_0}{\gamma_0} = 1$

$\gamma_1 = \phi_1\gamma_0 = 0'8\cdot 5'\widehat{5} = 4'\widehat{4}$ $\longrightarrow \rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \phi_1 = 0'8$

$\gamma_2 = \phi_1\gamma_1 = \phi_1^2\gamma_0 = 3'\widehat{5}$ $\longrightarrow \rho_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_0} = \phi_1^2 = 0'64$

$\gamma_3 = \phi_1\gamma_2 = \phi_1^3\gamma_0 = 2'8\widehat{4}$ $\longrightarrow \rho_3 = \dots = \phi_1^3 = 0'512$

$\gamma_4 = \phi_1\gamma_3 = \phi_1^4\gamma_0 = 2'27\widehat{5}$ $\longrightarrow \rho_4 = \dots = \phi_1^4 = 0'410$

$\gamma_5 = \phi_1\gamma_4 = \phi_1^5\gamma_0 = 1'820\widehat{4}$ $\longrightarrow \rho_5 = \dots = \phi_1^5 = 0'328$

e) Calcular los coef. $\psi_1, \psi_2 \dots \psi_5$ del MA(∞) en que se puede transformar.

Al ser Y_t un AR(1) estacionario, se puede escribir como

$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t \longrightarrow Y_t - \phi_1 Y_{t-1} = \varepsilon_t \longrightarrow (1-\phi_1 L)Y_t = \varepsilon_t$

Despejando Y_t , $Y_t = \frac{\varepsilon_t}{(1-\phi_1 L)}$

Como $|\phi_1 L|<1$, se puede considerar la suma de los términos de una progr. geométrica infinita convergente de ratón $\phi_1 L$

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty}(\phi_1 L)^j\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty}\phi_1^j\varepsilon_{t-j}$$

En nuestro caso,

$\psi_1 = \phi_1^1 = 0'8$

$\psi_2 = \phi_1^2 = 0'64$

$\psi_3 = \phi_1^3 = 0'512$

$\psi_4 = \phi_1^4 = 0'410$

$\psi_5 = \phi_1^5 = 0'328$

JRIEL (3.2)

MA(1) $\rightarrow Y_t = \varepsilon_t - 0'9\varepsilon_{t-1}$ / $\sigma^2_\varepsilon = 4$

a) ¿Es estacionario?

Todos los procesos de MA de orden finito son estacionarios

b) ¿Es invertible?

$|\theta_1| = |-0'9| = 0'9 < 1 \Rightarrow$ es invertible

c) Autocovarianzas

$\gamma_0 = E[Y_t Y_t] = \sigma^2_\varepsilon + 0'9^2\sigma^2_\varepsilon = (1+0'81)\sigma^2_\varepsilon = 1'81 \cdot 4 = 7'24$.

$\gamma_1 = E[Y_t Y_{t-1}] = -0'9\sigma^2_\varepsilon = -3'6$

$\gamma_2 = E[Y_t Y_{t-2}] = 0$, $\gamma_3 = 0, \gamma_4 = 0, \gamma_5 = 0$.

d) Autocorrelaciones

$\rho_0 = 1$

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{-0'9\sigma^2_\varepsilon}{(1+0'81)\sigma^2_\varepsilon} = \frac{-0'9}{1'81} = -0'497.$$

$$\rho_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = 0 \ , \ \rho_3 = \dots = \rho_5 = 0 .$$

e) Calcular los coef. $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_5$ correspondientes al modelo invertido AR(∞).

Si $|\theta_1| < 1$ el peso de cada Y_t retardada a medida que crece el orden del retardo.

$$Y_t = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} \Rightarrow \varepsilon_t = Y_t + \theta_1\varepsilon_{t-1}$$
$$\varepsilon_{t-1} = Y_{t-1} + \theta_1\varepsilon_{t-2}$$
$$\varepsilon_{t-j} = Y_{t-j} + \theta_1\varepsilon_{t-j-1}$$

Por lo que,

$\varepsilon_t = Y_t + \theta_1 Y_{t-1} + \theta_1^2 Y_{t-2} + \dots$ AR(∞)

$$Y_t = (1-\theta_1 L)\varepsilon_t \Rightarrow \varepsilon_t = \frac{Y_t}{1-\theta_1 L} = \sum_{j=0}^{\infty}(\theta_1 L)^j Y_t$$

Así sí

suma de una progr. geométrica

En nuestro caso,

$\pi_1 = 0'9$

$\pi_2 = 0'9^2$

. . . . .

$\pi_5 = 0'9^5$

¿sí/no?

MA(q) $\rightarrow Y_t = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} \dots - \theta_q\varepsilon_{t-q}$

AR(∞) $\rightarrow (1 - \pi_1 L - \pi_2 L^2 - \pi_3 L^3 \dots) Y_t = \varepsilon_t$

donde $\pi_i = \theta_i$

Pág 47.

URIEL 3.3

$AR(2) \rightarrow Y_t = 0'6Y_{t-1} + 0'3Y_{t-2} + \varepsilon_t \quad / \sigma_\varepsilon^2 = 3$

a) ¿Es estacionario? Sí

Los módulos de las raíces $1 - 0'6L - 0'3L^2 = 0$ deben estar fuera del círculo unidad.

$$L = \frac{0'6 \pm \sqrt{0'36 + 1'2}}{-0'6} = \frac{0'6 \pm 1'25}{-0'6} = \begin{cases} \frac{1'85}{-0'6} = |-3'08| > 1 \\ = |1'083| > 1 \end{cases}$$

Otra forma es a partir de la ec. característica, las raíces tienen que tener módulo inferior a la unidad.

Ec. característica: $\lambda^2 - 0'6\lambda - 0'3 = 0$

$$\lambda = \frac{0'6 \pm \sqrt{0'36 + 1'2}}{2} = \begin{cases} 0'3 + 0'62 = |0'92| < 1 \\ 0'3 - 0'62 = |-0'32| < 1. \end{cases}$$

Puede comprobarse que $\lambda_1 = \frac{1}{L_1}$ y que $\lambda_2 = \frac{1}{L_2}$.

b) ¿Es invertible?

Todo proceso AR finito es invertible.

c) Autocovarianzas.

$\gamma_0 = E[Y_t Y_t] = 0'6\gamma_1 + 0'3\gamma_2 + \sigma_\varepsilon^2$

$\gamma_1 = E[Y_t Y_{t-1}] = 0'6\gamma_0 + 0'3\gamma_1 \Rightarrow \gamma_1 = \frac{0'6\gamma_0}{1-0'3} =$

$\gamma_2 = E[Y_t Y_{t-2}] = 0'6\gamma_1 + 0'3\gamma_0$

sustituyendo γ_1 y γ_2 en γ_0 se obtiene

$$\gamma_0 = 0'6 \cdot \frac{0'6}{1-0'3}\gamma_0 + 0'3(0'6\gamma_1 + 0'3\gamma_0) + \sigma_\varepsilon^2 =$$

$$= 0'6 \cdot \frac{0'6}{0'7}\gamma_0 + 0'18\frac{0'6\gamma_0}{0'7} + 0'09\gamma_0 + \sigma_\varepsilon^2 =$$

$\cancel{(1 - 0'6\frac{0'6}{0'7} - 0'09)\gamma_0 =}$

$$\gamma_0 = \frac{0'36}{0'7}\gamma_0 + \frac{0'108}{0'7}\gamma_0 + 0'09\gamma_0 + 3$$

$$\Big(1 - \underbrace{\frac{0'36}{0'7}}_{0'5142} - \underbrace{\frac{0'108}{0'7}}_{0'1543} - 0'09\Big)\gamma_0 = 3 \Rightarrow \gamma_0 = \frac{3}{0'2415} = 12'42.$$

$\gamma_1 = 0'857 \cdot \gamma_0 = 10'6457$

$\gamma_2 = 0'6\gamma_1 + 0'3\gamma_0 = 10'1134$

$\gamma_3 = 0'6\gamma_2 + 0'3\gamma_1 = 9'26$

$\gamma_4 = 0'6\gamma_3 + 0'3\gamma_2 = 8'59$

$\gamma_5 = 0'6\gamma_4 + 0'3\gamma_3 = 7'93$

d) Autocorrelaciones

$$\rho_0 = 1$$

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{10'64}{12'42} = 0'86$$

$$\rho_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_0} = \frac{10'11}{12'42} = 0'81$$

$$\rho_3 = \frac{\gamma_3}{\gamma_0} = \frac{9'26}{12'42} = 0'75$$

$$\rho_4 = \frac{\gamma_4}{\gamma_0} = \frac{8'59}{12'42} = 0'69$$

$$\rho_5 = \frac{\gamma_5}{\gamma_0} = \frac{7'93}{12'42} = 0'64$$

También se pueden calcular:

$$\rho_3 = \phi_1 \rho_2 + \phi_2 \rho_1$$

$$\rho_4 = \phi_1 \rho_3 + \phi_2 \rho_2$$

$$\rho_5 = \phi_1 \rho_4 + \phi_2 \rho_3$$

URIEL (3.4)

MA(2) $\rightarrow Y_t = \varepsilon_t - 0'4\varepsilon_{t-1} + 1'2\varepsilon_{t-2}$ / $\sigma^2_\varepsilon = 2$.

a) ¿Es estacionario?

Todo MA finito es estacionario

b) ¿Es invertible?

A través de la ec. característica $\lambda^2 - 0'4\lambda + 1'2 = 0$

$\lambda = \dfrac{0'4 \pm \sqrt{0'16 - 4'8}}{2} = 0'2 \pm 1'08\,i$ raíces complejas conjugadas

Módulo, $|\lambda| = \sqrt{0'2^2 + 1'08^2} = 1'10 > 1 \Rightarrow$ no es invertible.

c) Aunque el modelo no es invertible siguen siendo válidas las fórmulas de autocovarianza.

$\gamma_0 = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\sigma^2_\varepsilon = (1 + 0'16 + 1'44)2 = 5'2$.

$\gamma_1 = (-\theta_1 + \theta_1\theta_2)\sigma^2_\varepsilon = (-0'4 + 0'4(-1'2))2 = -1'76$.

$\gamma_2 = -\theta_2\sigma^2_\varepsilon = 1'2 \cdot 2 = 2'4$

$\gamma_3 = \gamma_4 = \gamma_5 = 0$.

d) Autocorrelaciones

$\rho_0 = 1$

$\rho_1 = \dfrac{\gamma_1}{\gamma_0} = \dfrac{-1'76}{5'2} = -0'34$

$\rho_2 = \dfrac{\gamma_2}{\gamma_0} = \dfrac{2'4}{5'2} = 0'46$

$\rho_3 = \rho_4 = \rho_5 = 0$

URIEL 3.5

ARMA(1,1) $\longrightarrow$ $Y_t = 0'9\,Y_{t-1} + \varepsilon_t - 0'8\,\varepsilon_{t-1}$ / $\sigma_\varepsilon^2 = 5$

a) ¿Es estacionario?

$|\phi_1| = 0'9 < 1 \Rightarrow$ sí es estacionario

b) ¿Es invertible?

$|\theta_1| = |+0'8| < 1 \Rightarrow$ Sí es invertible

c) Autocovarianzas.

Hay que tener en cuenta que $E[\varepsilon_t Y_t] = \sigma_\varepsilon^2$

$E[\varepsilon_t Y_{t-1}] = 0$

$E[\varepsilon_{t-1} Y_t] = (\phi_1 - \theta_1)\sigma_\varepsilon^2$.

$\gamma_0 = E[Y_t Y_t] = 0'9\,\gamma_1 + \sigma_\varepsilon^2 - 0'8\,(0'9 - 0'8)\,\sigma_\varepsilon^2$

$\gamma_1 = E[Y_t Y_{t-1}] = 0'9\,\gamma_0 + 0 - 0'8\,\sigma_\varepsilon^2$

$\gamma_2 = E[Y_t Y_{t-2}] = 0'9\,\gamma_1$, $\gamma_\tau = 0'9\,\gamma_{\tau-1}$ para $\tau > 1$.

Sustituyendo γ_1 en γ_0:

$$\gamma_0 = 0'9\left[0'9\gamma_0 - 0'8\sigma_\varepsilon^2\right] + \sigma_\varepsilon^2 - 0'8\,(0'9 - 0'8)\,\sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_0 = \frac{-0'9 \cdot 0'8\,\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\varepsilon^2 - 0'8\,(0'9 - 0'8)\,\sigma_\varepsilon^2}{1 - 0'9^2} = \frac{(-0'72 + 1 - 0'08)}{0'19}\,\sigma_\varepsilon^2 =$$

$$= \frac{0'20}{0'19} \cdot 5 = 5'26$$

$\gamma_1 = 0'9 \cdot 5'26 - 0'8 \cdot 5 = 0'73 \longrightarrow \rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = 0'14$

$\gamma_2 = 0'9 \cdot \gamma_1 = 0'9 \cdot 0'73 = 0'66 \longrightarrow \rho_2 = 0'13$

$\gamma_3 = 0'9 \cdot \gamma_2 = 0'9 \cdot 0'66 = 0'59 \longrightarrow \rho_3 = 0'11$

$\gamma_4 = 0'9 \cdot \gamma_3 = 0'9 \cdot 0'59 = 0'53 \longrightarrow \rho_4 = 0'10$

$\gamma_5 = 0'9 \cdot \gamma_3 = 0'9 \cdot 0'53 = 0'48 \longrightarrow \rho_5 = 0'09$

URIEL 3.6

Me falta σ^2_ε

MIRAR

AR(1) $\longrightarrow$ $Y_t = \delta + 0'9 Y_{t-1} + \varepsilon_t$, $\delta = cte$.

Pruebe que los coef. de autocorrelación no dependen de δ.

$E[Y_t] = \delta + 0'9\, E[Y_{t-1}] + E[\varepsilon_t] = \delta + 0'9 \cdot E[Y_{t-1}]$.

Si el proceso es estacionario, entonces su media es cte a lo largo del tiempo.

$\mu = \delta + 0'9\mu \Rightarrow \mu = \frac{\delta}{1-0'9} = \frac{\delta}{0'1} = 10\delta = cte$.

$\gamma_0 = E[Y_t Y_t] = \delta\mu + 0'9\gamma_1 + \sigma^2_\varepsilon$

$\left.\begin{array}{l}\gamma_1 = E[Y_t Y_{t-1}] = \delta\mu + 0'9\gamma_0 \\ \gamma_2 = E[Y_t Y_{t-2}] = \delta\mu + 0'9\gamma_1\end{array}\right\} \gamma_\tau = \delta\mu + 0'9\gamma_{\tau-1}, \ \tau > 1.$

$\gamma_0 = \delta\mu + 0'9(\delta\mu + 0'9\gamma_0) = \delta\mu + 0'9\delta\mu + 0'9^2\gamma_0$

$\gamma_0 = \frac{\delta\mu(1+0'9)}{1-0'9^2}$ $\qquad \gamma_0 = \frac{\delta\mu(1+\phi_1)}{1-\phi_1^2}$

$\gamma_1 = \delta\mu + 0'9 \cdot \delta\mu \frac{(1+0'9)}{1-0'9^2} = \delta\mu\left(1 + \frac{0'9(1+0'9)}{1-0'9^2}\right)$

$\gamma_2 = \delta\mu + 0'9 \cdot \gamma_1 = \delta\mu\left(1+0'9\left(1 + \ldots\right.\right.$

En cualquier caso:

$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{\cancel{\delta\mu}\left(1 + \frac{0'9(1+0'9)}{1-0'9^2}\right)}{\cancel{\delta\mu}\frac{(1+0'9)}{1-0'9^2}}$ no depende de δ.

$\rho_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_0} = \frac{\delta\mu + 0'9\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{\cancel{\delta\mu}(1+0'9(\ldots))}{\cancel{\delta\mu}}$ no depende de δ.

universidad san pablo - ceu

CARRERA		
APELLIDOS		NOMBRE
ASIGNATURA	FECHA	GRUPO