A Non-commutative Extension of the Sewing Lemma with Applications to Quantum Mechanics

Tesi di Laurea triennale in Matematica

Samuele Biscaro
Relatore: Prof. Dario Trevisan

25 Ottobre 2024

Contenuti

1. Il Sewing Lemma Additivo
2. Il Sewing Lemma Moltiplicativo
3. Applicazione alla Meccanica Quantistica

Il Sewing Lemma

Il Sewing Lemma è stato introdotto come strumento analitico per studiare l'integrazione in presenza di funzioni a bassa regolarità. Consente la definizione di integrali della forma

$$I_t = \int_0^t X_s \, dY_s,$$

nei casi in cui sia X che Y non sono necessariamente regolari.

Control Functions

Definizione

Una funzione $V : [0, T] \to \mathbb{R}$ si dice *Control Function* se $V(0) = 0$, è non decrescente e vale

$$\overline{V}(t) = \sum_{k \geq 0} 2^k \cdot V(2^{-k} \cdot t) < +\infty.$$

Control Functions

Esempio

La funzione $V(t) = t^\alpha$ con $\alpha > 1$ è una control function, infatti:

$$\overline{V}(t) = \sum_{k \geq 0} 2^k \cdot V(2^{-k} \cdot t) = \sum_{k \geq 0} 2^k \cdot t^\alpha \cdot 2^{-\alpha k}$$
$$= t^\alpha \cdot \sum_{k \geq 0} 2^{(1-\alpha)k} < +\infty$$

Esempio

Per $\alpha > 1$ anche la funzione definita per $t \in [0, 1]$

$$V(t) = \frac{t}{(\ln(t^{-1}))^\alpha}$$

è una control function.

Il Sewing Lemma Additivo

Diciamo che una funzione $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è additiva se per ogni $a \leq c \leq b$ vale

$$u(a,b) = u(a,c) + u(c,b).$$

Teorema

Sia $\mu(a,b)$ una funzione continua a valori reali definita per $0 \leq a \leq b \leq T$, tale che

$$|\mu(a,b) - \mu(a,c) - \mu(c,b)| \leq V(b-a)$$

per ogni $c \in [a,b]$, dove V è una control function. Allora esiste un'unica funzione u su $[0,T]$ additiva tale che

$$|u(a,b) - \mu(a,b)| \leq \overline{V}(b-a).$$

Sketch di Dimostrazione

- Si costruisce una successione $\mu_0 = \mu$ e per $c = (a+b)/2$

$$\mu_{n+1}(a,b) = \mu_n(a,c) + \mu_n(c,b).$$

- Per induzione si mostra che vale

$$|\mu_n(a,b) - \mu_{n+1}(a,b)| \leq 2^n \cdot V(2^{-n} \cdot |b-a|).$$

- Da questo segue che esiste una funzione u tale che $\mu_n \to u$ uniformemente, quindi u è una funzione continua.

Sketch di Dimostrazione

- Si costruisce una successione $\mu_0 = \mu$ e per $c = (a+b)/2$
$$\mu_{n+1}(a,b) = \mu_n(a,c) + \mu_n(c,b).$$
- Per induzione si mostra che vale
$$|\mu_n(a,b) - \mu_{n+1}(a,b)| \leq 2^n \cdot V(2^{-n} \cdot |b-a|).$$
- Da questo segue che esiste una funzione u tale che $\mu_n \to u$ uniformemente, quindi u è una funzione continua.

Sketch di Dimostrazione

- Si costruisce una successione $\mu_0 = \mu$ e per $c = (a+b)/2$

$$\mu_{n+1}(a,b) = \mu_n(a,c) + \mu_n(c,b).$$

- Per induzione si mostra che vale

$$|\mu_n(a,b) - \mu_{n+1}(a,b)| \leq 2^n \cdot V(2^{-n} \cdot |b-a|).$$

- Da questo segue che esiste una funzione u tale che $\mu_n \to u$ uniformemente, quindi u è una funzione continua.

Sketch di Dimostrazione

- Questa funzione u è *"additiva per punti medi"*, e inoltre è tale che
$$|u(a,b) - \mu(a,b)| \leq \overline{V}(b-a).$$
- Se una funzione v è "additiva per punti medi" e tale che
$$|v(a,b) - \mu(a,b)| \leq Cst \cdot \overline{V}(b-a),$$
si mostra che in realtà $v = u$.

Sketch di Dimostrazione

- Questa funzione u è *"additiva per punti medi"*, e inoltre è tale che
$$|u(a,b) - \mu(a,b)| \leq \overline{V}(b-a).$$
- Se una funzione v è "additiva per punti medi" e tale che
$$|v(a,b) - \mu(a,b)| \leq \mathit{Cst} \cdot \overline{V}(b-a),$$
si mostra che in realtà $v = u$.

Sketch di Dimostrazione

- Introducendo la funzione

$$w(a,b) = \sum_{i=0}^{k-1} u(t_i, t_{i+1}) \quad \text{con } t_i = a + i \cdot \frac{b-a}{k},$$

si mostra $w = u$, ovvero che u è additiva sui razionali, e visto che è continua è additiva.

Somme di Riemann

Teorema

Sia $\sigma = \{t_i\}$ *una suddivisione finita di* $[a,b]$, *definiamo* $\delta = \sup_i |t_{i+1} - t_i|$. *Allora*

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_i \mu(t_i, t_{i+1}) = u(a,b).$$

L'integrale di Young

Considero $A, B \in \mathcal{C}^\alpha([0,T], \mathbb{R}^{d\times d})$, con $\alpha > 1/2$, e

$$\mu(a,b) = A_a(B_b - B_a).$$

Si ottiene

$$|\mu(a,b) - \mu(a,c) - \mu(c,b)| \leq \|A\|_\alpha \|B\|_\alpha |b-a|^{2\alpha}.$$

Posso allora definire

$$\int_a^b A_t \, dB_t = u(a,b).$$

L'Integrale di Young

In questo caso A, B potrebbero non commutare, applicando il Sewing Lemma a

$$\mu(a, b) = (B_b - B_a)A_a$$

definiamo una funzione diversa, la indichiamo

$$\int_a^b dB_t\, A_t.$$

Il Sewing Lemma Moltiplicativo

Il *Sewing Lemma Moltiplicativo* è un'estensione non commutativa del Sewing Lemma classico, introdotto per gestire l'integrazione in contesti in cui gli oggetti coinvolti non commutano.
In analogia con il caso classico, costruiremo un *"prodotto integrale"*.

Strong Control Functions

Definizione

Una funzione $V : [0, T] \to \mathbb{R}$ si dice *Strong Control Function* se è una control function e inoltre esiste $\theta > 2$ tale che

$$\overline{V}(t) = \sum_{k \geq 0} \theta^k \cdot V(2^{-k} \cdot t) < +\infty.$$

Esempio

La funzione $V(t) = t^\alpha$, per $\alpha > 1$, è anche una strong control function.

Il Sewing Lemma Moltiplicativo

Diciamo che una funzione $u : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{M}$ è moltiplicativa se per ogni $a \leq c \leq b$ vale

$$u(a,b) = u(a,c)u(c,b).$$

Teorema

Sia $\mu(a,b)$ una funzione continua a valori in $\mathcal{M}$ definita per $0 \leq a \leq b \leq T$, tale che

$$d(\mu(a,b), \mu(a,c)\mu(c,b)) \leq V(b-a)$$

per ogni $c \in [a,b]$, dove V è una strong control function. Allora esiste un'unica funzione u su $[0,T]$ moltiplicativa tale che

$$d(u(a,b), \mu(a,b)) \leq \mathit{Cst} \cdot \overline{V}(b-a).$$

Prodotti di Riemann

Teorema

Sia $\sigma = \{t_i\}$ *una suddivisione finita di* $[a,b]$*, definiamo* $\delta = \sup_i |t_{i+1} - t_i|$*. Allora*

$$\lim_{\delta \to 0} \prod_i \mu(t_i, t_{i+1}) = u(a,b).$$

Il Prodotto Integrale

Sia $A \in \mathcal{C}^\alpha([0,T],\mathcal{A})$, con $\alpha > 1/2$, e $\mathcal{A}$ un'algebra di Banach, allora posso considerare

$$\mu(a,b) = e^{A_b - A_a}.$$

Il sewing lemma si applica e possiamo definire

$$u(a,b) = \prod_a^b e^{dA_t}.$$

Il Prodotto Integrale

Teorema

Sia $U_t = u(0,t) = \prod_0^t e^{dA_s}$. *Allora questa è una soluzione per l'equazione differenziale lineare:*

$$U_t = I + \int_0^t U_s \, dA_s,$$

dove l'integrale è inteso nel senso di Young introdotto prima.

Il Quarto Postulato della Meccanica Quantistica

In un sistema quantistico con spazio di Hilbert $\mathbb{H}$, l'evoluzione di uno stato puro nel tempo che non è causata da una misurazione viene descritta dall'*operatore di evoluzione temporale* $U(t, t_0) \in \mathcal{U}(\mathbb{H})$, nel senso che

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle.$$

L'operatore $U(t, t_0)$ è soluzione dell'equazione differenziale

$$\begin{aligned} i\frac{d}{dt}U(t, t_0) &= H(t)U(t, t_0), \\ U(t_0, t_0) &= I. \end{aligned}$$

Dove $H(t)$ è auto-aggiunto ed è chiamato *operatore Hamiltoniano*.

Un'Equazione Differenziale

Consideriamo una funzione $A \in \mathcal{C}^\alpha([0,T], L(\mathbb{H}))$, con $\alpha > 1/2$; e l'equazione differenziale:

$$U_t = I + \int_0^t dA_s\, U_s.$$

Risulta equivalente alla precedente se:

$$U_t = U(t, t_0),$$
$$A_t = -i \int_0^t H_s\, ds.$$

Un'Equazione Differenziale

Grazie a quanto visto prima, il sewing lemma moltiplicativo ci garantisce l'esistenza di una soluzione

$$U_t = \left(\prod_0^t e^{dA_s^*} \right)^* .$$

Questa soluzione risulta anche unica, grazie ad una versione ad hoc del lemma di Grönwall.

Unitarietà delle soluzioni

Proposizione

Se A è tale che $A_t^* = -A_t$ per ogni $t \in [0,T]$, e U è una soluzione di

$$U_t = I + \int_0^t dA_s \, U_s,$$

allora U_t è unitario per ogni $t \in [0,T]$.

Dimostrazione

- Sappiamo che

$$dU_t^* = U_t^* \, dA_t^* = -U_t^* \, dA_t.$$

- Usando la formula di integrazione per parti

$$d(U_t U_t^*) = U_t \; dU_t^* + dU_t \; U_t^*,$$

- "sostituendo", ovvero usando la transitività dell'integrale:

$$\begin{aligned} d(U_t U_t^*) &= -(U_t U_t^*) \; dA_t + dA_t \; (U_t U_t^*) \\ &= [dA_t, U_t U_t^*]. \end{aligned}$$

Dimostrazione

- Sappiamo che

$$dU_t^* = U_t^*\,dA_t^* = -U_t^*\,dA_t.$$

- Usando la formula di integrazione per parti

$$d(U_tU_t^*) = U_t\;dU_t^* + dU_t\;U_t^*,$$

- "sostituendo", ovvero usando la transitività dell'integrale:

$$\begin{aligned} d(U_tU_t^*) &= -(U_tU_t^*)\;dA_t + dA_t\;(U_tU_t^*) \\ &= [dA_t, U_tU_t^*]. \end{aligned}$$

Dimostrazione

- Sappiamo che

$$dU_t^* = U_t^* \, dA_t^* = -U_t^* \, dA_t.$$

- Usando la formula di integrazione per parti

$$d(U_t U_t^*) = U_t \; dU_t^* + dU_t \; U_t^*,$$

- "sostituendo", ovvero usando la transitività dell'integrale:

$$\begin{aligned} d(U_t U_t^*) &= -(U_t U_t^*) \; dA_t + dA_t \; (U_t U_t^*) \\ &= [dA_t, U_t U_t^*]. \end{aligned}$$

Bibliografia I

- Denis Feyel and Arnaud de La Pradelle, *Curvilinear Integrals Along Enriched Paths*, Electronic Journal of Probability **11** (2006), no. none, 860 – 892.
- Denis Feyel, Arnaud de La Pradelle, and Gabriel Mokobodzki, *A non-commutative sewing lemma.*, Electronic Communications in Probability [electronic only] **13** (2008), 24–34 (eng).
- Edward Farhi, Jeffrey Goldstone, and Sam Gutmann, *A quantum approximate optimization algorithm*, 2014.
- M. Gubinelli, *Controlling rough paths*, Journal of Functional Analysis **216** (2004), no. 1, 86–140.

Bibliografia II

- V. Kondurar, *Sur l'intégrale de Stieltjes*, Rec. Math. Moscou, n. Ser. **2** (1937), 361–366 (French).
- Wolfgang Scherer, *Mathematics of quantum computing. An introduction. Translated from the German*, Cham: Springer, 2019 (English).
- Eugene Stepanov and Dario Trevisan, *On exterior differential systems involving differentials of Hölder functions*, J. Differ. Equations **337** (2022), 91–137 (English).
- L. C. Young, *An inequality of the Hölder type, connected with Stieltjes integration*, Acta Mathematica **67** (1936), no. none, 251 – 282.