Optimálne riadenie

Model Plesen̆

Samuel Čierťaský Slávka Martinčeková

December 2025

1 Úvod

Budova nemocnice je napadnutá plesňou, ktorá predstavuje zdravotné riziko pre pacientov aj zamestnancov. Cieľom tohto zadania je navrhnúť optimálnu stratégiu jej odstraňovania pomocou chemického postreku tak, aby sa dosiahlo čo najväčšie potlačenie plesne pri súčasnej minimalizácii množstva použitej chemikálie. Nadmerné používanie chemických látok by totiž mohlo mať negatívny vplyv na zdravie ľudí nachádzajúcich sa v budove.

Rast plesne je v práci modelovaný pomocou diferenciálnej rovnice, kde stavová premenná $x(t)$ vyjadruje množstvo plesne v čase t. Dynamika systému závisí od miery šírenia plesne a od maximálneho množstva plesne, ktoré je možné v daných podmienkach dosiahnuť. Riadiacou premennou je funkcia $u(t)$, ktorá reprezentuje intenzitu aplikovaného chemického postreku v čase.

Úloha je formulovaná ako problém optimálneho riadenia, v ktorom minimalizujeme funkcionál zahŕňajúci jednak veľkosť plesne, ako aj veľkosť riadiaceho zásahu. Na riešenie problému je použitý Pontryaginov princíp maxima, ktorý vedie k sústave stavových a adjungovaných rovníc spolu s okrajovými podmienkami. Výsledný okrajový problém je následne riešený numericky pomocou metódy riešenia okrajových úloh.

V práci sa analyzuje vplyv jednotlivých parametrov modelu na optimálne riešenie, najmä význam váhového parametra penalizujúceho prítomnosť plesne, vplyv miery jej šírenia a otázka, či zvolený časový interval postačuje na efektívne odstránenie plesne.

2 Postup riešenia

Úloha je formulovaná ako problém optimálneho riadenia so spojitou riadiacou premennou. Cieľom je nájsť takú riadiacu funkciu $u(t)$, ktorá minimalizuje zvolený funkcionál pri splnení dynamických obmedzení daných stavovou rovnicou.

Na riešenie problému je použitý Pontryaginov princíp maxima. Zavedieme Hamiltonovu funkciu v tvare

$$H(x, u, p) = Ax^2 + u^2 + p\big(r(M - x) - ux\big),$$

kde $p(t)$ je adjungovaná premenná.

Nutná podmienka optimality je daná minimalizáciou Hamiltoniánu vzhľadom na riadiacu premennú u. Derivovaním Hamiltoniánu podľa u a jej položením rovnej nule dostávame explicitný tvar optimálneho riadenia

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 2u - px = 0 \quad \Rightarrow \quad u^*(t) = \frac{1}{2}p(t)x(t).$$

Po dosadení optimálneho riadenia do dynamiky systému dostávame sústavu diferenciálnych rovníc pre stavovú a adjungovanú premennú:

$$\begin{aligned} x'(t) &= r(M - x(t)) - u^*(t)x(t), \\ p'(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -2Ax(t) + p(t)\big(r + u^*(t)\big). \end{aligned}$$

K tejto sústave sú priradené okrajové podmienky

$$x(0) = x_0, \qquad p(T) = 0,$$

kde počiatočná hodnota stavu je daná a koncová hodnota adjungovanej premennej vyplýva z teórie optimálneho riadenia.

Vzniknutý problém predstavuje okrajovú úlohu pre sústavu obyčajných diferenciálnych rovníc. Táto úloha je riešená numericky pomocou metódy riešenia okrajových problémov implementovanej v prostredí MATLAB prostredníctvom funkcie `bvp4c`. Pre každú sadu parametrov je riešená samostatná okrajová úloha, z ktorej sa následne získava priebeh stavovej premennej $x(t)$ a optimálneho riadenia $u(t)$.

3 Nastavenie parametrov

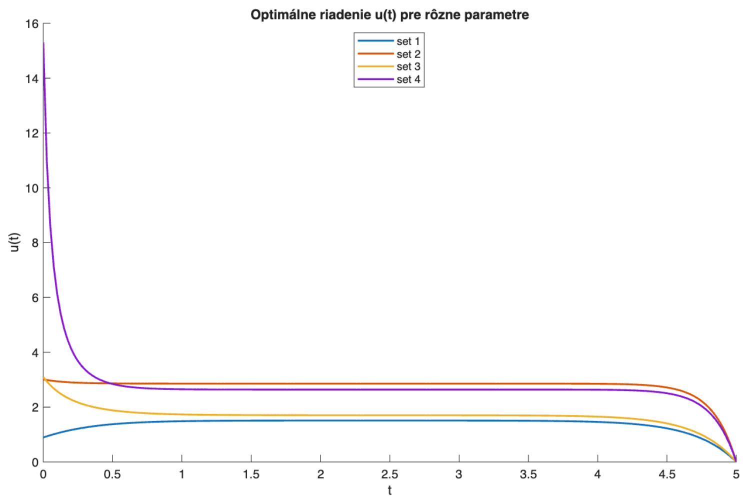
Numerické simulácie boli vykonané pre štyri rôzne sady parametrov modelu. Vo všetkých prípadoch bol časový interval zvolený ako $T = 5$. Jednotlivé sady parametrov sú definované nasledovne:

- **Sada 1:** $r = 0.3$, $M = 10$, $A = 1$, $x_0 = 1$,
- **Sada 2:** $r = 0.3$, $M = 10$, $A = 10$, $x_0 = 1$,
- **Sada 3:** $r = 0.1$, $M = 10$, $A = 10$, $x_0 = 1$,
- **Sada 4:** $r = 0.6$, $M = 5$, $A = 10$, $x_0 = 5$.

Prvá sada parametrov reprezentuje prípad so slabšou penalizáciou prítomnosti plesne vo funkcionáli, čo vedie k miernejšiemu optimálnemu riadeniu. Druhá sada sa od prvej líši vyššou hodnotou váhového parametra A, čím je kladený väčší dôraz na potlačenie plesne pomocou chemického postreku. Tretia sada parametrov zodpovedá situácii s pomalším prirodzeným rastom plesne, keďže miera šírenia r je výrazne nižšia. Štvrtá sada predstavuje nepriaznivý scenár, v ktorom je počiatočné množstvo plesne maximálne možné ($x_0 = M$) a zároveň je uvažovaná vyššia miera jej šírenia.

Cieľom porovnania jednotlivých sád parametrov je analyzovať vplyv rýchlosti rastu plesne, intenzity penalizácie jej prítomnosti a počiatočného stavu systému na tvar optimálneho riadenia a výsledný vývoj množstva plesne.

4 Výsledky



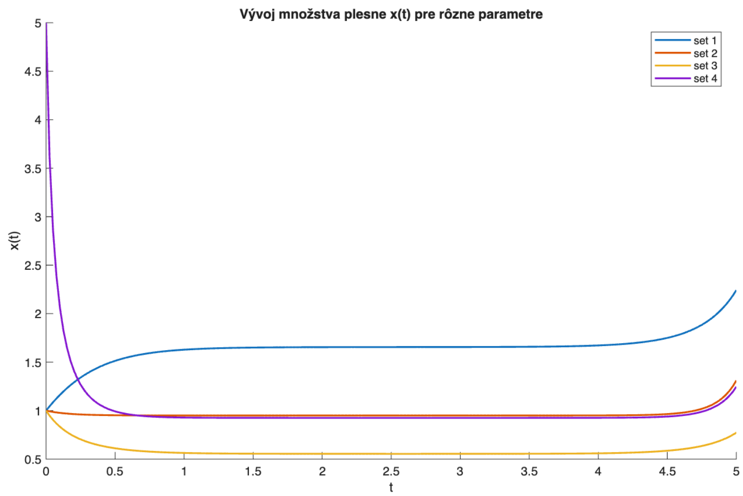
Obr. 1: Priebeh optimálneho riadenia $u(t)$ pre rôzne sady parametrov

Na Obrázku 1 je zobrazený priebeh optimálneho riadenia $u(t)$ pre štyri rôzne sady parametrov. Vo všetkých prípadoch má riadenie podobný charakter: na začiatku časového intervalu je intenzita postreku vyššia, aby sa rýchlo potlačilo množstvo plesne, následne sa riadenie stabilizuje a v závere časového intervalu klesá k nule. Toto správanie je v súlade s teoretickými výsledkami optimálneho riadenia, keďže adjungovaná premenná spĺňa podmienku $p(T) = 0$, z čoho vyplýva aj $u(T) = 0$.

Z grafu je zrejmé, že voľba parametra A má významný vplyv na veľkosť optimálneho riadenia. Pri väčších hodnotách A (sady 2, 3 a 4) je riadenie výrazne intenzívnejšie, keďže prítomnosť plesne je silnejšie penalizovaná vo funkcionáli. Naopak, pri menšej hodnote $A = 1$ (sada 1) je optimálne riadenie miernejšie, čo vedie k menšiemu zásahu chemickým postrekom.

Na Obrázku 2 je znázornený vývoj množstva plesne $x(t)$ v čase pre jednotlivé sady parametrov. Správanie systému sa v závislosti od zvolených parametrov výrazne líši.

V prvej sade parametrov (sada 1) je možné pozorovať počiatočný nárast množstva plesne. Tento jav je spôsobený nízkou hodnotou váhového parametra



Obr. 2: Vývoj množstva plesne $x(t)$ pre rôzne sady parametrov

A, ktorá vedie k miernemu optimálnemu riadeniu. Intenzita chemického postreku v tomto prípade nie je dostatočná na okamžité potlačenie prirodzeného rastu plesne, a preto v úvodnej fáze dochádza k jej nárastu. Až po stabilizácii riadenia sa rast plesne spomaľuje.

Naopak, v druhej a tretej sade parametrov dochádza k počiatočnému poklesu množstva plesne. V týchto prípadoch je penalizácia prítomnosti plesne výraznejšia ($A = 10$), čo vedie k silnejšiemu počiatočnému riadeniu a rýchlejšiemu potlačeniu plesne. Rozdiel medzi druhou a treťou sadou je spôsobený mierou šírenia plesne, pričom nižšia hodnota parametra r v tretej sade vedie k ešte efektívnejšiemu potlačeniu rastu.

Štvrtá sada parametrov predstavuje nepriaznivý scenár, v ktorom počiatočné množstvo plesne dosahuje maximálnu možnú hodnotu ($x_0 = M$). V tomto prípade dochádza k veľmi rýchlemu poklesu množstva plesne na začiatku časového intervalu, čo je dôsledkom výrazne intenzívneho počiatočného riadenia. Následne sa systém stabilizuje na nižšej úrovni množstva plesne.

Ku koncu časového intervalu je pri všetkých sadách parametrov možné pozorovať nárast množstva plesne. Pre sadu 1 je tento nárast najvyšší a pre sadu 3 je naopak najmiernejší. Tento jav súvisí s poklesom optimálneho riadenia smerom k nule v dôsledku okrajovej podmienky $p(T) = 0$ a naznačuje, že pri slabšej penalizácii alebo rýchlejšom raste plesne by bolo vhodné uvažovať o dlhšom časovom horizonte.

5 Záver

V zadaní bol riešený problém optimálneho riadenia rastu plesne v budove nemocnice s cieľom minimalizovať jej množstvo a zároveň obmedziť spotrebu chemického postreku. Problém bol formulovaný pomocou diferenciálnej rovnice a príslušného funkcionálu a riešený aplikáciou Pontryaginovho princípu maxima.

Numerické riešenia ukázali, že optimálna stratégia riadenia má charakter intenzívneho zásahu v počiatočnej fáze, po ktorom nasleduje stabilizácia riadenia a jeho postupný pokles ku koncu časového intervalu. Výsledky potvrdili významný vplyv váhového parametra A na veľkosť riadiaceho zásahu, ako aj vplyv miery šírenia plesne na optimálnu stratégiu postreku.

Z analýzy jednotlivých parametrov vyplýva, že zvolený časový interval $T = 5$ je vo väčšine prípadov postačujúci na výrazné zníženie množstva plesne, avšak pri rýchlom raste alebo nízkej penalizácii môže byť vhodné uvažovať o dlhšom časovom horizonte. Práca tak demonštruje efektívne využitie metód optimálneho riadenia pri modelovaní a riešení praktických problémov.