CINEMÁTICA DIRETA

TRANSFORMAÇÕES DE ELOS E A SOLUÇÃO DO PROBLEMA DA CINEMÁTICA DIRETA

A Transformação de Elo

- Atribuindo referenciais aos elos de manipulador de acordo com a convenção Denavit-Hartenberg, é possível determinar sistematicamente as transformações de elos.

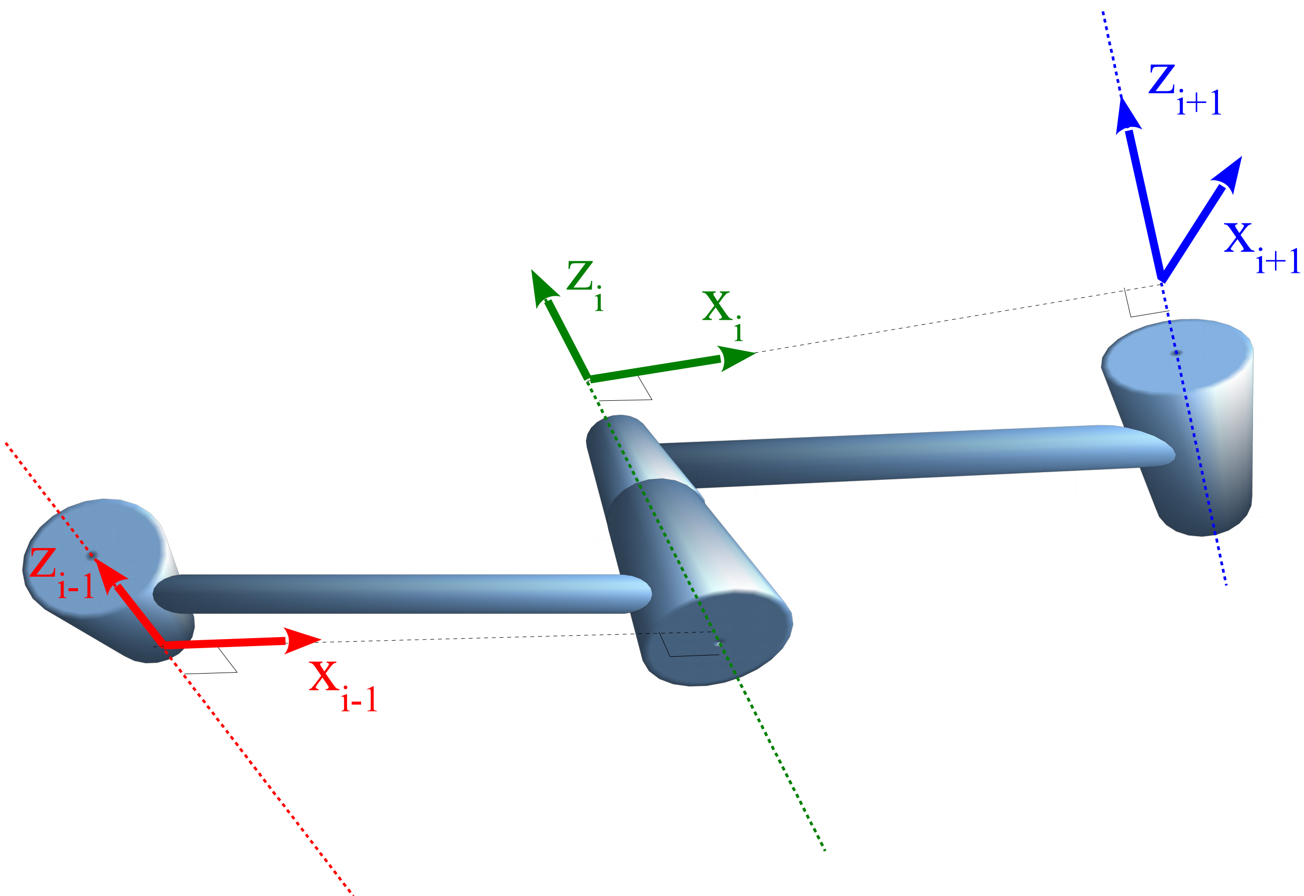
- Com esta sistemática, a transformação ${}^{i-1}T_i$ que descreve a localização do elo {i} em relação ao elo anterior {i-1} pode ser obtida como uma concatenação de transformações simples de translação e rotação.

- Estes operadores de movimento simples dependem de quatro parâmetros, denominados Parâmetros Denavit-Hartenberg.

- Três desses parâmetros são constantes, relacionados à geometria do elo e da junta.

- Um parâmetro é variável (a variável de junta q_i).

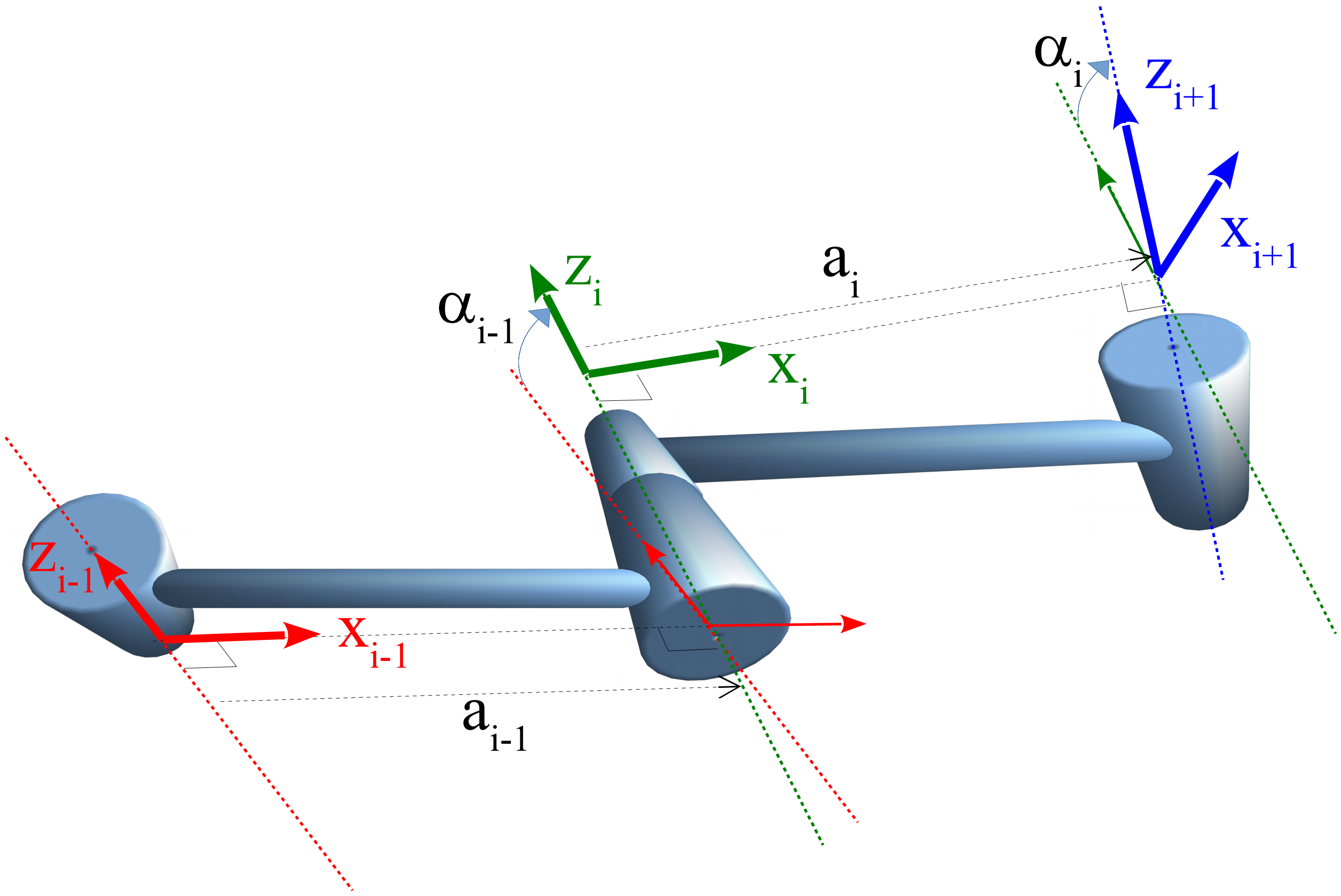
Referenciais de Elos:



Parâmetros de Elo:

- <u>Comprimento do elo i</u>: a_i, distância entre z_i e z_{i+1} medida ao longo do eixo x_i.

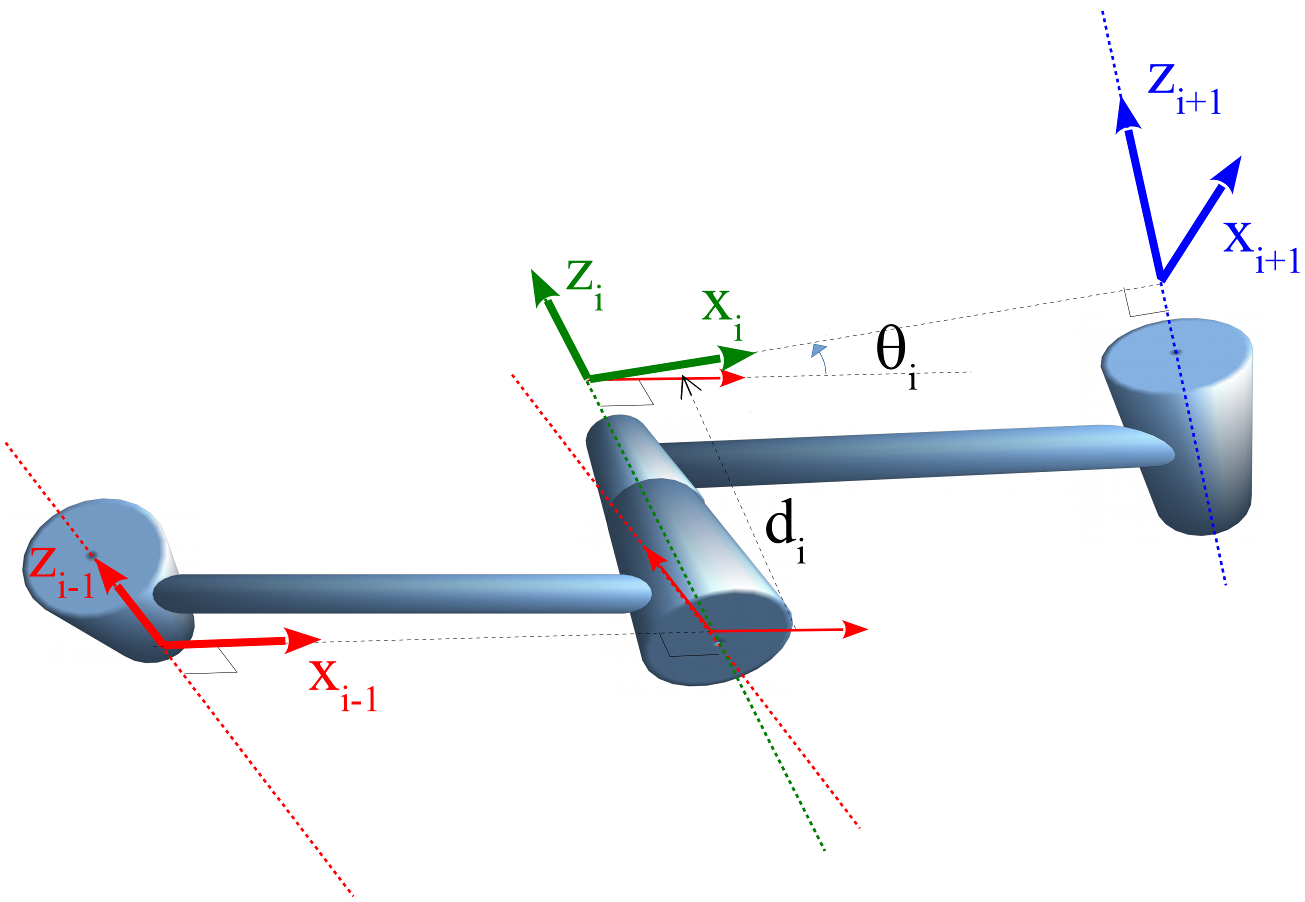
- <u>ângulo de torção do elo i</u>: α_i, ângulo entre z_i e z_{i+1} medido em torno do eixo x_i.



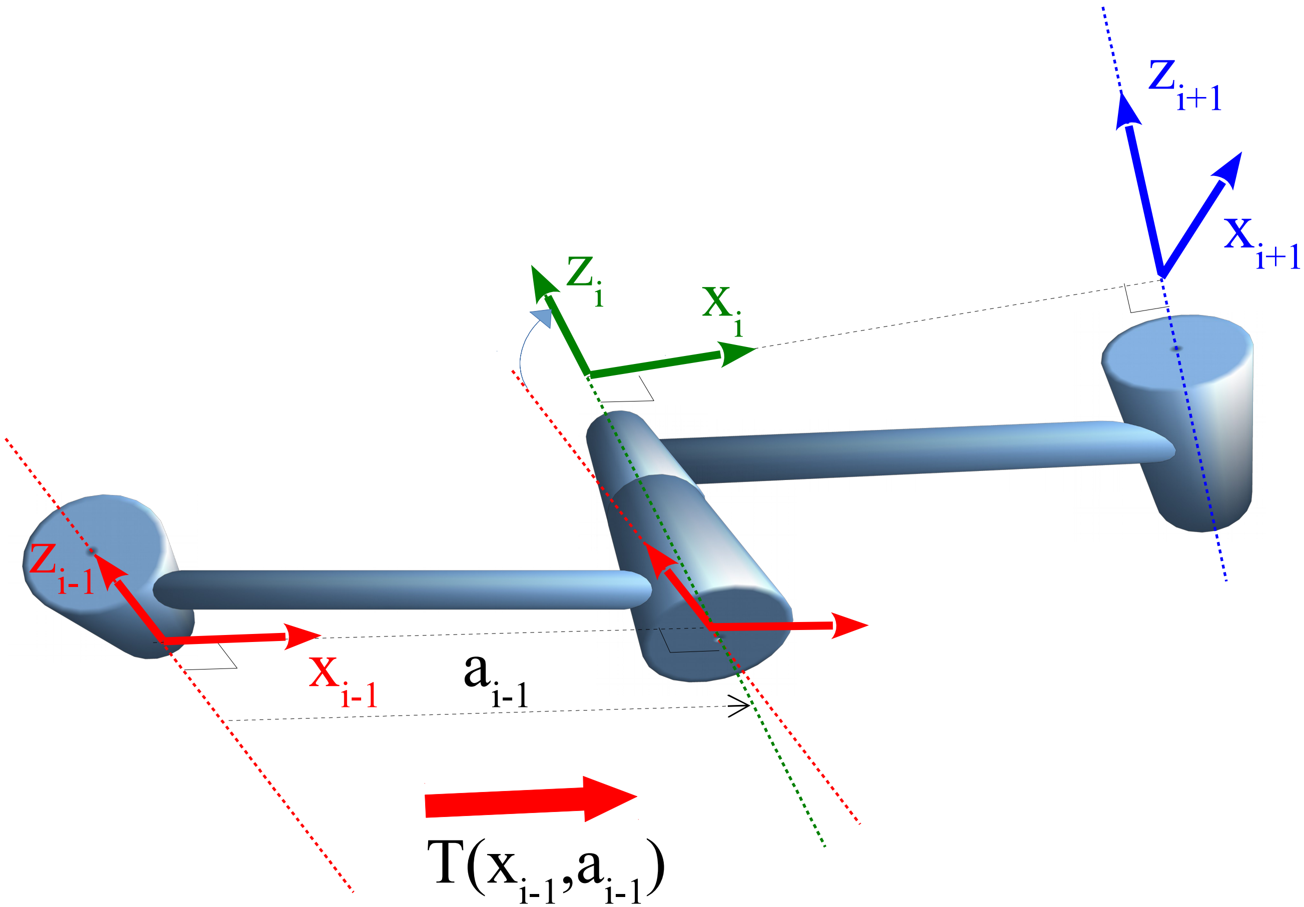
Parâmetros de Junta:

- Deslocamento da junta i: d_i, distância entre x_{i-1} e x_i medida ao longo do eixo z_i.

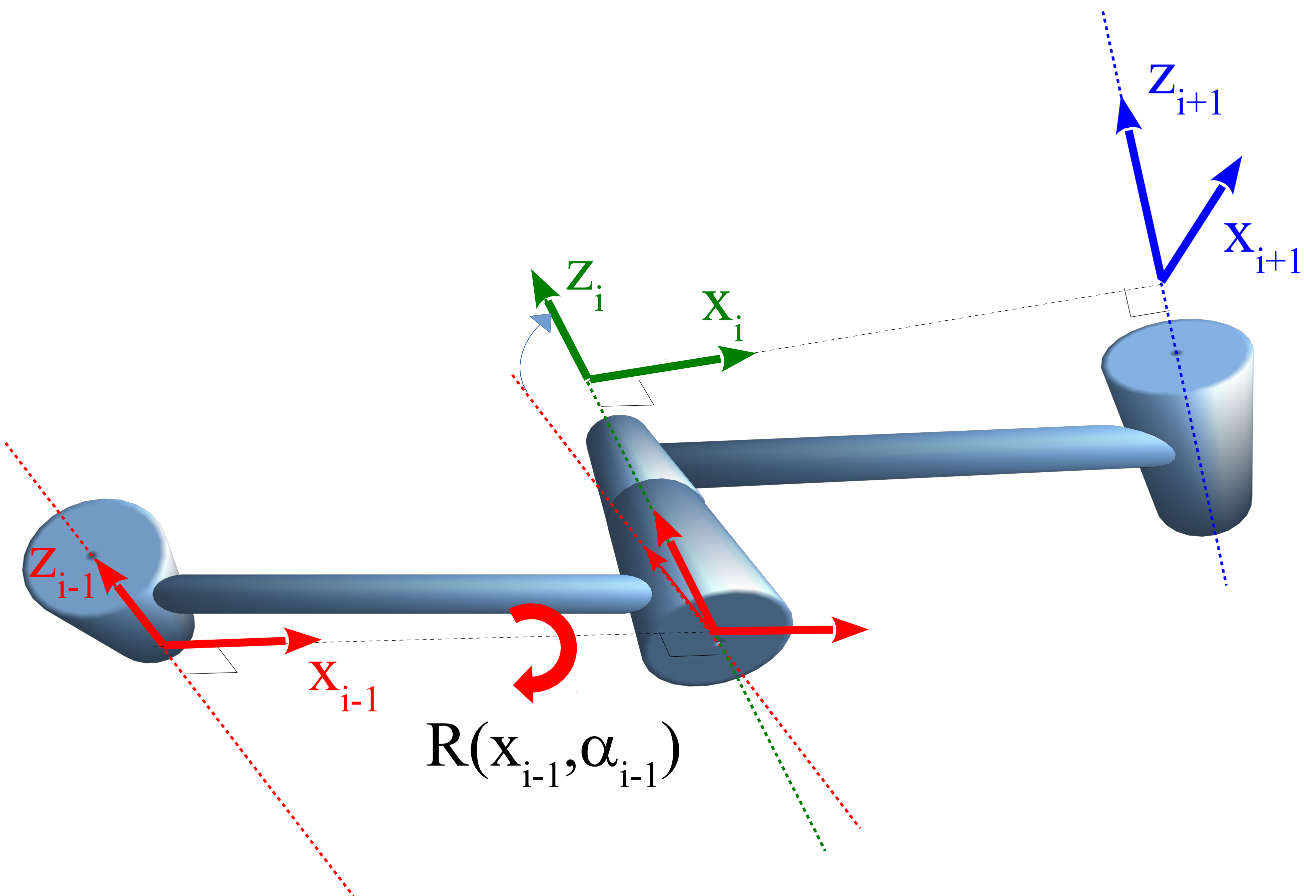
- Ângulo da junta i: θ_i, ângulo entre x_{i-1} e x_i medido em trono do eixo z_i.



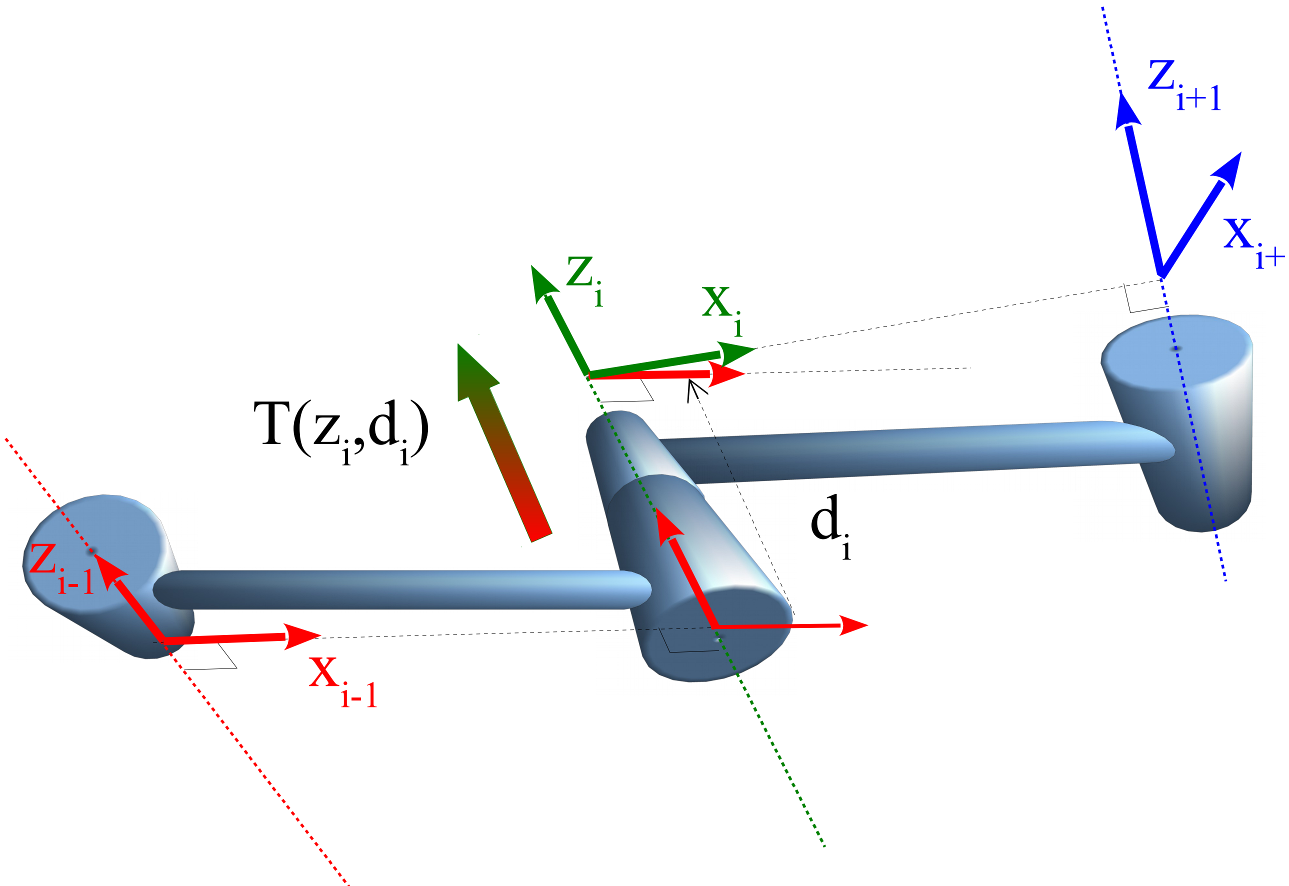
Translação ao longo de x_{i-1}:



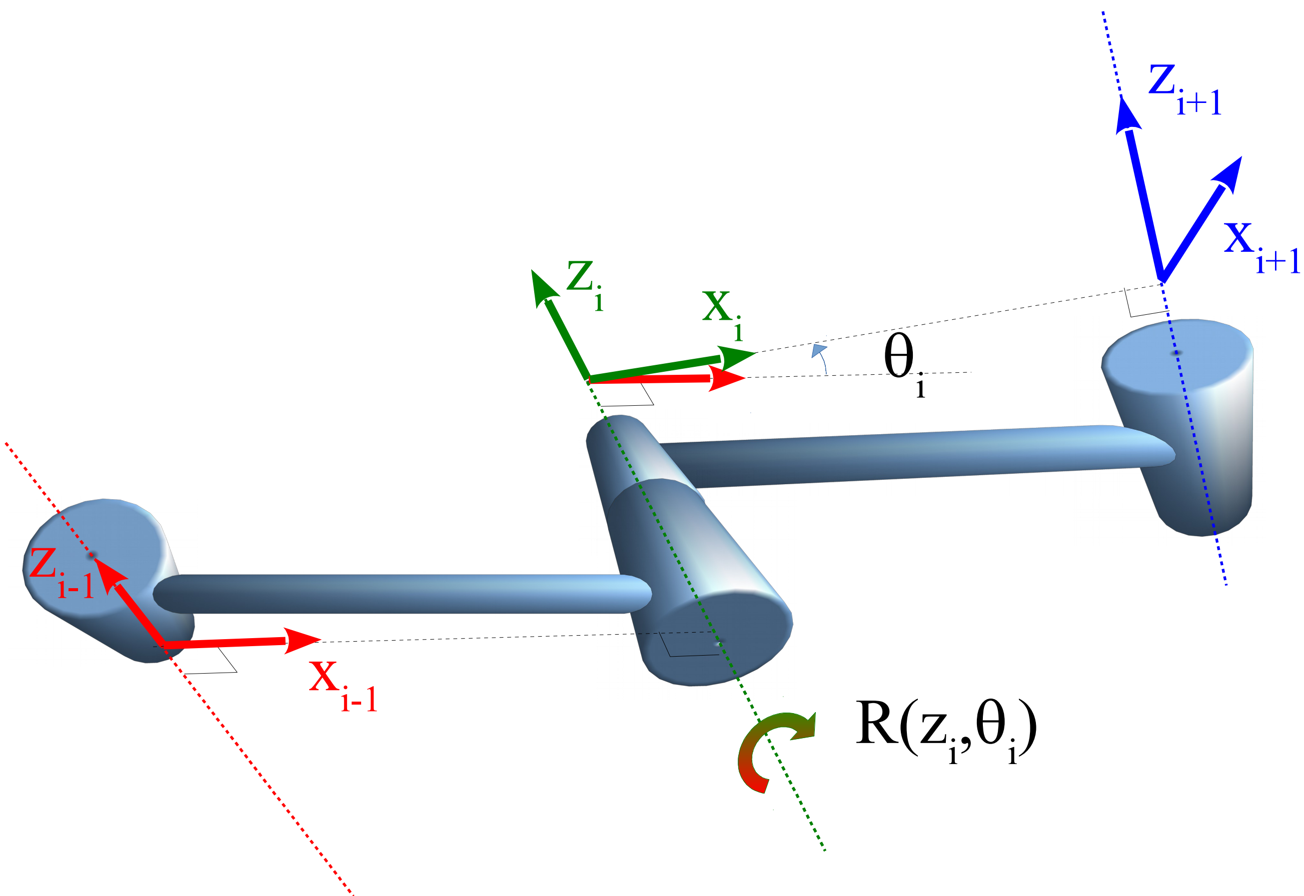
Rotação em torno de x_{i-1}:



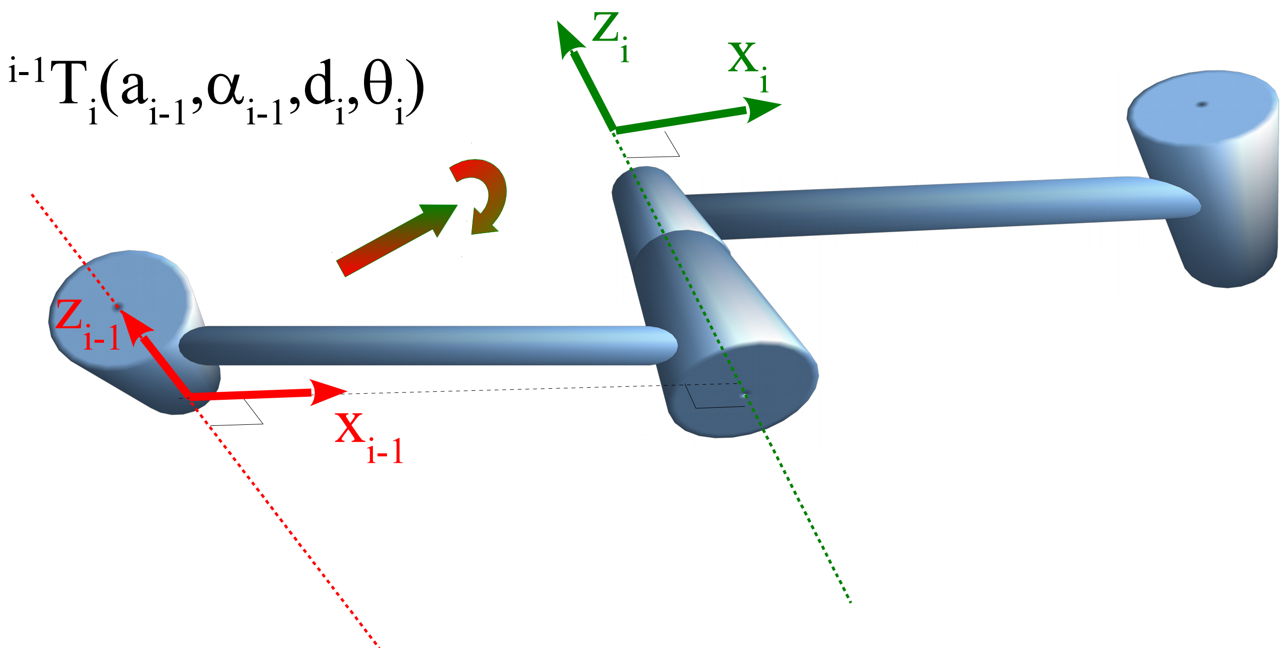
Translação ao longo de z_i:



Rotação em torno de z_i:



Transformação $^{i-1}T_i$:



Transformações de Elo:

$$^{i-1}T_i = T(x_{i-1}, a_{i-1}).R(x_{i-1}, \alpha_{i-1}).T(z_i, d_i).R(z_i, \theta_i)$$

$$^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} ^{i-1}R_i & & & ^{i-1}P_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} & 0 & a_{i-1} \\ (c_{\alpha_{i-1}} s_{\theta_i}) & (c_{\alpha_{i-1}} c_{\theta_i}) & (-s_{\alpha_{i-1}}) & (-s_{\alpha_{i-1}}.d_i) \\ (s_{\alpha_{i-1}} s_{\theta_i}) & (s_{\alpha_{i-1}} c_{\theta_i}) & (c_{\alpha_{i-1}}) & (c_{\alpha_{i-1}}.d_i) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde, $c_\theta = \cos(\theta)$, $s_\theta = \mathrm{sen}(\theta)$, $c_\alpha = \cos(\alpha)$, $s_\alpha = \mathrm{sen}(\alpha)$

Solução do Problema da Cinemática Direta:

$$^{0}T_{N} = {}^{0}T_{1} . {}^{1}T_{2} . {}^{2}T_{3} . \ldots\ldots . {}^{N-2}T_{N-1} . {}^{N-1}T_{N}$$

Observações:

- A Transformação ${}^{i-1}T_i$ é função não linear de quatro parâmetros: a_{i-1}, α_{i-1}, d_i e θ_i.

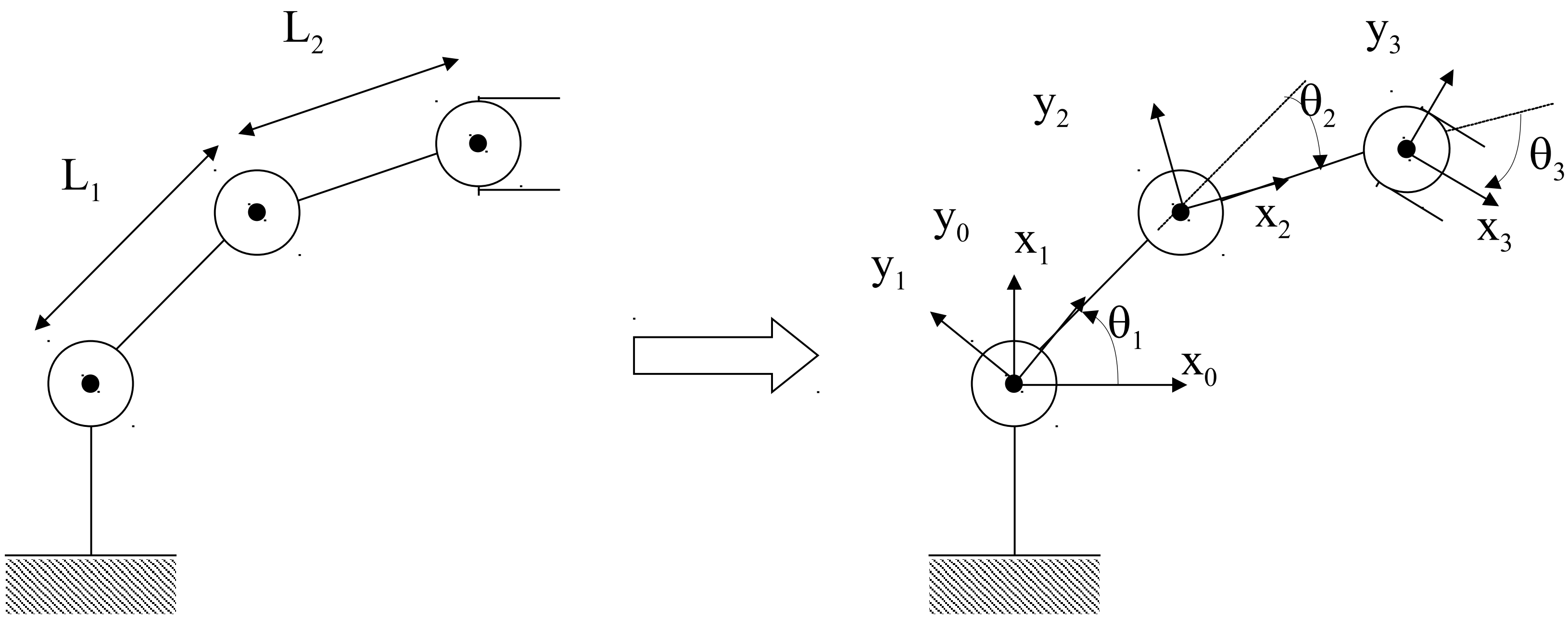
- Três desses parâmetros são constantes, o outro é a variável da junta q_i.

➔ Se a junta for rotacional, quem varia é θ_i, consequentemente, a matriz de rotação ${}^{i-1}R_i$ varia com θ_i. o vetor $p_{i-1,i}$ é constante. A orientação do elo {i} varia em relação ao elo {i-1}).

➔ Se a junta for prismática, quem varia é d_i, consequentemente, a matriz de rotação ${}^{i-1}R_i$ é constante o vetor $p_{i-1,i}$ varia com d_i. A posição do elo {i} varia em relação ao elo {i-1}).

Exemplo de cálculo de Cinemática Direta:

Manipulador Planar Articulado de três Graus de Liberdade



Parâmetros Denavit-Hartenberg:

i	a_{i-1}	$\alpha_{\iota-1}$	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	L_1	0	0	θ_2
3	L_2	0	0	θ_3

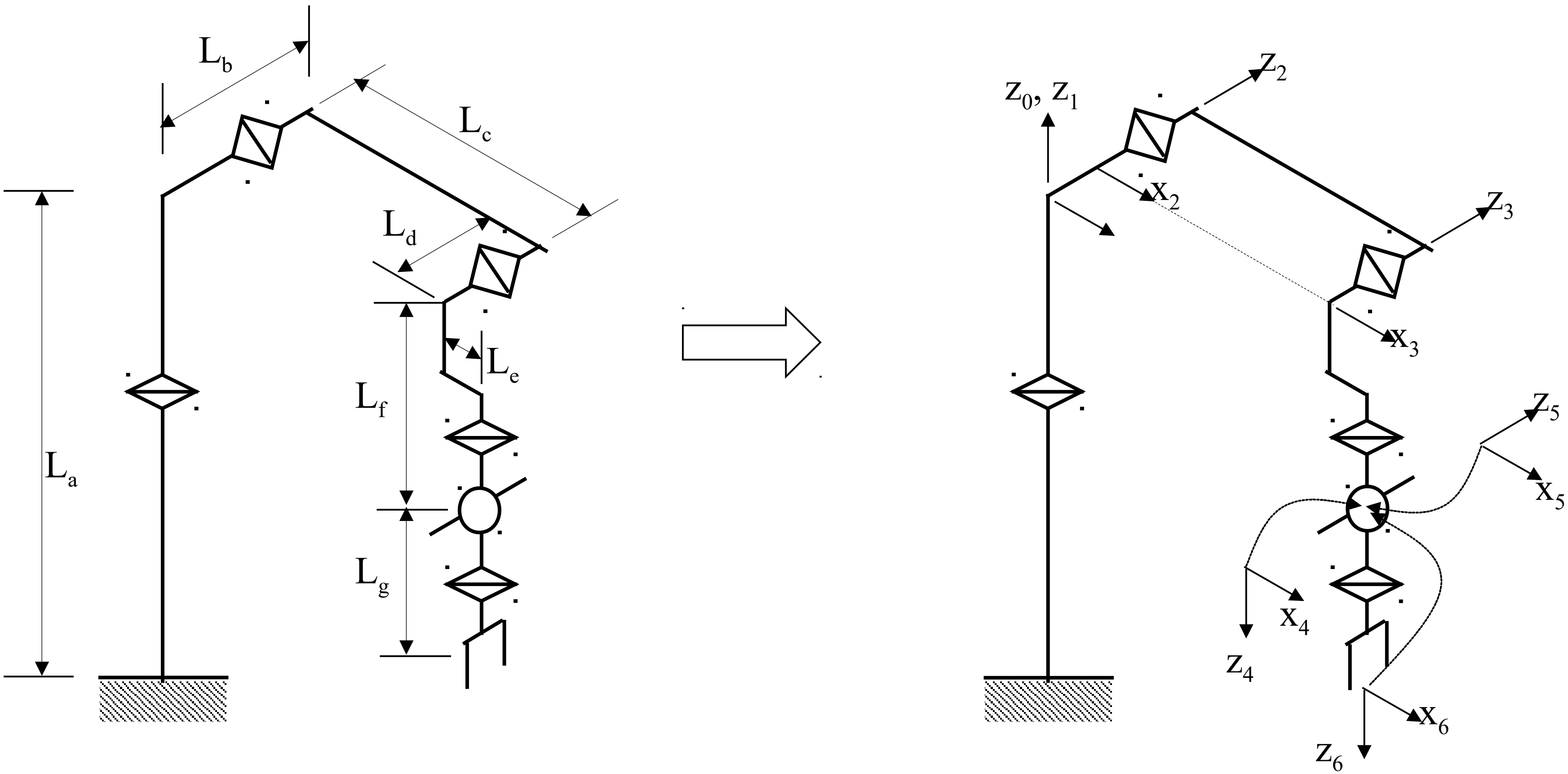
Transformações de Elo:

$$ {}^{0}T_{1} = \begin{bmatrix} c_{\theta_1} & -s_{\theta_1} & 0 & 0 \\ s_{\theta_1} & c_{\theta_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^{1}T_{2} = \begin{bmatrix} c_{\theta_2} & -s_{\theta_2} & 0 & L_1 \\ s_{\theta_2} & c_{\theta_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^{2}T_{3} = \begin{bmatrix} c_{\theta_3} & -s_{\theta_3} & 0 & L_2 \\ s_{\theta_3} & c_{\theta_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Cinemática Direta:

$$ {}^{0}T_{3} = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & L_1 c_1 + L_2 c_{12} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & L_1 s_1 + L_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Exemplo: Cinemática Direta do Manipulador PUMA



Parâmetros Denavit-Hartenberg:

i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	0	$-\pi/2$	$L_b - L_d$	θ_2
3	L_c	0	0	θ_3
4	L_e	$-\pi/2$	L_f	θ_4
5	0	$\pi/2$	0	θ_5
6	0	$-\pi/2$	0	θ_6

Transformações de Elo:

$$
{}^{0}T_{1} = \begin{pmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
{}^{1}T_{2} = \begin{pmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_b\text{-}L_d \\ -s\theta_2 & -c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
{}^{2}T_{3} = \begin{pmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & L_c \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
{}^{3}T_{4} = \begin{pmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & L_e \\ 0 & 0 & 1 & L_f \\ -s\theta_4 & -c\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
{}^{4}T_{5} = \begin{pmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s\theta_5 & \theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
{}^{5}T_{6} = \begin{pmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_6 & -c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Cinemática Direta:

$$R_{11} = c_1[c_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_{23}s_5c_6] + s_1[s_4c_5c_6 + c_4s_6]$$
$$R_{12} = c_1[-c_{23}(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + s_{23}s_5s_6] - s_1[s_4c_5s_6 - c_4c_6]$$
$$R_{13} = -c_1[c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5] - s_1s_4s_5$$
$$R_{21} = s_1[c_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_{23}s_5c_6] - c_1[s_4c_5c_6 + c_4s_6]$$
$$R_{22} = s_1[-c_{23}(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + s_{23}s_5s_6] + c_1[s_4c_5s_6 - c_4c_6]$$
$$R_{23} = -s_1[c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5] + c_1s_4s_5$$
$$R_{31} = -s_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - c_{23}s_5c_6$$
$$R_{32} = s_{23}(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + c_{23}s_5s_6$$
$$R_{33} = s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5$$

$$P_x = c_1(c_2L_c + c_{23}L_e – s_{23}L_f) – s_1(L_b - L_d)$$
$$P_y = s_1(c_2L_c + c_{23}L_e – s_{23}L_f) + c_1(L_b - L_d)$$
$$P_z = -s_2L_c - s_{23}L_e – c_{23}L_f$$

CINEMÁTICA DIRETA

TRANSFORMAÇÕES DE ELOS E A SOLUÇÃO DO PROBLEMA DA CINEMÁTICA DIRETA