COMPUTAÇÃO GRÁFICA

DIEGO DANTAS ALMEIDA - LISTA 7

1- As estruturas de dados espaciais servem para diminuir o número de cálculos necessários para executar tarefas em computação gráfica (ex: Algoritmos de visibilidade). Também facilitam o armazenamento eficiente da informação geométrica.

Idéia básica das estruturas de dados espaciais discutidas:

Bounding Volumes - "Embrulha" os objetos com algo mais fácil de testar a interseccção (ex: uma caixa). Se não houver interseção com a caixa, significa que não há interseção. (variante Hierarchical Bounding Volumes)

Grids - O espaço é dividido em células, cada célula aponta para uma lista de todas as superfícies que a interseCtam. O teste de interseção começa traçando na célula onde o raio inicia. O raio caminha de célula para célula, procurando a primeira interseção, testando para cada célula a interseção com todos os objetos apontados por ela. Caso ocorra a interseção, retorna a mais próxima.

Octrees - A ideia é parecida com a estrutura Grids, porém, em vez de dividir o espaço de maneira uniforme, o espaço é dividido de maneira recursiva em oito cubos iguais, até que reste um número pequeno de objetos (determinado empiricamente) em cada cubo.

BSP trees - Ideia semelhante à Grids e Octree, porém em vez de dividir o espaço de maneira uniforme ou em cubos iguais, o espaço é sempre dividido em dois, por planos que podem estar em qualquer direção determinada pelo programador.

2- R. Poderia usar Octrees. É uma estrutura que funciona bem para objetos que não estão distribuídos de forma homogênea e é relativamente fácil de implementar.

3- Poderia usar Grids. Se os objetos estão espalhados de maneira mais ou menos homogênea, é mais interessante usar Grids, pois nessa estrutura o espaço é dividido uniformemente formando um array 3D.
Nessas condições, os elementos desse array seriam mais facilmente acessíveis do que em uma estrutura do tipo árvore, como a Octree.

4- Hierarchical Bounding Volumes. Como o ambiente tem poucos objetos espalhados, não é necessário usar uma estrutura do tipo Grid ou Octree. Além disso, para objetos complexos, como há muitos sub-volumes, o ideal é usar a Hierarchical Bounding Volumes.

5- As curvas implícitas são definidas como uma função de x, y multivalorada, ou seja, uma função $f(x,y)=k$, onde k é um valor que pode ser 0, >0 ou <0, dependendo de como queremos especificar a função. A vantagem da forma implícita é que podem ser utilizadas para definir curvas e superfícies fechadas ou curvas e superfícies que se auto-interceptam. Para curvas e superfícies fechadas, a equação implícita pode também ser usada para distinguir o interior do exterior, olhando para o sinal da expressão implícita. Ex: $f(x,y) = x^2 + y^2 - r^2$, a função $F(x,y) = 0$ representa um círculo, para $F > 0$ são representados os pontos fora do círculo e $F < 0$ representam pontos dentro do círculo. Tem como desvantagem a dificuldade de especificações, modificação e controle.

Já as curvas paramétricas são funções com entrada unidimensional e uma saída multidimensional. Tendo como vantagem a facilidade na especificação, modificação e controle. Porém apresentam como desvantagem a necessidade de uma função para cada dimensão representada e a utilização de uma variável extra como parâmetro.

6 - Um exemplo de aplicação é a modelagem de curvas através de splines, outra aplicação é o mapeamento de texturas.

7 - No caso da Hermite cúbica, usamos quatro funções de base e a combinação linear das quatro pelo parâmetro u variando de 0 a 1 produz cada segmento da curva. Cada segmento é definido por dois pontos e as tangentes nesses pontos.

Equação: $P(u) = 2u^3 - 3u^2 + 1) P1 + (-2u^3 + 3u^2) P_2 + (u^3 - 2u^2 + u) P'1 + (u^3 - u^2) P'2$

Na forma matricial fica:

$$[x\ y\ z] = [u^3\ u^2\ u\ 1] \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Base de Hermite}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \frac{dx_1}{du} & \frac{dy_1}{du} & \frac{dz_1}{du} \\ \frac{dx_2}{du} & \frac{dy_2}{du} & \frac{dz_2}{du} \end{bmatrix}}_{\text{Matriz de controle}}$$

8 - No caso de Bezier, em vez de pontos e tangentes, usa-se 4 pontos de controle, sendo que o ponto P_1 inicia e P_4 termina a curva e os pontos P_2 e P_3 ficam fora da curva (puxam ela).

$x(0) = P_1$ $\quad$ $x(1) = P_4$

$x'(0) = 3(P_2 - P_1)$ $\quad$ $x'(1) = 3(P_4 - P_3)$

$$= \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Base de Bezier}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix}}_{\text{Vetores de controle de Bezier}}$$

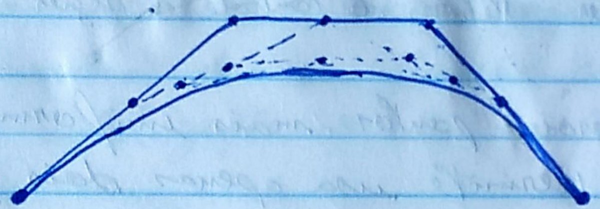
9 - A spline de Bezier provê pontos mais uniformes do que Hermite, sendo que Hermite usa apenas dois pontos e as derivadas nesses pontos, enquanto Bezier usa 4 pontos, com dois na curva e dois fora da curva.

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Base Hermite}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}}_{\text{Bezier para Hermite}} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix}$$

10 - As funções de base mencionadas anteriormente são não negativas, sendo que sua soma é igual a 1. Dessa forma, a curva inteira (no intervalo 0-1) fica dentro do polígono definido pelos pontos de controle, o que é denominado "fecho convexo".

11- Dado os 4 pontos de Bezier que formam um polígono, se pegarmos metade do intervalo entre os pontos subsequentes e marcarmos novos pontos de maneira a formar um novo polígono, a curva de Bezier se manterá dentro desse novo polígono. O novo polígono terá um vértice a mais e ficará mais próximo da curva. Se esse processo for repetido várias vezes, o polígono ficará cada vez mais próximo à curva. No infinito ele se tornará a própria curva de Bezier, tornando mais fácil desenhá-la...

Ex:



12- $P_1 = (1,1)$; $P_2 = (2,4)$; $P_3 = (5,4)$; $P_4 = (6,1)$

$$[x \; y \; z] = [u^3 \; u^2 \; u \; 1] \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= [u^3 \; u^2 \; u \; 1] \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 6 & -9 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [1 + 3u + 6u^2 - 4u^3 \quad 1 + 9u - 9u^2 \quad 0]$$

$$[x \; y] = [-4u^3 + 6u^2 + 3u + 1 \quad -9u^2 + 9u + 1]$$

$x = -4u^3 + 6u^2 + 3u + 1$ $\qquad$ p/ $x = 3$ $\qquad$ $u' = 1{,}7644$ $\qquad$ $y' = -11{,}0784$

$y = -9u^2 + 9u + 1$ $\qquad$ $u'' = -0{,}6807344$ $\qquad$ $y'' = -9{,}2816$

$u''' = 0{,}4162754$ $\qquad$ $y''' = 3{,}186$

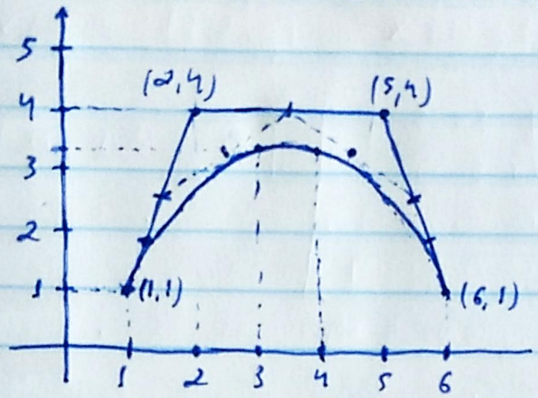
POSITIVO

p/ $x = 4$ $\quad u' = 1{,}68 \quad u'' = -0{,}764 \quad u''' = 0{,}583$

$y' = -9{,}2816 \quad y'' = -11{,}129 \quad y''' = 3{,}187$ positivo

Logo:

Pontos $(3; 3{,}18)$ e $(4; 3{,}18)$



13 –

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \frac{dx_1}{du} & \frac{dy_1}{du} & \frac{dz_1}{du} \\ \frac{dx_2}{du} & \frac{dy_2}{du} & \frac{dz_2}{du} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \\ 3 & -9 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} P_1 \\ P_4 \\ P_1' \\ P_4' \end{matrix} \end{array}$$

$$[u^3 \; u^2 \; u \; 1] \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \\ 3 & -9 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 6 & -9 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$x = -4u^3 + 6u^2 + 3u + 1$

$y = -9u^2 + 9u + 1$

p/ $x = 2$ $\quad u' = 1{,}834 \quad u'' = -0{,}572 \quad u''' = 0{,}238$

$y' = -12{,}76 \quad y'' = -7{,}092 \quad y''' = 2{,}632$ positivo

p/ $x = 5$ $\quad u' = -0{,}834 \quad u'' = 1{,}572 \quad u''' = 0{,}762$

$y' = -12{,}76 \quad y'' = -7{,}092 \quad y''' = 2{,}632$ positivo