

Exercícios

Exercício 6.1 Existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^{500}}{x^2 + y^{1000}}$?

Em caso negativo, que tipo de caminhos você considerará, para encontrar vários sublimites diferentes?

Exercício 6.2 Aplicando limites por caminhos, mostre que $f(x,y) = \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}$ não tem limite quando (x,y) se aproxima de $(0,0)$.

Exercício 6.3 Existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^2}{x^4 + y^2}$?

Exercício 6.4 Existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{y}$?

Exercício 6.5 Onde a função $f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ é contínua ?

Exercício 6.6 Calcule os limites, se existirem, ou mostre que não existem.

- (a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \log \left(\frac{1 + x^2}{x^2 + xy} \right)$. Dica: utilize continuidade.
- (b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{x^2 + \sin^2 y}{2x^2 + y^2}$. Dica: $\sin y \approx y$.
- (c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$. Dica: multiplique em cima e em baixo por $\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1$.

Exercício 6.7 Determine se os limites existem.

- (a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (5,-2)} x^5 + 4x^2y - 5xy^2$. (g) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$.
- (b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$. (h) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}$.
- (c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. (i) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 \sin^2 y}{x^2 + 2y^2}$.
- (d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$.

Exercício 6.8 Determine o maior conjunto no qual a função é contínua

$$(a) F(x, y) = \frac{\sin(xy)}{e^x - y^2}.$$

$$(d) f(x, y) = \frac{\sqrt{y}}{x^2 - y^2 + z^2}.$$

$$(b) F(x, y) = \frac{x - y}{1 - x^2 - y^2}.$$

$$(e) f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{2x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Exercício 6.9 Utilize as coordenadas polares para determinar o limite:

$$(a) \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}.$$

$$(b) \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2).$$