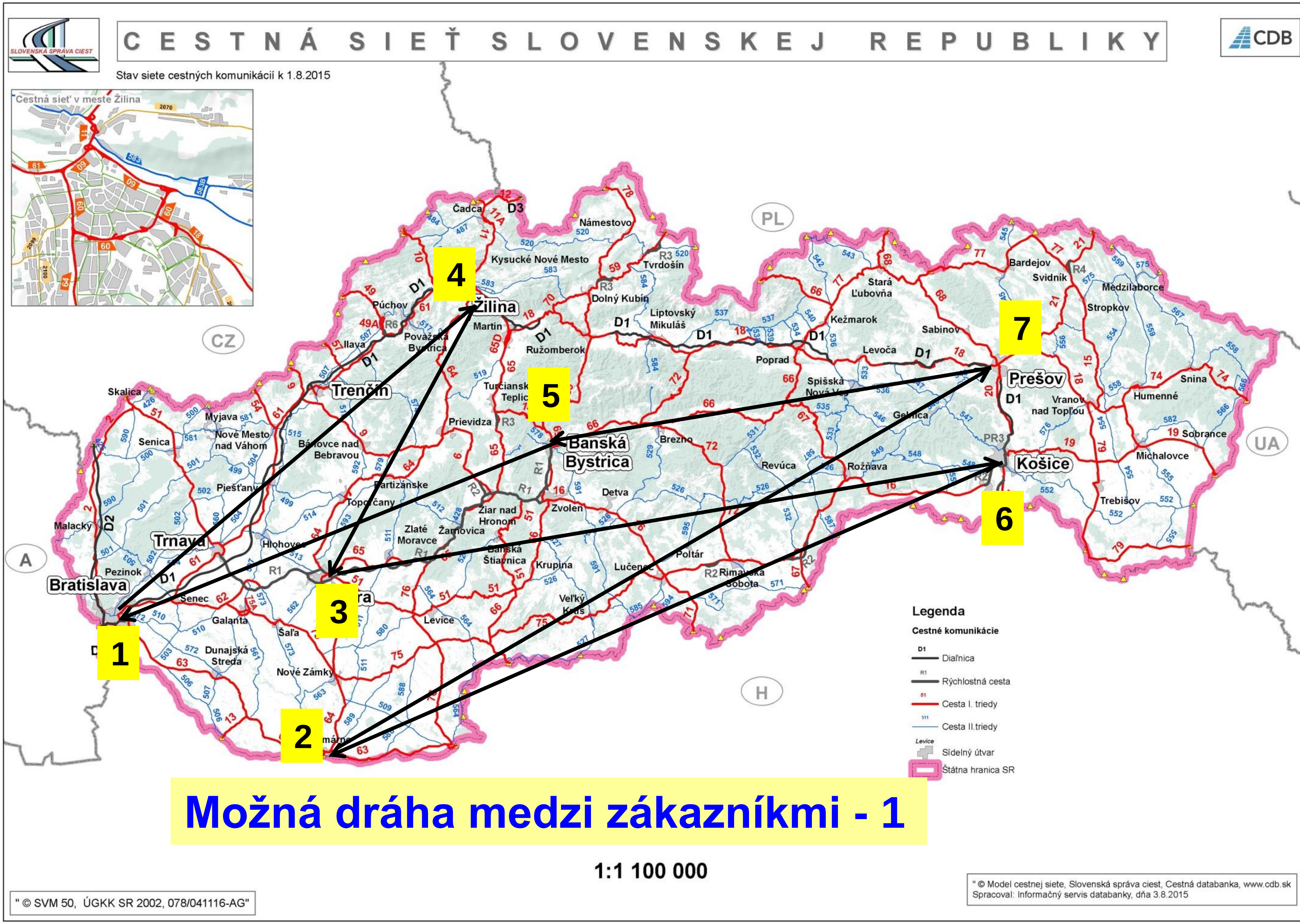
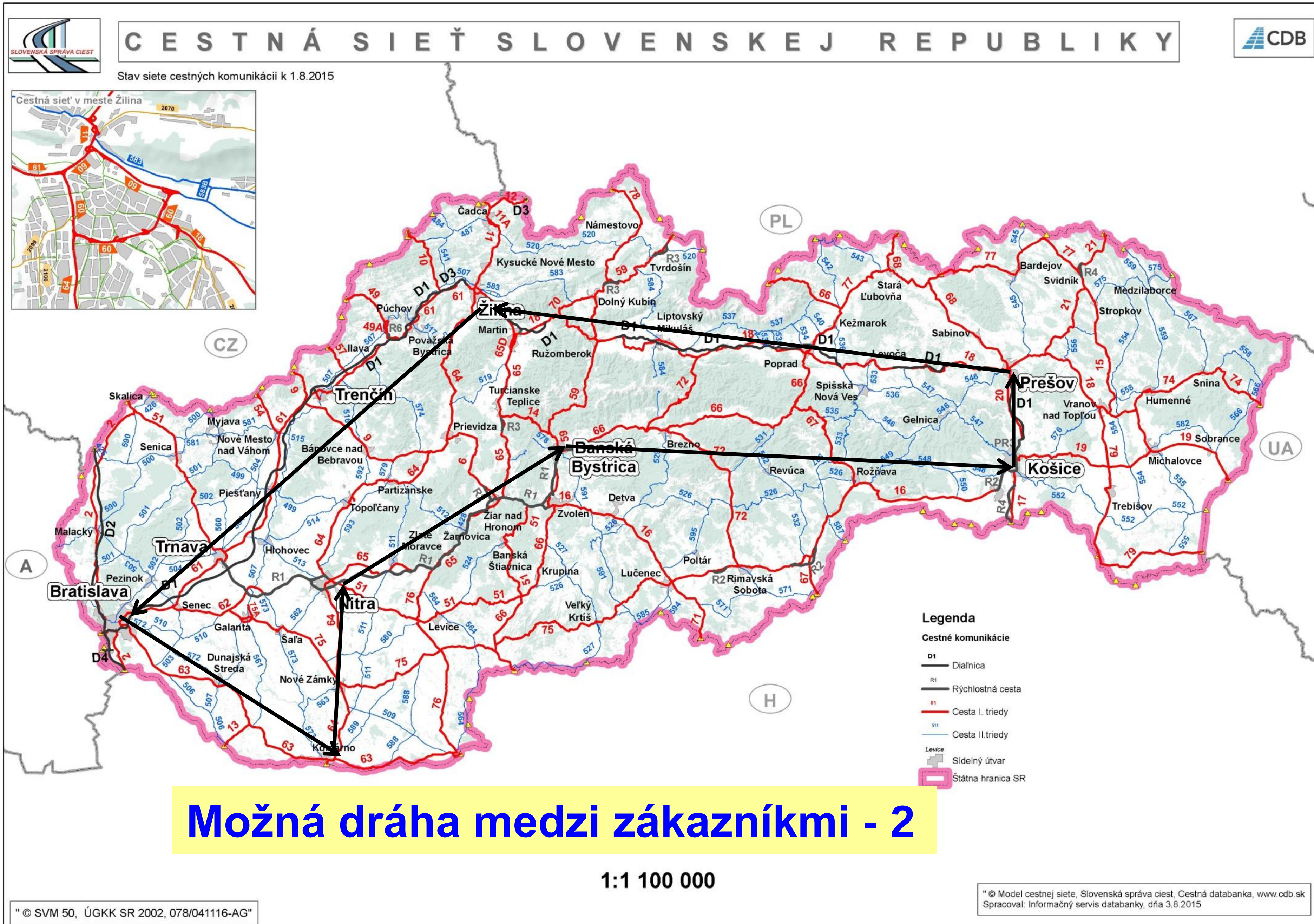
1.7 Úlohy typu optimálne triedenie, optimálne poradie (permutačné kódovanie reťazcov v GA)

Každý prvok reťazca (gén) sa musí v reťazci nachádzať práve raz. Hľadáme optimálne poradie prvkov.

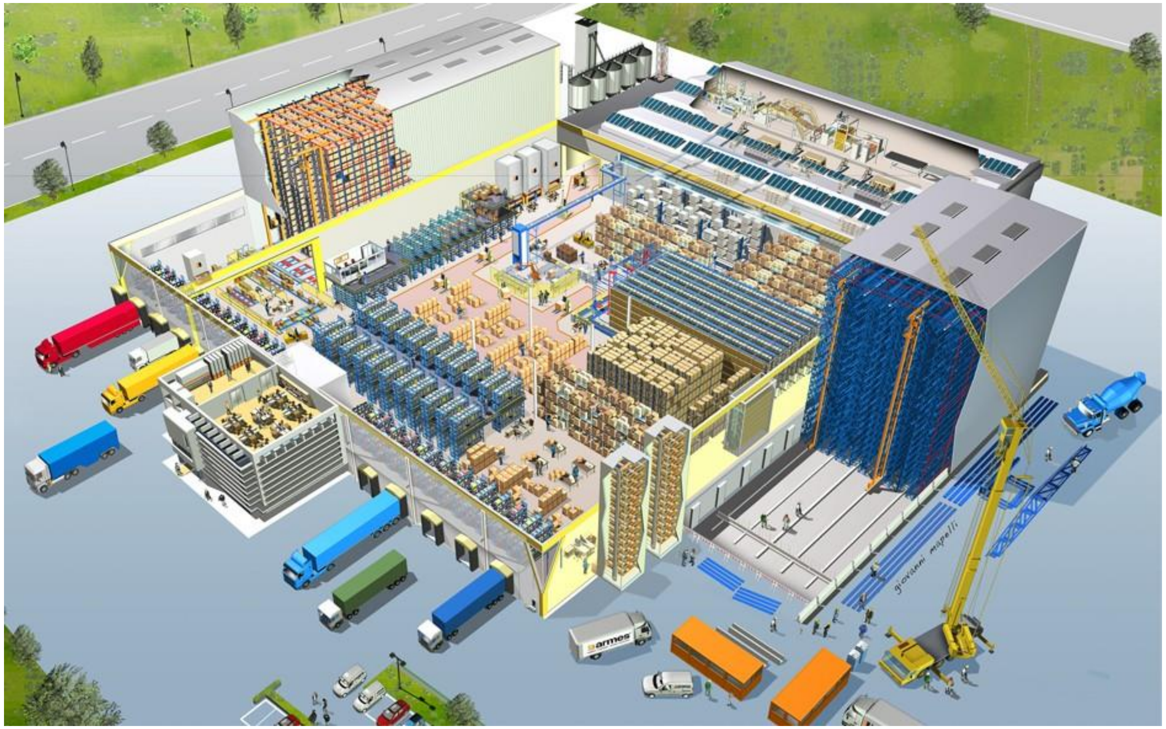


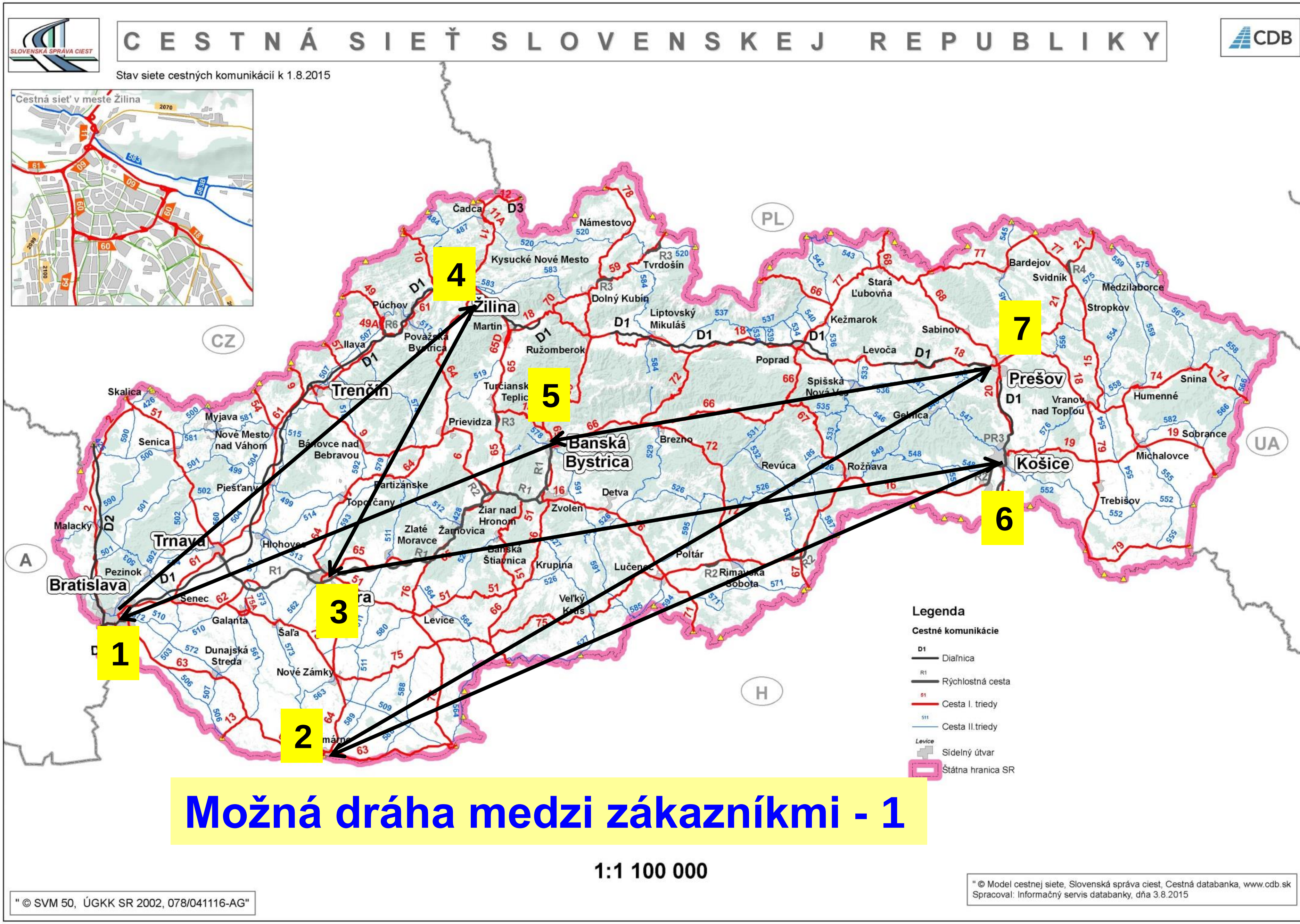
Možná dráha medzi zákazníkmi - 1



Možná dráha medzi zákazníkmi - 2

Skladová logistika





Možná dráha medzi zákazníkmi - 1

Mutácia ?

$$R=[1\ 4\ 3\ 6\ 2\ 7\ 5] \rightarrow R'=[1\ 4\ 7\ 6\ 2\ 7\ 5]$$

neprípustné

Kríženie ?

neprípustné

$$R_1=[1\ 4\ 3\ 6\ 2\ 7\ 5] \rightarrow P_1=[1\ 4\ 3\ 6\ 2\ 6\ 7]$$

$$R_2=[1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7] \rightarrow P_2=[1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 7\ 5]$$

Takáto mutácia je neprípustná

$R=[1\ 4\ 3\ 6\ 2\ 7\ 5] \to R'=[1\ 4\ 7\ 6\ 2\ 7\ 5]$

Takéto kríženie je neprípustné

$R_1=[1\ 4\ 3\ 6\ 2\ 7\ 5] \to P_1=[1\ 4\ 3\ 6\ 2\ 6\ 7]$

$R_2=[1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7] \to P_2=[1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 7\ 5]$

Mutácia – (náhodná) výmena poradia dvoch génov

$$R=[r_1\, r_2\, r_3\, r_4\, r_5\, r_6\, r_7\, r_8] \rightarrow R=[r_1\, \mathbf{r_5}\, r_3\, r_4\, \mathbf{r_2}\, r_6\, r_7\, r_8]$$

Mutácia – (náhodné) prelomenie reťazca

$$R=[\underline{r_1\, r_2\, r_3\, r_4\, r_5}\, \vdots\, \underline{r_6\, r_7\, r_8}] \rightarrow R=[\mathbf{r_6\, r_7\, r_8}\, r_1\, r_2\, r_3\, r_4\, r_5]$$

Mutácia - výmena subreťazcov

$$R=[r_1\, \underline{r_2\, r_3}\, r_4\, r_5\, \underline{r_6\, r_7\, r_8}] \rightarrow R=[r_1\, r_6\, r_7\, r_8\, r_4\, r_5\, r_2\, r_3]$$

Mutácia – inverzia poradia v subreťazci

$$R=[r_1\, r_2\, \underline{r_3\, r_4\, r_5\, r_6}\, r_7\, r_8] \rightarrow R=[r_1\, r_2\, r_6\, r_5\, r_4\, r_3\, r_7\, r_8]$$

Permutačné kríženie

*A=[1 2 3 **4 5 6 7** 8]*

B=[5 4 8 2 7 3 1 6]

→ *C=[8 2 3 **4 5 6 7** 1]*

Príklad: Travelling salesman problem

1.8 Riešenie optimalizačných úloh s ohraničeniami

Príklad úlohy s obmedzeniami
Alokácia investícií

- Firma chce investovať 10 miliónov Euro do bežných akcií, do preferovaných akcií, do podnikových dlhopisov, do štátnych dlhopisov a do úspor v banke.
- Odhadované ročné výnosy v jednotlivých prípadoch sú uvedené v tabuľke.
- Celková suma investícií do akcií nemá byť väčšia než 2.5 milióna.
- Investície do štátnych dlhopisov nemajú byť menšie než úspory v banke.
- Suma investícií do dlhopisov nemá presiahnuť polovicu všetkých investovaných prostriedkov.

Druh investície	Odhad výnosu	Veľkosť investície
Bežné akcie	*4 %*	x_1
Preferované akcie	*7 %*	x_2
Podnikové dlhopisy	*11 %*	x_3
Štátne dlhopisy	*6 %*	x_4
Úspory v banke	*5 %*	x_5

Formulácia optimalizačných úloh s ohraničeniami

Účelová f. : $f\colon D \rightarrow R^1$ $D \subset R^n$

Definičný obor

$$f(x^*) = \min\ f(x)$$

x^* - optimálne (minimálne) riešenie

$x \in R^n$ $x_{i,\min} \le x_i \le x_{i,\max}$ $i=1,2,...,n$

Ohraničenia :

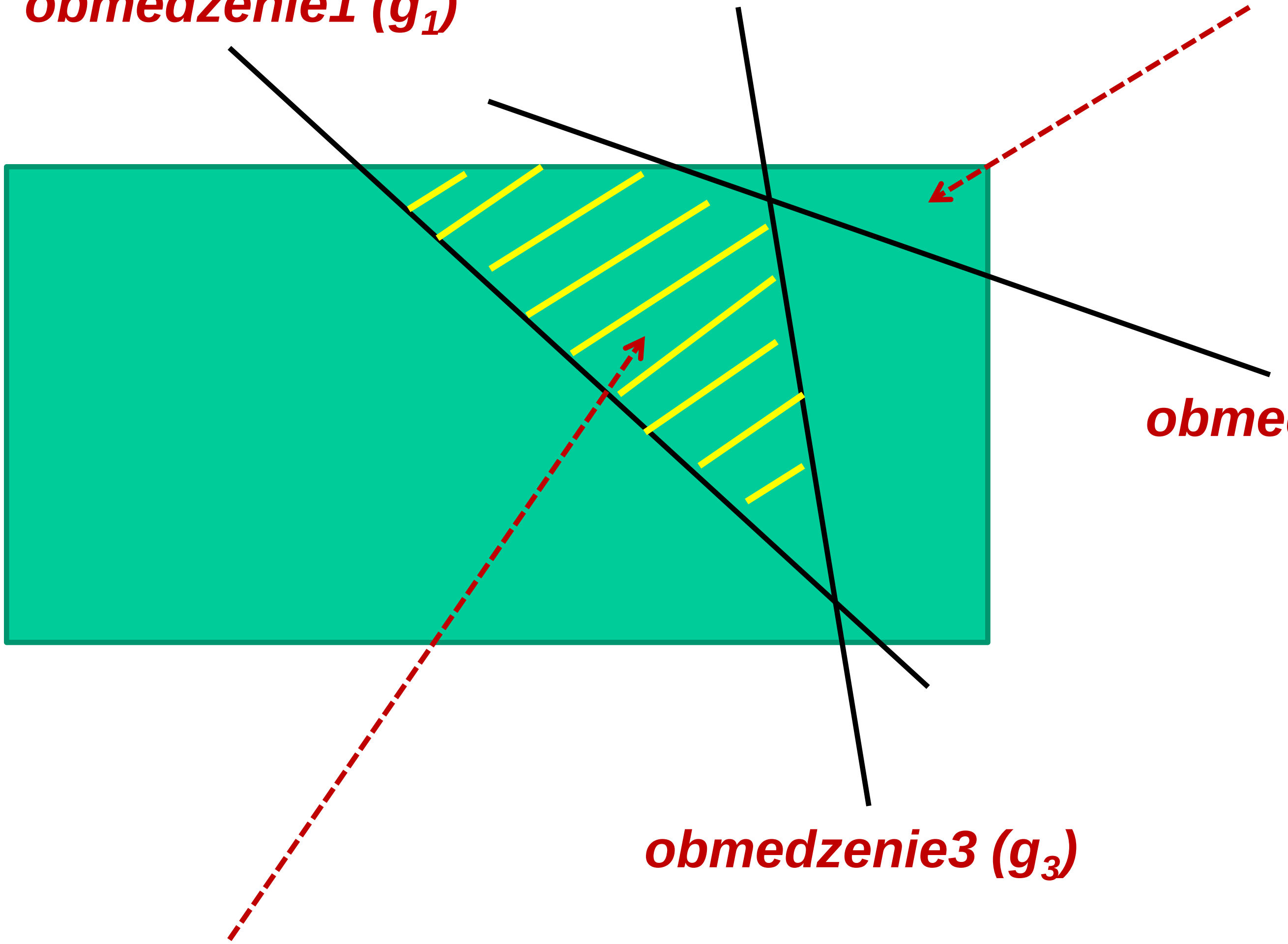
$g_i(x) \ge 0$ $i=1,2,...,m$

$h_j(x) = 0$ $i=1,2,...,r$

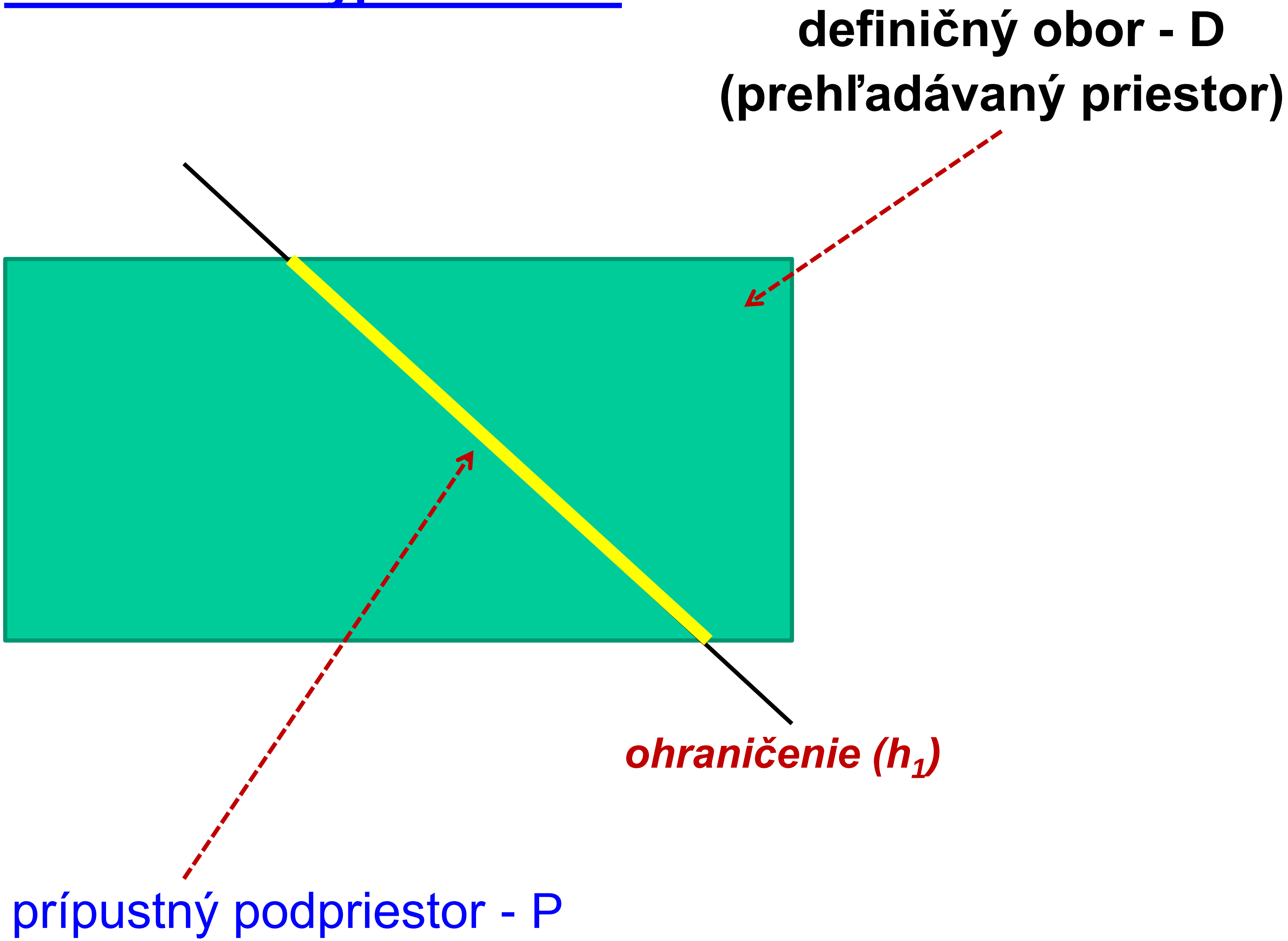
$P \subset D$

Prípustný priestor defininičného oboru

Ohraničenie typu nerovnosť



Ohraničenie typu rovnosť



Príklad úlohy s obmedzeniami
Alokácia investícií

- Firma chce investovať 10 miliónov Euro do bežných akcií, do preferovaných akcií, do podnikových dlhopisov, do štátnych dlhopisov a do úspor v banke.
- Odhadované ročné výnosy v jednotlivých prípadoch sú uvedené v tabuľke.
- Celková suma investícií do akcií nemá byť väčšia než 2.5 milióna.
- Investície do štátnych dlhopisov nemajú byť menšie než úspory v banke.
- Suma investícií do dlhopisov nemá presiahnuť polovicu všetkých investovaných prostriedkov.

Druh investície	Odhad výnosu	Veľkosť investície
Bežné akcie	*4 %*	x_1
Preferované akcie	*7 %*	x_2
Podnikové dlhopisy	*11 %*	x_3
Štátne dlhopisy	*6 %*	x_4
Úspory v banke	*5 %*	x_5

Matematická formulácia úlohy

$$J(x) = 0.04x_1 + 0.07x_2 + 0.11x_3 + 0.06x_4 + 0.05x_5 \to \max$$

$$P_1 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \le 10000000$$

$$P_2 : x_1 + x_2 \le 2500000$$

$$P_3 : -x_4 + x_5 \le 0$$

$$P_4 : -0.5x_1 - 0.5x_2 + 0.5x_3 + 0.5x_4 - 0.5x_5 \le 0$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0$$

Reťazec: $r=[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5]$

Účelová funkcia: $J(x) \to max$

Optimálne riešenie úlohy je:

$x_1^*=0$, $x_2^*=2500000$, $x_3^*=2500000$, $x_4^*=2500000$, $x_5=2500000$

a hodnota účelovej funkcie je $J(x)^*=725000$.

Metódy používajúce pokutové funkcie

$$F(x) = f(x) + pokuta(x)$$

$$pokuta(x) = 0 \text{ ak } x \in P$$

$$pokuta(x) \neq 0 \text{ ak } x \notin P$$

alebo

$$F(x)=f(x) \text{ ak } x \in P$$

$$F(x)=pokuta(x) \text{ ak } x \notin P$$

1.8.1 Mŕtva pokuta ("death penalty")

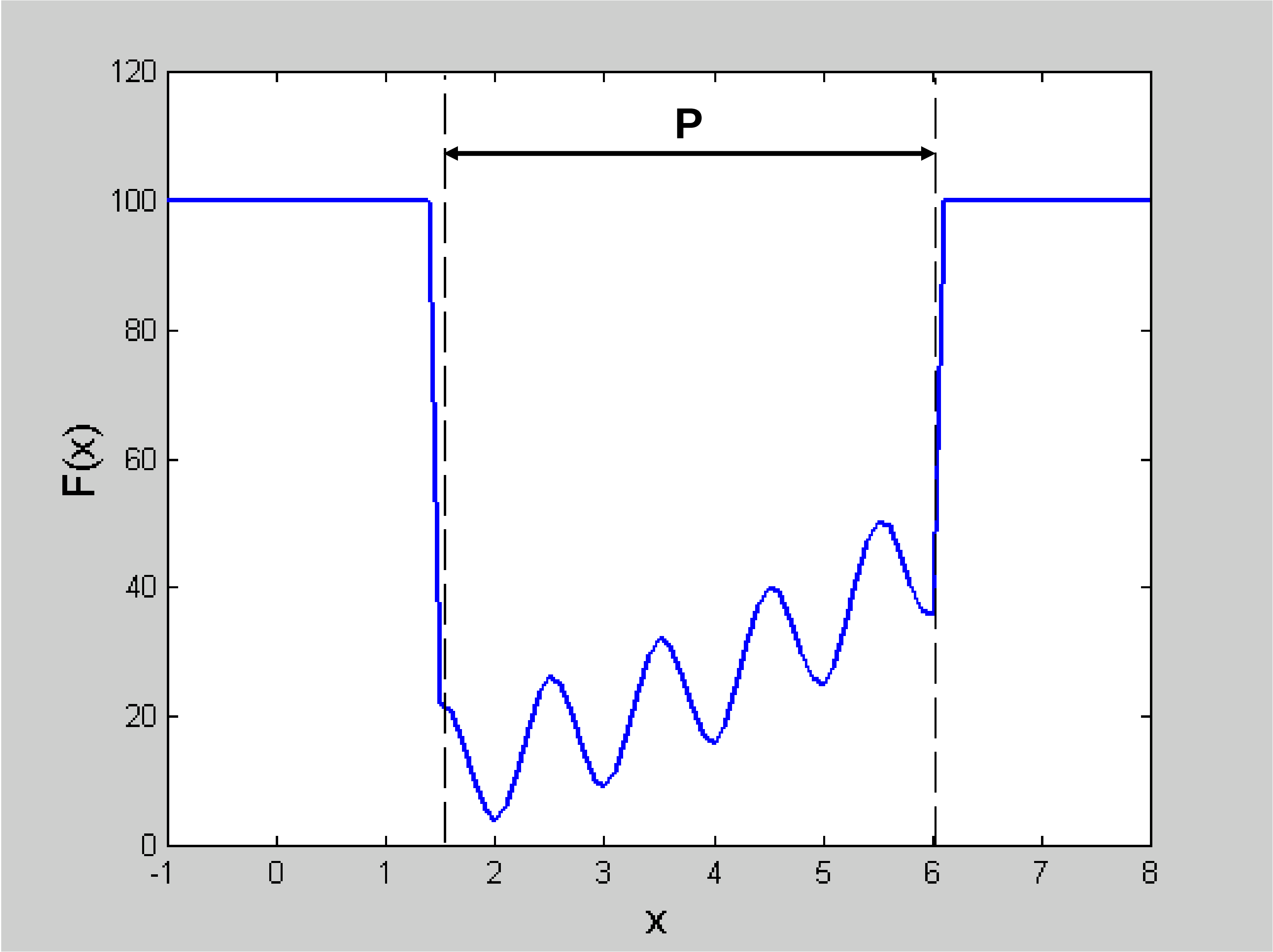
$pokuta(x) = +\infty$ resp. $pokuta(x) = -\infty$

alebo

$pokuta(x) = \sigma; \quad \sigma > 0$ pri minimalizácii

$\sigma < 0$ pri maximalizácii

$|\sigma|$ - *dostatočne veľká hodnota*



$$F(x)=f(x);\ x\in P\ ,\quad F(x)=100;\ x\notin P$$

Príklad

$$f(x) = (x_1 - 10)^2 + 5(x_2 - 12)^2 + x_3^4 + 3(x_4 - 11)^2 + 10x_5^6 + 7x_6^2 + x_7^4 - 4x_6x_7 - 10x_6 - 8x_7$$

$$127 - 2x_1^2 - 3x_2^4 - x_3 - 4x_4^2 - 5x_5 \geq 0$$

$$282 - 7x_1 - 3x_2 - 10x_3^2 - x_4 + x_5 \geq 0$$

$$196 - 23x_1 - x_2^2 - 6x_6^2 + 8x_7 \geq 0$$

$$-4x_1^2 - x_2^2 + 3x_1x_2 - 2x_3^2 - 5x_6 + 11x_7 \geq 0$$

$$-10 \leq x_i \leq 10, i = 1,2,\ldots,7$$

Pri riešení metódou mŕtvej pokuty bude účelová v tvare

$$F(x) = [f(x) + pokuta(x)] \rightarrow \min$$

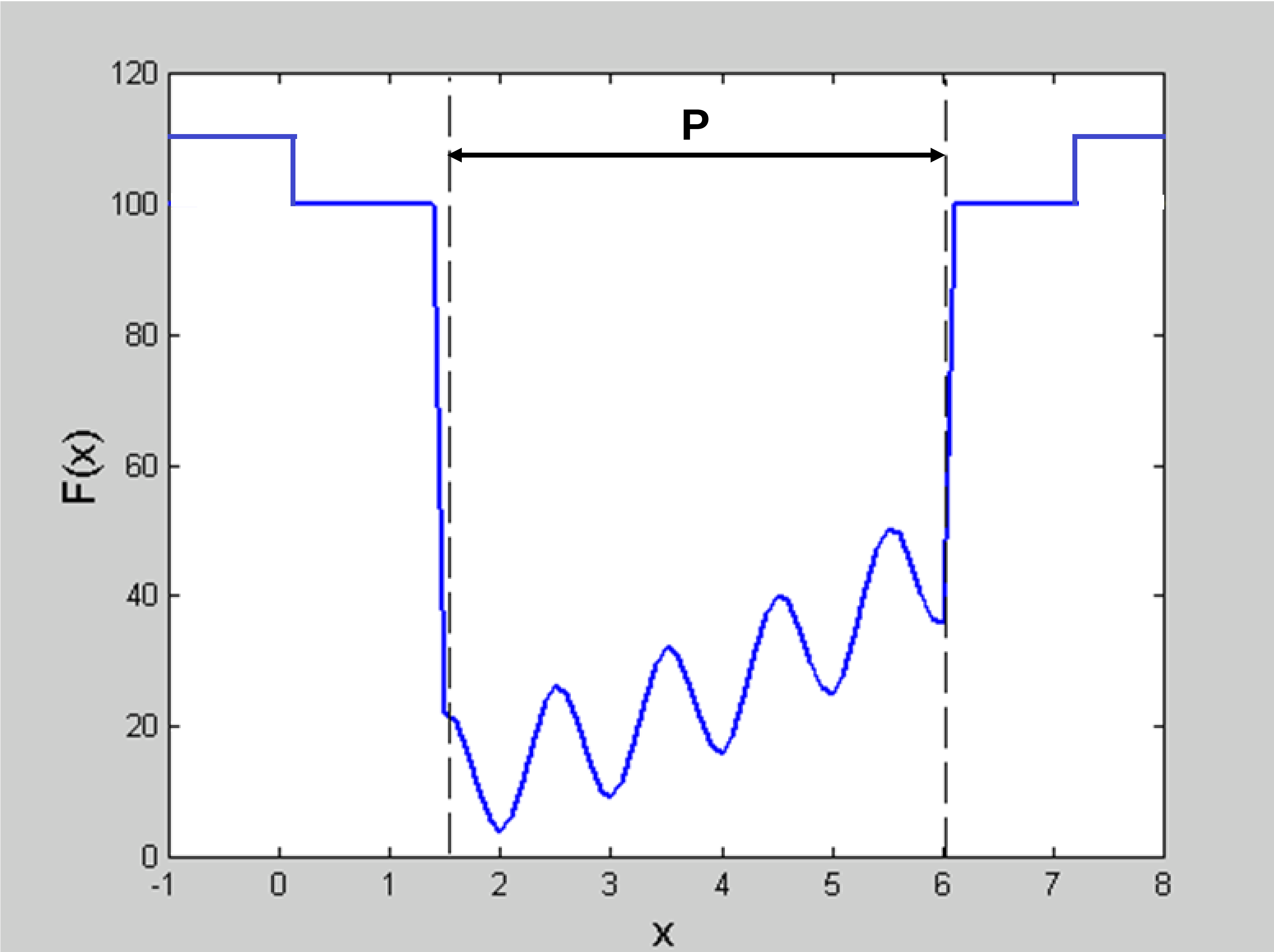
$pokuta(x) = 0$ *ak sú splnené všetky obmedzenia*

$pokuta(x) = 10^{10}$ *ak ktorékoľvek obmedzenie nie je splnené*

1.8.2 Stupňová pokuta

$$pokuta(x) = \sigma . p \quad \text{resp.} \quad pokuta(x) = p^{\sigma}$$

σ je počet nesplnených obmedzení
p je dostatočne veľká pokutová konštanta
(napr. 10, 100, 1 000 000 …)



$$F(x)=f(x);\ x\in P \quad , \quad F(x)=100;\ x\notin P$$

$$f(x) = (x_1 - 10)^2 + 5(x_2 - 12)^2 + x_3^4 + 3(x_4 - 11)^2 + 10x_5^6 + 7x_6^2 + x_7^4 - 4x_6x_7 - 10x_6 - 8x_7$$

$$127 - 2x_1^2 - 3x_2^4 - x_3 - 4x_4^2 - 5x_5 \geq 0$$

$$282 - 7x_1 - 3x_2 - 10x_3^2 - x_4 + x_5 \geq 0$$

$$196 - 23x_1 - x_2^2 - 6x_6^2 + 8x_7 \geq 0$$

$$-4x_1^2 - x_2^2 + 3x_1x_2 - 2x_3^2 - 5x_6 + 11x_7 \geq 0$$

$$-10 \leq x_i \leq 10, i = 1,2,\ldots,7$$

Pri použití metódy stupňovitej pokuty

$$F(x) = [f(x) + pokuta(x)] \rightarrow \min$$

$$pokuta(x) = 10^4.p$$

p = {1,2,3,4} je počet nesplnených obmedzení

Hodnota konštanty *k* bola zvolená 10^4, aby boli pokuty rádovo vyššie než možné hodnoty účelovej funkcie ***f(x)*,** ktorej minimum je ***680.630***.

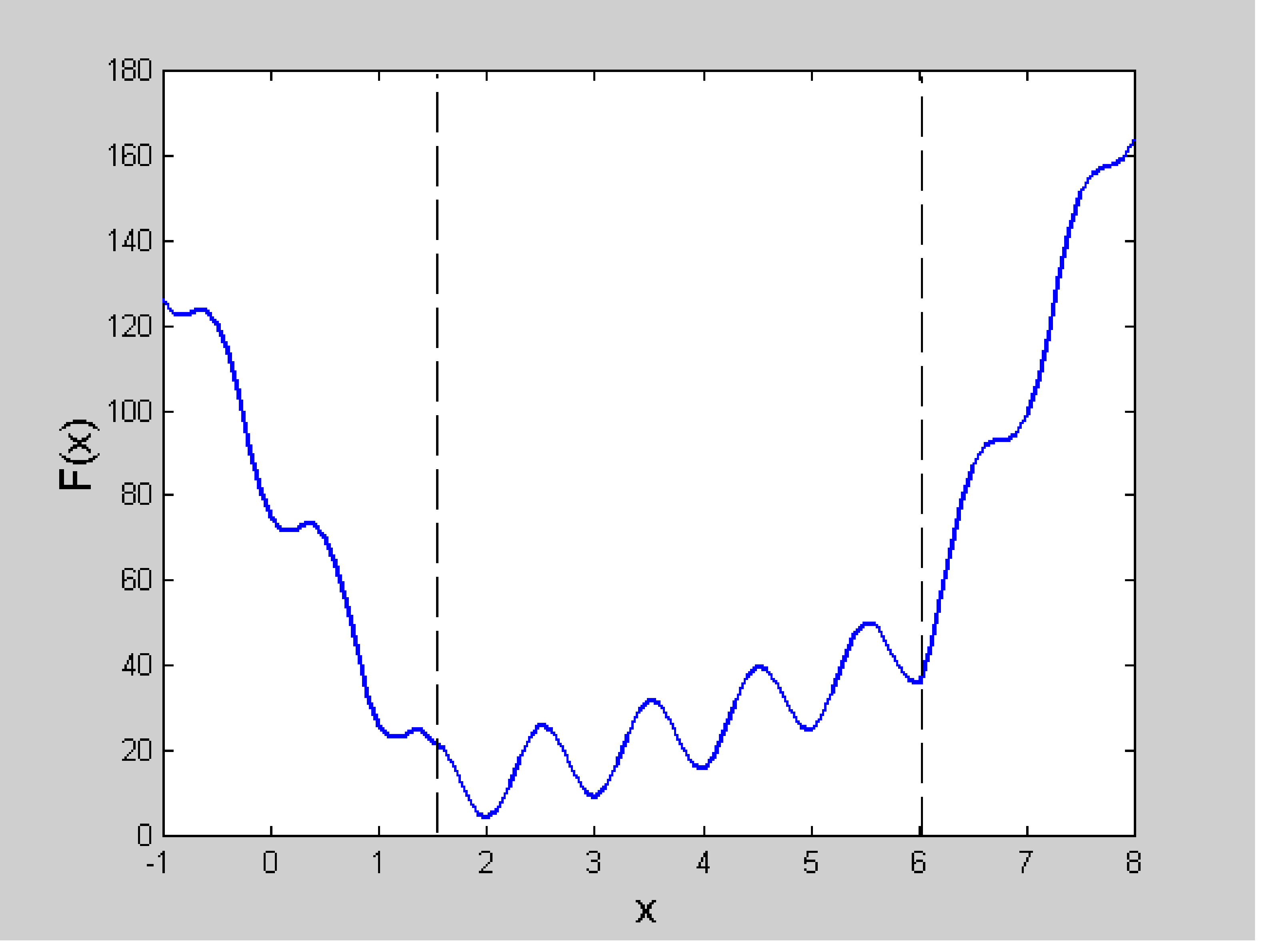
1.8.3 Pokuta úmerná miere porušenia obmedzení

$$pokuta(x) = \sum_{k=1}^{(m+r)} (a_k + c_k \mu_k{}^b(x))$$

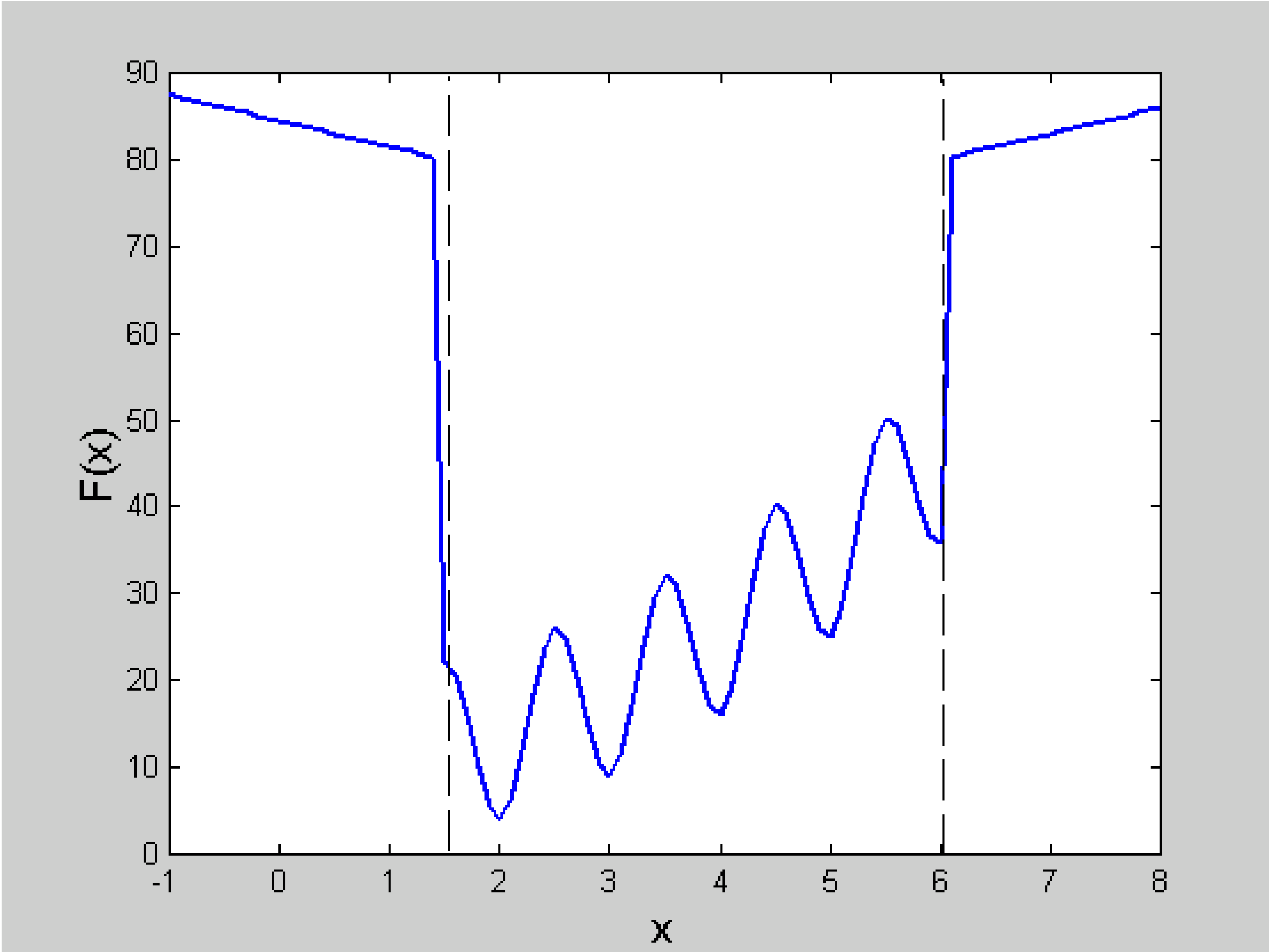
m - počet obmedzení typu nerovnosť
r - počet obmedzení typu rovnosť
a,b,c - konštanty, z ktorých a môže byť 0,
b alebo c často býva =1
$\mu_k(x)$ - miera porušenia k-teho obmedzenia typu nerovnosť
resp. rovnosť (vzdialenosť od prípustnej oblasti)

$$\mu_k(x) = -g_k(x) \quad \text{ak} \quad g_k(x) < 0 \qquad k=1,2,\ldots,m$$

$$\mu_k(x) = \left|h_k(x)\right| \quad \text{ak} \quad h_k(x) \neq 0 \qquad k=(m+1),\ldots,(m+r)$$



$$F(x)=f(x);\ x\in P\ ,\quad F(x)=f(x)+c.g_k(x);\ x\notin P$$



$$F(x)=f(x);\ x \in P\ ,\quad F(x)=80+c.g_k(x);\ x \notin P$$

Metóda pokutovania podľa miery porušenia obmedzení

$$F(x) = [\,f(x) + pokuta(x)] \rightarrow \min$$

ak

$$127 - 2x_1^2 - 3x_2^4 - x_3 - 4x_4^2 - 5x_5 < 0$$

$$pokuta = pokuta - (127 - 2x_1^2 - 3x_2^4 - x_3 - 4x_4^2 - 5x_5)$$

ak $282 - 7x_1 - 3x_2 - 10x_3^2 - x_4 + x_5 < 0$

$$pokuta = pokuta - (282 - 7x_1 - 3x_2 - 10x_3^2 - x_4 + x_5)$$

ak $196 - 23x_1 - x_2^2 - 6x_6^2 + 8x_7 < 0$

$$pokuta = pokuta - (196 - 23x_1 - x_2^2 - 6x_6^2 + 8x_7)$$

ak $-4x_1^2 - x_2^2 + 3x_1x_2 - 2x_3^2 - 5x_6 + 11x_7 < 0$

$$pokuta = pokuta - (-4x_1^2 - x_2^2 + 3x_1x_2 - 2x_3^2 - 5x_6 + 11x_7)$$

Alokácia investícií - analogicky

$$J(x) = 0.04x_1 + 0.07x_2 + 0.11x_3 + 0.06x_4 + 0.05x_5 \to \max$$

$$P_1 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \le 10000000$$

$$P_2 : x_1 + x_2 \le 2500000$$

$$P_3 : -x_4 + x_5 \le 0$$

$$P_4 : -0.5x_1 - 0.5x_2 + 0.5x_3 + 0.5x_4 - 0.5x_5 \le 0$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0$$

Reťazec: $r=[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5]$

Účelová funkcia: $J(x) \to max$

Optimálne riešenie úlohy je:

$x_1^*=0$, $x_2^*=2500000$, $x_3^*=2500000$, $x_4^*=2500000$, $x_5=2500000$

a hodnota účelovej funkcie je $J(x)^*=725000$.