Modelos de Bancos e Moeda

Monitora: Kátia Nishiyama*

24 de novembro de 2017

1 Modelo Bancário Simples

1.1 Descrição da Economia

Considere uma economia com as seguintes características:

(i) Existem 3 períodos: $t = 0$, $t = 1$ e $t = 2$.

(ii) A economia tem uma população de N indivíduos, em que N é grande o bastante para que a LGN seja valida.

(iii) Em $t = 0$, todas as pessoas são iguais e possuem uma dotação $e > 0$. Na data $t = 1$, cada pessoa recebe um choque tal que com probabilidade p elá terá uma urgência pelo consumo nesse período e com probabilidade $1 - p$ ele pode optar por consumir tanto no presente quanto no futuro. Se um agente precisar consumir na data 1, chamaremos esse agente de *impaciente*. Os demais agentes serão considerados *pacientes*.

(iv) p e $1 - p$ são de *common knowledge*, isto é, é de conhecimento comumm que com probabilidade p cada um dos agentes se tornará impaciente em $t = 1$. No entanto o tipo de cada pessoa - quando revelado em $t = 1$ - é uma informação privada.

Seja:

- x a quantidade consumida em $t = 1$
- y a quantidade consumida em $t = 2$.

Temos que as utilidades serão dadas por:

- utilidade do impaciente:
$$u(x) = \frac{x^{(1-\delta)}}{(1-\delta)}$$
- utilidade do paciente:
$$u(x+y) = \frac{(x+y)^{(1-\delta)}}{(1-\delta)}$$

*Esta nota é uma extensão das notas produzida pelo Fernando Barros Jr, é um material de apoio da disciplina Economia Monetária e Financeira, ministrada pelo professor Ricardo Cavalcanti.

Indivíduos não transacionam entre si (estão isolados de modo que não podem transacionar seus depósitos) ... Utilizam intermediários financeiros

(v) **Tecnologia**: Há uma tecnologia disponível para todos que permite transformar k unidades em $t = 1$ em Rk unidades em $t = 2$, com $R > 1$. Para tanto, as k unidades devem ser iniciadas em $t = 0$. É possível fazer o resgate em $t = 1$ dessas k unidades, mas sem nenhum acréscimo (impacientes vão querer resgatar).

(vi) **Intermediários**:

- em $t = 0$ as pessoas podem se reunir e depositar seus recursos (dotações) junto ao intermediário.
- em $t = 1$ intermediário organiza uma fila e distribui alocações para as pessoas que se declarem impacientes.
- em $t = 2$, os recursos que não forem utilizados para pagamentos em $t = 1$ serão devolvidos para os pacientes da economia. O intermediário também tem acesso a tecnologia descrita no item iv.

Se não houvesse um intermediário, mas a tecnologia estivesse disponível (muitas vezes o intermediário pode ser o dono da tecnologia) o indivíduo impaciente consumiria toda sua dotação em $t = 1$, e o paciente deixaria para consumir em $t = 2$. Logo, impacientes consumiriam e, e impacientes utilizariam a tecnologia e consumiriam eR.

É claro que com a existência de tecnologia os indivíduos pacientes irão consumirsomente no segundo período. Seja x_p^* o consumo do paciente em $t = 1$ provaremos na próxima seção que $x_p^* = 0$ (o argumento é bem intuitivo, por sua função utilidade ele é indiferente entre o consumo nos períodos e se deixar toda sua dotação render por um período, ele terá mais consumo, e assim, mais utilidade).

1.2 Problema do banco

O banco, intermediário financeiro, age como um planejador central e resolve um problema de otimização do bem-estar médio dos agentes. Seja x_i e x_p consumo no primeiro período dos indivíduos impacientes e pacientes, respectivamente, o planejador resolve:

$$\begin{aligned} &\max_{x_p, x_i, y} \quad N[pu(x_i) + (1-p)u(x_p + y)] \qquad (1) \\ s.a. \quad & N[px_i + (1-p)(x_p + y/R)] \leq Ne \\ & x_p + y \geq x_i. \end{aligned}$$

A primeira restrição refere-se a restrição de factibilidade (somatória do consumo deve ser menor do que a somatória de recursos na economia), e a segunda de *truth telling* (consumo total que o planejador entrega para os pacientes deve ser maior do que entrega para os impacientes, caso contrário, os pacientes iriam querer se declarar impacientes para o intermediário).

Observação 1 *A economia sem risco agregado com N suficientemente grande talque vale a LGN implica que sabemos com certeza que $N \cdot p$ da população será impaciente e $N \cdot (1-p)$ da população será impaciente. Logo, conseguimos construir a restrição de factibilidade.*

Podemos mostrar que:

(a) $x_p^* = 0$.

Supondo $x_p^* > 0$, o indivíduo paciente poderá realocar seus recursos (x_p, y) para $(x_p' = 0, y' = y + x_p' \cdot R)$, que é factível e aumenta a utilidade do indivíduo. Desse modo a função objetivo do banco não estaria sendo maximizada.

Logo podemos nos preocupar apenas com $x = x_i$ e y.

(b) Existe uma equivalência do problema do banco com o problema dos indivíduos de maximizar a utilidade esperada em $t = 0$.

Em $t = 0$ o indivíduo não sabe o seu tipo, resolvendo:

$$\max_{x_p, x_i, y} pu(x_i) + (1-p)u(x_p + y)$$

$$s.a \quad px_i + (1-p)(x_p + y/R)] \leq e$$

$$x_p + y \geq x_i.$$

Tal problema é análogo ao problema dos bancos.

(c) $(x^*, y^*) = \left(\frac{eR^{\frac{\delta-1}{\delta}}}{1-p+pR^{\frac{\delta-1}{\delta}}}, \frac{eR}{1-p} - \frac{pR}{1-p}\left[\frac{eR^{\frac{\delta-1}{\delta}}}{1-p+pR^{\frac{\delta-1}{\delta}}}\right] \right) = \frac{e}{p+(1-p)R^{\frac{1-\delta}{\delta}}}\left(1, R^{\frac{1}{\delta}}\right)$.

Como podemos trabalhar apenas com $x_i = x$, o problema do banco fica:

$$\max_{x,y} pu(x) + (1-p)u(y) = \max_{x,y} p \cdot \frac{x^{1-\delta}}{1-\delta} + (1-p)\frac{y^{1-\delta}}{1-\delta}$$

$$\text{s.t} \quad px + (1-p)\frac{y}{R} = e \quad \text{e} \quad y \geq x$$

Tomando a CPO:

$$[x]: \quad p \cdot x^{-\delta} = \lambda p$$

$$[y]: \quad (1-p) \cdot y^{-\delta} = \lambda(1-p)/R$$

Dividindo as igualdades acima:

$$\frac{x}{y} = R^{\frac{1}{\delta}} \Rightarrow y = x \cdot R^{\frac{1}{\delta}}$$

Substituindo na restrição de factibilidade:

$$p \cdot x + (1-p)x \cdot R^{\frac{1}{\delta}-1} = e \Rightarrow x = \frac{e}{p+(1-p)R^{\frac{1-\delta}{\delta}}}$$

E assim,

$$x^* = \frac{eR^{\frac{\delta-1}{\delta}}}{1-p+pR^{\frac{\delta-1}{\delta}}}$$

(d) Sempre vale que $y^* \geq x^*$.

De fato, pela CPO obtivemos

$$y = x \cdot R^{\frac{1}{\delta}}$$

onde $R > 1$ e $\delta \in (0,1)$. Logo, $y^* \geq x^*$

2 Modelo Bancário com Risco Agregado

2.1 Descrição da Economia

Considere uma economia com as seguintes características:

(i) Existem 3 períodos: $t = 0$, $t = 1$ e $t = 2$.

(ii) A economia tem uma população de $N \geq 2$ pessoas. N **não é suficientemente grande** $\Rightarrow$ **Risco Agregado**

(iii) Em $t = 0$, todas as pessoas são iguais e possuem uma dotação 1. Na data 1, cada pessoa recebe um choque tal que com probabilidade p elá terá uma urgência pelo consumo nesse período e com probabilidade $1 - p$ ele pode optar por consumir tanto no presente quanto no futuro. Se um agente precisar consumir na data 1, chamaremos esse agente de *impaciente*. Os demais agentes serão considerados *pacientes*.

Um impaciente tem utilidade $u(x) = \dfrac{x^{(1-\delta)}}{(1-\delta)}$ e a utilidade do paciente é $u(x+y) = \dfrac{(x+y)^{(1-\delta)}}{(1-\delta)}$. Em que x é a quantidade consumida em $t = 1$ e y é a quantidade consumida em $t = 2$.

(iv) Há uma tecnologia disponível para todos que permite transformar k unidades em $t = 1$ em Rk unidades em $t = 2$, com $R > 1$. Para tanto, as k unidades devem ser iniciadas em $t = 0$. É possível fazer o resgaste na data 1 dessas k unidades, mas sem nenhum acréscimo.

(v) É de conhecimento comum que com probabilidade p cada um dos agentes se tornará impaciente em $t = 1$. No entanto, é informação privada de cada uma da pessoas se ela se tornou ou não um impaciente em $t = 1$.

(vi) Intermediação: em $t = 0$ as pessoas podem ser reunir e depositar suas dotações junto a um banco. Em $t = 1$, uma fila é formada, em que cada pessoa recebe aleatoriamente uma posição e sabe qual é esta posição, o banco acessa cada pessoa de forma a descobrir quantos se tornaram impacientes e depois distribui as alocações dos impacientes. Em $t = 2$, distribui-se as alocações dos pacientes.

(vii) No período 1, as pessoas estão isoladas de modo que não podem transacionar seus depósitos.

O que temos de diferente com relação ao modelo anterior?

N não é suficientemente grande, não vale a lei dos grande números, e não conseguimos determinar o número de pacientes e impacientes na economia.

2.2 Problema do Planejador

Note que não é possível saber a qual o número de pessoas pacientes/impacientes (risco agregado). Logo o banco deve perguntar para as pessoas qual o tipo (de choque) de cada pessoa.

Cada pessoa irá reportar seu tipo quando acessada pelo banco quando estiver na fila.

$$\omega_i = \begin{cases} 0 & \text{se impaciente} \\ 1 & \text{se paciente} \end{cases} \qquad \forall i \in \{1, 2, \ldots, N\}. \tag{2}$$

Estado agregado da economia será um vetor:

$$\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_N) \in \Omega = \{0, 1\}^N.$$

(o estado agregado é o vetor que especifica o tipo sorteado de cada um dos N indivíduos)
Apesar de não conseguirmos identificar a relação de pacientes e impacientes exata, podemos calcular a probabilidade de cada estado possível ocorrer.

$$P(\omega) = p^{N-S}(1-p)^S, \text{ em que } S = \sum_{i=1}^{N} \omega_i.$$

Observe que S é o total de indivíduos pacientes.

Para cara indivíduo i, , para cada possível estado agregado ω, o planejador escolhe $x_i(\omega)$ e $y_i(\omega)$ tal que a restrição de recursos é satisfeita:

$$\sum_{i=1}^{N} \left(x_i(\omega) + \frac{y_i(\omega)}{R} \right) \leq N.$$

Como já mencionamos, o banco acessa as pessoas para saber qual o tipo individual de cada uma delas, definimos formalmente o processo de transmissão da infomação. Indivíduos reportam seu tipo, através de toda a informação o banco resolve seu problema e define uma regra de alocação de consumo para cada tipo reportado. Um equilíbrio é o consjunto das mensagens dos indivíduos que leve a um equilíbrio pareto eficiente dado a regra de alocação.

Comunicação: cada pessoa envia uma mensagem $\mu_i : \Omega \to M = \{0, 1\}$. O conjunto das mensagens é dado por $\mu(\omega) = (\mu(\omega_1), \ldots, \mu(\omega_N))$.

Regra de alocação: uma função $\alpha : \Omega \times M^N \to \mathbb{R}^2_+,\ \alpha(\omega, \mu(\omega)) = (x(\omega), y(\omega))$.

Equilíbrio: μ^* tal que

$$u_i(\alpha \circ \mu^*, \omega) \geq u_i(\alpha \circ \mu, \omega), \quad \forall i\ \mu.$$

(μ^* é tal que maximiza a função de bem estar social - note que a ondição acima é uma condição de pareto eficiência)

Seja $a = \alpha \circ \mu$. Dada a regra de alocação, o objetivo do planejador é

$$\forall \omega \in \Omega \qquad \max_a \sum_{i=1}^{N} u_i(a, \omega) \tag{3}$$

CPO's

$$u'(x(\omega)) = Ru'(y(\omega)) \tag{4}$$

Note que, dado um estado agregado ω, obtemos $S = \sum_i \omega$. Com isso, teremos S indivíduos pacientes e $N - S$ impacientes, e problema do planejador será:

$$\max_{x,y} (N - S)u(x) + Su(y)$$

Restrição de recursos

$$(N - S)x(\omega) + Sy(\omega)/R = N \tag{5}$$

Montando o lagrangeano:

$$L = (N - S)u(x) + Su(y) + \lambda[N - (N - S)x(\omega) + Sy(\omega)/R]$$

Solução

$$x^*(\omega) = \frac{N}{N - (1 - R^{\frac{1}{\delta}-1})S}$$

$$y^*(\omega) = \frac{NR^{\frac{1}{\delta}}}{N - (1 - R^{\frac{1}{\delta}-1})S}.$$

(Perceba que problema (3) é para todo estado agregado. Dado um estado agregado obtemos S, e assim, as alocações ótimas $x^*(\omega)$ e $y^*(\omega)$, para cada ω. Como veremos a seguir, as alocações ótimas levam a um equilíbrio *truth- telling* dos indivíduos. Logo, os indivíduos revelam verdadeiramente o seu tipo e o valor de S, com o qual o planejador resolverá o seu problema, será o real número de impacientes da economia.)

Condição de revelação da verdade:

$$y(S) > x(S - 1)$$

Vale pois $y(s) > x(S) > x(S - 1)$.

Não haverá corrida bancária!

(Se o último da fila for paciente e mentir - disser que é impaciente -, o total de pacientes mudaria $S - 1$ na visão do distribuidor, seu consumo iria de $y(S)$ para $x(S - 1)$ e o deixaria pior. Se for impaciente é claro que não irá mentir, pois não deriva utlidade do consumo no segundo período. Isso segue recursivamente, para o penúltimo da fila e assim por diante ... até o primeiro da fila. Logo, todos irão falar a verdade).

3 Modelo Bancário com Serviço Sequencial

3.1 Descrição da Economia

Ambiente é o mesmo dos modelos anteriores com as seguintes alterações:

1. Em $t = 1$ é formada uma fila de pessoas para acessar o intermediário.

2. Cada pessoa não sabe sua posição na fila.

3. **Serviço sequencial**: o primeiro a chegar é o primeiro a ser servido. Logo, cada indivíduo tem probabilidade $1/N$ de cair em uma posição i da fila.

As utilidades serão dadas por:

i) Impaciente: $Au(x)$ - aufere utilidade apenas em $t = 1$

ii) Paciente: $u(y)$ - aufere utilidade em ambas as datas, mas consome somente em $t = 2$ pelo mesmo argumento dos modelos anteriores.

No mecanismo ótimo teremos:

- se declarar paciente seu consumo será nulo no primeiro período.
- o mecanismo será um par de funções (x_i, y_i), onde x_i é o consumo do impaciente em $t = 1$ e y_i é o consumo do paciente em $t = 2$ do *i-ésimo* indivíduo da fila.

Estrutura informacional:

- choques *iid* com probabilidade p de se tornar paciente.
- **Estado agregado:** $\omega \in \Omega \equiv \{0, 1\}^N$

$$P(\omega) = p^{N-S}(1-p)^S, \quad S = \sum \omega_i$$

- **Informação privada:** apenas i sabe ω_i

Denotamos por ω^{i-1} os anúncios até a $i-1$ - determinam o estado agregado definido antes do indivíduo i da fila. E ω_{-i} são todos os anúncios com exceção de i.

As restrições do problema serão:

1. **Factibilidade:**

$$\sum_{i=1}^{N} \left((1-\omega_i)\, x_i \left(\omega^{i-1}, 0\right) + \omega_i R^{-1} y_i(\omega)\right) \leq Y$$

(pagamentos não podem superar as reservas)

$x_i(\omega^{i-1}, 0)$: alocação que é dada ao indivíduo que se declara paciente - por isso o zero na segunda coordenada; dado os anúncios até $i-1$ da fila - primeira coordenada. E Y é a dotação da economia.

2. **Implementabilidade:**

$$\sum_i E_i\left[\frac{1}{N}u\left(y_i\left(\omega_{-i},1\right)\right)\right] \geq \sum_i E_i\left[\frac{1}{N}u\left(x_i\left(\omega^{i-1},0\right)\right)\right]$$

em que $E_i(z) = \sum_\omega z(\omega)\Pr(\omega|\varepsilon_i = 1)$. E $y_i\left(\omega_{-i},1\right)$ refere ao indivíduo i se declarar paciente - 1 na segunda coordenada, dado o anúncio de todos os outros da economia - primeira coordenada.

(garante que a utilidade esperada do paciente quando fala a verdade seja ao menos tão boa do que quando mente - condição necessária dada a informação privada, planejador deve maximizar no conjunto implementável.)

3. **Otimalidade:** Maximizar

$$E\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{N}\Big(\left(1-\omega_i\right)Au\left(x_i\left(\omega^{i-1},0\right)\right)+\omega_i u\left(y_i\left(\omega\right)\right)\Big)$$

para obter pagamentos que maximizem o bem estar esperado *ex-ante*.

No serviço serviço sequencial a ordem de chegada na fila será importante (pois você é servido de acordo com a ordem de chegada). Desse modo, são necessários planos contingenciais - a solução do problema do planejador, $(x_i^*, y_i^*)_{i=1}^N$, para cada indivíduo i será contingente aos anúncios anteriores a ele se declarar e impaciente, e a do paciente dependerá do anúncio de todos os outros indivíduos (pois recebe os recursos somente no segundo período quando todos já realizaram os anúncios).

Lembrando que as estratégias de cada indivíduo é uma mensagem. No equilíbrio do problema anterior $\mu^* = (\mu^*(\omega_i))_{i=1}^N \to \{0,\}^N$ fazia com que a solução do problema do planejador fosse pareto eficiente. Vejamos como os indivíduos se comportam nesse novo jogo.

Para resolver o problema do planejador, reescrevemos a restrição de implementabilidade

$$\sum_i\sum_\omega\frac{P(\omega)\omega_i}{1-p}\Big[u\left(y_i\left(\omega_{-i},1\right)\right)-u\left(x_i\left(\omega^{i-1},0\right)\right)\Big]$$

$$=E\sum_i\Big[\frac{\omega_i}{1-p}u\left(y_i\left(\omega_{-i},1\right)\right)-\frac{1-\omega_i}{p}u\left(x_i\left(\omega^{i-1},0\right)\right)\Big]$$

Seja λ o multiplicador da restrição acima e defina.

$$\alpha=\left(A-\frac{\lambda}{p}\right)^{1/\delta} \qquad \text{and} \qquad \beta=\left(1+\frac{\lambda}{1-p}\right)^{1/\delta}$$

Então o lagrangiano fica:

$$E\sum_i\Big[(1-\omega_i)\alpha^\delta u(x_i)+\omega_i\beta^\delta u(y_i)\Big]$$

$$=E\sum_i\Big[(1-\omega_i)u(x_i)+\omega_i\gamma^\delta u(y_i)\Big]$$

em que $\gamma = \beta/\alpha$

Olhando para a estrutura recursiva do problema:

<u>Data-2:</u> o sub-problema do planejador depois de conhecer ω

$$\max_y \left\{ \gamma^\delta \sum_i u(y_i); \sum_i \omega_i y_i \leq Ra \right\}$$

em que a são as reservas depois da data 1 - reservas que sobraram após os saques em $t = 1$.

- Tratamento igualitário: $y_i = \gamma/\mu^{1/\delta}$
  - μ: multiplicador da restrição de recursos
  - $\mu^{1/\delta} = |\omega|\gamma/Ra$ em que ($|\omega| = S$) então

$$y_i = \frac{1}{|\omega|} Ra$$

A utilidade esperada das reservas a é

$$(f_N^{|\omega|})^\delta u(a)$$

em que

$$f_N^{|\omega|} = \gamma|\omega|R^{1/\delta - 1}$$

<u>Data-1:</u> quando a posição é $i = N$

- O intermediário tem reservas a
- recebeu j anuncios de pacientes
- paga $c \leq a$ para a posição N para maximizar

$$p\Big(u(c) + (f_N^j)^\delta u(a-c)\Big) + (1-p)\Big((f_N^{j+1})^\delta u(a)\Big)$$

  - Solução

$$c = \frac{1}{1 + f_N^j} a$$

  - O ótimo é

$$u(a)\Big(p\left[1 + f_N^j\right]^\delta + (1-p)\left[f_N^{j+1}\right]^\delta\Big) = u(a)\Big(f_{N-1}^j\Big)^\delta$$

Data-1: Resultados para $i < N-1$ são similares:

$$p\Big(u(c) + (f_{i+1}^j)^\delta u(a-c)\Big) + (1-p)\Big((f_{i+1}^{j+1})^\delta u(a)\Big)$$

$$x_i = \frac{1}{1+f_i^j}a \qquad \text{e} \qquad u(a)\Big(f_{i-1}^j\Big)^\delta$$

em que

$$f_i^j = \left(p\left[1+f_{i+1}^j\right]^\delta + (1-p)\left[f_{i+1}^{j+1}\right]^\delta\right)^{1/\delta}$$

Logo, o ganho de utilidade ao desviar será:

$$E\sum_i \left[\omega_i \frac{p}{1-p} u\left(y_i\left(\omega_{-i}, 1\right)\right) - (1-\omega_i) u\left(x_i\left(\omega^{i-1}, 0\right)\right)\right]$$

vezes $1/Np$

- utilidade do paciente depois ω is $u(a)g_N^{|\omega|}$ em que

$$g_N^{|\omega|} = \frac{p}{1-p}|\omega|^\delta R^{1-\delta}$$

- para posição N, depois de j anúncios de pacientes

$$p\Big(g_N^j u(a-x_N) - u(x_N)\Big) + (1-p)\Big(g_N^{j+1}u(a)\Big)$$

- usando x_N ótimo temos o ganho parcial

$$u(a)g_{N-1}^j$$

  em que g_{N-1}^j é

$$p\left[g_N^j\left(f_N^j\right)^{1-\delta} - 1\right]\left(1+f_N^j\right)^{\delta-1} + (1-p)\left[g_N^{j+1}\right]$$

  Para $i < N$, g_i^j é igual a

$$p\left[g_{i+1}^j\left(f_{i+1}^j\right)^{1-\delta} - 1\right]\left(1+f_{i+1}^j\right)^{\delta-1} + (1-p)\left[g_{i+1}^{j+1}\right]$$

Conseguimos calcular:

- f_i^j nos diz qual é a poupança ótima na posição i quando j anúncios de pacientes foram recebidos.
- Logo $x^*(\omega^{i-1}, 0) = \dfrac{1}{1+f_i^j}a^i$.
- E $y^*(\omega) = \dfrac{R\bar{a}}{|\omega|}$.

4 Modelo de Moeda como meio de troca

4.1 Descrição da Economia

Considere uma economia descrita pelo seguinte ambiente:

(i) O tempo é infinito e discreto. $t = 1, 2, \dots$

(ii) Existem infinitas pessoas na economia, com medida normalizada para 1. Estas pessoas vivem eternamente e descontam o futuro de acordo com o fator $\beta \in (0, 1)$.

(iii) As pessoas são divididas igualmente entre $N > 2$ grupos. As pessoas do grupo n consomem o bem que as pessoas do grupo $n + 1$.

(iv) As pessoas são anônimas, ou seja, não é possível recordar as ações passadas de cada uma das pessoas.

(v) A utilidade de uma pessoa é dada por $u(x) - y$, em que x/y é a quantidade de produto que a pessoa consome/produz. Além disso, $u'' < 0 < u'$, $u(0) = 0$ e u satisfaz as condições de Inada.

(vi) O produto é perecível, ou seja, não pode ser levado de um período para o outro.

(vii) Não existe um mercado nessa economia. As pessoas devem procurar outra pessoa para fazer trocas. A cada período uma pessoa encontra apenas um outra pessoa e isso ocorre de forma aleatória.

(viii) Existem objetos indivisíveis e perfeitamente duráveis que chamaremos de moeda. Ninguém possui utilidade de consumir moeda.

(ix) Cada pessoa consegue carregar no máximo uma unidade de moeda e a quantidade de moeda é observável quando ocorre o encontro entre duas pessoas.

4.2 Processo de Trocas

Note que não há dupla coincidência de interesses em nenhum dos encontros, isto é, não existe encontro em que uma pessoa produz o bem que a outra consome e vice-versa. (A ideia do modelo é a mesma do exercício da lista 2, onde um produzia chocolate mas gostava de banana, o que produzia banana gostava de maça, e o que produzia maça gostava de chocolate - não lembro se era isso mas a ideia é a mesmo).

Então, para convencer outra pessoa a produzir é preciso entregar algo de valor em troca. O único mecanismo que dispomos é trocar moeda por produto. Por que moeda seria aceita se ninguém possui utilidade sobre ela?

Vamos olhar apenas equilíbrios estacionários e simétricos, ou seja, as alocação se repetem no tempo e não dependem do grupo das pessoas. Definição formal:

Definição 1 *Uma alocação (m, y) é simétrica se a quantidade média de moeda m de cada tipo é igual, e $y \in \mathbb{R}_+$ (quantidade transacionada de produto) não depende dos tipos. Ou seja, não há discriminação de tipos.*

Definição 2 *Uma alocação (m, y) é estacionária se, fixado $m \in [0, 1]$, y não varia ao longo do tempo, ou seja, a alocação não é em função do tempo.*

Seja m a fração das pessoas da economia que possui moeda. Vamos descrever o payoff das pessoas da economia. Seja V_0 a função valor dos indivíduos que não possuem moeda e V_1 função valor dos indivíduos que possuem moeda:

$$V_0 = \frac{1}{N}m[-y + \beta V_1] + \left(1 - \frac{1}{N}m\right)\beta V_0$$

onde $\frac{1}{N}m$ é a probabilidade de encontrar alguém do grupo que ele conseguiria vender ($\frac{1}{N}$) e esta pessoa tenha moeda (m).

$$V_1 = \frac{1}{N}(1-m)[u(y) + \beta V_0] + \left(1 - \frac{1}{N}(1-m)\right)\beta V_1$$

onde $\frac{1}{N}(1-m)$ é a probabilidade de encontrar alguém do grupo que ele conseguiria comprar o produto ($\frac{1}{N}$) e esta pessoa não tenha moeda (m), logo, vai querer vender o produto e adquirir moeda.

Com algum algebrismo escrevemos as equações de Bellman associadas a esse modelo:

$$\Rightarrow V_0 = \beta V_0 + \frac{1}{N}m[-y + \beta(V_1 - V_0)]. \tag{6}$$

$$\Rightarrow V_1 = \beta V_1 + \frac{1}{N}(1-m)[u(y) - \beta(V_1 - V_0)], \tag{7}$$

(Note que nas equações acima o primeiro termo do lado direito é o valor descontado de permanecer no mesmo grupo, e o segundo é a probabilidade de trocar de grupo vezes o ganho ao realizar trocas. Ao fazerem as contas procurem lembrar de colocar o termo $\beta(V_1 + V_0)$ em evidência).

4.3 Incentivos e Bem-estar

Como dito anteriormente, as pessoas precisam ter incentivos para trocar. Tanto consumidor quanto produtor precisam concordar com a troca que será feita. Dessa forma, as trocas ocorrerão sempre que:

Produtor:

$$-y + \beta V_1 \geq \beta V_0 \Leftrightarrow y \leq \beta(V_1 - V_0). \tag{8}$$

Consumidor:

$$u(y) + \beta V_0 \geq \beta V_1 \Leftrightarrow u(y) \geq \beta(V_1 - V_0). \tag{9}$$

Definição 3 *Uma alocação é compatível a incentivos se satisfaz (8) e (9), restrições de compatibilidade de incentivos do produtor e do consumidor, respectivamente.*

Vamos utilizar o critério de bem-estar dado pela média ponderada dos grupos. Dessa forma, o bem-estar da economia, W, é dado por

$$W = mV_1 + (1-m)V_0.$$

É possível mostrar que

$$W = \frac{1}{1-\beta}\frac{1}{N}m(1-m)[u(y)-y]. \tag{10}$$

4.4 Problema do Planejador

Agora que já possuímos informações sobre os objetos da economia e entendemos que os incentivos das pessoas devem ser respeitadas, podemos descrever o problema do planejador social

$$\max_{y,m} W \qquad s.a.\ (8),\ (9). \tag{11}$$

Definição 4 *Uma alocação ótima resolve o problema do planejador sujeito as restrições (6)-(9),* $m \in [0,1]$ *e* $y \in \mathbb{R}_+$.

É possível mostrar que (8) $\Rightarrow$ (9).

Por (8):

$$\begin{aligned} y \leq \beta(V_1 - V_0) \Rightarrow^{y\in\mathbb{R}_+} \quad 0 \leq y \leq \beta(V_1 - V_0) \\ \Rightarrow \beta(V_1 - V_0) \geq 0 \Rightarrow V_1 \geq V_0 \end{aligned}$$

Por (6) e pelo resultado acima:

$$(1-\beta)V_0 = \frac{m}{N}(-y + \beta(V_1 - V_0)) \geq 0 \Rightarrow V_0 \geq 0$$

Logo, $V_1 \geq V_0 \geq 0$

Por (7):

$$(1-\beta)V_1 = \frac{1-m}{N}[u(y) - \beta(V_1 - V_0)] \geq 0 \Rightarrow u(y) \geq \beta(V_1 - V_0)$$

que é a restrição de incentivos do consumidor.

Logo precisamos utilizar apenas a restrição do produtor no problema do planejador. Além disso, utilizando as equações de V_0 e V_1 podemos reescrever (8): (fazendo (7)-(6))

$$\begin{aligned} V_1 - V_0 = \beta(V_1 - V_0) + \frac{1}{N}[(1-m)u(y) - my] - \frac{1}{N}\beta(V_1 - V_0) \\ \Rightarrow (V_1 - V_0)\left[1 - \beta\left(1 - \frac{1}{N}\right)\right] = \frac{1}{N}[(1-m)u(y) - my] \\ \beta(V_1 - V_0)[N - \beta N + \beta] = \beta[(1-m)u(y) - my] \end{aligned}$$

Como $y \leq \beta(V_1 - V_0)$:

$$y[N - \beta N + \beta] \leq \beta(V_1 - V_0)[N - \beta N + \beta] = \beta[(1-m)u(y) - my]$$

$$\Rightarrow y[N - \beta N + \beta] \leq \beta[(1-m)u(y) - my]$$

Colocando $u(y)$ em evidência:

$$u(y) \geq \left[\frac{N(1-\beta)}{\beta(1-m)} + 1\right] y. \tag{12}$$

Esta restrição define, dados N, m e β, um produto $\bar{y}$, tal que se $y \in [0, \bar{y}]$, então y é compatível em incentivos.

Por fim, reescrevemos o problema do planejador.

Por (6):

$$\frac{V_0}{m} = \frac{1}{N(1-\beta)}[-y + \beta(V_1 - V_0)]$$

Por (7):

$$\frac{V_1}{1-m} = \frac{1}{N(1-\beta)}[u(y) - \beta(V_1 - V_0)]$$

Logo,

$$mV_1 + (1-m)V_0 = \frac{m(1-m)}{N(1-\beta)}[u(y) - \beta(V_1 - V_0) - y + \beta(V_1 - V_0)]$$

E o problema do planejador:

$$\max_{y,m} \frac{1}{1-\beta}\frac{1}{N} m(1-m)[u(y) - y] \tag{13}$$

$$s.a. \quad u(y) \geq \left[\frac{N(1-\beta)}{\beta(1-m)} + 1\right] y.$$

Para entender um pouco mais do modelo, é preciso estudar a solução do problema relaxado (sem a restrição do produtor), como essa solução pode não ser factível e como é solução do problema quando a restrição é ativa.

A solução do problema relaxado é dada pelo par $(y^*, m^*) = (u'^{-1}(1), 1/2)$. O solução do modelo quando a restrição do produtor é ativa é dada por (y^s, m^s), em que $y^s < y^*$ e $m^s < m^*$.