Professores: C. Santos e F. Barbosa
Monitor: F. Camêlo

Lista 2

A entrega dos códigos deve ser feita para fdiogo.camelo@gmail.com. Os diversos códigos devem ser colocados em único arquivo .zip (ou .rar) com o seu nome (por exemplo, felipecamelo_lista1.zip).

Exercício 1 (Asset Pricing/Equilíbrio de Arrow-Debreu). Considere uma economia de trocas com I agentes que vivem infinitamente e descontam o futuro a uma mesma taxa $\beta \in (0, 1)$. Em cada período t, existe um número finito e discreto de estados da natureza. Os agentes podem transacionar direitos de consumo (consumption claims) apenas em $t = 0$ e os mercados são supostos completos de forma que é possível negociar direitos de consumo para cada realização de histórias futuras. Por simplicidade, suponha que todos os consumidores possuem utilidade CRRA, com parâmetro γ. A única fonte de incerteza está na realização das dotações, que podem variar de acordo com o estado da natureza em determinado período. Responda aos itens abaixo.

1. Monte o problema do consumidor (PC).
2. Defina um equilíbrio nesse ambiente. Seja cuidadoso para enumerar todos os objetos que compõem o equilíbrio.
3. Encontre o preço de um direito de consumo em um determinado período dada uma história qualquer.
4. Qual é o preço, em $t = 0$, de um ativo sem risco que paga 1 bem de consumo em um instante T futuro?
5. Suponha que exista um ativo que dê ao seu detentor o direito de consumir um fluxo unitário constante, sem risco algum, de bens a partir de T em diante. Qual é o preço desse ativo em $t = 0$?
6. Qual é o preço desse ativo em um instante t, $0 < t < T$, e história s^t?
7. Encontre uma expressão para o retorno do ativo do item 5 no tempo T, história s^T, relativo a um período $t < T$.

Exercício 2 (Asset Pricing/Equilíbrio de Mercados Sequenciais). Considere o ambiente do exercício 1 com apenas uma alteração. Agora, supõe-se que os agentes podem fazer trocas em todos períodos, ou seja, qualquer agente pode emitir ativos de Arrow e tentar vendê-los, obtendo sucesso caso o faça pelo preço de mercado. Além disso, supõe-se que cada agente possui um limite de dívida, de forma que ele não possa se endividar mais do que o máximo que poderá pagar um dia[1]. Responda aos itens abaixo.

1. Monte o problema do consumidor (PC).
2. Escreva as restrições de recurso da economia.
3. Defina um equilíbrio nesse ambiente. Seja cuidadoso para enumerar todos os objetos que compõem o equilíbrio.
4. Encontre uma expressão para o preço do ativo de Arrow em um dado período e uma dada história, em termos do preço de um bem de consumo do período anterior (ou seja, o núcleo de apreçamento). Como isso se relaciona com os preços dos direitos de consumo do exercício 1?
5. Calcule o preço de um ativo sem risco que paga uma unidade de consumo no período $t + 1$, em termos do preço de um ativo sem risco no período t.

[1] Ou seja, seu limite de dívida (Restrição de não-Ponzi) é dado pelo valor presente de suas dotações ao longo da vida.

Exercício 3 (Matlab - Distribuição Estacionária de uma Matriz de Markov). Considere a seguinte matriz de Markov:

$$M = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

1. Encontre (na mão) a distribuição invariante dessa matriz.
2. Crie uma função que calcule a distribuição invariante de uma matriz de Markov $n \times n$ através de seus autovalores e autovetores.
3. Crie uma função que calcule a distribuição invariante de uma matriz de Markov $n \times n$ de forma numérica, através de um laço while.
4. Crie uma matriz de Markov 5×5 a partir de uma matriz de números sorteados por meio de uma distribuição normal [*Dica.* Use a função $randn\,()$ e renormalize as linhas para que a matriz seja de fato uma matriz de Markov].
5. Teste suas funções usando a matriz do item 4.
6. Repita o item 5, alterando o tamanho da matriz de Markov para (20, 50, 100, 500 e 1000). Calcule o tempo necessário para que cada função obtenha a distribuição invariante. O que se percebe na medida em que a dimensão aumenta? Responda por meio de um comentário em seu código. [*Dica.* Use as funções $tic\,()$ e $toc\,()$].

Exercício 4 (Guess and Verify). Considere o seguinte modelo de crescimento ótimo em tempo discreto com depreciação total:

$$\begin{aligned} \max_{\{c_t,\,k_t\}_{t=0}^{\infty}} \; & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(c_t - \frac{a}{2} (c_t)^2 \right) \\ \text{s.a. } & k_{t+1} = Ak_t - c_t \\ & k_0 \text{ dado} \\ & k_t \in \left[0, \overline{k}\right] \\ & a < \overline{k}^{-1} \end{aligned}$$

A última hipótese garante que a função utilidade seja crescente no consumo.

1. Formule esse problema de maximização como um problema recursivo.
2. Argumente, sem resolver o problema, que existe uma única função valor $V\,(k)$e uma única função política $c = \pi\,(k)$ que determina o nivel de consumo como uma função do estoque de capital.
3. Encontre as expressões de $V\,(k)$ e $\pi\,(k)$. [*Dica.* Chute uma forma funcional para a função valor $V\,(k)$ e use esse chute em conjunto com as equações de Bellman e de Euler; verifique que esse chute satisfaz tais equações e argumente que essa deve ser a única solução.].

Exercício 5 (Persistência de Hábito). Considere o seguinte problema

$$\begin{aligned} \max_{\{c_t,\,k_t\}_{t=0}^{\infty}} \; & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\ln c_t + \gamma \ln c_{t-1} \right) \\ \text{s.a. } & c_t + k_{t+1} \leq Ak_t^{\alpha} \\ & A > 0 \\ & \alpha \in (0,1) \\ & k_0 > 0,\; c_{-1} \text{ dados} \end{aligned}$$

Nesse cenário, c_t é o consumo no período t, k_t é o estoque de capital no começo do período t. A função de utilidade instantânea $\ln c_t + \gamma \ln c_{t-1}$ foi escolhida para representar a persistência de hábito no consumo.

1. Seja $v(k_0,\ c_{-1})$ o valor de $\sum\limits_{t=0}^{\infty} \beta^t (\ln c_t + \gamma \ln c_{t-1})$ para um consumidor que começa no período 0 com estoque de capital k_0, consumo passado c_{-1} e age otimamente. Escreva a equação de Bellman $v(k,\ c_{-1})$ do problema do planejador para essa economia.

2. Prove que a solução dessa equação de Bellman é da forma $v(k,\ c_{-1}) = E + F \ln k + G \ln c_{-1}$ e que a função política é da forma $\ln k_{t+1} = I + H \ln k_t$em que E, F, G e H são constantes. Encontre as expressões explícitas para essas constantes em função dos parâmetros A, β, α e γ.

3. Considere agora uma versão mais geral desse problema:

$$\begin{aligned} \max_{\{c_t,\ k_t\}_{t=0}^{\infty}} \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t,\ c_{t-1}) \\ \text{s.a. } & c_t + k_{t+1} \leq f(k_t) \\ & A > 0 \\ & \alpha \in (0,1) \\ & k_0 > 0,\ c_{-1} \text{ dados} \end{aligned}$$

   em que $u(c_t,\ c_{t-1})$ é duas vezes continuamente diferenciável, limitada, crescente em ambos c_t e c_{t-1}, côncava em $(c_t,\ c_{t-1})$, $f'(0) = +\infty$, $f' > 0$ e f«0. Formule a equação de Bellman do problema do planejador para essa economia.

4. Argumente que, de forma geral, a função política ótima de consumo é uma função tanto de k_t como de c_{t-1}. Quais são as características dos itens 1 e 2 que fazem com que a função política de consumo possa ser expressa como uma função apenas de k_t?

Exercício 6 (Investimento com Tempo de Maturação). Considere o modelo de crescimento neoclássico com uma mudança: novos investimentos demoram a maturar. Em particular, J períodos são necessários para que o investimento possa de fato ser usado na produção. Especificamente, seja s_t^j a quantidade de investimento que, no período t, está a j períodos para sua maturação ($j = 1,\ 2, \ldots,\ J-1,\ J$). Dessa forma, um novo investimento feito no período t é denotado por s_t^J. Escrevemos as leis de movimento da seguinte forma:

$$\begin{aligned} k_{t+1} &= (1-\delta) k_t + s_t^1,\ \forall\, t \\ s_{t+1}^j &= s_t^{j+1},\ \forall\, t,\ j = 1,\ 2, \ldots,\ J-1. \end{aligned}$$

O consumidor representativo maximiza a seguinte função utilidade:

$$U(c) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)\,,\ \beta \in (0,1)\,.$$

A restrição de recursos da economia é dada por:

$$s_t^J + c_t = F(k_t)\,.$$

O capital inicial $k_0 > 0$ é dado.

1. Escreva a equação de Bellman para o problema do planejador.

2. Sob que condições existe uma solução única para a equação de Bellman no espaço das funções contínuas e limitadas? O que você pode argumentar sobre a concavidade e monotonicidade da função valor?

3. Suponha que $J = 2$. Modifique a equação de Bellman para que, com probabilidade π, o investimento que matura no período seguinte a determinado período t, s_t^1 , possa “desaparecer”.

4. Continue supondo que $J = 2$. Modifique a equação original para permitir que, com probabilidade π, um novo investimento em um período t, s_t^2, possa desaparecer no começo do período seguinte $t+1$.

Exercício 6 (Matlab - Problema Determinístico do Planejador). Considere o problema do planejador que deseja maximizar a utilidade do agente representativo dada por

$$U(c) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

sujeito às restrições de recurso

$$\begin{aligned} c_t + k_{t+1} &\leq f(k_t) + (1-\delta) k_t, \ \forall\, t \in \mathbb{N} \\ c_t,\ k_{t+1} &\geq 0. \end{aligned}$$

Dado $k_0 > 0$, o planejador escolhe c_t e k_{t+1} de forma a maximizar a utilidade. Utilize os seguintes parâmetros e funções:

$$f(k_t) = A k_t^{\alpha} \text{ e } u(c_t) = \frac{c_t^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma}$$

$$(\alpha,\ \beta,\ \delta,\ \gamma,\ A) = (0.75,\ 0.98,\ 0.05,\ 1.2,\ 2)$$

1. Escreva a formulação recursiva do problema do planejador. Quais são as variáveis de estado?
2. Mostre que a função valor do item anterior de fato existe.
3. Derive as condições de primeira ordem, utilizando o teorema do envelope. Calcule também o valor do capital de estado estacionário.
4. Crie grids para as variáveis de estado. Seja cauteloso quanto ao tamanho e número de pontos dos grids.
5. Determine chutes iniciais para V, TV e g e, possivelmente, funções auxiliares, caso considere necessário.
6. Escolha os parâmetros de iteração, como número máximo de iterações, tolerância adequada, etc.
7. Crie o laço principal de seu código. Para cada $k \in K$, em que K é o grid de capital criado no item 4, calcule o operador de Bellman TV e verifique o quão distante ele está de V (isso pode ser feito a partir da norma do sup ou da norma do máximo).
8. Plote as funções valor e política obtidas.