FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS
Escola de Pós-Graduação em Economia
Teoria Macroeconômica III
Professor: Ricardo de Oliveira Cavalcanti
Monitora: Kátia Aiko Nishiyama Alves
Alunos: Samuel Barbosa e Gustavo Bulhões

Exercício 01

Neste exercício temos um modelo de search no mercado de trabalho com as seguintes funções/parâmetros:

```
f = @(w, alpha_1, alpha_2) alpha_1 + alpha_2 * w;
u = @(c, gamma) c .^ gamma;

beta = 0.98;
pi = 0.1;
b = 0;
wmin = 0;
wmax = 20;
gamma = 1/2;
```

Item (i)

No item (i) vamos usar que $f(0) = 2f(\overline{w})$. Como $\int_0^{\overline{w}} f(w)dw = 1$, resolvemos para α_1, α_2 e obtemos:

```
alpha_1 = 1/15;
alpha_2 = -1/600;
```

Neste modelo o agente escolhe entre aceitar uma oferta de trabalho a um salário w ou continuar procurando por uma oferta no próximo período a um salário w'. Escrevemos o problema do agente na forma recursiva, e resolvemos para obter a função valor $V(w)$, a função política $G(w)$ e o preço de reserva R do agente (o salário que o torna indiferente entre aceitar ou não uma oferta de trabalho).

Para aproximar numericamente a função valor, criamos um grid para a variável de estado w, entre 0 e 20, contendo $n = 1000$ pontos, e aplicamos aplicamos um algoritmo de iteração buscando o ponto fixo do operador

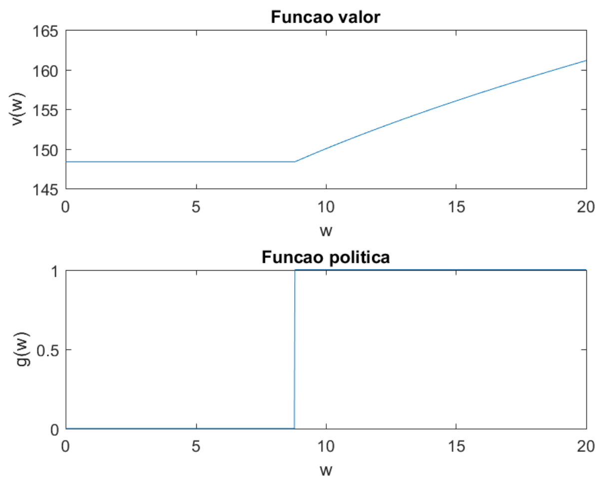
$$T(V)(w) = \max_{I(w)\in\{0,1\}} I(w)\{u(w)+\beta[(1-\pi)V(w)+\pi V(0)]\}+[1-I(w)][u(b)+\beta E[V(w')]].$$

```
n = 1000;
w = linspace(wmin, wmax, n)';
V = ones(n, 1); % chute inicial para a funcao valor
G = ones(n, 1); % chute inicial para a funcao politica

% inicia variaveis do algoritmo de iteracao
err = 1;
tol = 10^-5;
itmax = 2000;
iter = 1;

% fdp discretizada e funcao valor esperado
fw = f(w, alpha_1, alpha_2) ./ sum(f(w, alpha_1, alpha_2));
E = @(fw, V, n) V' * fw;
```

Definimos N como o payoff de recusar uma oferta w e seguir a política ótima a partir do próximo período, e A como o payoff de aceitar w e seguir a política ótima a partir do próximo período. Deste modo o algoritmo de iteração é dado por

```
% algoritmo de iteracao
while err > tol && iter < itmax
    N = u(b, gamma) + beta * E(fw, V, n);
    N = repmat(N, n, 1);
    A = u(w, gamma) + beta * ((1-pi) * V + pi * N);
    [TV, G] = max([N A], [], 2);
    err = abs(max(TV - V));
    V = TV;
    iter = iter + 1;
end

G = G-1;
R = min(w(G == 1));
```

Utilizado o código descrito obtemos $R \approx 8.8088$ e as seguintes funções valor e política:

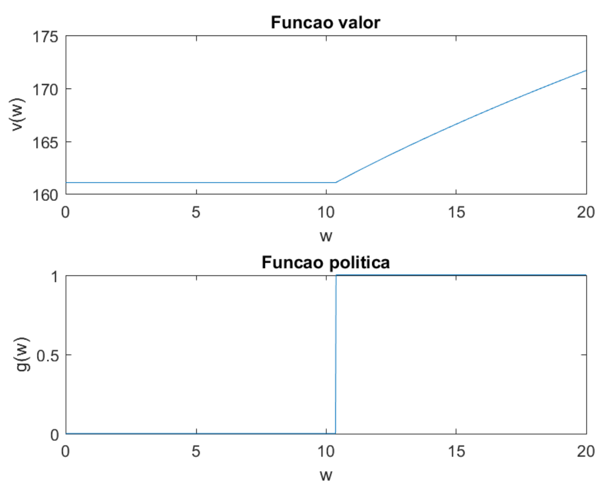


Item (ii)

No item (ii) refazemos o exercício usando $f(\overline{w}) = 2f(0)$ em oposição a $f(0) = 2f(\overline{w})$ tal como no item (i). Agora obtemos

```
alpha_1 = 1/30;
alpha_2 = 1/600;
```

A distribuição de w passa a ter maior densidade em valores mais altos, implicando em maior probabilidade de ofertas de trabalho com salários maiores. Aplicando o algoritmo para os novos valores de α_1 e α_2, obtemos $R \approx 10.3904$, e as funções valor e política se alteram para



Exercício 02

Neste exercício temos o modelo clássico de crescimento econômico, cujo problema do planejador é escolher sequências de consumo $\{c_t\}_{t=0}^{\infty}$ e de capital $\{k_t\}_{t=0}^{\infty}$ que resolvem

$$\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \\
\text{s.a.} \quad & c_t + k_{t+1} \leq f(k_t) + (1-\delta)k_t \\
& k_{t+1} \geq 0, c_t \geq 0 \ \forall t \geq 0 \\
& k_0 \text{ dado}
\end{aligned} \tag{1}$$

com $f(k) = k^\alpha$ e $u(c) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}$.

Item (i)

Observe que $u(c)$ é monótona crescente em c e, portanto satisfaz a propriedade de não saciedade local. Logo vale a Lei de Walras, e podemos reescrever a primeira restrição com igualdade, resolver para c_t e substituir na função objetivo. Desta forma o problema se torna

$$\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(f(k_t) + (1-\delta)k_t - k_{t+1}) \\
\text{s.a.} \quad & k_{t+1} \geq 0, c_t \geq 0 \ \forall t \geq 0 \\
& k_0 \text{ dado}
\end{aligned} \tag{2}$$

Item (ii)

Reescrevemos o problema sequencial na forma recursiva, transformando-o na equação funcional

$$\begin{aligned}
V(k) = \max_{k'} \quad & u(c) + \beta V(k') \\
\text{s.a.} \quad & c + k' = f(k) + (1-\delta)k \\
& k' \geq 0, c \geq 0
\end{aligned} \tag{3}$$

Item (iii)

O operador de Bellman associado à equação funcional obtida no item anterior é justamente

$$\begin{aligned}
T(V)(k) = \max_{k'} \quad & u(c) + \beta V(k') \\
\text{s.a.} \quad & c + k' = f(k) + (1-\delta)k \\
& k' \geq 0, c \geq 0 \ \forall t \geq 0
\end{aligned} \tag{4}$$

Item (iv)

Vamos criar um grid para a variável de estado k no intervalo $[0, 1.25k_{ss}]$, em que k_{ss} é o nível de capital de estado estacionário.

Resolvendo o lado direito da equação funcional (3), já substituindo as funções dadas $u()$ e $f()$, obtemos a equação de Euler

$$c^{-\gamma} = \beta c'^{-\gamma}[\alpha k'^{\alpha-1} + 1 - \delta].$$

No estado estacionário temos que $c' = c$ e $k' = k$. Substituindo na equação anterior obtemos

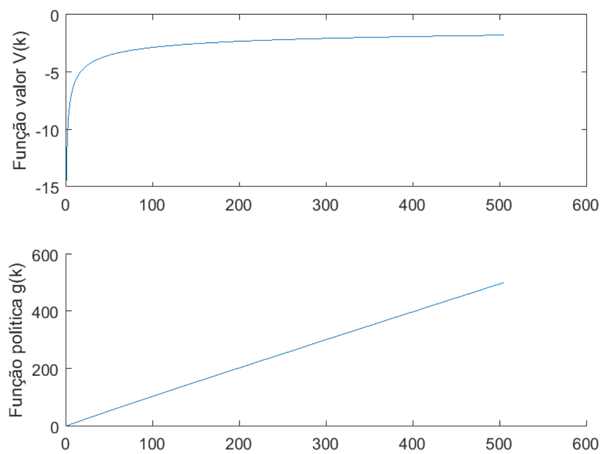
$$k_{ss} = \left(\frac{1 + \beta(\delta - 1)}{\alpha\beta} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}. \tag{5}$$

Dado k_{ss} podemos construir nosso algoritmo de iteração:

```
% Parametros
alpha = 0.70;
beta = 0.98;
gamma = 2.00;
delta = 0.10;

k_ss = ((1 + beta * (delta - 1))/ alpha * beta )^(1 / (alpha - 1));

% Funcoes
f = @(k) k .^ alpha;
c = @(k, k_linha) max(f(k) + (1 - delta) * k - k_linha, 0);
u = @(c) (c .^ (1 - gamma)) ./ (1 - gamma);

% Grid
n = 1000;
k = linspace(1, 1.25 * k_ss, n);
k_linha = k';
K = repmat(k, n, 1);
K_linha = repmat(k_linha, 1, n);

% Possibilidades de consumo e utilidade
C = c(K, K_linha);
U = u(C);

% Chutes iniciais:
V = zeros(1, n);
g = zeros(1, n);

% Variaveis iteracao
err = 1;
tol = 10^-5;
it = 1;
itmax = 1000;

% Algoritmo de iteracao
while err > tol && it < itmax
    [TV, I] = max(U + beta * repmat(V',1, n));
    err = max(abs((TV - V)));
    V = TV;
```

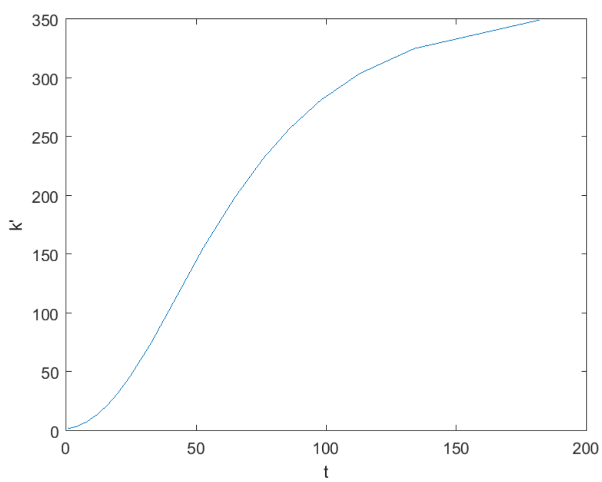
```
    it = it + 1;
end

G = k(I);
```

Assim, obtemos as seguintes funções valor e política:



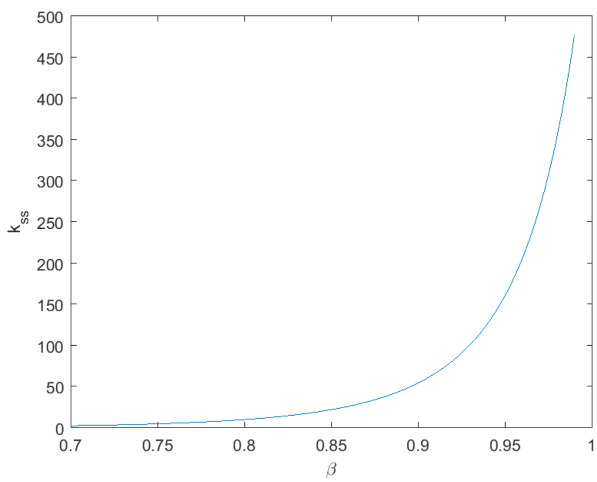
Item (v)

Com $k_0 = 2$, obtemos um nível de capital de estado estacionário $k_{ss} \approx 349.31$, ao qual estão associados o nível de produto $y_{ss} \approx 60.29$ e consumo $c_{ss} \approx 25.36$. O gráfico a seguir mostra a trajetória das escolhas de k' até o k_{ss}, quando $k_0 = 2$.



Item (vi)

Na equação (5) temos k_{ss} em função de β. Avaliando esta equação para valores de β entre 0.7 e 0.99 obtemos o gráfico a seguir.



Item (vii)

Conforme a equação 5, k_{ss} não depende de γ.

Exercício 03

Item (i)

O problema do planejador é dado por

$$\begin{aligned}
\max \quad & \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \\
\text{s.a.} \quad & c_t + k_{t+1} \leq z_t k_t^{\alpha} + (1-\delta) k_t \\
& k_{t+1} \geq 0, c_t \geq 0 \ \forall t \geq 0 \\
& k_0 \text{ dado}
\end{aligned} \tag{6}$$

Item (ii)

As variáveis de estado desta economia são k e z. Reescrevendo o problema na forma recursiva, temos

$$
\begin{aligned}
V(k,z) = \max_{c,k'} \quad & u(c) + \beta \sum_j \pi_{ij} V(k', z'_j) \\
\text{s.a.} \quad & c + k' = zk^\alpha + (1-\delta)k \\
& k' \geq 0, c \geq 0
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Item (iii)

O operador de Bellman associado à equação funcional obtida no item anterior é

$$
\begin{aligned}
T(V)(k,z) = \max_{c,k'} \quad & u(c) + \beta \sum_j \pi_{ij} V(k', z'_j) \\
\text{s.a.} \quad & c + k' = zk^\alpha + (1-\delta)k \\
& k' \geq 0, c \geq 0
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Item (iv)

Utilizando os parâmetros e funções dadas, alteramos o código do exercício anterior para incorporar a incerteza referente aos choques na variável z.

```
% Parametros
alpha = 0.70;
beta = 0.98;
gamma = 2.00;
delta = 0.10;

zh = 1.2;
zl = 0.8;

kssh = (1/(zh*alpha)*(1/beta-1+delta))^(1/(alpha-1));
kssl = (1/(zl*alpha)*(1/beta-1+delta))^(1/(alpha-1));

% Funcoes
f = @(k, z) z * k .^ alpha;
c = @(k, k_linha, z) max(f(k, z) + (1 - delta) * k - k_linha, 0);
u = @(c) (c .^ (1 - gamma)) ./ (1 - gamma);

% Grid
n = 1000;
k = linspace(0.7 * kssl, 1.3 * kssh, n);
k_linha = k';
K = repmat(k, n, 1);
K_linha = repmat(k_linha, 1, n);

% Chutes iniciais:
Vzh = zeros(1, n);
Vzl = zeros(1, n);
Gzh = zeros(1, n);
Gzl = zeros(1, n);
z = zh;
```

```
% Consumo e utilidade
Ch = c(K, K_linha, zh);
Cl = c(K, K_linha, zl);
Uh = u(Ch);
Ul = u(Cl);

% Variaveis iteracao
err = 1;
tol = 10^-5;
it = 1;
itmax = 1000;

%% Algoritmo de iteracao
while err > tol && it < itmax
    if z == zh
        [TVzh, Izh] = max(Uh + beta * (0.7 * repmat(Vzh',1, n) + 0.3 * repmat(Vzl',1, n)));
        err = max(abs((TVzh - Vzh)));
        Vzh = TVzh;
        x = rand(1);
        if x <= 0.7, z = zh; else z = zl; end
        it = it + 1;
    else
        [TVzl, Izl] = max(Ul + beta * (0.8 * repmat(Vzh',1, n) + 0.2 * repmat(Vzl',1, n)));
        err = max(abs((TVzl - Vzl)));
        Vzl = TVzl;
        it = it + 1;
        x = rand(1);
        if x <= 0.8, z = zh; else z = zl; end
        it = it + 1;
    end
end

Gzh = k(Izh);
Gzl = k(Izl);
```

Item (v)

Executando o código acima obtemos as seguintes funções valor e polítca: