Monitoria 2

K&W, Método da Função Penalidade e D&D

Macroeconomia III

EPGE - FGV

27 de novembro de 2017

K&W

Descrição da Economia

Considere uma economia descrita pelo seguinte ambiente:

(i) O tempo é infinito e discreto. $t = 1, 2, \ldots$

(ii) Existem infinitas pessoas na economia, com medida normalizada para 1. Estas pessoas vivem eternamente e descontam o futuro de acordo com o fator $\beta \in (0, 1)$.

(iii) As pessoas são divididas igualmente entre $N > 2$ grupos. As pessoas do grupo n consomem o bem que as pessoas do grupo $n + 1$.

(iv) As pessoas são anônimas, ou seja, não é possível recordar as ações passadas de cada uma das pessoas.

(v) A utilidade de uma pessoa é dada por $u(x) - y$, em que x/y é a quantidade de produto que a pessoa consome/produz. Além disso, $u'' < 0 < u'$, $u(0) = 0$ e u satisfaz as condições de Inada.

Descrição da Economia

- O produto é perecível, ou seja, não pode ser levado de um período para o outro.
- Não existe um mercado nessa economia. As pessoas devem procurar outra pessoa para fazer trocas. A cada período uma pessoa encontra apenas um outra pessoa e isso ocorre de forma aleatória.
- Existem objetos indivisíveis e perfeitamente duráveis que chamaremos de moeda. Ninguém possui utilidade de consumir moeda.
- Cada pessoa consegue carregar no máximo uma unidade de moeda e a quantidade de moeda é observável quando ocorre o encontro entre duas pessoas.

Processo de Trocas

Não há dupla coincidência de interesses em nenhum dos encontros, isto é, não existe encontro em que uma pessoa produz o bem que a outra consome e vice-versa.

Então, para convencer outra pessoa a produzir é preciso entregar algo de valor em troca. O único mecanismo que dispomos é trocar moeda por produto. Por que moeda seria aceita se ninguém possui utilidade sobre ela?

Processo de Trocas

Definições

Vamos olhar apenas equilíbrios estacionários e simétricos, ou seja, as alocação se repetem no tempo e não dependem do grupo das pessoas. Definição formal:

Definition

Uma alocação (m, y) é simétrica se a quantidade média de moeda m de cada tipo é igual, e $y \in \mathbb{R}_+$ (quantidade transacionada de produto) não depende dos tipos. Ou seja, não há discriminação de tipos.

Definition

Uma alocação (m, y) é estacionária se, fixado $m \in [0, 1]$, y não varia ao longo do tempo, ou seja, a alocação não é em função do tempo.

Função Payoff

Seja m a fração das pessoas da economia que possui moeda. Vamos descrever o payoff das pessoas da economia. Seja V_0 a função valor dos indivíduos que não possuem moeda e V_1 função valor dos indivíduos que possuem moeda:

$$V_0 = \frac{1}{N}m[-y + \beta V_1] + \left(1 - \frac{1}{N}m\right)\beta V_0$$

onde $\frac{1}{N}m$ é a probabilidade de encontrar alguém do grupo que ele conseguiria vender ($\frac{1}{N}$) e esta pessoa tenha moeda (m).

$$V_1 = \frac{1}{N}(1-m)[u(y) + \beta V_0] + \left(1 - \frac{1}{N}(1-m)\right)\beta V_1$$

onde $\frac{1}{N}(1-m)$ é a probabilidade de encontrar alguém do grupo que ele conseguiria comprar o produto ($\frac{1}{N}$) e esta pessoa não tenha moeda (m), logo, vai querer vender o produto e adquirir moeda.

Equações de Bellman

Com algum algebrismo escrevemos as equações de Bellman associadas a esse modelo:

$$V_0 = \beta V_0 + \frac{1}{N} m[-y + \beta(V_1 - V_0)]. \tag{1}$$

$$V_1 = \beta V_1 + \frac{1}{N}(1 - m)[u(y) - \beta(V_1 - V_0)], \tag{2}$$

Incentivos e Bem-estar

Restrições de Participação

Tanto consumidor quanto produtor precisam concordar com a troca que será feita. Dessa forma, as trocas ocorrerão sempre que:

Produtor:

$$-y + \beta V_1 \geq \beta V_0 \Leftrightarrow y \leq \beta(V_1 - V_0). \tag{3}$$

Consumidor:

$$u(y) + \beta V_0 \geq \beta V_1 \Leftrightarrow u(y) \geq \beta(V_1 - V_0). \tag{4}$$

Definition

Uma alocação é compatível a incentivos se satisfaz (3) e (4), restrições de compatibilidade de incentivos do produtor e do consumidor, respectivamente.

Incentivos e Bem-Estar

Critério de Bem-Estar

Vamos utilizar o critério de bem-estar dado pela média ponderada dos grupos. Dessa forma, o bem-estar da economia, W, é dado por

$$W = mV_1 + (1-m)V_0.$$

É possível mostrar que

$$W = \frac{1}{1-\beta}\frac{1}{N}m(1-m)[u(y)-y]. \tag{5}$$

Problema do Planejador

Agora que já possuímos informações sobre os objetos da economia e entendemos que os incentivos das pessoas devem ser respeitadas, podemos descrever o problema do planejador social

$$\max_{y,m} W \qquad s.a. \ (3), (4). \tag{6}$$

Definition

Uma alocação ótima resolve o problema do planejador sujeito as restrições (1)-(4), $m \in [0,1]$ e $y \in \mathbb{R}_+$.

É possível mostrar que (3) $\Rightarrow$ (4).
Por (3):

$$y \leq \beta(V_1 - V_0) \Rightarrow^{y \in \mathbb{R}_+} \quad 0 \leq y \leq \beta(V_1 - V_0)$$

$$\Rightarrow \beta(V_1 - V_0) \geq 0 \Rightarrow V_1 \geq V_0$$

Por (6) e pelo resultado acima:

$$(1-\beta)V_0 = \frac{m}{N}(-y + \beta(V_1 - V_0)) \geq 0 \Rightarrow V_0 \geq 0$$

Logo, $V_1 \geq V_0 \geq 0$
Por (7):

$$(1-\beta)V_1 = \frac{1-m}{N}[u(y) - \beta(V_1 - V_0)] \geq 0 \Rightarrow u(y) \geq \beta(V_1 - V_0)$$

e obtivemos (4).
Utilizamos apenas a restrição do produtor no problema do planejador

Utilizando as equações de V_0 e V_1 podemos reescrever (3): (fazendo (2)-(1))

$$V_1 - V_0 = \beta(V_1 - V_0) + \frac{1}{N}[(1-m)u(y) - my] - \frac{1}{N}\beta(V_1 - V_0)$$

$$\Rightarrow (V_1 - V_0)\left[1 - \beta\left(1 - \frac{1}{N}\right)\right] = \frac{1}{N}[(1-m)u(y) - my]$$

$$\beta(V_1 - V_0)[N - \beta N + \beta] = \beta[(1-m)u(y) - my]$$

Como $y \leq \beta(V_1 - V_0)$:

$$y[N - \beta N + \beta] \leq \beta(V_1 - V_0)[N - \beta N + \beta] = \beta[(1-m)u(y) - my]$$

$$\Rightarrow y[N - \beta N + \beta] \leq \beta[(1-m)u(y) - my]$$

Colocando $u(y)$ em evidência:

$$u(y) \geq \left[\frac{N(1-\beta)}{\beta(1-m)} + 1\right] y. \tag{7}$$

Esta restrição define, dados N, m e β, um produto $\bar{y}$, tal que se $y \in [0, \bar{y}]$, então y é compatível em incentivos.

Por fim, reescrevemos o problema do planejador.
Por (6):

$$\frac{V_0}{m} = \frac{1}{N(1-\beta)}[-y + \beta(V_1 - V_0)]$$

Por (7):

$$\frac{V_1}{1-m} = \frac{1}{N(1-\beta)}[u(y) - \beta(V_1 - V_0)]$$

Logo,

$$mV_1 + (1-m)V_0 = \frac{m(1-m)}{N(1-\beta)}[u(y) - \beta(V_1 - V_0) - y + \beta(V_1 - V_0)]$$

E o problema do planejador:

$$\max_{y,m} \frac{1}{1-\beta}\frac{1}{N}m(1-m)[u(y) - y] \tag{8}$$

$$s.a. \quad u(y) \geq \left[\frac{N(1-\beta)}{\beta(1-m)} + 1\right] y.$$

Para entender um pouco mais do modelo, é preciso estudar a solução do problema relaxado (sem a restrição do produtor), como essa solução pode não ser factível e como é solução do problema quando a restrição é ativa.

A solução do problema relaxado é dada pelo par $(y^*, m^*) = (u'^{-1}(1), 1/2)$. O solução do modelo quando a restrição do produtor é ativa é dada por (y^s, m^s), em que $y^s < y^*$ e $m^s < m^*$.

Método da Função Penalidade

Motivação

- Otimização sujeito a restrições
- Lagrangeano
- Desenho de mecanismos
  - Principal-Agente
  - Ótimo social
- Estimação

Vamos estudar o método por meio de um exemplo.

Método da Função Penalidade

Ambiente físico

- Tempo discreto
- Cada indivíduo vive por 2 períodos ($t \in \{1, 2\}$)
- Dotação: $w_1 = w$ e $w_2 = 0$
- Taxa de juros $R = 1$
- Em $t = 1$ escolhe (c_1, s)

$$c_1 + s \leq w$$

- Em $t = 2$ escolhe (c_2, b)

$$c_2 + b \leq s$$

Método da Função Penalidade

Ambiente físico

Preferências

$$U(c_1, c_2, b) = u(c_1) + \beta u(c_2)$$

em que $\beta \in (0, 1)$ e u é bem comportada

Poupança Limitada:

- indivíduos viajam entre os 2 períodos
- capacidade limitada tranporte de riqueza: $\bar{s} > 0$

$$s \leq \bar{s}$$

Método da Função Penalidade

Problema do indivíduo

$$U(c_1, c_2, b) = u(c_1) + \beta u(c_2)$$

- não há motivação para herança

$$b^* = 0$$

- $u'(c) > 0$ para todo $c \geq 0$ implica que

$$c_2^* = s$$

$$c_1^* = w - s$$

- $\lim_{c \to 0} u'(c) = \infty$ implica que

$$s^* \in (0, w) \text{ para todo } w > 0$$

Portanto,

$$V(w) = \max\{u(w-s) + \beta u(s); s \in (0, w) \text{ e } s \leq \bar{s}\}$$

Método da Função Penalidade

Método numérico

Considere o lagrangeano

$$L(s, \lambda) \equiv u(w - s) + \beta u(s) + \lambda(\bar{s} - s)$$

- $\lambda \geq 0$: multiplicador associado a restrição
- se $(\tilde{s}, \tilde{\lambda})$ é tal que

$$\frac{\partial L}{\partial s}(\tilde{s}, \tilde{\lambda}) = 0 \quad \text{e} \quad \tilde{\lambda}(\bar{s} - \tilde{s}) = 0,$$

então $\tilde{s} = s^*$

Objetivo: calcular $\tilde{\lambda}$ e então obter $\tilde{s} = s^*$

- otimização contínua
- iteração multiplicador de lagrange (penalidade)

Método da Função Penalidade

Algoritmo

(i) $i = 1$

(ii) palpite (chute inicial) $\lambda_i = \lambda_1 > 0$ para $\tilde{\lambda}$

(iii) cálculo de

$$s_i \equiv \arg\max_s \{L(s, \lambda_i)\}$$

(iv) ajuste do multiplicador

$$\lambda_{i+1} \equiv \lambda_i a^{-(\bar{s} - s_i)}$$

- $a > 1$, em geral, $a = e$.

(v) se $\lambda_{i+1} \neq \lambda_i$

- atualize $i = i + 1$
- retorne ao passo (*iii*)

(vi) se $\lambda_{i+1} = \lambda_i$, finalize.

Método da Função Penalidade

Algoritmo K&W

Achar λ^* talque a restrição seja ativa em que

$$(m, y^*) \in \arg\max_{(m,y)} L(m, y, \lambda)$$

1. $i = 1$
2. chute inicial $\lambda_i = \tilde{\lambda} > 0$
3. Calcule
$$(m_i, y_i) \in \arg\max_{(m_i,y_i)} L(m, y, \tilde{\lambda})$$
4. Ajuste do multiplicador
$$\lambda_{i+1} \equiv \lambda_i a^{-\gamma_i)}$$
onde $\gamma_i = \left[u(y_i) - \dfrac{N(1-\beta)}{\beta(1-m_i)} + 1\right] y_i$ e $a > 1$
5. Checagem: se $\lambda_{i+1} \neq \lambda_i$
    - atualize $i = i + 1$
    - retorne ao passo (3)
6. se $\lambda_{i+1} = \lambda_i$, finalize.

Diamond-Dibvyg Model

Ambiente físico

- three periods $t \in \{0, 1, 2\}$ and N agents
- per-capita endowment e
- storage technology: irreversible and $R > 1$
- liquidity shock: $u(c_1 + \varepsilon c_2)A^{1-\varepsilon}$
    - $\varepsilon \in \{0, 1\}$ and $A \geq 1$
    - u is well behaved
- **the queue:** sequential accesses
    - position i with prob. $1/N$
    - **sequential service:** first-come, first-served
- **commitment:** cash machine

Diamond-Dibvyg Model

Informational structure

- **aggregate state:** $\omega \in \Omega \equiv \{0,1\}^N$

$$P(\omega) = p^{N-|\omega|}(1-p)^{|\omega|}$$

- **private information:** only i knows ω_i
- position and previous history **undisclosed**

Diamond-Dibvyg Model

Optimal Allocation

Feasibility: Consumption-plan (x, y) is *feasible* if

$$\sum_{i=1}^{N} \left((1-\omega_i)\, x_i \left(\omega^{i-1}, 0\right) + \omega_i R^{-1} y_i(\omega) \right) \leq Y$$

Implementability: (x, y) is *incentive-compatible* if it is feasible and

$$\frac{1}{N} \sum_i E_i \left[u \left(y_i \left(\omega_{-i}, 1 \right) \right) \right] \geq \frac{1}{N} \sum_i E_i \left[u \left(x_i \left(\omega^{i-1}, 0 \right) \right) \right]$$

where $E_i(z) = \sum_\omega z(\omega) \Pr(\omega | \varepsilon_i = 1)$

Optimality: (x, y) is optimal if it is implementable and maximizes ex-ante average utility

$$\frac{1}{N} E \sum_{i=1}^{N} \Big((1-\omega_i)\, A u \left(x_i \left(\omega^{i-1}, 0 \right) \right) + \omega_i u \left(y_i (\omega) \right) \Big)$$

Diamond-Dibvyg Model

Lagrangian

- the Lagrangian is a linear in $u(x_i)$ and $u(y_i)$
- a patient agent in position i believes

$$\Pr(\omega|\varepsilon_i = 1) = \frac{P(\omega)\omega_i}{\sum_w P(w)w_i} = \frac{P(\omega)\omega_i}{1-p}$$

The rhs of (IC) can be rewritten as $1/N$ times

$$\sum_i \sum_\omega \frac{P(\omega)\omega_i}{1-p}\left[u\left(y_i\left(\omega_{-i},1\right)\right) - u\left(x_i\left(\omega^{i-1},0\right)\right)\right]$$

$$= E\sum_i \left[\frac{\omega_i}{1-p}u\left(y_i\left(\omega_{-i},1\right)\right) - \frac{1-\omega_i}{p}u\left(x_i\left(\omega^{i-1},0\right)\right)\right]$$

Diamond-Dibvyg Model
Lagrangian

- let λ be the multiplier on IC and defines

$$\alpha = \left(A - \frac{\lambda}{p}\right)^{1/\delta} \quad \text{and} \quad \beta = \left(1 + \frac{\lambda}{1-p}\right)^{1/\delta}$$

Lagrangian becomes

$$E \sum_i \left[(1-\omega_i)\alpha^\delta u(x_i) + \omega_i \beta^\delta u(y_i)\right]$$

$$= E \sum_i \left[(1-\omega_i) u(x_i) + \omega_i \gamma^\delta u(y_i)\right]$$

where $\gamma = \beta/\alpha$

Diamond-Dibvyg Model

The Recursive Structure

Date-2 efficiency: planner's sub-problem after history ω

$$\max_y \left\{ \gamma^\delta \sum_i u(y_i); \sum_i \omega_i y_i \le Ra \right\}$$

where a denotes reserves kept after date 1

- Equal treatment: solution is $y_i = \gamma/\mu^{1/\delta}$
  - μ: multiplier on the resource constraint
  - $\mu^{1/\delta} = |\omega|\gamma/Ra$ and thus

$$y_i = \frac{1}{|\omega|} Ra$$

The expected utility implied by reserves a is thus

$$(f_N^{|\omega|})^\delta u(a)$$

where

$$f_N^{|\omega|} = \gamma|\omega|R^{1/\delta-1}$$

Diamond-Dibvyg Model

Date-1 policy-function iterations

When $i = N$ (after position $N - 1$)

- the bank has reserves a
- has received j patient announcements
- plans payment $c \leq a$ for position N to maximize

$$p\Big(u(c) + (f_N^j)^\delta u(a-c)\Big) + (1-p)\Big((f_N^{j+1})^\delta u(a)\Big)$$

  - solution is

$$c = \frac{1}{1+f_N^j} a$$

  - the maximum is

$$u(a)\Big(p\left[1+f_N^j\right]^\delta + (1-p)\left[f_N^{j+1}\right]^\delta\Big) = u(a)\Big(f_{N-1}^j\Big)^\delta$$

Diamond-Dibvyg Model

Date-1 policy-function iterations

Results for $i < N - 1$ are similar:

$$p\Big(u(c) + (f_{i+1}^{j})^{\delta} u(a-c)\Big) + (1-p)\Big((f_{i+1}^{j+1})^{\delta} u(a)\Big)$$

$$x_i = \frac{1}{1+f_i^j} a \qquad \text{and} \qquad u(a)\Big(f_{i-1}^{j}\Big)^{\delta}$$

where

$$f_i^j = \left(p\left[1+f_{i+1}^{j}\right]^{\delta} + (1-p)\left[f_{i+1}^{j+1}\right]^{\delta}\right)^{1/\delta}$$

Diamond-Dibvyg Model

IC iterations

Utility gain relative to deviation

$$E \sum_i \left[\omega_i \frac{p}{1-p} u\left(y_i\left(\omega_{-i}, 1\right)\right) - (1-\omega_i) u\left(x_i\left(\omega^{i-1}, 0\right)\right)\right]$$

times $1/Np$

- patient utility after ω is $u(a) g_N^{|\omega|}$ where

$$g_N^{|\omega|} = \frac{p}{1-p} |\omega|^{\delta} R^{1-\delta}$$

- for position N, after j patient announcements

$$p\Big(g_N^j u(a - x_N) - u(x_N)\Big) + (1-p)\Big(g_N^{j+1} u(a)\Big)$$

- using optimal x_N gives partial net-gain

$$u(a) g_{N-1}^j$$

Diamond-Dibvyg Model

IC iterations

where g^j_{N-1} is

$$p\left[g^j_N\left(f^j_N\right)^{1-\delta}-1\right]\left(1+f^j_N\right)^{\delta-1}+(1-p)\left[g^{j+1}_N\right]$$

Similarly for $i<N$, g^j_i equals

$$p\left[g^j_{i+1}\left(f^j_{i+1}\right)^{1-\delta}-1\right]\left(1+f^j_{i+1}\right)^{\delta-1}+(1-p)\left[g^{j+1}_{i+1}\right]$$

Proposição

Optimal welfare with respect to λ is given by

$$\frac{1}{N}u(Y)\left(f_0^0\right)^{\delta}$$

and utility in telling the truth relative to deviation is given by

$$\frac{1}{Np}u(Y)g_0^0$$

where

$$f_i^j = \left(p\left[1 + f_{i+1}^j\right]^{\delta} + (1-p)\left[f_{i+1}^{j+1}\right]^{\delta}\right)^{1/\delta}$$

and g_i^j equals

$$p\left[g_{i+1}^j\left(f_{i+1}^j\right)^{1-\delta} - 1\right]\left(1 + f_{i+1}^j\right)^{\delta-1} + (1-p)\left[g_{i+1}^{j+1}\right]$$

with initial conditions

$$f_N^{|\omega|} = \gamma|\omega|R^{1/\delta-1}$$

and

$$g_N^{|\omega|} = \frac{p}{1-p}|\omega|^{\delta}R^{1-\delta}$$

Diamond-Dibvyg Model

Algorithm

(i) make $t = 0$ and guess $\lambda_t = \bar{\lambda} > 0$

(ii) calculate f_i^j for all possible i and j

(iii) calculate g_0^0

- update $\lambda_{t+1} = \exp(g_0^0)\lambda_t$

(iv) calculate $\eta = |\lambda_{t+1} - \lambda_t|$

- if $\eta = 0$, then stop
- otherwise, go back to (ii)