Lista 3

A entrega dos códigos deve ser feita para fdiogo.camelo@gmail.com. Os diversos códigos devem ser colocados em único arquivo .zip (ou .rar) com o seu nome (por exemplo, felipecamelo_lista1.zip).

Exercício 1 (Cuba). Para esta questão, modelaremos a economia cubana usando o modelo neoclássico de crescimento estocástico padrão. Há um agente representativo com preferências dadas por

$$\mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t),$$

em que $u(\cdot)$ é diferenciável, crescente, côncava e satisfaz as condições de Inada. A função de produção é dada por $y_t = z_t F(k_t)$. F é diferenciável, crescente, côncava e satisfaz as condições de Inada. O capital se deprecia à taxa δ. z pode assumir dois valores: z_h e z_l. Assuma, sem perda de generalidade, que $z_h > z_l > 0$. Esse choque z segue um processo de Markov com matriz de transição π. z_h representa tempos de paz e, quando z_l ocorre, isso significa um ataque das forças americanas sobre a ilha.

1. Escreva o problema do planejador central (Pareto) na forma recursiva e tire as condições de primeira ordem.
2. Imagine agora que Cuba pode tentar prevenir um atque lançando mísseis sobre os EUA. Cada míssil m custa p unidades do bem final. A quantidade de mísseis lançados aumenta a probabilidade de que z_h ocorra no próximo período. Isto é, $\pi(z_h, m|z_i) > \pi(z_h, m'|z_i)$se $m > m'$. Assuma que π seja diferenciável em m. Reescreva o problema de Pareto e tire as condições de primeira ordem. Em particular, qual a condição que determina a quantidade ótima de mísseis que deve Cuba lançar?
3. Imagine agora que o Pentágono possa responder a ataques cubanos. Mais precisamente, no caso de qualquer ataque ($m > 0$), existe uma probabilide γ de que haja um ataque americano que destrua metade do estoque de capital cubano. Escreve a equação de Bellman para esse caso.

Exercício 2 (Seinfeld). Esta questão é baseada na série Seinfeld. Em um de seus episódios (7ª Temporada, episódio 9), a esponja anti-conceptional que a personagem Elaine Benes usa sai de mercado. Ela consegue comprar todo o estoque disponível. Denote esse estoque por n. A partir de então, sempre que ela encontrava um homem (com qualidade estocástica Q, com distribuição iid e cumulativa $F(Q)$), ela teria que tomar a decisão de se ele era "digno de uma esponja". Se sim, ela usaria a esponja. Caso contrário, ela deixaria "a oportunidade passar". Assuma que Elaine vive para sempre, que sua utilidade é linear na qualdiade de seu parceiro, que ela tenha fator de desconto β e que ela não tenha nenhuma outra consideração.

1. Escreva o problema de Elaine usando uma equação de Bellman. Seja claro quanto às variáveis de estado do problema.
2. O que você pode dizer sobre com quais parceiros Elaine terá relações? Qual a regra (política) ótima ela usará?
3. Num momento do episódio, após a relação com um parceiro em particular, o parceiro pergunta se ela toparia "mais uma rodada". Elaine responde "Desculpe, mas não vale pegar duas delas". Com essas informações, encontre um intervalo dentro qual está contida a qualidade Q_p desse parceiro específico.
4. Imagine, agora, que a qualidade dos potenciais parceiros com os quais Elaine se encontra seja parcialmente dependente do seu esforço. Em parciular, se Elaine resolve exercer e unidades de esforço, a cdf de qualidade do seu parceiro será $F(Q, e)$. Assuma que $\partial F/\partial e < 0$. Isto é, mais esforço faz com que parceiros de maior qualidade sejam mais prováveis (dominância estocástica de primeira ordem). Cada unidade de esforço custa p utis. Escreva o novo problema de Elaine.

5. Proponha uma mudança no ambiente enfrentado por Elaine. Descreva seu novo problema usando uma equação de Bellman. (Obviamente, não há uma resposta correta para esse item. Você deverá propor algo significativamente diferente do que eu listei acima. A ideia é que você possa descrever esse novo ambiente usando métodos recursivos).

Exercício 3 (Real Business Cycle - Problema do Planejador vs. Economia Competitiva). Esse exercício apresenta uma discussão sobre alguns aspectos teóricos subjacentes à construção dos modelos de Real Business Cycle (RBC). Antes de mais nada, devemos apresentar as hipóteses dessa questão:

- *Tempo*: O tempo é discreto, $t = 0,\ 1,\ 2, \ldots$, e o horizonte é infinito.
- *Preferências*: A economia é composta por um grande número de indivíduos iguais que vivem infinitamente e maximizam seu fluxo de utilidade esperado dado por $\mathbb{E}_0 \sum\limits_{t=0}^{\infty} \beta^t u\left(c_t,\ l_t\right)$ em que $\beta \in (0,1)$. Supõe-se que $u\left(c,\ l\right)$ é côncava e crescente no consumo $-\ c\ -$ e no lazer $-\ l\ -$ e duas vezes continuamente diferenciável.
- *Dotações*: A única dotação de cada indivíduo é uma unidade de tempo , que pode ser dividida entre trabalho $-\ n\ -$ e lazer $-\ l\ -$.
- *Tecnologia*: $F\left(K,\ N\right)$ é duas vezes continuamente diferenciável, côncava e homogênea de grau 1. Além disso, $F\left(\cdot, \cdot\right)$ satisfaz as condições de Inada com respeito ao capital[1]. Supomos que o produto da economia dado por pode ser usado para consumo ou investimento $-y_t = c_t + i_t-$ e que o capital O capital se deprecia a uma taxa $\delta \in (0,1)$ e não há crescimento.
- *Incerteza*: O produto, y_t, é dado por $y_t = A_t F\left(K_t,\ N_t\right)$, em que A_t é um choque aleatório de produtividade, cuja lei de movimento é dada por $\ln\left(A_t\right) = \rho \ln\left(A_t\right) + \varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim N\left(0, \sigma^2\right)$ e $\rho \in (0,1)$.

Tendo em vista as hipóteses acima, responda aos itens abaixo:

1. Monte o problema do planejador central na versão sequencial e na versão recursiva. Obtenha as condições de primeira ordem do problema recursivo e monte o sistema de equações que permite caracterizar as funções políticas de capital, consumo e de oferta de trabalho.
2. Suponha que os consumidores sejam donos das firmas e do estoque de capital e que façam três decisões interelacionadas: quanto trabalho oferecer $-n-$, quando capital acumular $-k'-$ e quando consumir $-c-$. Monte o problema do consumidor representativo na versão recursiva e o problema da firma. Defina um equilíbrio competitivo recursivo para essa economia.
3. Obtenha as condições de primeira ordem dos problemas do item 2. O que pode ser afirmado a respeito da conexão entre os problemas dos itens 1 e 2? Você pode apenas argumentar o que seria feito para demonstrar a equivalência entre os problemas.
4. Suponha, agora, que exista um governo nessa economia e que ele cobra impostos sobre a renda do trabalho por meio de uma taxa τ, que pode ser uma função do estado agregado. O governo pega essa receita e gasta com bens públicos que não geram utilidade diretamente para o agente representativo. Diante dessa alteração, repita o que foi feito no item 2.
5. A alocação eficiente referente ao problema do item 4 coincidirá com as alocações do equilíbrio competitivo recursivo? Justifique. Algo mudaria se o governo transferisse a receita desses impostos por meio de uma transferência lump-sum ao invés de gastar em bens públicos?

Exercício 4 (Equilíbrio Competitivo Recursivo com Externalidade). Considere uma economia muito similar à apresentada no exercício 1, com apenas algumas alterações. Em particular, supomos, além de o agente representativo derivar utilidade do lazer (desutilidade do trabalho), que ele não deseja passar seu tempo sozinho de forma que sua função de utilidade instantânea é dada por $u\left(c,\ n,\ N\right)$ em que $u_1 > 0$, $u_2 < 0$ e $u_3 < 0$, em que n é o número de horas trabalhadas pelo agente e N é o total de horas trabalhadas na economia. Além disso, supomos, por simplicidade, que não há incerteza.

[1] Perceba que isso implicará que o trabalho é essencial para a produção, i.e. $F\left(K,\ 0\right) = 0$.

1. Monte o problema dinâmico. Quais são as variáveis de estado?
2. Defina um equilíbrio competitivo recursivo e caracterize-o tanto quanto puder.
3. Mostre a dimensão a alocação de equilíbrio competitivo é diferente da alocação do Planejador Central.
4. Prove que o total de horas trabalhadas na economia competitiva é maior que o total de horas trabalhadas na solução obtida pelo Planejador.

Exercício 5 (Matlab - Problema Estocástico do Planejador). Este exercício é uma versão levemente modificada do exercício 7 da lista 2, incluindo agora incerteza no lado da produção da economia.

Suponha agora que a função de produção seja dada por $f(k_t) = A_t k_t^{\alpha}$, em que A_t é uma variável aleatória que evolui de acordo com um processo de Markov, podendo tomar dois valores diferentes:

$$A_t = \begin{cases} 1.2 & \text{, estado 1} \\ 0.4 & \text{, estado 2} \end{cases}$$

A matriz de transição desse processo é dada por:

$$M = \begin{bmatrix} 0.85 & 0.15 \\ 0.35 & 0.65 \end{bmatrix}$$

1. Modifique o código da lista anterior e determine as funções valor e política para este ambiente modificado.
2. Gere uma sequência aleatória com 1000 períodos de choques A_t, seguindo o processo de Markov descrito neste ambiente. Suponha que o primeiro choque de produtividade seja dado por $A_0 = 1.2$ com certeza.
3. Através da função política obtida, simule uma sequência de alocações de capital para essa economia. Para tanto, utilize a sequência de choques obtida no item anterior e tome k_0 arbitrário dentro do seu grid.

Exercício 6 (Modelo de Lucas com Duas Árvores). Considere um modelo padrão de árvore de Lucas, com 2 tipos de árvores. Há um agente representativo, que vive para sempre, cujas preferências são representadas por

$$\mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln(c_t).$$

Cada agente nessa economia é dotado de uma árvore do tipo i, $i \in \{1, 2\}$. Uma árvore do tipo i paga d_{it} unidades de consumo no período t, onde d_{it} é uma variável aleatória iid. Tais dividendos assumem valor d_L com probabilidade π_i e $d_H > d_L$ com probabilidade $(1 - \pi_i)$. Os agentes negociam em mercados competitivos, onde os bens de consumo possuem preço unitário e as árvores possuem preços p_{it}. Note que p_{it} é ex-dividendo, ou seja, é o preço da árvore i após ela pagar o dividendo do período t.

1. Monte o problema do agente representativo na forma recursiva. Tome cuidado ao definir as variáveis de estado, pois há incerteza agregada no modelo.
2. Derive as condições de primeira ordem e as equações de Euler.
3. Defina o equilíbrio competitivo recursivo.
4. Encontre o preço da árvore do tipo 1 como função do estado agregado. Note que essa deve ser uma expressão fechada, que dependa apenas de variáveis exógenas e do estado agregado.
5. Explique como o preço da árvore do tipo 1 depende dos valores presentes de d_{it} para $i \in \{1, 2\}$. Dê a intuição econômica.

6. Derive uma expressão para o preço do ativo de Arrow que paga num estado específico $S_{t+1} = \left(d_{1(t+1)},\ d_{2(t+1)}\right)$. Use essa expressão para determinar o preço de um ativo de Arrow que paga no estado $S_t = (d_L,\ d_H)$ quando o estado atual é $S_t = (d_L,\ d_L)$.

Exercício 7 (Árvore de Lucas Simples). Considere uma versão do modelo de apreçamento de ativos de Lucas com um agente representativo que tem uma árvore como dotação.

Tecnologia: A árvore produz um fluxo de dividentos, d_t, em que $d_0 = 1$. A taxa de crescimento do dividendo, $\frac{d_{t+1}}{d_t}$, toma um entre dois valores possíveis, $\mu + \sigma$ ou $\mu - \sigma$ em que $\mu > 1$. A taxa de crescimento do dividendo segue uma cadeia de Markov com matriz de transição P. Em particular, supomos que P é uma matriz simétrica em que a probabilidade de trocar de taxas de crescimento é dada por p, em que $p \in (0, 1)$.
Preferências: As preferências dos indivíduos são dadas por $\mathbb{E}_0 \sum\limits_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln(c_t)$.
Mercados: A cada período, existem mercados para bens de consumo, árvores e ativos contingentes ao estado que pagam uma unidade de consumo amanhã em um estado particular do mundo.

Tendo em vista essas hipóteses, responda aos itens abaixo.

1. Defina uma solução para o problema do agente representativo. Pense cuidadosamente a respeito sobre quais são as variáveis de estado do seu problema.
2. Defina um equilíbrio competitivo recursivo.
3. Obtenha a função de apreçamento de equilíbrio da árvore. Você deve achar que razão preço-dividendo das árvores é constante ao longo do tempo.
4. Obtenha as funções de apreçamento de equlíbrio dos ativos contigentes ao estado. Suponha que $\lim\limits_{n \to \infty} \beta^{n+1} \mathbb{E}_t x_{t+n} = 0$ para eliminar bolhas.
5. Adiciona um ativo livre de risco a essa economia, ou seja um ativo que paga uma unidade de consumo amanhã independentemente do estado. Calcule o preço desse ativo. [*Dica.* Não há necessidade de obter as funções de apreçamento de equilíbrio desse ativo (Por que não?)]
6. Agora, suponha que $p = 0.5$. Calcule a taxa de retorno *média* do ativo livre de risco e da árvore, Qual é "equity premium" nessa economia?

Exercício 8 (Damascos e Opções). Considere uma economia com um agente representavio em que há uma árvore que produz damascos perecíveis a cada período. O montante de damascos produzidos d a cada período é constante. O agente, por sua vez, é sujeito a choques de preferências a cada período de forma que sua utilidade instantânea é dada por $\theta u(c)$, em que c é seu consumo de damascos. O choque θ segue um processo de Markov com suporte $\Theta = \{\theta_1,\ \theta_2, \ldots,\ \theta_n\}$ e matriz de transição π. Responda aos itens abaixo.

1. Escreva o problema do agente na forma recursiva.
2. Defina o equilíbrio competitivo recursivo para essa economia.
3. Determine o preço de uma árvore no período atual.
4. Qual o preço de uma opção para se comprar *metade* da árvore no próximo período ao preço x?