Lista 1

A entrega dos códigos deve ser feita para fdiogo.camelo@gmail.com. Os diversos códigos devem ser colocados em único arquivo .zip (ou .rar) com o seu nome (por exemplo, felipecamelo_lista1.zip).

Exercício 1 (Equilíbrio de Arrow-Debreu/Mercados Sequenciais). Considere uma economia de trocas com dois agentes que vivem infinitamente. Suponha que haja apenas um bem por período. O fluxo de utilidade descontada de cada consumidor é dado por (para $i \in \{1,\, 2\}$):

$$U\left(c^i\right) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln\left(c_t^i\right)$$

em que $\beta \in (0,1)$. Suponha que as dotações sejam dadas pelas seguintes sequências:

$$w^1 = \left(w_0^1,\, w_1^1,\, w_2^1,\, w_3^1, \ldots\right) = (2\,2,\, 2,\, 2, \ldots)$$
$$w^2 = \left(w_0^2,\, w_1^2,\, w_2^2,\, w_3^2, \ldots\right) = (1,\, 4,\, 1,\, 4, \ldots)$$

Supomos, adicionalmente, que não há armazenamento nessa economia. Responda aos itens abaixo.

1. Monte o problema do consumidor (PC) em um ambiente de Arrow–Debreu.
2. Defina um equilíbrio nesse ambiente. Seja cuidado para enumerar todos os objetos que compõem o equilíbrio.
3. Resolva o problema do consumidor e obtenha uma expressão para o consumo de cada um deles em função dos preços e das dotações.
4. Compute o equilíbrio e ache expressões para os consumos e preços, dependendo apenas de variáveis exógenas.
5. Sejam λ e $1-\lambda$ os pesos de Pareto dos consumidores 1 e 2 respectivamente. Monte o problema do Planejador Central. Obtenha os consumos de cada agente. Qual é a relação entre os pesos de Pareto desse item e os multiplicadores de Lagrange do problema de cada consumidor?
6. Descreve uma estrutura de Mercados Sequenciais para essa economia, explicando, quando os mercados estão abertos, quem transaciona com quem e assim por diante. Defina um equilíbrio de Mercados Sequenciais nessa economia.
7. Enuncie, cuidadosamente, uma proposição que estabeleça a equivalência essencial do equilíbrio de Arrow-Debreu com o equilíbrio de Mercados Sequenciais. Seja claro ao especificar as relações entre os objetos dos dois equilíbrios. (Não é necessário provar essa proposição).
8. Use o equilíbrio de Arrow-Debreu obtido acima para calcular o equilíbrio de Mercados Sequenciais.

Exercício 2 (Teoremas do Bem-Estar). Considere uma economia de trocas com I agentes que vivem infinitamente e S estados da natureza em cada período. Os indivíduos possuem dotação de $y^i\left(s^t\right)$ unidades do bem de consumo, em que s^t denota a história de eventos $s^t = (s_0,\, s_1, \ldots,\, s_t)$ até o período t. Denote a probabilidade de realização da história s^t por $\pi_t\left(s^t\right)$. Cada agente maximiza o seu fluxo de utilidade esperada, sujeito à sua restrição orçamentária. O fluxo de utlidade de um agente i é dado por:

$$U\left(c^i\right) = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} \beta^t \pi_t\left(s^t\right) u\left(c_t^i\left(s^t\right)\right)$$

em que $\beta \in (0,1)$ e $u(\cdot)$ é uma função estritamente crescente, duas vezes continuamente diferenciável, estritamente côncava e satisfaz as condições de Inada. Responda aos itens abaixo.

1. Monte o problema do Planejador Central e obtenha o consumo do agente i, considerando que o Planejador é utilitarista. Do que depende $c^i\left(s^t\right)$?

2. Monte o problema do consumidor em um ambiente de Arrow-Debreu, defina o equilíbrio e caracterize as condições de otimalidade do indíviduo i. Como os multiplicadores de Lagrange se relacionam com os pesos de Pareto?

3. Suponha que a utlidade instantânea seja dada por

$$u\left(c\right)=\frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

em que $\sigma>0$. Mostre que o consumo de cada indivíduo é uma fração constante da dotação agregada, independentemente do período e da história.

Exercício 3 (Um equilíbrio competitivo). Uma economia de trocas é composta por dois tipos de agentes. Consumidores do tipo 1 têm fluxo de utilidade descontada do consumo do único bem de consumo de acordo com

$$\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t c_t^1$$

e consumidores do tipo 2 têm fluxo de utlidade descontada dado por

$$\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t \ln\left(c_t^2\right)$$

em que $c_t^i\geq 0$ é o consumo de um agente de tipo i e $\beta\in(0,1)$ é um fator de desconto comum. O bem de consumo é negociável mas não é armazenável. Existe um número igual de consumidores de cada tipo. Os consumidores de tipo 1 possuem uma sequência de dotação que satisfaz

$$y_t^1=\mu,\ \forall t\geq 0$$

em que $\mu>0$. Os consumidores do tipo 2 possuem uma sequência de dotação que satisfaz

$$y_t^1=\begin{cases}0 & \text{se } t\geq 0 \text{ for par}\\ \alpha & \text{se } t\geq 0 \text{ for } í\text{mpar}\end{cases}$$

em que $\alpha=\mu\left(1+\beta^{-1}\right)$.

1. Defina um equilíbrio competitivo com todas as trocas feitas no tempo zero (time zero trading). Seja cuidadoso ao incluir as definições de todos os objetos que compõem um equilíbrio competitivo.

2. Obtenha a alocação de equilíbrio competitivo com trocas feitas no tempo zero.

3. Obtenha as riquezas no tempo zero dos dois tipos de consumidores usando os preços de equilíbrio competitivo.

4. Defina um equilíbrio competitivo com trocas sequenciais de ativos de Arrow.

5. Obtenha um equilíbrio competitivo com trocas sequenciais de ativos de Arrow.

Exercício 4 (Matlab). Essa questão servirá como introdução ao Matlab, aprendendo a lidar com matrizes e vetores.

1. Crie duas matrizes 3×3 A e B com entradas aleatórias distribuídas identicamente no intervalo $[0,10]$ e verifique se

(a) $(A+I)(A-I) = A^2 - I$

(b) $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

(c) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$

2. Defina os parâmetros $\alpha = 0.3$, $\beta = 0.4$, $\delta = 0.055$ e $A = 10$. Então, calcule

$$Ak^{\alpha+\beta} - \delta k$$

para $k = 1,\ 1.1,\ 1.2, \ldots, 3$. Use vetores, ou seja, defina k=1 : 0.1 : 3, etc.

3. Uma última questão para lidar com matrizes e vetores.

   (a) Crie um vetor da forma: $x = (a,\ a + \Delta x, \ldots, b)$ em que $a = 0$, $b = 5$ e $\Delta x = 1$.

   (b) O vetor anterior é um vetor-linha ou um vetor coluna? Obtenha x transposto e chame-o de y.

   (c) Crie a matriz quadrada M em que toda linha de M tem o vetor x.

   (d) Crie os vetores $a1,\ a2, \ldots,\ a6$ em que $a1$ é a primeira coluna de M, $a2$ é a segunda coluna de M e assim por diante.

Exercício 5 (Matlab). Nessa questão, você simulará um processo $AR(1)$, aprendendo como utilizar um for loop. Considere o processo $AR(1)$ dado por

$$x_{t+1} = 0.8x_t + u_t,\ u_t \sim N(0,1)\ i.i.d\, e\, x_0 = 0$$

1. Crie um vetor u que tenha tamanho 10 e $u_t \sim N(0,1)$ para todo $t \in \{1,\ 2, \ldots,\ 10\}$.

2. Usando o vetor u gerado acima, use um for loop para criar o vetor x de acordo com o processo $AR(1)$ descrito acima.

3. Faça um gráfico do vetor x. [*Dica.* Use a função *plot* ()].

4. Repita os itens anteriores para vetores de diferentes tamanhos (20, 50, 100, 500, 1000 e 20000). Calcule o tempo necessário para que o seu programa rode de acordo com cada tamanho de vetor. [*Dica.* Use as funções *tic* () e *toc* ()].

Exercício 6 (Matlab). Esse exercício servirá como uma introdução aos problemas de maximização. Suponha que desejemos maximizar

$$f(x,\ y) = xy$$

considerando as restrições: $2x + 2y \leq 5$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

1. Crie um gride para x que tenha 10 pontos. Quais deveriam ser os limites e o intervalo desse grid?

2. Considerando cada ponto do grid anterior, calcule o valor da função $f(x,\ y)$.

3. Entre todos os pontos grid, selecione aquele em que $f(x,\ y)$ tem o maior valor. Salve os argumentos como x_opt, y_opt e f_opt.

4. Repita esse processo para grids que tenham 50, 100, 200, 500 e 1000 pontos, calculando o tempo necessário para encontrar o máximp. Você notou muitas diferenças entre o argmax e o valor máximo da função?

5. Calcule analiticamente o máximo de $f(x,\ y)$ sujeito a essas restrições. Chame-o de f_star. Seja $ef = [[f$_star-f_opt$] \times time]^{-1}$. Qual é número mais eficiente de pontos no grid?