**FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS**
**Escola de Pós-Graduação em Economia**
**Teoria Macroeconômica III**
Professor: Ricardo de Oliveira Cavalcanti
Monitora: Kátia Aiko Nishiyama Alves
Alunos: Samuel Barbosa e Gustavo Bulhões

# Exercício 01

Neste exercício temos um modelo de search no mercado de trabalho com as seguintes funções/parâmetros:

```
f = @(w, alpha_1, alpha_2) alpha_1 + alpha_2 * w;
u = @(c, gamma) c .^ gamma;

beta = 0.98;
pi = 0.1;
b = 0;
wmin = 0;
wmax = 20;
gamma = 1/2;
```

## Item (i)

No item (i) vamos usar que $f(0) = 2f(\overline{w})$. Como $\int_0^{\overline{w}} f(w)dw = 1$, resolvemos para $\alpha_1, \alpha_2$ e obtemos:

```
alpha_1 = 1/15;
alpha_2 = -1/600;
```

Neste modelo o agente escolhe entre aceitar uma oferta de trabalho a um salário $w$ ou continuar procurando por uma oferta no próximo período a um salário $w'$. Escrevemos o problema do agente na forma recursiva, e resolvemos para obter a função valor $V(w)$, a função política $G(w)$ e o preço de reserva $R$ do agente (o salário que o torna indiferente entre aceitar ou não uma oferta de trabalho).

Para aproximar numericamente a função valor, criamos um grid para a variável de estado $w$, entre 0 e 20, contendo $n = 1000$ pontos, e aplicamos aplicamos um algoritmo de iteração buscando o ponto fixo do operador

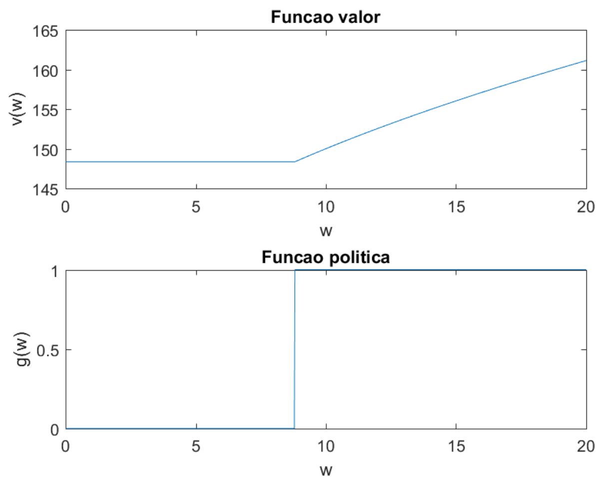
$$T(V)(w) = \max_{I(w)\in\{0,1\}} I(w)\{u(w)+\beta[(1-\pi)V(w)+\pi V(0)]\}+[1-I(w)][u(b)+\beta E[V(w')]].$$

```
n = 1000;
w = linspace(wmin, wmax, n)';
V = ones(n, 1); % chute inicial para a funcao valor
G = ones(n, 1); % chute inicial para a funcao politica

% inicia variaveis do algoritmo de iteracao
err = 1;
tol = 10^-5;
itmax = 2000;
iter = 1;

% fdp discretizada e funcao valor esperado
fw = f(w, alpha_1, alpha_2) ./ sum(f(w, alpha_1, alpha_2));
E = @(fw, V, n) V' * fw;
```

Definimos $N$ como o payoff de recusar uma oferta $w$ e seguir a política ótima a partir do próximo período, e $A$ como o payoff de aceitar $w$ e seguir a política ótima a partir do próximo período. Deste modo o algoritmo de iteração é dado por

```
% algoritmo de iteracao
while err > tol && iter < itmax
    N = u(b, gamma) + beta * E(fw, V, n);
    N = repmat(N, n, 1);
    A = u(w, gamma) + beta * ((1-pi) * V + pi * N);
    [TV, G] = max([N A], [], 2);
    err = abs(max(TV - V));
    V = TV;
    iter = iter + 1;
end

G = G-1;
R = min(w(G == 1));
```

Utilizado o código descrito obtemos $R \approx 8.8088$ e as seguintes funções valor e política:

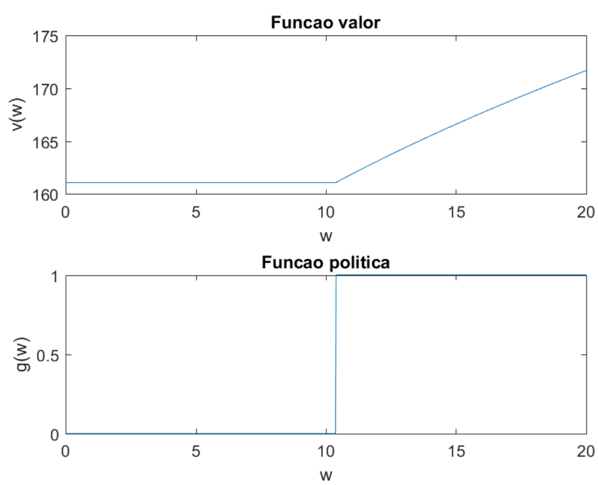



## Item (ii)

No item (ii) refazemos o exercício usando $f(\overline{w}) = 2f(0)$ em oposição a $f(0) = 2f(\overline{w})$ tal como no item (i). Agora obtemos

```
alpha_1 = 1/30;
alpha_2 = 1/600;
```

A distribuição de $w$ passa a ter maior densidade em valores mais altos, implicando em maior probabilidade de ofertas de trabalho com salários maiores. Aplicando o algoritmo para os novos valores de $\alpha_1$ e $\alpha_2$, obtemos $R \approx 10.3904$, e as funções valor e política se alteram para



### Item (iii)

Nesta economia temos apenas um tipo de desemprego, que resulta de uma escolha ótima do agente enquanto busca uma melhor oferta de salário.

### Item (iv)

Conforme visto, o salário de reserva do agente dados os parâmetros do item (i) é de $R \approx 8.8088$.

## Exercício 02

Neste exercício temos o modelo clássico de crescimento econômico, cujo problema do planejador é escolher sequências de consumo $\{c_t\}_{t=0}^{\infty}$ e de capital $\{k_t\}_{t=0}^{\infty}$ que resolvem

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \\ \text{s.a.} \quad & c_t + k_{t+1} \leq f(k_t) + (1-\delta)k_t \\ & k_{t+1} \geq 0, c_t \geq 0 \ \forall t \geq 0 \\ & k_0 \text{ dado} \end{aligned} \tag{1}$$

com $f(k) = k^{\alpha}$ e $u(c) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}$.

### Item (i)

Observe que $u(c)$ é monótona crescente em $c$ e, portanto satisfaz a propriedade de não saciedade local. Logo vale a Lei de Walras, e podemos reescrever a primeira restrição com igualdade, resolver para $c_t$ e substituir na função objetivo. Desta forma o problema se torna

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(f(k_t) + (1-\delta)k_t - k_{t+1}) \\ \text{s.a.} \quad & k_{t+1} \geq 0, c_t \geq 0 \ \forall t \geq 0 \\ & k_0 \text{ dado} \end{aligned} \tag{2}$$

### Item (ii)

Reescrevemos o problema sequencial na forma recursiva, transformando-o na equação funcional

$$\begin{aligned} V(k) = \max_{k'} \quad & u(c) + \beta V(k') \\ \text{s.a.} \quad & c + k' = f(k) + (1-\delta)k \\ & k' \geq 0, c \geq 0 \end{aligned} \tag{3}$$

## Item (iii)

O operador de Bellman associado à equação funcional obtida no item anterior é justamente

$$\begin{aligned} T(V)(k) = \max_{k'} \quad & u(c) + \beta V(k') \\ \text{s.a.} \quad & c + k' = f(k) + (1-\delta)k \\ & k' \geq 0, c \geq 0 \ \forall t \geq 0 \end{aligned} \tag{4}$$

## Item (iv)

Vamos criar um grid para a variável de estado $k$ no intervalo $[0, 1.25k_{ss}]$, em que $k_{ss}$ é o nível de capital de estado estacionário.

Resolvendo o lado direito da equação funcional (3), já substituindo as funções dadas $u()$ e $f()$, obtemos a equação de Euler

$$c^{-\gamma} = \beta c'^{-\gamma}[\alpha k'^{\alpha-1} + 1 - \delta].$$

No estado estacionário temos que $c' = c$ e $k' = k$. Substituindo na equação anterior obtemos

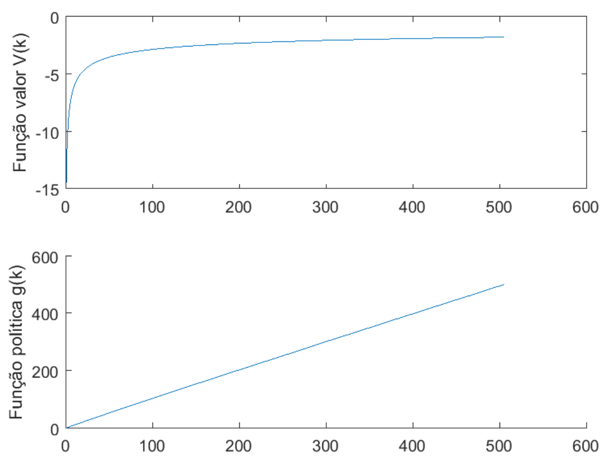
$$k_{ss} = \left(\frac{1 + \beta(\delta - 1)}{\alpha\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}. \tag{5}$$

Dado $k_{ss}$ podemos construir nosso algoritmo de iteração:

```
% Parametros
alpha = 0.70;
beta = 0.98;
gamma = 2.00;
delta = 0.10;

k_ss = ((1 + beta * (delta - 1))/ alpha * beta )^(1 / (alpha - 1));

% Funcoes
f = @(k) k .^ alpha;
c = @(k, k_linha) max(f(k) + (1 - delta) * k - k_linha, 0);
u = @(c) (c .^ (1 - gamma)) ./ (1 - gamma);

% Grid
n = 1000;
k = linspace(1, 1.25 * k_ss, n);
k_linha = k';
K = repmat(k, n, 1);
K_linha = repmat(k_linha, 1, n);

% Possibilidades de consumo e utilidade
C = c(K, K_linha);
U = u(C);

% Chutes iniciais:
V = zeros(1, n);
g = zeros(1, n);
```

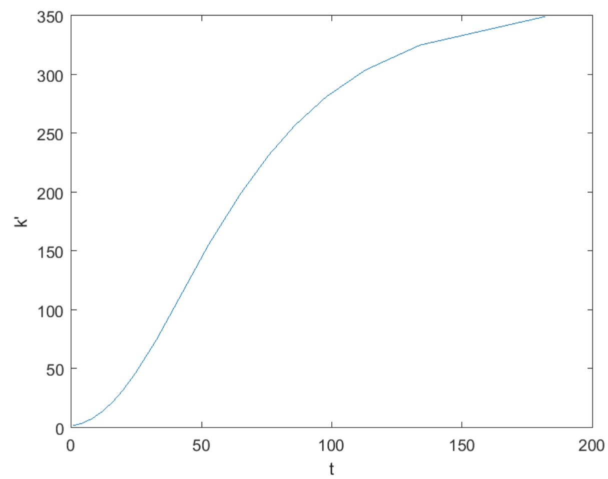
```
% Variaveis iteracao
err = 1;
tol = 10^-5;
it = 1;
itmax = 1000;

% Algoritmo de iteracao
while err > tol && it < itmax
    [TV, I] = max(U + beta * repmat(V',1, n));
    err = max(abs((TV - V)));
    V = TV;
    it = it + 1;
end

G = k(I);
```

Assim, obtemos as seguintes funções valor e política:



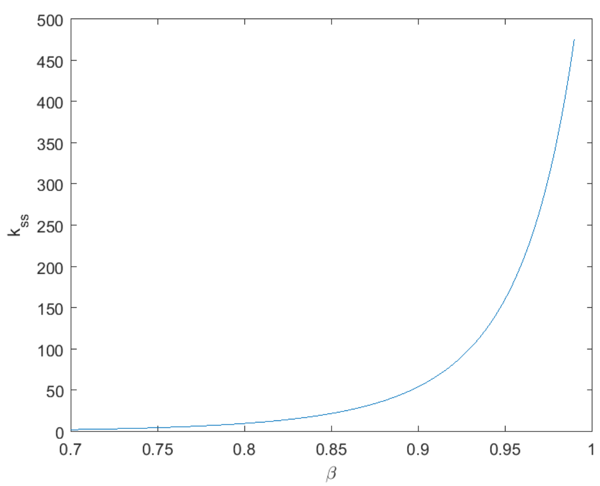

## Item (v)

Com $k_0 = 2$, obtemos um nível de capital de estado estacionário $k_{ss} \approx 349.31$, ao qual estão associados o nível de produto $y_{ss} \approx 60.29$ e consumo $c_{ss} \approx 25.36$. O gráfico a seguir mostra a trajetória das escolhas de $k'$ até o $k_{ss}$, quando $k_0 = 2$.




## Item (vi)

Na equação (5) temos $k_{ss}$ em função de $\beta$. Avaliando esta equação para valores de $\beta$ entre 0.7 e 0.99 obtemos o gráfico a seguir.




## Item (vii)

Conforme a equação 5, $k_{ss}$ não depende de $\gamma$.

# Exercício 03

## Item (i)

O problema do planejador é dado por

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \\
\text{s.a.} \quad & c_t + k_{t+1} \leq z_t k_t^{\alpha} + (1-\delta)k_t \\
& k_{t+1} \geq 0, c_t \geq 0 \ \forall t \geq 0 \\
& k_0 \text{ dado}
\end{aligned} \tag{6}
$$

## Item (ii)

As variáveis de estado desta economia são $k$ e $z$. Reescrevendo o problema na forma recursiva, temos

$$
\begin{aligned}
V(k,z) = \max_{c,k'} \quad & u(c) + \beta \sum_j \pi_{ij} V(k', z_j') \\
\text{s.a.} \quad & c + k' = zk^{\alpha} + (1-\delta)k \\
& k' \geq 0, c \geq 0
\end{aligned} \tag{7}
$$

## Item (iii)

O operador de Bellman associado à equação funcional obtida no item anterior é

$$
\begin{aligned}
T(V)(k,z) = \max_{c,k'} \quad & u(c) + \beta \sum_j \pi_{ij} V(k', z_j') \\
\text{s.a.} \quad & c + k' = zk^{\alpha} + (1-\delta)k \\
& k' \geq 0, c \geq 0
\end{aligned} \tag{8}
$$

## Item (iv)

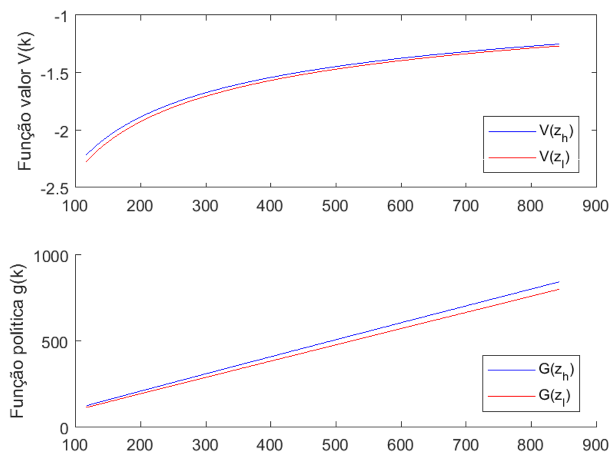
Utilizando os parâmetros e funções dadas, alteramos o código do exercício anterior para incorporar a incerteza referente aos choques na variável $z$.

```
% Parametros
alpha = 0.70;
beta = 0.98;
gamma = 2.00;
delta = 0.10;

zh = 1.2;
zl = 0.8;

kssh = (1/(zh*alpha)*(1/beta-1+delta))^(1/(alpha-1));
```

```
kssl = (1/(zl*alpha)*(1/beta-1+delta))^(1/(alpha-1));

% Funcoes
f = @(k, z) z * k .^ alpha;
c = @(k, k_linha, z) max(f(k, z) + (1 - delta) * k - k_linha, 0);
u = @(c) (c .^ (1 - gamma)) ./ (1 - gamma);

% Grid
n = 1000;
k = linspace(0.7 * kssl, 1.3 * kssh, n);
k_linha = k';
K = repmat(k, n, 1);
K_linha = repmat(k_linha, 1, n);

% Chutes iniciais:
Vzh = zeros(1, n);
Vzl = zeros(1, n);
Gzh = zeros(1, n);
Gzl = zeros(1, n);
z = zh;

% Consumo e utilidade
Ch = c(K, K_linha, zh);
Cl = c(K, K_linha, zl);
Uh = u(Ch);
Ul = u(Cl);

% Variaveis iteracao
err = 1;
tol = 10^-5;
it = 1;
itmax = 1000;

%% Algoritmo de iteracao
while err > tol && it < itmax
    if z == zh
        [TVzh, Izh] = max(Uh + beta * (0.7 * repmat(Vzh',1, n) + 0.3 * repmat(Vzl',1, n)));
        err = max(abs((TVzh - Vzh)));
        Vzh = TVzh;
        x = rand(1);
        if x <= 0.7, z = zh; else z = zl; end
        it = it + 1;
    else
        [TVzl, Izl] = max(Ul + beta * (0.8 * repmat(Vzh',1, n) + 0.2 * repmat(Vzl',1, n)));
        err = max(abs((TVzl - Vzl)));
        Vzl = TVzl;
        it = it + 1;
        x = rand(1);
        if x <= 0.8, z = zh; else z = zl; end
        it = it + 1;
    end
end

Gzh = k(Izh);
Gzl = k(Izl);
```

### Item (v)

Executando o código acima obtemos as seguintes funções valor e polítca:




## Exercício 04

Entrega facultativa.

## Exercício 05

Neste exercício vamos buscar a solução do sistema de equações $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ para

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ -3 & 9 & 1 \\ 2 & -1 & -7 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

### (a)

No item (a) utilizamos o método de Jacobi. A tabela a seguir apresenta cada passo das iterações e a solução final.

| Iteração | $\mathbf{x}_1$ | $\mathbf{x}_2$ | $\mathbf{x}_3$ |
|---|---|---|---|
| 1 | -0.20000 | 0.22222 | -0.42857 |
| 2 | 0.14603 | 0.20317 | -0.51746 |
| 3 | 0.19175 | 0.32840 | -0.41587 |
| 4 | 0.18088 | 0.33235 | -0.42070 |
| 5 | 0.18536 | 0.32926 | -0.42437 |
| 6 | 0.18633 | 0.33116 | -0.42265 |
| 7 | 0.18605 | 0.33129 | -0.42264 |
| 8 | 0.18610 | 0.33120 | -0.42274 |
| 9 | 0.18612 | 0.33123 | -0.42271 |

A solução final obtida é, portanto, $\mathbf{x} = (0.18612, 0.33123, -0.42271)'$.

### (b)

Resolvendo o sistema pelo método de Gauss obtemos a mesma solução.

## Exercício 06

Neste exercício vamos buscar a solução para o sistema de equações dado por $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ para

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

### (a)

Aplicando o método de Jacobi escolhendo o chute inicial $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$ não obtemos convergência.

### (b)

Escolhendo ainda outros valores iniciais para $\mathbf{x}$ como $(1/2, 1/2)$, ainda não obtemos convergência.

### (c)

Utilizando a eliminação de Gauss, com chute inicial $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$, obtemos a convergência desejada, com solução final dada por $\mathbf{x} = (1, 1)$.

# Exercício 07

Neste exercício calibramos o modelo de Mehra e Prescott (1985) utilizando dados anuais da economia brasileira entre 1996 e 2013[1]. Obtemos os seguintes valores na calibração:

| Parâmetro | Valor |
|---|---|
| $\mu$ | 0.10050 |
| $\delta$ | 0.032504 |
| $\phi$ | 0.58750 |

Para analisar os resultados do modelo, utilizamos como referência o retorno médio real da taxa Selic (ativo livre de risco) e do Ibovespa (ativo de risco) no período de referência (1996 a 2013). No caso da Selic, o retorno observado foi de 9,05% ao ano. Já o retorno médio real observado do Ibovespa foi de 13,61% ao ano. Desta forma, o prêmio de risco observado na comparação entre estes ativos foi de 4,55% ao ano.

Para obter estimativas no modelo e compará-las com os dados observados, criamos um *grid* de 1000 pontos para $\beta \in [0.7, 0.99]$ e $\sigma \in [0, 10]$. Aos valores de $\beta = 0.9331$ e $\sigma = 4.96$, o modelo retorna o prêmio de risco mais próximo do observado nos dados, com uma diferença em valor absoluto na ordem de $10^{-7}$. Enviamos o código em anexo.

[1]A partir de 2014, o IBGE passou a adotar uma nova metodologia o sistema de Contas Nacionais. Portanto, para preservar a consistência da série, utilizamos os dados de consumo somente até 2013. Além disso, em 1994 e 1995 a variação do consumo e o IGP-M destoam do restante das observações. Devido à baixa quantidade de observações (19), este *outlier* altera significativamente a média do período. Acreditamos que com o restante da série (1995 a 2013) obtemos uma média mais representativa.