2. januar 2023

MatIntroMatNat
OPGAVEFORSIDE

AFLEVERINGSOPGAVE# 4

DATO(dd-mm-åå): 25/10/2022

Klasse# 12 **Skemagruppe (A eller C):** A

Studieretning: Datalogi

Navn (inkl. mellemnavne):

Samuel Bremerskov Cadell

KU-brugernavn: bdq178

Hvis mapledelen er udfærdiget i samarbejde med andre (max. 2 andre) angives deres navne og KU-brugernavn her:

Opgave 1

Jeg skal beregne følgende udtryk:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)) \tag{1}$$

for følgende funktion:

$$f(x,y) = 9y^2(1+xy)$$

Derefter skal jeg udregne følgende udtryk for samme funktion:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)) \tag{2}$$

Denne første delopgave har jeg valgt at lave i hånden. Lad os starte med at udregne det første udtryk (1).

Her kan jeg starte med at differentiere hvert led i parentensen og bagefter gange med $9y^2$. Differentierer vi hvert led i parentesen ift. x får vi:

$$(\frac{\partial}{\partial x}[1] + \frac{\partial}{\partial x}[xy]) = (0+y)$$

Vi ved at konstanter forsvinder når vi differentierer og y bare er en konstant når vi differentierer ift. til x derfor bliver udtrykket:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 9y^2 * (0+y) = 9y^2 * y = 9y^3$$

Nu skal vi differentiere ift. y. Her skal vi bare trække eksponenten ned og gange med konstanten 9 foran y, og derefter trække en fra i eksponenten, hvilket giver følgende resultat for udtrykket (1):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)) = 27y^2$$

Nu går vi videre til (2). Først differentierer jeg $f(x,y)$ ift. y.

Til at starte med kan vi sætte koefficienten 9 udenfor og differentiere udtykket $y^2 * (xy+1)$. Her skal vi bruge produktreglen til at differentiere. Vi kan omskrive udtrykket til følgende:

$$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = 9*(\frac{\partial}{\partial y}[y^2]*(xy+1) + y^2*\frac{\partial}{\partial y}[xy+1])$$

Den første faktor vi differentierer skal vi bare trække eksponenten ned og trække en fra i eksponenten bagefter. I den anden faktor vi skal differentiere kan vi trække x udenfor da det bare er en konstant vi ganger på og hhv. differentiere y så det bliver 1.

$$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = 9*(\frac{\partial}{\partial y}[y^2]*(xy+1) + y^2*\frac{\partial}{\partial y}[xy+1]) =$$

$$9*(2y*(xy+1) + y^2*(x+0))$$

Ganger vi parenteserne ud får vi følgende udtryk:

$$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = 27xy^2 + 18y$$

Differentierer vi efter x kan vi ligesom før bare differentiere hvert led. Det første led giver bare konstanten $27y^2$ da x forsvinder fordi eksponenten bliver 0. Det andet led bliver bare nul fordi det er en konstant da vi ganger konstanten 18 med y som også er en konstant når vi differentierer ift. x.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)) = 27y^2$$

Vi får altså samme resultat uafhængig af rækkefølgen vi differentierer i.

Jeg har udregnet (1) og (2) i Maple for hhv. $g(x,y)$ og $h(x,y)$ i opgave beskrivelsen.

Her ses det også at det giver det samme resultat ufhængig af rækkefølgen af variabler vi differentierer efter, altså gælder følgende udtryk:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial}{\partial x}g(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial}{\partial y}g(x,y))$$

$$1 - 21cos(x+7y) = 1 - 21cos(x+7y)$$

Det samme gælder for $h(x,y)$, hvilket også kan ses ud fra mine udregninger i Maple:

```
> g:=(x,y)->x*y+3*cos(x+7*y);
  'diff(diff(g(x,y),x),y)' = diff(diff(g(x,y),x),y);
  'diff(diff(g(x,y),y),x)' = diff(diff(g(x,y),y),x)
```

$$g := (x,y) \mapsto y \cdot x + 3 \cdot \cos(x + 7 \cdot y)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} g(x,y) = 1 - 21 \cos(x + 7y)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} g(x,y) = 1 - 21 \cos(x + 7y) \quad (1)$$

```
> h:=(x,y)->3*x*ln(x^2-4*y);
  'diff(diff(h(x,y),x),y)' = diff(diff(h(x,y),x),y);
  'diff(diff(h(x,y),y),x)' = diff(diff(h(x,y),y),x)
```

$$h := (x,y) \mapsto 3 \cdot x \cdot \ln\left(x^2 - 4 \cdot y\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} h(x,y) = -\frac{12}{x^2 - 4y} + \frac{24x^2}{\left(x^2 - 4y\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} h(x,y) = -\frac{12}{x^2 - 4y} + \frac{24x^2}{\left(x^2 - 4y\right)^2} \quad (2)$$

Opgave 2

Vi er givet funktionen:

$$h(x,y) = \frac{cos(2x) - cos(2y)}{3(x^2 + y^2)}$$

Ud fra denne skal vi bestemme $H(x)$:

$$H(x) = \lim_{y \to 0} h(x,y), x \in \mathbb{R}^2$$

For at bestemme H(x), skal vi udregne $\lim_{y \to 0} h(x,y) = h(x,0)$. Dette kan vi gøre ved at sætte $y = 0$ og udregne

$$\lim_{y \to 0} h(x,y) = h(x,0) = \frac{cos(2x) - cos(2 * 0)}{3(x^2 + 0^2)} = \frac{cos(2x) - 1}{3x^2}$$

Hvis H skal være kontinuert skal den være kontinuert i alle punkter. Vi ved at den er kontinuær i alle punkter i $\mathbb{R}^2$ undtagen i origo, da $\dfrac{cos(2x) - 1}{3x^2}$ er sammensat af kontinuerte udtryk, derfor er H en kontinuert funktion hvis følgende også gælder:

$$\lim_{x \to 0} H(x) = H(0) \tag{3}$$

Her kan vi hurtigt se at det giver et ugyldigt udtryk for $x = 0$ da nævneren bliver 0, i stedet for kan vi bruge L'Hobital's to gange da både tæller og nævner går mod nul når $x \to 0$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{cos(2x) - 1}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-2sin(2x)}{6x} \lim_{x \to 0} \frac{-4cos(2x)}{6} = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3} \tag{4}$$

For at afgøre om H er kontinuert når $x = 0$ skal vi tjekke om $H(0)$ giver det samme som (4). Vi kan starte med at sætte $x = 0$, så udtrykket kan opskrives således:

$$\frac{1 - \cos(2y)}{3y^2}$$

Dette udtryk skal vi nu bruge til at finde grænseværdien af når $y \to 0$, her skal vi igen bruge L'Hobitals regel to gange for at få et gyldigt udtryk vi kan regne med:

$$\lim_{y \to 0} h(0, y) = \frac{1 - \cos(2y)}{3y^2} = \frac{2sin(2 * y)}{6y} = \frac{4cos(2y)}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Siden H ikke er kontinuær da (5) ikke gælder kan vi heller ikke vælge en værdi $c = h(0, 0)$ således at h bliver kontinuær i hele $\mathbb{R}^2$

Opgave 3

(a)

Jeg skal først betemme Taylorpolynomiummet $T_3 f$ af 3. orden i udviklingspunktet $a = 0$ for funktionen $f = arcsin$. Først udregner jeg de første 3 differentierede af funktionen f. Vi ved at den første differentierede af $arcsin$ er $\frac{\partial}{\partial x} f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Til at finde den anden differentierede skal vi bruge kædereglen, hvor vi ganger med den indre differentierede $\frac{\partial}{\partial x}[1 - x^2] = -2x$. Nu ser udtrykket således ud:

$$\frac{\partial^2}{\partial x} f(x) = (\frac{-1}{2})(1 - x^2)^{(-1/2)-1} * (-2x)$$

$(1 - x^2)^{(-1/2)-1}$ kan vi bare omskrive til $\frac{1}{(1 - x^2)^{3/2}}$. Nu kan vi bare sætte hele udtrykket på en brøkstreg og få følgende:

$$\frac{\partial^2}{\partial x} f(x) = \frac{2x}{2(1 - x^2)^{3/2}} = \frac{x}{(1 - x^2)^{3/2}}$$

Til at finde den trejde differentierede skal vi bruge kvotientreglen:

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Longrightarrow h'(x) = \frac{f'(x) * g(x) - f(x) * g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x} f(x) = \frac{\frac{\partial}{\partial x}[x] * (1-x^2)^{(3/2)} - x * \frac{\partial}{\partial x}[(1-x^2)^{3/2}]}{((1-x^2)^{(3/2)})^2}$$

Udregner vi de differentierede og reducere får vi følgende (lig mærke til at jeg har brugt kæde reglen til at differentiere $\frac{\partial}{\partial x}[(1-x^2)^{3/2}]$ hvor den indre funktion er $1-x^2$ og så har jeg omskrevet $(1-x^2)^{(3/2)-1}$ til $\sqrt{1-x^2}$:

$$\frac{\partial^3}{\partial x} f(x) = \frac{1(1-x^2)^{(3/2)} * 3x^2\sqrt{1-x^2}}{((1-x^2)^{(3/2)})^2} = \frac{(1-x^2)^{(3/2)} * 3x^2\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)^3}$$

Nu har vi udregnet de tre differentierede, så mangler vi bare at indsætte vores udviklingspunkt $a = 0$ i hver af de tre afledede:

$$\frac{\partial^0}{\partial x} f(0) = arcsin(0) = 0$$
$$\frac{\partial^1}{\partial x} f(0) = \frac{1}{\sqrt{1-0^2}} = 1$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x} f(0) = \frac{0}{(1-0^2)^{3/2}} = 0$$
$$\frac{\partial^3}{\partial x} f(0) = \frac{(1-0^2)^{(3/2)} * 3 * 0^2\sqrt{1-0^2}}{(1-0^2)^3} = 1$$

Dette kan vi nu opskrive som et Taylor-polynomium ved at bruge 11.1.2 i TL:

$$T_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k$$

Dette giver os følgende Taylor-polynomium:

$$T_3 f(x) = \frac{0}{0!} + \frac{1}{1!}(x-0)^1 + \frac{0}{2!}(x-0)^2 + \frac{1}{3!}(x-0)^3 = x^1 + \frac{1}{6}x^3 = x + \frac{1}{6}x^3$$

(b)

Jeg skal beregne $b = T_3 f(\frac{1}{2})$ for $x = \frac{1}{2}$ og derefter forklare med udgangspunkt i ligningen $sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ hvorfor $6b$ er en tilnærmelse til π. Og Til sidst vise hvor meget $6b$ afviger fra min egen approksimation af π, hertil bruger jeg tilnærmelsen $3,14$.

Først udregner jeg $b = T_3 f(\frac{1}{2})$:

$$T_3 f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} * (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} * \frac{1}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{48} = \frac{50}{96} = \frac{25}{48}.$$

Siden vi ved at $arcsin(x)$ er den inverse til $sin(x)$ der må der gælde at $sin(\pi/6) = \frac{1}{2}$ og derfor giver $arcsin(1/2) = \pi/6$. Ganger vi $\pi/6$ med 6 får vi π. I vores tilfælde har vi at gøre med et Taylor polynomium derfor vil $6b$ være en approksimation til π. Bruger vi 3.14 som en tilnærmelse til π vil afvigelsen være:

$$|6\frac{25}{48} - 3.14| \approx 0.015$$

(c)

Vi ved at alle de afledede er voksende på intervallet $[0, \frac{1}{2}]$. Dette kan vi bruge til at finde et M således at det opfylder TL Korollar 11.2.2:

$$|R_n f(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} \tag{5}$$

Vi ved at for konstanten M der gælder følgende:

$$|f^{(n+1)}(t)| \leq M$$

for alle t mellem a og x. Vælger vi $t = 1/2$, da alle de afledede af $arcsin(x)$ er voksende i intervallet i $[0, \frac{1}{2}]$ derfor må maks være når $x = \frac{1}{2}$, der får vi følgende udtryk vi kan bruge som en øvre grænse M:

$$M = f^{(n+1)}(\frac{1}{2}) = \frac{112\sqrt{3}\sqrt{4}}{27}$$

Indsætter vi dette som M i (5) og vores udviklingspunkt $a = 0$ og $x = 1/2$.

$$|R_n f(1/2)| \leq \frac{\frac{112\sqrt{3}\sqrt{4}}{27}}{4!}|1/2 - 0|^4 = \frac{7\sqrt{3}}{324}$$

For at få den maksimale afvigelse af tilnærmelsen til π skal vi huske at gange med 6 til sidst:

$$\frac{7\sqrt{3}}{324} * 6 = \frac{7\sqrt{3}}{54}$$

Her ses mine udregninger fra Maple:

```
> f:=(x)->arcsin(x);
  'diff(f(x),x$4)' = diff(f(x),x$4);
  f4(1/2);
  f4:=(x)->15*x^3/(-x^2 + 1)^(7/2) + 9*x/(-x^2 + 1)^(5/2);
  '(f4(1/2)/4!)*((1/2)^4)' = simplify((f4(1/2)/4!)*((1/2)^4));
  6*(7*sqrt(3))/324;
```

$$f := x \mapsto \arcsin(x)$$

$$\frac{d^4}{dx^4} f(x) = \frac{15\,x^3}{\left(-x^2+1\right)^{7/2}} + \frac{9\,x}{\left(-x^2+1\right)^{5/2}}$$

$$\frac{112\sqrt{3}\sqrt{4}}{27}$$

$$f4 := x \mapsto \frac{15\cdot x^3}{\left(-x^2+1\right)^{7/2}} + \frac{9\cdot x}{\left(-x^2+1\right)^{5/2}}$$

$$\frac{f4\left(\frac{1}{2}\right)}{16\,4!} = \frac{7\sqrt{3}}{324}$$

$$\frac{7\sqrt{3}}{54}$$

(d)

Til denne opgave skal jeg vha. af maple udregne opgaverne a-c med orden 100 for Taylorpolynomierne. I den første opgave fik jeg følgende resultat efter at have brugt Mtaylor kommandoen med udviklingspunktet $a = 0$:

```
> mtaylor(arcsin(x),x=0,101);
```

$$x+\frac{1}{6}x^{3}+\frac{3}{40}x^{5}+\frac{5}{112}x^{7}+\frac{35}{1152}x^{9}+\frac{63}{2816}x^{11}+\frac{231}{13312}x^{13}+\frac{143}{10240}x^{15}+\frac{6435}{557056}x^{17}+\frac{12155}{1245184}x^{19}+\frac{46189}{5505024}x^{21}+\frac{88179}{12058624}x^{23}+\frac{676039}{104857600}x^{25}+\frac{1300075}{226492416}x^{27}+\frac{5014575}{973078528}x^{29}$$
$$+\frac{9694845}{2080374784}x^{31}+\frac{100180065}{23622320128}x^{33}+\frac{116680311}{30064771072}x^{35}+\frac{2268783825}{635655159808}x^{37}+\frac{1472719325}{446676598784}x^{39}+\frac{34461632205}{11269994184704}x^{41}+\frac{67282234305}{23639499997184}x^{43}+\frac{17534158031}{6597069766656}x^{45}+\frac{514589420475}{206708186021888}x^{47}$$
$$+\frac{8061900920775}{3448068464705536}x^{49}+\frac{5267108601573}{2392537302040576}x^{51}+\frac{61989816618513}{29836347531329536}x^{53}+\frac{121683714103007}{61924494876344320}x^{55}+\frac{956086325095055}{513410357520236544}x^{57}+\frac{1879204156221315}{1062849512059437056}x^{59}+\frac{7391536347803839}{4395513236313604096}x^{61}$$
$$+\frac{2077805148460987}{1297036692682702848}x^{63}+\frac{916312070471295267}{599519182395560427520}x^{65}+\frac{1804857108504066435}{1235931852938539958272}x^{67}+\frac{2371086789603381395}{1697100454781278748672}x^{69}+\frac{14023284727082855679}{10477750633867025317888}x^{71}+\frac{11062813506920919480 1}{8618318831237102514995 2}x^{73}$$
$$+\frac{218266320541953276229}{177088743107611695513600}x^{75}+\frac{1230825115838082384 75}{1038920626231321947013 12}x^{77}+\frac{1701063429324939500975}{1492267808586807887527936}x^{79}+\frac{2687680218333404411540 5}{2448074784719624078780006 4}x^{81}+\frac{5309807260609896520360 5}{5017042151400711075030630 4}x^{83}$$
$$+\frac{4197276215529727725618 3}{4110347786689739194000998 4}x^{85}+\frac{1382823559379949056889 75}{1402353950752969842659164 16}x^{87}+\frac{3281063172710606398620225}{3443020734262463889563189248}x^{89}+\frac{9270305472102983158006 35}{1005826281919371473355538432}x^{91}+\frac{8558238530042898944420355}{959403530446169713046821273 6}x^{93}$$
$$+\frac{1016063212715731406592884 7}{1176043037321111261154168012 8}x^{95}+\frac{1608766753466574727105400775}{19212829409709101866434407956 48}x^{97}+\frac{3538557258191785680934781 75}{4357548938284538567644917268 48}x^{99} \qquad (2)$$

I opgave (b) begrænsede jeg decimalerne til 13, hvilket gav følgende afvigelse fra tilnærmelsen 3.14 til π:

$$|6 * T_{100}f(1/2) - 3.14| = 0.001592653590$$

Her ses resultatet i Maple. Her har jeg brugt kommandoen "subs"til at indsætte (1/2) i Taylor polynomiet og "evalf"til at skrive det på decimalform:

```
> Digits:=13;
  evalf(6*subs(x=(1/2),mtaylor(arcsin(x),x=0,101)))-3.14
```

$$Digits := 13$$
$$0.001592653590$$

I opgave c valgte jeg at bruge 8 decimaler. Hvilket gav følgende resultatet for den maksimale afvigelse for tilnærmelsen 3.14 til π

$$1.3146050 \times 10^{-190}$$

Udregninerne i Maple ser således ud, her har jeg igen brugt "subs"til at indsætte $x = 1/2$ og "evalf"til at skrive det i decimaler. Lig mærke til at jeg udregner den 101 differentierede, da man skal finde den $n + 1$ differentierede til at udregne en øvre grænse M (4):

```
> Digits:=8;
  '6*((subs(x=(1/2),mtaylor(arcsin(x),x=0,102)))/(101!))*((1/2)-0)^101' = evalf(6*((subs(x=(1/2),mtaylor(arcsin(x),x=0,102)))/(101!))*((1/2)-0)^101)
```

$$Digits := 8$$

$$\frac{3\, subs\left(x = \frac{1}{2}, mtaylor(\arcsin(x), x = 0, 102)\right)}{1267650600228229401496703205376\ 101!} = 1.3146050 \times 10^{-190}$$