MatIntroMatNat
OPGAVEFORSIDE

AFLEVERINGSOPGAVE# 6

DATO(dd-mm-åå): 8/11/2022

Klasse# 12 **Skemagruppe (A eller C):** A

Studieretning: Datalogi

Navn (inkl. mellemnavne):

Samuel Bremerskov Cadell

KU-brugernavn: bdq178

Hvis mapledelen er udfærdiget i samarbejde med andre (max. 2 andre) angives deres navne og KU-brugernavn her:

2. januar 2023

Opgave 1

I denne opgave skal jeg benytte Maple til at finde alle de stationære punkter til følgende funktion:

$$f(x,y) = x(7x^2 + 5x + cos(y)) \tag{1}$$

Til at gørre dette sætter jeg de partielt afledede lig med nul og finder løsningerne, hvilket svarer til de stationære punkter. Efter at have gjort dette i Maple får jeg følgende stationære punkter:

$$\left\{x=0, y=\frac{\pi}{2}\right\}^{(1)}, \left\{x=-\frac{1}{7}, y=0\right\}^{(2)}, \left\{x=-\frac{1}{3}, y=0\right\}^{(3)}, \left\{x=-5/21 \pm \sqrt{46}/21, y=\pi\right\}^{(4)}$$

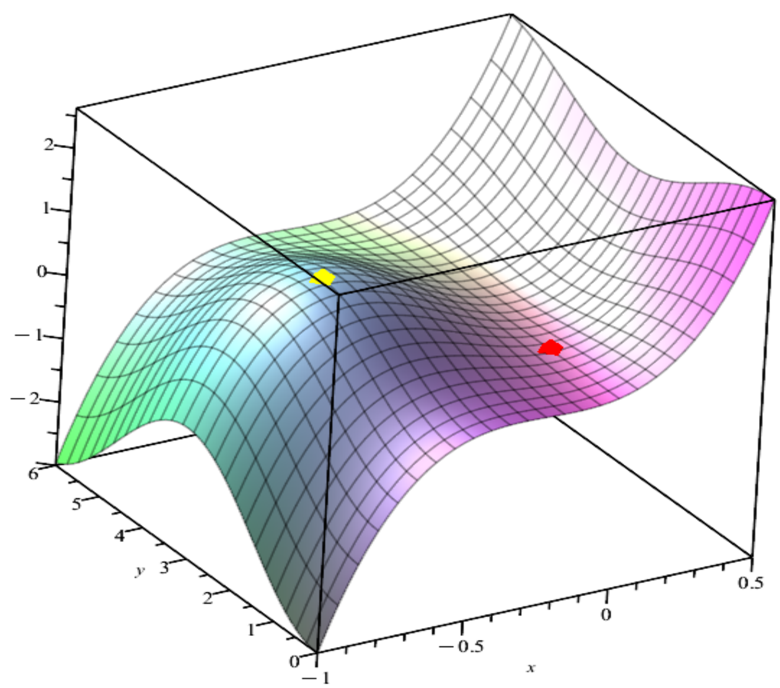
Bruger vi ABC-kriteriet på de førnævnte punkter kan vi udregne hvilken type af punkter de er:

$$\begin{aligned}
(1) = -\sin\left(\frac{\text{pi}}{2}\right)^2 = -1 \text{ Saddelpunkt da ABC} < 0 \\
(2) = \frac{4}{7} \text{ Minimum da A} > 0 \\
(3) = -\frac{4}{3} \text{ Saddelpunkt da ABC} < 0 \\
(4) = 1.15127143 \text{ Minimum da A} > 0 \\
(5) = 7.610633324 \text{ Maksimum da A} < 0
\end{aligned}$$

Nedenunder ses koden i Maple der blev brugt til at finde de stationære punkter og vurdere hvilken type af punkter de var vha. af ABC-kriteriet:

```
f:=(x,y)->x*(7*x^2+5*x+cos(y));
solve({diff(f(x,y),x)=0,diff(f(x,y),y)=0},{x,y});
allvalues(RootOf(21*_Z^2 + 10*_Z - 1));
fxx:=diff(diff(f(x,y),x),x);
fyy:=diff(diff(f(x,y),y),y);
fxy:=diff(diff(f(x,y),x),y);
MaxMinSaddle:=(x,y)->(42*x + 10)*(-x*cos(y))-(-sin(y))^2;
A:=(x,y)->42*x+10;
MaxMinSaddle(0,pi/2);
MaxMinSaddle(-1/7,0);
A(-1/7,0);
MaxMinSaddle(-1/3,0);
MaxMinSaddle((-5/21)+sqrt(46)/21,pi);
A((-5/21)+sqrt(46)/21,pi);
MaxMinSaddle((-5/21)-sqrt(46)/21,pi);
A((-5/21)-sqrt(46)/21,pi);
```

Nedenunder er grafen for et af saddelpunkterne og et af de lokale minimumspunkter på grafen for $f(x,y)$:



Saddelpunkt er det røde punkt mens maksimum er det gule punkt

Herunder ses maple-koden der blev brugt til at generere grafen:

```
with(plots):
SaddlePoint:=pointplot3d([0,Pi/2,f(0,Pi/2)],symbolsize=30,colour=red):
MaxPoint:=pointplot3d([(-5/21)-sqrt(46)/21,Pi,f((-5/21)-sqrt(46)/21,Pi)],symbolsize=30,colour=yellow):
display({SaddlePoint,MaxPoint,plot3d(f(x,y),x=-1..0.5,y=0..6)},caption="Saddelpunktet er det røde punkt mens maksimum er det gule punkt");
```

Opgave 2

I denne opgave får jeg givet en delmængde D der betegner den halve enhedscirkel:

$$D = (x, y) \in \{R^2 | x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq x\}$$

og skal betragte følgende funktion:

$$f(x, y) = xy^2 - x^2 \tag{2}$$

Denne har en største og mindsteværdi, da den er defineret på et lukket og begrænset interval, nemlig højre halvdel af enhedscirklen, og så består (2) af kontinuerte udtryk. (2) kan deles op i tre dele nemlig, x, y^2 og $-x^2$. Siden x og y^2 begge er kontinuerte fordi de er polynomier så vil xy^2 også være det. Ligeledes er $-x^2$ et polynomium og dermed kontinuert og derfor vil $xy^2 - x^2$ være et kontinuert udtryk der er definieret på et lukket og begrænset interval og derfor have en største- og mindsteværdi, på grund af ekstremalsværdisætnignen.

Til at finde disse værdier kan vi starte med finde de partielt afledede og sætte dem lig med nul. De værdier af x og y der er løsningerne til dette vil væres vores stationære punkter som vi skal tjekke for:

$$\frac{\partial f}{\partial x}[xy^2 - x^2] = y^2 - 2x$$

Nu finder jeg den partielt afledede med hensyn til y:

$$\frac{\partial f}{\partial y}[xy^2 - x^2] = 2xy$$

Jeg skal altså finde løsningerne for x og y der opfylder betingelsen $x^2 + y^2 \leq 1$ og $0 \leq x$. De eneste to værdier der opfylder dette er $(0, 0)$ hvilket ligger på randen. Derfor undersøger jeg nu randen for ekstremals punkter, da de partielt afledede af $xy^2 - x^2$ kun kan sige noget om det indre af (2).

Bruger vi Lagrange's multiplikationsmetode og antager at den par. afledede med hensyn til hhv. x og y er parallelle med den par. afledede af randen $x^2 + y^2 = 1$ med hensyn til hhv. x og y der gælder der at: $y^2 - 2x = \lambda 2x$ og $2xy = \lambda 2y$. Dividere vi med 2y på begge sider i $2xy = \lambda 2y \Longrightarrow x = \lambda$. Dette udtryk for x kan vi sætte ind i $y^2 - 2x = \lambda 2x$ hvilket giver $y^2 - 2x = 2x^2 \longrightarrow y^2 = 2x^2 + 2x$. Dette udtryk for y^2 kan vi nu sætte ind i betingelsen $x^2 + (2x^2 + 2x) = 1 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 1 = 0$. Løsser vi denne andengradsligning får vi $x = 1/3$ da vi har betingelsen $0 \leq x$. Sætter vi dette ind på x's plads ser vi at y er en dobbeltrod $\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Isolerer vi for y i $2xy + 2\lambda y = 0$ i stedet for, der får vi $y = 0$, indsætter vi dette i betingelsen får vi $x^2 + 0^2 - 1 = 0 \longrightarrow x = 1$. Husk vi kan kun vælge positive x-værdier. Vi har altså nu følgende punkter vi skal indsætte i funktionen for at se om de er største eller mindste værdier:

$$(\frac{1}{3}, \pm\frac{2\sqrt{2}}{3})$$
$$(1, 0)$$

Dette giver følgende værdier for $f(x, y)$:

$$f(\frac{1}{3}, +\frac{2\sqrt{2}}{3}) = \frac{5}{27}$$
$$f(\frac{1}{3}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}) = \frac{5}{27}$$
$$f(1, 0) = -1$$

Altså er største værdien $\frac{5}{27}$ i punktet $(\frac{1}{3}, \pm\frac{2\sqrt{2}}{3})$ og mindste værdien -1 i punktet (1,0)

Opgave 3

I denne opgave skal jeg optimere en funktion med en given betingelse. Jeg ved at summen af længden ℓ og tre en halv gange diameteren d maksimalt må være 84cm og ud fra dette skal jeg finde den maksimale volume af den cylinderformede rulle. Dette kan gøres ved at maksimere funktionen $V(\ell, d)$ der svarer til volumen af rullen på en lukket og begrænset definitionsmængde givet en længde ℓ og diameter d. Denne definitionsmængde vil være lukket da vi ikke kan bruge alle tal i $\mathbf{R}^2$ som værdier for ℓ og d, men er begrænset af førnævnte betingelse. Dette gør det også muligt at finde et maksimum for funktionen, fordi den er defineret på en lukket og begrænset definitionsmængde, ifølge ekstremalværdisætningen.

Vi kan starte med at opskrive volumen af cylinderen som en funktion af længden ℓ og diameteren d:

$$V(\ell, d) = \pi(d/2)^2 * \ell \tag{3}$$

Betingelsen vi skal opfylde er følgende:

$$\ell + 3.5d \leq 84 \tag{4}$$

Vi starter med at løse dette problem ved at isolere en af variablerne og derefter gøre brug af Lagranges metode.

Vi kan starte med at isolere for ℓ i (4):

$$\ell + 3.5d \leq 84 \longrightarrow \ell \leq 84 - 3.5d$$

Dette udtryk kan vi nu substituere ind i volumen for cylinderen og reducere funktionen til en variabel:

$$V(d) = \pi(\frac{d}{2})^2 * (84 - 3.5d) \tag{5}$$

Differentiere vi denne funktion og sætter den differentierede lig med nul får vi stationære punkter vi skal tjekke for:

$$\frac{\partial}{\partial d}[\pi(\frac{d}{2})^2 * (84 - 3.5d)] = \frac{\partial}{\partial d}[-\frac{7\pi \cdot (x-24)\,x^2}{8}]$$
$$\frac{7\pi(\frac{\partial}{\partial d}[x-24]x^2 + (x-24) * \frac{\partial}{\partial d}[x^2])}{8}$$
$$\frac{7\pi * ((1+0)x^2 + (x-24) * 2x)}{8} =$$
$$-\frac{21\pi \cdot (x-16)\,x}{8}$$

For at tælleren skal give nul skal bare en af faktorene give nul, derfor kan x enten være 0 eller 16. Sætter vi de to værdier ind på (5) får vi:

$$V(0) = \pi(\frac{d}{2})^2 * (84 - 3.5 * 0) = 0$$

$$V(16) = \pi(\frac{d}{2})^2 * (84 - 3.5 * 16) = 1792\pi \approx 5629.734$$

Vores maksimum er ca 5629.734 hvilket funktionen antager når $d = 16$

Nu skal vi bruge Lagrange's metode. Til at starte med omskriver jeg først betingelsen og bagefter differentierer jeg hhv. betingelsen og funktionen for volumen (3):

$$\ell + 3.5d - 84 = 0$$

Nu differentierer jeg den omskrevne betingelse hensyn til hhv. ℓ og d:

$$\frac{\partial}{\partial \ell}[\ell + 3.5d - 84] = 1$$

Nu med hensyn til d:

$$\frac{\partial}{\partial d}[\ell + 3.5d - 84] = 3.5$$

Nu differentierer jeg (3) først med hensyn til ℓ:

$$\frac{\partial}{\partial \ell}[\pi(d/2)^2 * \ell] = \pi(d/2)^2$$

Nu med hensyn til d:

$$\frac{\partial}{\partial d}[\pi(d/2)^2 * \ell] = \frac{\pi \ell d}{2}$$

For at gå videre med Lagranges metode antager vi ligesom i opgave 1 at de par. afledede af funktionen er parallelle med de par. afledede af betingelsen ganget en koefficient λ:

$$\frac{\pi d^2}{4} + 1\lambda = 0$$

$$\frac{\pi \ell d}{2} + 3.5\lambda = 0$$

$$\ell + 3.5d - 84 = 0$$

Herfra kan man isolere λ i den første ligning $\frac{\pi d^2}{4} + \lambda = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{\pi d^2}{4}$. Dette kan nu indsættes for λ i den anden ligning: $\frac{\pi \ell d}{2} + 3.5\lambda = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi \ell d}{2} + 3.5(-\frac{\pi d^2}{4}) = 0$. Isolere vi ℓ får vi $1.75d$ hvilket vi kan indsætte i betingelsen for at finde en løsning til d: $\ell + 3.5d - 84 = 0 \Leftrightarrow 1.75d + 3.5d - 84 = 0 \Leftrightarrow 5.25d - 84 = 0$. Isolerer vi for d ved at trække 84 over på den anden side af lighedstegnet og dividere med 5.25 får vi $d = 16$. Indsætter vi $d = 16$ i (5) får vi $v(16) = \pi * \frac{d}{2}^2 * (84 - 3.5 * 16) = 1792\pi \approx 56929.73$. Hvilket også er det samme fra før da vi brugte den anden metode.
Maksimum er ca 56929.73 hvilket funktionen antager når $d = 16$