MatIntroMatNat
OPGAVEFORSIDE

AFLEVERINGSOPGAVE# 5

DATO(dd-mm-åå): 1/11/2022

Klasse# 12 **Skemagruppe (A eller C):** C

Studieretning: Datalogi

Navn (inkl. mellemnavne):

Samuel Bremerskov Cadell

KU-brugernavn: bdq178

Hvis mapledelen er udfærdiget i samarbejde med andre (max. 2 andre) angives deres navne og KU-brugernavn her:

2. januar 2023

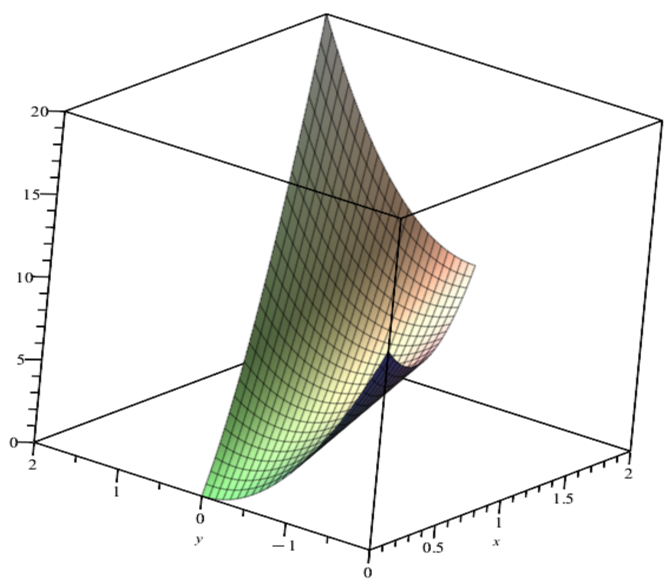
Opgave 1

Vi er givet følgende funktion:

$$f(x,y) = 4x + 3y^2\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | 0 \leq x \leq 2, x-2 \leq y \leq x\} \tag{1}$$

Da minimum af x er 0 og maksimum er 2 må grænserne for y være $-2 \leq y \leq 2$. Da (1) er defineret på et lukket og begrænset interval kan vi ud fra ekstremalsværdiesætningen sige at den derfor må have en største- og mindsteværdi.

Nedenfor har jeg tegnet grafen for (1) i Maple: Ud fra denne kan man



aflæse at største- og mindsteværdi er f(x,y) = 20 i punktet (2,2,20) og f(x,y) = 0 i (0,0,0) henholdsvis. Nedenunder ses Maple koden der blev brugt til at generere plottet:

```
with(plots):
f:=4*x+3*y^2;
graf:=plot3d(f(x,y),x=0..2,y=(x-2)..x)
```

Opgave 2

Til begge opgaver skal vi finde tangentplanen til grafen i et givent punkt. I opgave c) skal jeg finde tangentplanen til følgende graf i punktet $c = (4, -2)$:

$$h(x, y) = (x + y)e^{x-y^2} \tag{2}$$

Til at gørre dette skal jeg først finde gradienten, dette gør jeg ved at differentiere først efter x og så differentiere y:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}h(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}[x + y] * e^{x-y^2} + (x + y) * \frac{\partial}{\partial x}[e^{x-y^2}] =\\ e^{x-y^2} + (x + y)e^{x-y^2} * (\frac{\partial}{\partial x}[x - y^2]) =\\ (x + y)e^{x-y^2} + e^{x-y^2} =\\ (y + x + 1)e^{x-y^2}\end{aligned}$$

Derefter finder jeg den afledte med hensyn til y:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}h(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}[y + x] * e^{x-y^2} + (x + y) * \frac{\partial}{\partial y}[e^{x-y^2}] =\\ e^{x-y^2} + (y + x)e^{x-y^2} * (\frac{\partial}{\partial y}[x - y^2]) =\\ e^{x-y^2} - 2y * (y + x)e^{x-y^2}\end{aligned}$$

Nu kan vi opskrive gradienten for (2):

$$\begin{aligned}\nabla h(x, y) = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}) =\\ ((y + x + 1)e^{x-y^2}, e^{x-y^2} - 2y * (y + x)e^{x-y^2})\end{aligned}$$

Til at udregne skal vi vha. af følgende formel beregne den affine funktion der svarer til tangentplanen i punktet $c = (4, -2)$

$$h(x) = f(a) + \nabla f(a) * (x - a) \tag{3}$$

Nu udregner jeg hhv. $f(a)$ og $\nabla f(a)$:

$$f(a) = (4 + (-2))e^{4-(-2)^2} = 2e^0 = 2$$

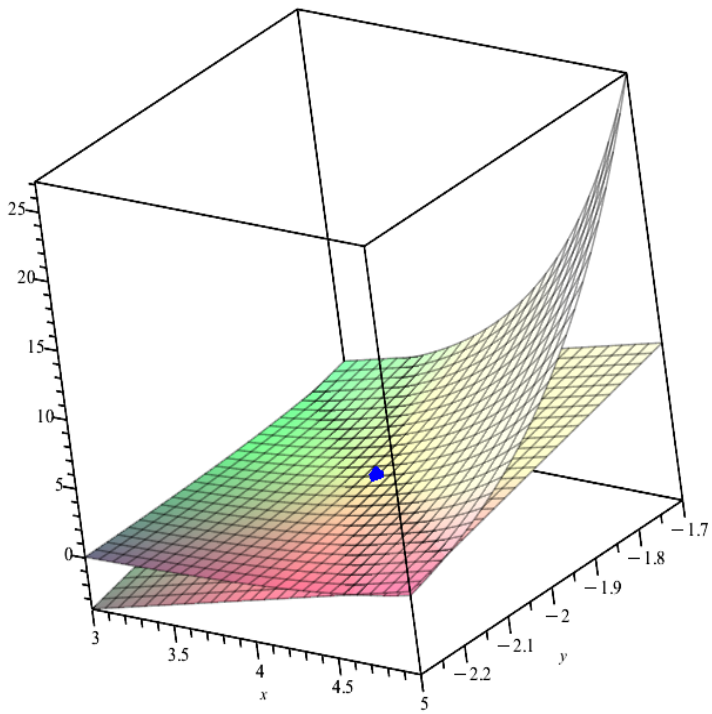
Derefter $\nabla f(x,y)$:

$$\nabla f(x,y) = ((-2+4+1)e^{4-(-2)^2}, e^{4-(-2)^2} - 2(-2)*(-2+4)e^{4-(-2)^2}) = (3e^0, 1+4(2)e^0) = (3,9)$$

Dette indsætter jeg nu i (3) og udregner den affine funktion til tangentplanen:

$$2 + (3,9)*((x,y)-(4,-2)) = 1 + (3,9)*(-4x, 2y) = 2 + 3x - 12 + 9y + 18 = 3x + 9y + 8$$

Nedenunder ses grafen for $h(x,y)$ med tangentplanen i punktet $c = (4,-2)$



Her er den tilsvarende Maple kode:

```
with(plots):
h:=(x,y)->(x+y)*exp(1)^(x-y^2):
htang:=8+3*x+9*y:
c:=pointplot3d([4,-2,h(4,-2)],colour=blue,symbolsize=25):
display([plot3d(h(x,y),x=3..5,y=-2.3..-1.7),plot3d(htang,x=3..5,y=-2.3..-1.7),c]);
```

Nu gør jeg det samme med opgave d). Jeg har følgende funktion og skal finde tangentplanen i punktet $d = (0, e)$:

$$\frac{x + ln(y)}{\sqrt{1 + x^2}}$$

Jeg udregner gradienten ligesom før, først med hensyn til x og bagefter y. Til at differentiere med hensyn til x trækker jeg først koefficienten $ln(y)$ udenfor og bruger kvotientreglen til at differentiere:

$$\frac{\partial}{\partial x} = ln(y) * \frac{\partial}{\partial x}[\frac{x}{\sqrt{(x^2 + 2)}}] =$$

$$ln(y) * \frac{\frac{\partial}{\partial x}[x] * \sqrt{x^2 + 1} - x * \frac{\partial}{\partial x}[\sqrt{x^2 + 1}]}{x^2 + 1} =$$

$$ln(y) * \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \frac{\frac{\partial}{\partial x}[x^2 + 1] * x}{2\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1} =$$

$$\frac{ln(y)(\sqrt{x^2 + 1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}})}{x^2 + 1} =$$

$$\frac{ln(y)}{(x^2 + 1)^{3/2}}$$

Det samme gør jeg nu for y.

$$\frac{\partial}{\partial y}[\frac{xln(y)}{\sqrt{x^2 + 1}}] =$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} * \frac{\partial}{\partial y}[ln(y)] = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}y}$$

Nu har jeg udtrykket for gradienten, og herefter skal jeg indsætte mit punkt $d = (0, e)$ i hhv. $f(d)$ og $\nabla f(d)$ og udregne:

$$f(d) = f(0, e) = \frac{0ln(e)}{\sqrt{1 + x^2}} = \frac{0}{1} = 0$$

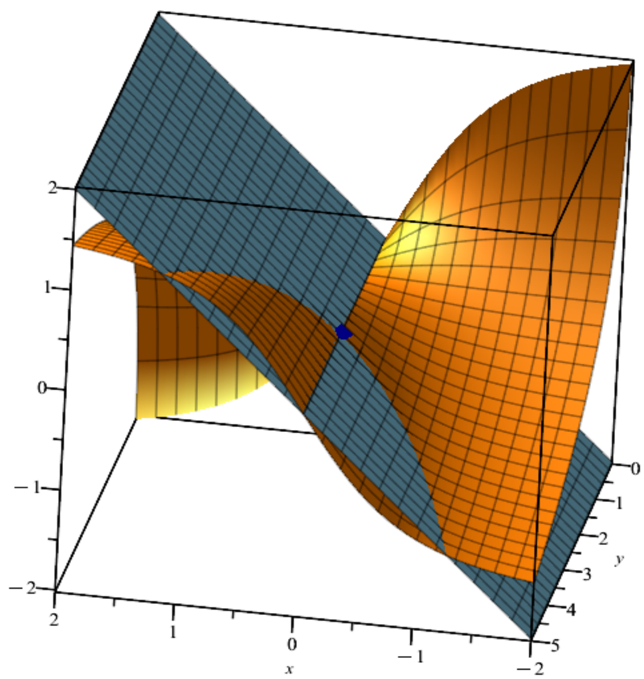
Nu for $\nabla f(d)$:

$$\nabla f(d) = \nabla f(0, e) = (\frac{ln(e)}{(0^2 + 1)^{3/2}}, \frac{0}{\sqrt{0^2 + 1}e}) = (1, 0)$$

Dette indsætter jeg nu i (3) og udregner den affine funktion der svarer til tangentplanen:

$$h(x) = f(a) + \nabla f(a) * (x - a) = 0 + (1, 0) * ((x, y) - (0, e)) = x$$

Nedenunder ses grafen for $k(x, y)$ med tangentplanen i punktet $d = (0, e)$:



Her er den tilsvarende Maple kode:

```
k:=(x,y)->(x*ln(y))/sqrt(x^2+1);
ktang:=x;
d:=pointplot3d([0,exp(1),k(0,exp(1))],colour=blue,symbolsize=25):
display([plot3d(k(x,y),x=-2..2,y=0..5,colour=coral),plot3d(ktang,x=-2..2,y=0..5,colour=skyblue),d])
```

Opgave 3

a)

Jeg skal her komme med et eksempel på en funktion der er homogen af grad 3. Her kunne man passe vælge funktionen:

$$f(x, y) = x^3 + y^3 \tag{4}$$

At dette er en homogen funktion af grad 3 kan vi vise ved at sætte tx og ty på hhv. x og y's plads og omskrive:

$$f(tx, ty) = (tx)^3 + (ty)^3 = t^3x^3 + t^3y^3 = t^3(x^3 + y^3) = t^3 f(x, y) \tag{5}$$

Nu har vi skrevet den på følgende form der skal gælde for at en funktion kan være homogen af en grad k:

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y) \tag{6}$$

b)

Antager vi at de førsteafledte findes, altså at $f(x, y)$ er en C^1 funktion skal vi nu vise at den opfylder Eulers ligning:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = k * f(x, y) \tag{7}$$

Dette kan vi vise ved at bruge kædereglen til at differentiere venstresiden i (6):

$$\frac{\partial f(tx, ty)}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial tx}(tx, ty)\frac{\partial tx}{t} + \frac{\partial f}{ty}(tx, ty)\frac{\partial ty}{\partial t} = x\frac{\partial f}{\partial tx}(tx, ty) + y\frac{\partial f}{ty}(tx, ty)$$

Siden vi ved fra definitionen af homogene funktioner at den gælder for alle $t > 0$ der kan vi i dette tilfælde vælge $t = 1$ hvilket giver følgende resultat der beviser at den homogene funktion f opfylder Eulers ligning (8):

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{y}(x, y)$$

Til at vise at højresiden i (7) også gælder kan vi i stedet for bruge højresiden i (6):

$$\frac{\partial f}{\partial t}[t^k f(x,y)] = k * t^{k-1} f(x,y)$$

Her vælger vi igen $t = 1$, hvilket giver højresiden i (8):

$$k * 1^{k-1} f(x,y) = k * f(x,y)$$

Og dermed har vi bevist af f opfylder Eulers ligning.

c)

I denne opgave skal jeg vise at mit resultat i a) opfylder Eulers ligning, jeg indsætter derfor i venstresiden i Eulers ligning (8) og udregner:

$$\begin{aligned} x\frac{\partial(x^3+y^3)}{\partial x} + y\frac{\partial(x^3+y^3)}{\partial y} = \\ x * 3x^2 + y * 3y^2 = 3x^3 + 3x^3 = 3(x^3+y^3) = \\ 3 * f(x,y) \end{aligned}$$

Nu har vi altså skrevet den op på formen i højresiden i (8) og dermed vist at den opfylder Eulers ligning.

d)

Jeg skal give en fortolkning af de to tal C og D i opgaveteksten.
C beskriver hvor meget BMI vokser med, med hensyn til massen i kilo. D beskriver hvor meget BMI vokser med, med hensyn til højden i centimeter og IKKE meter, da vi ganger højden nede i nævneren med 100.
Her ganges der med en negativ koefficient da funktionen af BMI falder i takt med at højden stiger, men siden ens BMI ikke kan være negativ ganges der derfor med et negativt talt for at udligne til et positivt tal.

d)

Vi får givet BMI-indekset: Jeg skal vise at følgende sammenhæng gælder når vi er givet vægten m, højden h og BMI-indekset 22:

$$m * C + 22 = 100 * h * D \tag{8}$$

Udregner vi de differentierede og indsætter sammen med $22 = b$, da b er BMI-indekset, får vi følgende resultat:

$$m * \frac{1}{h^2} + b = 100 * h * \frac{-1}{100} \frac{-2m}{h^2}$$
$$\frac{m}{h^2} + b = h * \frac{2m}{h^3}$$
$$\frac{m}{h^2} + b = \frac{2m}{h^2}$$

Isolerer vi b får vi følgende:

$$b = \frac{2m}{h^2} - \frac{m}{h^2}$$
$$b = \frac{m}{h^2}$$

Nu står der altså at BMI-indekset er lig med $\frac{m}{h^2}$ hvilket er definitionen for BMI-indekset, og dermed har vi bevist sammenhængen (8)