1 Lista 1

1.0 [☒] Definições, Proposições, Lemas e Observações

Definição 1 (Krueger, 2017). Uma alocação é uma sequência $(c^1,\ c^2) = (c_t^1,\ c_t^2)_{t=0}^{\infty}$ de consumo em cada período para cada indivíduo.

Definição 2 (Krueger, 2017). Um Equilíbrio (Competitivo) de Arrow-Debreu é um par

$$\{\hat{p}_t\}_{t=0}^{\infty} \qquad \text{e} \qquad \left(\left\{\hat{c}_t^i\right\}_{t=0}^{\infty}\right)_{i=1,2}$$

tal que

(1) Dado $\{\hat{p}_t\}_{t=0}^{\infty}$, para cada $i \in \{1, 2\}$, a sequência $\left\{\hat{c}_t^i\right\}_{t=0}^{\infty}$ resolve

$$\max_{\left\{\hat{c}_t^i\right\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln\left(c_t^i\right) \tag{2}$$

$$s.a. \quad \sum_{t=0}^{\infty} \hat{p}^t c_t^i \ \leq\ \sum_{t=0}^{\infty} \hat{p}^t e_t^i \tag{3}$$

$$c_t^i \geq 0 \qquad \forall t \in \mathbb{N} \tag{4}$$

(2) Mercados em equilíbrio em cada $t \in \mathbb{N}$

$$\hat{c}_t^1 + \hat{c}_t^2 = e_t^1 + e_t^2, \quad \forall t \in \mathbb{N} \tag{5}$$

Definição 3 (Krueger, 2017). Uma alocação $(c^1, c^2) = (c_t^1, c_t^2)_{t=0}^{\infty}$ é factível se

$$\begin{aligned} c_t^i &\geq 0 && \forall t \in \mathbb{N},\ \forall i \in \{1, 2\} \\ c_t^1 + c_t^2 &\leq e_t^1 + e_t^2 && \forall t \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Definição 4 (Krueger, 2017). Uma alocação $\{(c_t^1, c_t^2)\}_{t=0}^{\infty}$ é Pareto Eficiente se ela é factível e <u>não</u> existe outra alocação $\left\{\left(\tilde{c}_t^1, \tilde{c}_t^2\right)\right\}_{t=0}^{\infty}$ tal que

$$\begin{aligned} u\left(\tilde{c}^i\right) &\geq u\left(c^i\right) && \forall i \in \{1, 2\} \\ u\left(\tilde{c}^i\right) &> u\left(c^i\right) && \text{para algum } i \in \{1, 2\} \end{aligned}$$

Proposição 5 - I Teorema do Bem Social (Krueger, 2017). Seja $\left\{\left(\hat{c}_t^1, \hat{c}_t^2\right)\right\}_{t=0}^{\infty}$ uma alocação de E.C. de Arrow-Debreu. Então $\left\{\left(\hat{c}_t^1, \hat{c}_t^2\right)\right\}_{t=0}^{\infty}$ é uma alocação eficiente de Pareto.

Método de Negishi (1960) para Computar Equilíbrios. O Problema do Planejador é

$$\max_{\left\{\left(c_t^1,c_t^2\right)\right\}_{t=0}^{\infty}} \left\{\alpha^1 u\left(c^1\right)+\alpha^2 u\left(c^2\right)\right\} \tag{6}$$

$$s.a. \begin{cases} c_t^i \geq 0 & \forall t \in \mathbb{N},\ \forall i \in \{1,2\} \\ c_t^1 + c_t^2 \leq e_t^1 + e_t^2 & \forall t \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\iff \max_{\left\{\left(c_t^1,c_t^2\right)\right\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{\alpha^1 \ln\left(c_t^1\right)+\alpha^2 \ln\left(c_t^2\right)\right\}$$

$$s.a. \begin{cases} c_t^i \geq 0 & \forall t \in \mathbb{N},\ \forall i \in \{1,2\} \\ c_t^1 + c_t^2 \leq 2 & \forall t \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Proposição 6 (Krueger, 2017). Toda alocação $\{(c_t^1, c_t^2)\}_{t=0}^{\infty}$ que resolve o problema do Planner (6) para algum vetor de pesos de Pareto $\alpha = (\alpha^1, \alpha^2) \in \mathbb{R}_+^2$ é Pareto Eficiente.

Proposição 7 (Krueger, 2017). Inversamente, alocação $\{(c_t^1, c_t^2)\}_{t=0}^{\infty}$ eficiente de Pareto é solução de (6) para algum vetor de pesos de Pareto $\alpha = (\alpha^1, \alpha^2) \in \mathbb{R}_+^2$, $\alpha \neq 0$.

1.1 [☒]

Considere uma economia com o tempo discreto e infinito, i.e., $t = 0, 1, 2, \ldots$. Nesta economia vivem duas pessoas de vida eterna indexadas por $i = 1, 2$. Existe um único bem, que é perecível, e cada pessoa tem uma dotação $e_t^i = 1$ para todo t deste bem. As preferências das pessoas sobre um fluxo de consumo, $\{c_t^i\}_{t=0}^{\infty}$, são dadas por

$$u^i\left(\{c_t^i\}_{t=0}^{\infty}\right) = \sum_{t=0}^{\infty} {\beta_i}^t \ln c_t^i,$$

em que $0 < \beta_1 < \beta_2 < 1$. Toda informação desta economia é pública e não há nenhum risco. Em $t = 0$, antes de receber a dotação, as pessoas se encontram em um mercado central e transacionam unidades do bem de consumo para todos os períodos. Denote por p_t o preço de uma unidade do bem no período t. Em todo $t \geq 1$ as pessoas voltam ao mercado central para executar as trocas negociadas em $t = 0$. Assuma que os acordos feitos no início dos tempos são sempre honrados pelas pessoas.

Estratégia da Prova:

- Principais diferenças em relação à economia do Capítulo 2 de Krueger (2017):
  - Preferências individuais distintas: fatores de desconto temporal β_i^t são distintos para cada $i = 1, 2$, com $\beta_1 < \beta_2$.
  - dotações e_t^i são iguais a 1 para toda pessoa i e todo tempo t.

(a) Defina uma alocação factível para esta economia.

Para uma alocação ser factível requer que o consumo seja não-negativo e satisfaça a restrição de recursos (soma das dotações é maior ou igual à soma dos consumos) para todos os períodos t, como definido por Krueger (2017) em:

Definição 3. Uma alocação $(c^1, c^2) = (c_t^1, c_t^2)_{t=0}^{\infty}$ é factível se

$$\begin{aligned} c_t^i &\geq 0 & \forall t \in \mathbb{N},\ \forall i \in \{1, 2\} \\ c_t^1 + c_t^2 &\leq e_t^1 + e_t^2 & \forall t \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

(b) Defina um equilíbrio competitivo (de Arrow-Debreu) para esta economia.

A partir da Definição 2 (Krueger, 2017), substituiu-se β^t por β_i^t em (2), dado que, neste exercício, as preferências individuais são distintas, com $0 < \beta_1 < \beta_2 < 1$.

Definição 2'. Um Equilíbrio (Competitivo) de Arrow-Debreu (AD) é um par

$$\{\hat{p}_t\}_{t=0}^{\infty} \qquad \text{e} \qquad \left(\{\hat{c}_t^i\}_{t=0}^{\infty}\right)_{i=1,2}$$

tal que

(1) Dado $\{\hat{p}_t\}_{t=0}^{\infty}$, para cada $i \in \{1,2\}$, a sequência $\left\{\hat{c}_t^i\right\}_{t=0}^{\infty}$ resolve

$$\max_{\left\{\hat{c}_t^i\right\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta_i^t \ln\left(c_t^i\right) \tag{2'}$$

$$s.a. \quad \sum_{t=0}^{\infty} \hat{p}^t c_t^i \leq \sum_{t=0}^{\infty} \hat{p}^t e_t^i \tag{3}$$

$$c_t^i \geq 0 \qquad \forall t \in \mathbb{N} \tag{4}$$

(2) Mercados em equilíbrio em cada $t \in \mathbb{N}$

$$\hat{c}_t^1 + \hat{c}_t^2 = e_t^1 + e_t^2, \quad \forall t \in \mathbb{N} \tag{5}$$

(c) Caracterize o equilíbrio competitivo da economia.

Estratégia da Prova:

- Seção 2.2.2 de Krueger (2017) não é muito promissor.
- Seção 2.2.4 de Krueger (2017) - Método de Negishi:
  1. Resolver o problema do planejador para alocações eficientes de Pareto indexadas nos pesos de Pareto $\alpha = (\alpha^1, \alpha^2)$
  2. Usar multiplicadores de Lagrange $\mu_t/2$ para as restrições de recursos no problema do planejador.
  3. Encontrar os pesos de Pareto normalizados tal que as funções de transferência sejam iguais a zero.
  4. Alocações de eficientes de Pareto correspondentes a $\hat{\alpha}$ são alocações de equilíbrio; os preços de equilíbrio são (múltiplos de) multiplicadores de Lagrange do problema do planejador.

Seja o par $\{\hat{p}_t\}_{t=0}^{\infty}$ e $\{\hat{c}_t^i\}_{t=0}^{\infty}$, para $i = 1, 2$, Equilíbrio Competitivo de Arrow-Debreu (AD), então resolvendo o problema do consumidor temos:

$$\mathscr{L}\left(\left\{\hat{c}_t^i\right\}_{t=0}^{\infty}, \lambda_i\right) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta_i^t \ln\left(c_t^i\right) \overset{(*)}{-} \lambda_i \left(\sum_{t=0}^{\infty} p_t\left(c_t^i - e_t^i\right)\right)$$

Note que, em $(*)$, o sinal é negativo, pois $p_t\left(c_t^i - e_t^i\right) \leq 0$. Observe também que λ_i é o multiplicador de Lagrange para a restrição orçamentária.

CPO's para c_t^i:

$$0 = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial c_t^i} = \beta_i^t . \frac{1}{c_t^i} - \lambda_i \, p_t \,(1) \iff \lambda_i = \frac{\beta_i^t}{p_t c_t^i}, \; \forall t \in \mathbb{N} \tag{1.1.1}$$

$$0 = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda_i} = \sum_{t=0}^{\infty} p_t\left(c_t^i - e_t^i\right) = 0 \tag{1.1.2}$$

Analogamente, para c^i_{t+1}:

$$0 = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial c^i_t} = \beta_i^{t+1}.\frac{1}{c^i_{t+1}} - \lambda_i \; p_t\,(1) \iff \lambda_i = \frac{\beta_i^{t+1}}{p_{t+1}c^i_{t+1}},\;\forall t \in \mathbb{N} \tag{1.1.3}$$

Igualando λ_i de (1.1.1) e de (1.1.3), temos, para $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \frac{\beta_i^t}{p_t c^i_t} &= \frac{\beta_i^{t+1}}{p_{t+1}c^i_{t+1}} \iff \\ \frac{1}{p_t c^i_t} &= \frac{\beta_i}{p_{t+1}c^i_{t+1}} \iff && \text{(dividindo por } \beta_i^t\text{)} \\ p_{t+1}c^i_{t+1} &= \beta_i p_t c^i_t\;, \quad \forall t \in \mathbb{N} && (1.1.4) \end{aligned}$$

Somando equações (1.1.4) para $i = 1$ e $i = 2$, temos

$$\begin{aligned} p_{t+1}c^1_{t+1} + p_{t+1}c^2_{t+1} &= \beta_1 p_t c^1_t + \beta_2 p_t c^2_t \iff \\ p_{t+1}(c^1_{t+1} + c^2_{t+1}) &= p_t(\beta_1 c^1_t + \beta_2 c^2_t) \iff \\ p_{t+1}(e^1_{t+1} + e^2_{t+1}) &= p_t(\beta_1 c^1_t + \beta_2 c^2_t) \iff && \text{(no equilíbrio } c_t = e_t = 2\text{)} \\ 2p_{t+1} &= p_t(\beta_1 c^1_t + \beta_2 c^2_t) \iff && (1.1.5) \\ 2p_{t+1} &= p_t\left[\beta_1(2 - c^2_t) + \beta_2 c^2_t\right] \iff && (c^1_t = 2 - c^2_t) \\ 2p_{t+1} &= p_t(2\beta_1 - \beta_1 c^2_t + \beta_2 c^2_t) \iff \\ p_{t+1} &= p_t\frac{2\beta_1 + (\beta_2 - \beta_1)c^2_t}{2}\;, \quad \forall t \in \mathbb{N} && (1.1.6) \end{aligned}$$

Por indução matemática, temos

$$p_t = p_0\left(\frac{2\beta_1 + (\beta_2 - \beta_1)c^2_0}{2}\right)^t\;, \quad \forall t \in \mathbb{N}$$

Tomando, sem perda de generalidade, $p_0 = 1$, temos

$$p_t = \left(\frac{2\beta_1 + (\beta_2 - \beta_1)c^2_0}{2}\right)^t\;, \quad \forall t \in \mathbb{N} \tag{1.1.6'}$$

Para encontrar c^2_t, substituímos (1.1.6) em (1.1.4), para $i = 2$:

$$\begin{aligned} \left(p_t\frac{2\beta_1 + (\beta_2 - \beta_1)c^2_t}{2}\right)c^2_{t+1} &= \beta_2 p_t c^2_t \\ \frac{2\beta_1 + (\beta_2 - \beta_1)c^2_t}{2}c^2_{t+1} &= \beta_2 c^2_t \\ c^2_{t+1} &= c^2_t\frac{2\beta_2}{2\beta_1 + (\beta_2 - \beta_1)c^2_t}\;, \quad \forall t \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Por indução matemática, temos

$$c^2_t = c^2_0\left(\frac{2\beta_2}{2\beta_1 + (\beta_2 - \beta_1)c^2_0}\right)^t\;, \quad \forall t \in \mathbb{N}$$

(...)

Pelo método acima, os cálculos serão mais complexos e há resultados com funções implícitas. Usaremos, então, o **Método de Negishi (1960)** em que o Problema do Planejador é:

$$\begin{aligned}
&\max_{\left\{\left(c_t^1, c_t^2\right)\right\}_{t=0}^{\infty}} \left\{\alpha^1 u\left(c^1\right) + \alpha^2 u\left(c^2\right)\right\} \qquad (6)\\
\iff &\max_{\left\{\left(c_t^1, c_t^2\right)\right\}_{t=0}^{\infty}} \alpha^1 \sum_{t=0}^{\infty} \beta_1^t \ln(c_t^1) + \alpha^2 \sum_{t=0}^{\infty} \beta_2^t \ln(c_t^2)\\
&s.a. \begin{cases} c_t^i \geq 0 & \forall t \in \mathbb{N},\ \forall i \in \{1,2\}\\ c_t^1 + c_t^2 \leq e_t^1 + e_t^2 & \forall t \in \mathbb{N}\end{cases}
\end{aligned}$$

Anexando multiplicadores de Lagrange iguais a $\mu_t/2$ para as restrições de recursos, o Lagrangeano é dado por

$$\mathscr{L} = \alpha^1 \sum_{t=0}^{\infty} \beta_1^t \ln(c_t^1) + \alpha^2 \sum_{t=0}^{\infty} \beta_2^t \ln(c_t^2) - \frac{\mu_t}{2}\left(\sum_{t=0}^{\infty}(c_t^1 + c_t^2 - 2)\right)$$

As CPO's são:

$$0 = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial c_t^1} = \frac{\alpha^1 \beta_1^t}{c_t^1} - \frac{\mu_t}{2} \iff \frac{\alpha^1 \beta_1^t}{c_t^1} = \frac{\mu_t}{2} \qquad (1.1.7)$$

$$0 = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial c_t^2} = \frac{\alpha^2 \beta_2^t}{c_t^2} - \frac{\mu_t}{2} \iff \frac{\alpha^2 \beta_2^t}{c_t^2} = \frac{\mu_t}{2} \qquad (1.1.8)$$

Note que μ_t nestas CPO's tem o mesmo papel de p_t nas CPO's de (1.1.1) e (1.1.2), ou seja, é uma medida de escassez (Krueger, 2017, pág. 18). Portanto, há uma conexão próxima entre μ_t e p_t, tal que, no equilíbrio,

$$p_t = \mu_t.$$

Igualando (1.1.7) e (1.1.8), temos

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha^1 \beta_1^t}{c_t^1} &= \frac{\alpha^2 \beta_2^t}{c_t^2} \iff\\
c_t^1 &= \frac{\alpha^1 \beta_1^t c_t^2}{\alpha^2 \beta_2^t} = \frac{\alpha^1}{\alpha^2}\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^t c_t^2 \qquad (1.1.9)
\end{aligned}$$

Substituindo (1.1.9) na restrição de recursos no equilíbrio competitivo, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha^1}{\alpha^2}\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^t c_t^2 + c_t^2 &= 2\\
c_t^2\left(1 + \frac{\alpha^1}{\alpha^2}\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^t\right) &= 2\\
c_t^2(\alpha) &= \frac{2}{1 + \frac{\alpha^1}{\alpha^2}\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^t} \qquad (1.1.10)
\end{aligned}$$

Fazendo o mesmo para c_t^1, obtemos

$$c_t^1(\alpha) = \frac{2}{1 + \frac{\alpha^2}{\alpha^1}\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^t} \qquad (1.1.11)$$

Substituindo (1.1.10) em (1.1.8), segue que

$$\begin{aligned}
\frac{\mu_t}{2} &= \frac{\alpha^2\beta_2^t}{2}\left(1+\frac{\alpha^1}{\alpha^2}\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^t\right) \iff \\
\mu_t &= \alpha^2\beta_2^t + \frac{\alpha^1\alpha^2\beta_2^t}{\alpha^2}\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^t \iff \\
\mu_t &= \alpha^1\beta_1^t + \alpha^2\beta_2^t \qquad (1.1.12)
\end{aligned}$$

As funções de transferência, $t^i(\alpha)$ para $i = 1, 2$, são definidas por

$$t^i(\alpha) = \sum_{t=0}^{\infty}\mu_t\left[c_t^i(\alpha)-1\right] = \sum_{t=0}^{\infty}\mu_t c_t^i(\alpha) - \sum_{t=0}^{\infty}\mu_t \qquad (1.1.13)$$

Note que (1.1.10) e (1.1.11) estão no formato, para $i, j = 1, 2$ com $i \neq j$,

$$c_t^i(\alpha) = \frac{2}{1+\frac{\alpha^j}{\alpha^i}\left(\frac{\beta_j}{\beta_i}\right)^t}.$$

Substituindo a expressão acima e (1.1.12) em (1.1.13), obtemos

$$\begin{aligned}
t^i(\alpha) &= \sum_{t=0}^{\infty}(\alpha^i\beta_i^t+\alpha^j\beta_j^t)\left(\frac{2}{1+\frac{\alpha^j}{\alpha^i}\left(\frac{\beta_j}{\beta_i}\right)^t}\right) - \sum_{t=0}^{\infty}(\alpha^i\beta_i^t+\alpha^j\beta_j^t) \\
&= \sum_{t=0}^{\infty}\frac{2(\alpha^i\beta_i^t+\alpha^j\beta_j^t)}{1+\frac{\alpha^j}{\alpha^i}\left(\frac{\beta_j}{\beta_i}\right)^t} - \sum_{t=0}^{\infty}\alpha^i\beta_i^t - \sum_{t=0}^{\infty}\alpha^j\beta_j^t \\
&= 2\sum_{t=0}^{\infty}\frac{\alpha^i\beta_i^t+\alpha^j\beta_j^t}{\frac{\alpha^i\beta_i^t+\alpha^j\beta_j^t}{\alpha^i\beta_i^t}} - \alpha^i\sum_{t=0}^{\infty}\beta_i^t - \alpha^j\sum_{t=0}^{\infty}\beta_j^t \\
&= 2\sum_{t=0}^{\infty}\frac{\alpha^i\beta_i^t+\alpha^j\beta_j^t}{\alpha^i\beta_i^t+\alpha^j\beta_j^t}(\alpha^i\beta_i^t) - \alpha^i\sum_{t=0}^{\infty}\beta_i^t - \alpha^j\sum_{t=0}^{\infty}\beta_j^t \\
&= 2\frac{\alpha^i}{1-\beta_i} - \frac{\alpha^i}{1-\beta_i} - \frac{\alpha^j}{1-\beta_j} \\
t^i(\alpha) &= \frac{\alpha^i}{1-\beta_i} - \frac{\alpha^j}{1-\beta_j} \qquad (1.1.14)
\end{aligned}$$

Agora, como $t^i(\alpha) = 0, \forall i = 1, 2$ no equilíbrio, temos

$$t^i(\alpha) = \frac{\alpha^i}{1-\beta_i} - \frac{\alpha^j}{1-\beta_j} = 0$$

Como α^1 e α^2 são pesos arbitrários e o que importa é a relação entre eles (α^1/α^2), tomamos os pesos tal que $\alpha^1 + \alpha^2 = 1 \iff \alpha^2 = 1 - \alpha^1$, sem perda de generalidade. Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha^1}{1-\beta_1} &= \frac{1-\alpha^1}{1-\beta_2} \\
\alpha^1(1-\beta_2) &= (1-\alpha^1)(1-\beta_1) \\
\alpha^1(1-\beta_2) &= 1-\beta_1-\alpha^1(1-\beta_1) \\
\alpha^1(1-\beta_2)+\alpha^1(1-\beta_1) &= 1-\beta_1 \\
\alpha^1(2-\beta_1-\beta_2) &= 1-\beta_1 \\
\hat{\alpha}^1 &= \frac{1-\beta_1}{2-\beta_1-\beta_2} > 0 \qquad (1.1.15)
\end{aligned}$$

em que $\alpha^1 > 0$, pois $\beta_1, \beta_2 < 1$. Analogamente, para $i = 2$, temos

$$\hat{\alpha}^2 = \frac{1-\beta_2}{2-\beta_1-\beta_2} > 0 \tag{1.1.16}$$

Note que $\alpha_1 > \alpha_2$, dado que os denominadores são idênticos e $(1-\beta_1) > (1-\beta_2)$, pois $\beta_2 > \beta_1$. Agora, aplicando (1.1.15) e (1.1.16) em (1.1.10) e (1.1.11), temos

$$\hat{c}_t^1 = \frac{2}{1 + \frac{\left(\frac{1-\beta_2}{2-\beta_1-\beta_2}\right)}{\left(\frac{1-\beta_1}{2-\beta_1-\beta_2}\right)} \left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^t} = \frac{2}{1 + \frac{1-\beta_2}{1-\beta_1}\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^t} \tag{1.1.17}$$

e

$$\hat{c}_t^2 = \frac{2}{1 + \frac{\left(\frac{1-\beta_1}{2-\beta_1-\beta_2}\right)}{\left(\frac{1-\beta_2}{2-\beta_1-\beta_2}\right)} \left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^t} = \frac{2}{1 + \frac{1-\beta_1}{1-\beta_2}\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^t} \tag{1.1.18}$$

Como $p_t = \mu/2$ no equilíbrio, aplicando (1.1.12), (1.1.15) e (1.1.16), obtemos

$$\begin{aligned} p_t &= \mu_t = \alpha^1\beta_1^t + \alpha_2\beta_2^t \\ &= \left(\frac{1-\beta_1}{2-\beta_1-\beta_2}\right)\beta_1^t + \left(\frac{1-\beta_2}{2-\beta_1-\beta_2}\right)\beta_2^t \\ \hat{p}_t &= \frac{\beta_1^t(1-\beta_1) + \beta_2^t(1-\beta_2)}{2-\beta_1-\beta_2} \end{aligned} \tag{1.1.19}$$

Portanto, é Pareto Eficiente a alocação $\{(\hat{c}_t^1, \hat{c}_t^2)\}_{t=0}^{\infty}$ que resolve o Problema do Planejador (6) para o vetor de pesos de Pareto $\alpha = (\hat{\alpha}^1, \hat{\alpha}^2) \in \mathbb{R}_+^2$ tal que

$$\hat{c}_t^1 = \frac{2}{1 + \frac{1-\beta_2}{1-\beta_1}\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^t} \tag{1.1.17}$$

$$\hat{c}_t^2 = \frac{2}{1 + \frac{1-\beta_1}{1-\beta_2}\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^t} \tag{1.1.18}$$

$$\hat{\alpha}^1 = \frac{1-\beta_1}{2-\beta_1-\beta_2} \tag{1.1.15}$$

$$\hat{\alpha}^2 = \frac{1-\beta_2}{2-\beta_1-\beta_2} \tag{1.1.16}$$

sob os preços de equilíbrio

$$\hat{p}_t = \frac{\beta_1^t(1-\beta_1) + \beta_2^t(1-\beta_2)}{2-\beta_1-\beta_2}. \tag{1.1.19}$$

■

(d) Seja $\hat{c}_t^i$ o consumo da pessoa i no período t em equilíbrio. Mostre que:

i) $\hat{c}_0^1 - \hat{c}_0^2 > 0$

ii) $\lim_{t\to\infty} \hat{c}_t^1 = 0$ **e** $\lim_{t\to\infty} \hat{c}_t^2 = 2$

Item (i):

Usando (1.1.17) e (1.1.18) para $t = 0$, obtemos:

$$c_0^1 = \frac{2}{1 + \frac{1-\beta_2}{1-\beta_1}\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^0} = \frac{2}{1 + \frac{1-\beta_2}{1-\beta_1}}$$
$$c_0^2 = \frac{2}{1 + \frac{1-\beta_1}{1-\beta_2}\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^0} = \frac{2}{1 + \frac{1-\beta_1}{1-\beta_2}}$$

Como $0 < \beta_1 < \beta_2 < 0$, temos que $(1 - \beta_2) < (1 - \beta_1)$ e, portanto, o denominador de c_0^2 é maior do que de c_0^1. Portanto, como o numerador de ambos consumos iniciais são iguais, concluímos que

$$c_0^1 > c_0^2 \iff c_0^1 - c_0^2 > 0$$

■

Item (ii):

- Para c_t^1: por (1.1.11), temos que

$$c_t^1(\alpha) = \frac{2}{1 + \frac{\alpha^2}{\alpha^1}\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^t} \tag{1.1.11}$$

  - Note que $\beta_2 > \beta_1$, portanto ${}^{\beta^2}/_{\beta^1} > 1$.
  - Portanto, quando $t \to \infty$

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^t = \infty$$

  - Logo, o denominador de (1.1.11) vai a infinito e

$$\lim_{t\to\infty} c_t^1 = 0$$

- Para c_t^2: por (1.1.10), temos que

$$c_t^2(\alpha) = \frac{2}{1 + \frac{\alpha^1}{\alpha^2}\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^t} \tag{1.1.10}$$

  - Note que $\beta_2 > \beta_1$, portanto ${}^{\beta^1}/_{\beta^2} < 1$.
  - Portanto, quando $t \to \infty$

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^t = 0$$

  - Logo, o denominador de (1.1.10) vai a 1 e

$$\lim_{t\to\infty} c_t^2 = 2$$

■

(e) Explique a intuição dos resultados demonstrados no item anterior.

O fato da diferença, $c_0^1 - c_0^2$, ser positiva se dá pelo fato de $\beta_1 < \beta_2$ tal que $\beta_1, \beta_2 \in (0, 1)$. Um maior β preserva mais os valores quando os t's são maiores, ou seja, indica uma maior "paciência" do consumidor em relação a consumos futuros. Como $\beta_1 < \beta_2$, o indivíduo 1 é mais impaciente e, portanto, consome mais do que o 2 nos períodos iniciais, enquanto o indivíduo 2 é mais paciente e consome mais no futuro. Portanto, $c_0^1 - c_0^2 > 0$ e, quando $t \to \infty$, $c_t^2 \to 2$ (total de dotação em um período) e $c_t^1 \to 0$.

(f) É fácil ver que as sequências de consumo de equilíbrio são monótonas. Escreva um código que encontre o período $t^*(\beta_1, \beta_2)$ para o qual $\hat{c}_t^1 - \hat{c}_t^2$ troca de sinal para β's genéricos. Fixe $\beta_2 = 0.95$ e faça um gráfico para mostrar $t^*(\beta_1, \beta_2)$.[1]

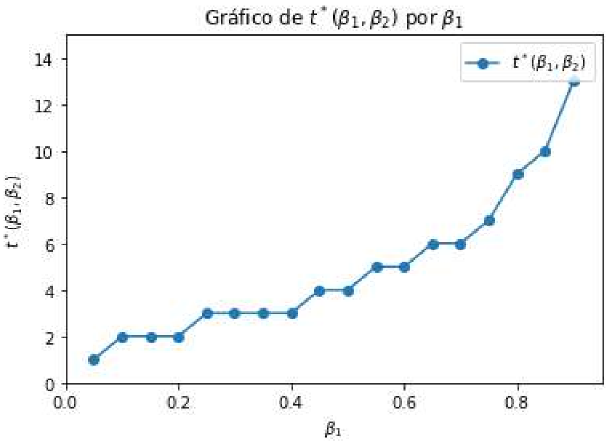
```python
# Módulos a serem utilizados
import numpy as np  # Módulo para trabalhar com matrizes
import matplotlib.pyplot as plt  # Módulo para fazer gráficos

beta_2 = 0.95  # valor de beta_2 fixado

# Criando e preenchendo matriz com beta_1 e t*
tabela = np.zeros([18, 2])  # criando matriz de zeros 18 x 2 para preenchimento

# Loop para preenchimento de possíveis \beta_1 < \beta_2 e t* para c1_t - c2_t
# mudar de sinal (quando c2_t > 1, pois c2_t = 2 - c1_t, no equilíbrio)
for i in range(len(tabela)):
    tabela[i, 0] = beta_2 - (i + 1) * 0.05

    # Calcular consumo inicial do indivíduo 2 (c2_0)
    t = 0
    c2_t = - np.inf # um valor pequeno arbitrário para entrar no loop

    while c2_t < 1:
        # Como c1_t + c2_t = 2, só precisamos verificar se c2_t > 1 ou c1_t < 1
        c2_t = 2 / (1 + ((1 - tabela[i,0]) / (1 - beta_2)) * (tabela[i,0] / beta_2)
    ** t)
        t += 1
    tabela[i, 1] = t - 1 # tem que ser t-1 pois o Python não atualiza
    # automaticamente o valor de c2_t

print(tabela)
```

```
[[ 0.9   13.  ]
 [ 0.85 10.  ]
 [ 0.8   9.  ]
 [ 0.75  7.  ]
 [ 0.7   6.  ]
 [ 0.65  6.  ]
 [ 0.6   5.  ]
 [ 0.55  5.  ]
 [ 0.5   4.  ]
 [ 0.45  4.  ]
 [ 0.4   3.  ]
 [ 0.35  3.  ]
 [ 0.3   3.  ]
 [ 0.25  3.  ]
 [ 0.2   2.  ]
 [ 0.15  2.  ]
 [ 0.1   2.  ]
```

[1] É possível encontrar analiticamente $t^*(\beta_1, \beta_2)$. Não é este o propósito do exercício. Resolva o problema numericamente.

```
 [ 0.05  1.  ]]
```

```python
# Criação do gráfico
fig, ax = plt.subplots()  # Cria a base (em branco) do gráfico
ax.plot(tabela[:, 0], tabela[:, 1],  # Coluna 0 no eixo x e coluna 1 no y
        '-o',  # Formato da linha e ponto do gráfico
        label='$t^*(\\beta_1, \\beta_2)$')  # Descrição da legenda
ax.legend()  # Faz aparecer a legenda
ax.set_ylim([0, 15])  # tamanho mínimo e máximo vertical
ax.set_xlim([0.00, 0.95])  # tamanho mínimo e máximo horizontal
ax.set_xlabel('$\\beta_1$')  # Descrição do eixo x
ax.set_ylabel('$t^*(\\beta_1, \\beta_2)$')  # Descrição do eixo y
ax.set_title('Gráfico de $t^*(\\beta_1, \\beta_2)$ por $\\beta_1$')  # Título
plt.show()  # Plot do gráfico com os comandos dados
```



1.2 [⊠]

Considere uma economia com o tempo discreto e infinito, i.e., $t = 0, 1, 2, ...$ Nesta economia vivem duas pessoas de vida eterna indexadas por $i = 1, 2$. Existe um único bem, que perecível, e cada pessoa tem uma dotação do tipo:

$$e_t^i = \begin{cases} 1 & , \text{se } i + t \text{ é par} \\ 0 & , \text{se } i + t \text{ é ímpar} \end{cases}$$

As preferências das pessoas sobre um fluxo de consumo, $\{c_t^i\}_{t=0}^{\infty}$, são dadas por

$$u^i(\{c_t^i\}_{t=0}^{\infty}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{(c_t^i)^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

em que $0 < \beta < 1$. Toda informação desta economia é pública e não há nenhum risco. Em t = 0, antes de receber a dotação, as pessoas se encontram em um mercado central e transacionam unidades do bem de consumo para todos os períodos. Denote por p_t o preço de uma unidade do bem no período t. Em todo $t \geq 1$ as pessoas voltam ao mercado central para executar as trocas negociadas em $t = 0$. Assuma que os acordos feitos no início dos tempos são sempre honrados pelas pessoas.

(a) Defina uma alocação factível para esta economia.

Uma alocação $\{(c_t^1, c_t^2)\}_{t=0}^{\infty}$ é factível se satisfaz a seguinte restrição de recursos:

$$\sum_{i=1}^{2} c_t^i \leq \sum_{i=1}^{2} e_t^i \qquad \forall t$$

em que

$$c_t^i \geq 0 \qquad \forall t, \text{ para } i = 1, 2.$$

(b) Defina um equilíbrio competitivo (de Arrow-Debreu) para esta economia.

Um Equilíbrio (Competitivo) de Arrow-Debreu (AD) são preços $\{\hat{p}\}_{t=0}^{\infty}$ e alocações $(\{\hat{c}_t^i\}_{t=0}^{\infty})_{i=1,2}$, tais que

(1) Dado $\{\hat{p}_t\}_{t=0}^{\infty}$, para cada $i \in \{1, 2\}$, a sequência $\left\{\hat{c}_t^i\right\}_{t=0}^{\infty}$ resolve

$$\max_{\{c_t^i\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{(c_t^i)^{1-\sigma}}{1-\sigma} \tag{2}$$

$$s.a. \quad \sum_{t=0}^{\infty} \hat{p}^t c_t^i \leq \sum_{t=0}^{\infty} \hat{p}^t e_t^i \tag{3}$$

$$c_t^i \geq 0 \qquad \forall t \in \mathbb{N} \tag{4}$$

(2) Mercados em equilíbrio em cada $t \in \mathbb{N}$

$$\hat{c}_t^1 + \hat{c}_t^2 = e_t^1 + e_t^2, \quad \forall t \in \mathbb{N} \tag{5}$$

(c) Mostre que em num equilíbrio competitivo a pessoa 2 tem um consumo maior do que a pessoa 1.

Estratégia da Prova:

- Resolver o problema do consumodr para preços arbitrários.
- Encontrar os preços que satisfaçam o Market Clearing.
- Substituir os preços do encontrados no problema do consumidor para encontrar a alocação de equilíbrio.

Problema do Consumidor:

$$\max_{\{\hat{c}_t^i\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{(c_t^i)^{1-\sigma}}{1-\sigma} \tag{2}$$

$$s.a. \quad \sum_{t=0}^{\infty} \hat{p}^t c_t^i \leq \sum_{t=0}^{\infty} \hat{p}^t e_t^i \tag{3}$$

$$c_t^i \geq 0 \qquad \forall t \in \mathbb{N} \tag{4}$$

Calculando a CPO para o consumidor i:

$$\beta^t u'(c_t^i) - \lambda^i p_t = 0$$

$$u'(c_t^i) = \lambda^i \frac{p_t}{\beta^t}$$

Note que o resultado obtido da CPO nos permite fazer a seguinte relação:

$$\frac{u'(c_t^i)}{u'(c_t^j)} = \frac{\lambda^i \frac{p_t}{\beta^t}}{\lambda^j \frac{p_t}{\beta^t}} = \frac{\lambda^i}{\lambda^j}$$

Rearranjando, obtemos:

$$u'(c_t^i) = \lambda^i \frac{p_t}{\beta^t}$$

$$(c_t^i)^{-\sigma} = \lambda^i \frac{p_t}{\beta^t}$$

$$c_t^i = \left(\frac{\beta^t}{\lambda^i p_t}\right)^{\frac{1}{\sigma}} \tag{5}$$

Aplicando o resultado na restrição orçamentária:

$$\sum_{t=0}^{\infty} p_t \left(\frac{\beta^t}{\lambda^i p_t}\right)^{\frac{1}{\sigma}} = \sum_{t=0}^{\infty} p_t e_t^i$$

$$(\lambda^i)^{-\frac{1}{\sigma}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^{\frac{t}{\sigma}} p_t^{1-\frac{1}{\sigma}} = \sum_{t=0}^{\infty} p_t e_t^i$$

$$\lambda^i = \left[\frac{\sum_{t=0}^{\infty} \beta^{\frac{t}{\sigma}} p_t^{1-\frac{1}{\sigma}}}{\sum_{t=0}^{\infty} p_t e_t^i}\right]^{\sigma}$$

Substituindo este resultado em (5), obtemos:

$$c_t^i = \frac{\sum_{s=0}^{\infty} p_s e_s^i}{\sum_{s=0}^{\infty} p_s^{1-\frac{1}{\sigma}} \beta^{\frac{s}{\sigma}}} \left(\frac{\beta^t}{p_t}\right)^{\frac{1}{\sigma}}$$

Agora, aplicaremos a condição de market clearing:

$$c_t^1 + c_t^2 = 1 \qquad \forall t$$

$$\frac{\sum_{s=0}^{\infty} p_s e_s^1}{\sum_{s=0}^{\infty} p_s^{1-\frac{1}{\sigma}} \beta^{\frac{s}{\sigma}}} \left(\frac{\beta^t}{p_t}\right)^{\frac{1}{\sigma}} + \frac{\sum_{s=0}^{\infty} p_s e_s^2}{\sum_{s=0}^{\infty} p_s^{1-\frac{1}{\sigma}} \beta^{\frac{s}{\sigma}}} \left(\frac{\beta^t}{p_t}\right)^{\frac{1}{\sigma}} = 1$$

$$\frac{\sum_{s=0}^{\infty} p_s (e_s^1 + e_s^2)}{\sum_{s=0}^{\infty} p_s^{1-\frac{1}{\sigma}} \beta^{\frac{s}{\sigma}}} \left(\frac{\beta^t}{p_t}\right)^{\frac{1}{\sigma}} = 1$$

$$\frac{\sum_{s=0}^{\infty} p_s}{\sum_{s=0}^{\infty} p_s^{1-\frac{1}{\sigma}} \beta^{\frac{s}{\sigma}}} \left(\frac{\beta^t}{p_t}\right)^{\frac{1}{\sigma}} = 1$$

Então, $(\frac{\beta^t}{p_t})^{\frac{1}{\sigma}}$ deve ser constate. Logo, para $t+1$, teremos:

$$\frac{\sum_{s=0}^{\infty} p_s}{\sum_{s=0}^{\infty} p_s^{1-\frac{1}{\sigma}} \beta^{\frac{s}{\sigma}}} \left(\frac{\beta^{t+1}}{p_{t+1}}\right)^{\frac{1}{\sigma}} = 1$$

E, então:

$$\frac{\sum_{s=0}^{\infty} p_s}{\sum_{s=0}^{\infty} p_s^{1-\frac{1}{\sigma}} \beta^{\frac{s}{\sigma}}} \left(\frac{\beta^t}{p_t}\right)^{\frac{1}{\sigma}} = \frac{\sum_{s=0}^{\infty} p_s}{\sum_{s=0}^{\infty} p_s^{1-\frac{1}{\sigma}} \beta^{\frac{s}{\sigma}}} \left(\frac{\beta^{t+1}}{p_{t+1}}\right)^{\frac{1}{\sigma}}$$

$$\left(\frac{\beta^t}{p_t}\right)^{\frac{1}{\sigma}} = \left(\frac{\beta^{t+1}}{p_{t+1}}\right)^{\frac{1}{\sigma}}$$

$$p_t \beta = p_{t+1}$$

Sem perda de generalidade, assuma $p_0 = 1$. Então, por indução, temos que

$$p_t = \beta^t \tag{6}$$

Para encontrar a alocação de equilíbrio dos agentes, basta substituir 6 na decisão de consumo. Assim:

$$c_t^i = \frac{\sum_{s=0}^{\infty} p_s e_s^i}{\sum_{s=0}^{\infty} p_s^{1-\frac{1}{\sigma}} \beta^{\frac{s}{\sigma}}} \left(\frac{\beta^t}{p_t}\right)^{\frac{1}{\sigma}} = \frac{\sum_{s=0}^{\infty} \beta^s e_s^i}{\sum_{s=0}^{\infty} \beta^{s(1-\frac{1}{\sigma})} \beta^{\frac{s}{\sigma}}} \left(\frac{\beta^t}{\beta_t}\right)^{\frac{1}{\sigma}} = \frac{\sum_{s=0}^{\infty} \beta^s e_s^i}{\sum_{s=0}^{\infty} \beta^s}$$

Como $\beta \in (0,1)$,

$$c_t^i = \frac{\sum_{s=0}^{\infty} \beta^s e_s^i}{\sum_{s=0}^{\infty} \beta^s} = (1-\beta) \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s e_s^i$$

Agora, basta calcular o consumo de cada agente.
Para i = 1, $e_t^i = 1$ se i + t é ímpar, ou seja,

$$(1-\beta)\sum_{s=0}^{\infty}\beta^s e_s^1 = (1-\beta)[0+\beta+0+\beta^2+0+\beta^4+...] = \frac{\beta(1-\beta)}{1-\beta^2}$$

Para i = 2, $e_t^i = 1$ se i + t é par. Então,

$$(1-\beta)\sum_{s=0}^{\infty}\beta^s e_s^2 = (1-\beta)[1+0+\beta^2+0+\beta^4+...] = \frac{(1-\beta)}{1-\beta^2}$$

Portanto, as alocações ótimas serão:

$$c_t^i = \begin{cases} \dfrac{\beta(1-\beta)}{1-\beta^2} & \text{, se } i = 1 \\[2ex] \dfrac{(1-\beta)}{1-\beta^2} & \text{, se } i = 2 \end{cases} \tag{1}$$

Como assumimos que $\beta \in (0,1)$,

$$\frac{\beta(1-\beta)}{1-\beta^2} < \frac{(1-\beta)}{1-\beta^2}$$

pois o único termo que diferencia as duas equações é o β. Sendo assim, podemos reescrever as alocações ótimas como $c_t^2 = \dfrac{(1-\beta)}{1-\beta^2}$ e $c_t^1 = \beta c_t^2$. Logo, $c_t^2 > c_t^1$.

(d) Explique a intuição dos resultados demonstrados no item anterior.

O resultado do item (c) é obtido pelo fato da construção das dotações da economia. Como foi definido que

$$e_t^i = \begin{cases} 1 & \text{, se } i+t \text{ é par} \\ 0 & \text{, se } i+t \text{ é ímpar} \end{cases}$$

temos que em $t = 0$ o consumidor que terá dotação igual a 1 será o consumidor 2, pois $i + t = 2 + 0 = 2$, que é um número par. Sendo assim, o consumidor 2 terá uma vantagem comparativa inicial ao indivíduo 1, por iniciar sua vida consumindo. Portanto, é intuitivo concluirmos que $c_t^2 > c_t^1$.

(e) Suponha agora que as pessoas podem trocar um título de um período que promete o pagamento de uma unidade do bem de consumo. Além disso, as pessoas trocam bens e títulos a cada período via um mercado centralizado. Defina um equilíbrio competitivo em mercados sequenciais.

Definição: Um equilíbrio em mercados sequenciais é dado por uma alocação $\{(\hat{c}_t^i, \hat{a}_{t+1}^i)_{i=1,2}\}_{t=0}^{\infty}$ e uma sequência de taxa de juros $\{\hat{r}_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ tais que:

(1) Para $i = 1, 2$, dada $\{\hat{r}_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$,$\{\hat{c}_t^i, \hat{a}_{t+1}^i\}_{t=0}^{\infty}$ resolve

$$\max_{\{\hat{c}_t^i, a_{t+1}^i\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{(c_t^i)^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

$$\begin{aligned} s.a. \;\; c_t^i + \frac{a_{t+1}^i}{1+\hat{r}_{t+1}} \;\; &\leq \;\; e_t^i + a_t^i, \quad \forall t \\ c_t^i \geq 0 \qquad\quad & \forall t \in \mathbb{N} \\ a_{t+1}^i \geq -\bar{A}, \quad & \forall t, \bar{A}^i \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(2) Market Clearing

$$\hat{c}_t^1 + \hat{c}_t^2 = e_t^1 + e_t^2, \;\; \forall t \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{i=1}^{2} a_{t+1}^i = 0$$