Sernmuel

1- $E\{\sum_{T=0}^{\infty} \beta^T u(c_T, l_T)$ s.a $c_t + k_{t+1} = z_T f(k_T, l_T) + (1-\delta) k_t$

3,50. z_T evolui de acordo com $F(z'|z)$ Nota: 8,25.

a) $$v(k,z) = \max_{\substack{0 \le k' \le z f(k,l) + (1-\delta)k \\ 0 \le l \le 1 \\ k \text{ dado} \\ z \text{ dado}}} U(z f(k,l) + (1-\delta)k - k', l) + \beta \int v(k', z')\, dF(z'|z)$$

$$c = z f(k,l) + (1-\delta)k - k'$$

A equação de Bellman postula que a utilidade ao longo da vida do agente depende de sua utilidade hoje $(U(z f(k,l) + (1-\delta)k - k', l)$ e de sua utilidade descontada a valor presente das utilidades futuras $(\beta \int v(k', z')\, dF(z'|z))$, nesse caso o agente ainda deve considerar o valor esperado dos choques futuros, que segue de acordo com um processo de Markov. Ainda, neste caso, o agente também valoriza o lazer, tendo que fazer escolha sobre o trabalho. Ainda, note que há um trade-off entre consumir no presente e guardar mais capital para o futuro.

b) Tirando as CPO's para a equação do item anterior:

$$\frac{\partial v(k,z)}{\partial l} = z f'(k,l) U_c + U_l = 0$$

$$z f_l'(k,l) = -\frac{U_l}{U_c} \implies \text{condição 1}$$

onde U_l = utilidade marginal do lazer
U_k = utilidade marginal do consumo

$$\frac{\partial v(k,z)}{\partial k'} = -U'(z f(k,l) + (1-\delta)k - k', l) + \beta \int v'(k', z')\, dF(z'|z) = 0 \quad (A)$$

Por BS

$$v'(k,z) = (z f_k(k,l) + (1-\delta))\, U_c'(z f(k,l) + (1-\delta)k - k', l)$$

colocando índices temporais e adicionando um período

$$v'(k_{t+1}, z_{t+1}) = (z_{t+1} f(k_{t+1}, l_{t+1}) + (1-\delta) k_{t+1})\, U_c'(z_{t+1} f(k_{t+1}, l_{t+1}) + (1-\delta) k_{t+1} - k_{t+2}, l_{t+1})$$

Substituindo em A:

$$U_c'(z_t f(k_t, l_t) + (1-\delta) k_t - k_{t+1}, l_t) = \beta \int (z_{t+1} f_{k_{t+1}}(k_{t+1}, l_{t+1}) + (1-\delta))\, U_c'(z_{t+1} f(k_{t+1}, l_{t+1}) + (1-\delta) k_{t+1} - k_{t+2}, l_{t+1})\, dF(z_{t+1}|z_t)$$

Esta é a 2ª condição

Da restrição temos:

$$c+k' = z\, f(k,l) + (1-\delta)k$$ Esta é a 3ª condição

é útil, mas não é otimalidade

c) $U_l = -l^{\varphi}$ $\quad U_c = \frac{1}{c}$ $\quad f_l = (1-\alpha)k^{\alpha}l^{-\alpha}$ $\quad f_k = \alpha k^{\alpha-1}l^{1-\alpha}$

Substituindo na 1ª condição de otimalidade

$$z(1-\alpha)k^{\alpha}l^{-\alpha} = +l^{\varphi}c \qquad (A)$$

Note que em S.S $k'=k$ e $z'=z$, logo da condição 2

$$\frac{1}{c} = \beta\left(z\, f_k(k,l) + (1-\delta)\right)\frac{1}{c}$$

$$1 = \beta\left(z(\alpha k^{\alpha-1}l^{1-\alpha}) + (1-\delta)\right)$$

$$1 = \beta z \alpha k^{\alpha-1}l^{1-\alpha} + \beta(1-\delta) \qquad (B)$$

Da condição 3, temos

$$c = zk^{\alpha}l^{1-\alpha} + (1-\delta)k - k$$

$$c = zk^{\alpha}l^{1-\alpha} - \delta k \qquad (C)$$

De (B), temos

$$1-\beta(1-\delta) = \beta z k^{\alpha-1}l^{1-\alpha}$$

$$\frac{1-\beta(1-\delta)}{\beta z k^{\alpha-1}} = l^{1-\alpha} \qquad (D)$$

$$l = \left(\frac{1-\beta(1-\delta)}{\beta z k^{\alpha-1}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \qquad (E)$$

Substituindo (D) em (C),

$$c = z\cancel{k^{\alpha}}\left(\frac{1-\beta(1-\alpha)}{\beta z \cancel{k^{\alpha-1}}}\right) - \delta k$$

$$c = \cancel{z}\left(\frac{1-\beta(1-\alpha)k}{\beta\cancel{z}}\right) - \delta k$$

$$c = \frac{1-\beta(1-\delta)k}{\beta} - \delta k \qquad (F)$$

SUBSTITUINDO (F) e (E) em (A)

$$z(1-\alpha)k^{\alpha}\left(\frac{1-\beta(1-\alpha)}{\beta z k^{\alpha-1}}\right)^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}} = \left(\frac{1-\beta(1-\alpha)}{\beta z k^{\alpha-1}}\right)^{\frac{\varphi}{1-\alpha}} : \left(\frac{1-\beta(1-\alpha)k}{\beta} - \delta k\right)$$

$$\frac{k^{\alpha}}{k^{\frac{-\alpha(\alpha-1)}{1-\alpha}}}$$

$$k^{\frac{\alpha(\alpha-2)}{1-\alpha}}$$

Q1 - d - Passo 1 - Inicialmente devemos definir uma Grid para os valores de k, Grid $\mathbb{K} = \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$ e uma Grid para os valores de l $\{0, 01, \dots, 1\}$

Passo 2 - Definimos os possiveis valores de z e seu processo de Markov, que nesse caso a probabilidade de transição segue $F(z'|z)$
$\mathbb{Z} = \{z_1, z_2, \dots, z_k\}$

Passo 3 - Devemos parametrizar o modelo, escolhendo nossos funções, que neste caso ideam.

$$U(c,l) = \log c - \frac{l^{1+\varphi}}{1+\varphi} \quad e \quad f(k,l) = k^{\alpha} l^{1-\alpha}$$

e escolher o valor dos nossos parametros $\alpha, \varphi, \beta, \delta$

Passo 4 - Criamos matrizes para guardar nossas funções valor e politicas, TV, V, g_k, g_l e preenchemos ela com zeros. Note que as matrizes devem ter dimensão $m \times k$. Escolhemos $V_0 = 0$ para $\$$niciarmos nossa iteração

Passo 5 - Escolhemos um critério de convergencia $\varepsilon \sim 0$, mas que deve ser positivo

Passo 6 - Resolvemos, para cada $k \in \mathbb{K}$ e $z \in \mathbb{Z}$:

$$TV = \max_{\substack{0 \leq k' \leq z f(k,l) + (1-\delta)k \\ 0 \leq l \leq 1}} U(z f(k,l) + (1-\delta)k - k', l) + \beta \int V \, dF(z'|z)$$

→ como?

e guardamos os valores das funções que a resolvem

Passo 7 - Calculamos a distancia $D = \max |TV - V|$ e atualizamos $V = TV$.

Passo 8 - Se $D > \varepsilon$, voltamos para o passo 6, caso contrário paramos nosso loop.