4.4 [☒]

Suponha que o planejador deseja maximizar

$$\mathbb{E}\left\{\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u\left(c_t, l_t\right)\right\}, \quad 0<\beta<1$$

sujeito a restrição de recursos

$$c_t+k_{t+1}=z_t f\left(k_t, l_t\right)+(1-\delta) k_t, \quad 0<\delta<1$$

com condições iniciais $k_0>0$ e $z_0>0$. A produtividade z_t evolui de acordo com um processo de Markov com probabilidade de transição $F\left(z' \mid z\right)=\operatorname{Prob}\left[z_{t+1} \leq z' \mid z_t=z\right]$ e média incondicional $\bar{z}>0$.

Neste problema o planejador escolhe quanto trabalho l_t ofertar. Assuma que $u\left(c_t, l_t\right)$ é estritamente crescente e estritamente côncava em c_t, e é estritamente decrescente e estritamente convexa em l_t. A função de produção $f\left(k_t, l_t\right)$ é estritamente crescente e estritamente côncava em ambos argumentos e tem retornos constantes de escala.

(a) Seja $v(k,z)$ a função valor do planejador. Escreva e explique a equação de Bellman que determina $v(k,z)$.

Note que, neste modelo, as probabilidades de transição de um estado z para z' seguem uma distribuição de probabilidade com a c.d.f. $F(z'|z)$ (diferente da seção 6.4 de Krueger (2017) que é discretizado). Logo, ao invés calcular o valor esperado pela soma dos valores de $v(k',z')$ ponderados pelas probabilidades de transição de k para o estado k', integraremos $v(k',z')$ pela distribuição $F(z'|z)$. Portanto,

$$\begin{aligned} v(k,z) &= \max_{\substack{0\leq k'\leq zf(k,l)+(1-\delta)k \\ 0\leq l\leq 1}} \left\{U(c,l)+\beta\mathbb{E}_{z'}\left[v(k',z')\right]\right\} \\ &= \max_{\substack{0\leq k'\leq zf(k,l)+(1-\delta)k \\ 0\leq l\leq 1}} \left\{U(zf(k,l)(1-\delta)k-k',\ l)+\beta\int v(k',z')dF(z'|z)\right\}. \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

Esta equação de Bellman inclui não apenas o estoque de capital k que o planejador traz para o período corrente, mas também o estado da tecnologia z. Ainda, o trabalhador decidirá o quanto irá trabalhar, dado que, além do consumo, valoriza também o lazer. Logo, para maximizar a expressão, o planejador irá escolher ambos capital do período seguinte k' e quantidade de trabalho l. ■

(b) Derive as condições de otimalidade do problema do planejador.

Estratégia da Prova:

- Seção 6.4.1 de Krueger (2017) ou Notas de aula

Por CPO, a partir da equação de Bellman (4.4.1), temos

$$[\,l\,]: \qquad 0 = U_c(c,l) z f_l(k,l) + U_l(c,l) \tag{4.4.2}$$

$$[k']: \qquad 0 = U_c(c,l)(-1) + \beta \int v_k(k',z') dF(z'|z) \tag{4.4.3}$$

em que os subscritos indicam as derivadas parciais. A condição (4.4.2) pode ser reescrita como:

$$-\frac{U_l(c,l)}{U_c(c,l)} = z f_l(k,l). \tag{4.4.4}$$

Esta é a condição de otimalidade intratemporal que postula que, no ótimo, o planejador equaciona a taxa marginal de substituição entre trabalho e consumo em relação ao produto marginal do trabalho (Krueger, 2017, pág. 133).

Usando Teorema de Benveniste-Scheinkman (condição de envelope), segue que

$$v_k(k,z) = U_c(c,l)[z f_k(k,l) + (1-\delta)]. \tag{4.4.5}$$

Usando os índices temporais k' e z' em (4.4.5) e aplicando em (4.4.3), obtemos a equação de Euler intertemporal:

$$U_c(c,l) = \beta \int U_c(c',l')[z f_k(k',l') + (1-\delta)] dF(z'|z), \tag{4.4.6}$$

tal que a restrição de recursos é dada por

$$c + k' = z f(k,l) + (1-\delta)k. \tag{4.4.7}$$

Portanto, as condições de otimalidade são dadas por: condição de otimalidade intratemporal (4.4.4), equação de Euler intertemporal (4.4.6) e restrição de recursos (4.4.7), em que o planejador escolhe c, l e k', dado os estados k, z. ■

(c) Suponha que

$$u(c,l) = \log c - \frac{l^{1+\varphi}}{1+\varphi}, \quad \varphi > 0$$

e

$$f(k,l) = k^\alpha l^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Encontre os valores de steady state não estocástico de consumo, capital e trabalho em termos dos parâmetros do modelo. Suponha que existe um aumento permanente no nível de produtividade $\bar{z}$. Explique como isto muda os valores de estado estacionário do consumo, capital e trabalho. Dê uma intuição econômica para seus resultados.

Estratégia da Prova:

- Calcular as derivadas parciais e aplicá-las nas condições de otimalidade encontradas.
- Como as relações de estado estacionário $c = c' = \bar{c}$, $l = l' = \bar{l}$ e $k = k' = \bar{k}$, e, como é não-estocástico, $z = z' = \bar{z}$.
- Encontrar as relações $\bar{k}/\bar{l}$, $\bar{y}/\bar{l}$, $\bar{k}/\bar{y}$, $\bar{c}/\bar{y}$ e $\bar{l}$.
- Verificar como um choque em $\bar{z}$ afeta $\bar{c}$, $\bar{k}$ e $\bar{l}$.

Primeiro, usando as funções $U(c,l)$ e $f(k,l)$ dadas, calcularemos as derivadas parciais utilizadas no item (c):

$$U_c(c,l) = {}^1\!/_c \qquad \text{e} \qquad U_l(c,l) = -(1+\varphi)\frac{l^{1+\varphi-1}}{(1+\varphi)} = -l^\varphi$$

$$f_l(k,l) = (1-\alpha)k^\alpha l^{-\alpha} = (1-\alpha)\left(\frac{k}{l}\right)^\alpha \qquad \text{e} \qquad f_k(k,l) = \alpha k^{\alpha-1}l^{1-\alpha} = \alpha\left(\frac{k}{l}\right)^{\alpha-1}.$$

Aplicando as derivadas parciais em (4.4.4) e (4.4.6), e aplicando $f(k,l)$ em (4.4.7), obtemos:

$$-\frac{-l^\varphi}{{}^1\!/_c} = z(1-\alpha)\left(\frac{k}{l}\right)^\alpha \iff cl^\varphi = z(1-\alpha)\left(\frac{k}{l}\right)^\alpha \tag{4.4.4'}$$

$$\frac{1}{c} = \beta\int\frac{1}{c'}\left[z'\alpha\left(\frac{k'}{l'}\right)^{\alpha-1} + (1-\delta)\right]dF(z'|z) \tag{4.4.6'}$$

$$c + k' = zk^\alpha l^{1-\alpha} + (1-\delta)k. \tag{4.4.7'}$$

No estado estacionário não-estocástico, não há incerteza, então $z = z' = \bar{z}$. Além disso, no estado estacionário, temos que $c = c' = \bar{c}$, $l = l' = \bar{l}$ e $k = k' = \bar{k}$. Portanto, as três condições de otimalidade são dadas por:

$$\bar{c}\bar{l}^\varphi = \bar{z}(1-\alpha)\left(\frac{\bar{k}}{\bar{l}}\right)^\alpha \tag{4.4.4''}$$

$$\frac{1}{\bar{c}} = \beta\int\frac{1}{\bar{c}}\left[\bar{z}\alpha\left(\frac{\bar{k}}{\bar{l}}\right)^{\alpha-1} + (1-\delta)\right]dF(\bar{z}|\bar{z}) \iff 1 = \beta\left[\bar{z}\alpha\left(\frac{\bar{k}}{\bar{l}}\right)^{\alpha-1} + (1-\delta)\right] \tag{4.4.6''}$$

$$\bar{c} + \bar{k} = \bar{z}\bar{k}^\alpha\bar{l}^{1-\alpha} + (1-\delta)\bar{k} \iff \bar{c} + \delta\bar{k} = \bar{z}\bar{k}^\alpha\bar{l}^{1-\alpha} = \bar{z}f(\bar{k},\bar{l}) \equiv \bar{y} \tag{4.4.7''}$$

A partir de (4.4.6"), a razão capital/trabalho é dada por:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\beta} - (1-\delta) &= \bar{z}\alpha\left(\frac{\bar{k}}{\bar{l}}\right)^{\alpha-1} \\
\frac{\frac{1}{\beta} - 1 + \delta}{\bar{z}\alpha} &= \left(\frac{\bar{k}}{\bar{l}}\right)^{\alpha-1} \\
\frac{\bar{z}\alpha}{\frac{1}{\beta} - 1 + \delta} &= \left(\frac{\bar{k}}{\bar{l}}\right)^{1-\alpha} && \text{(elevado a } -1\text{)} \\
\left(\frac{\bar{z}\alpha}{\rho+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} &= \frac{\bar{k}}{\bar{l}}. && (4.4.8)
\end{aligned}$$

em que $\rho \equiv {}^1\!/_\beta - 1$. Logo, aplicando ${}^{\bar{k}}\!/_{\bar{l}}$ em (4.4.7"), obtemos a razão output/trabalho:

$$\begin{aligned}
\bar{y} &= \bar{z}\bar{k}^\alpha\bar{l}^{1-\alpha} = \bar{z}\left(\frac{\bar{k}}{\bar{l}}\right)^\alpha \bar{l} \\
\frac{\bar{y}}{\bar{l}} &= \bar{z}\left[\left(\frac{\bar{z}\alpha}{\rho+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right]^\alpha = \bar{z}^{1+\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left(\frac{\alpha}{\rho+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} && \text{(usando 4.4.8)} \\
\frac{\bar{y}}{\bar{l}} &= \bar{z}^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{\alpha}{\rho+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} && (4.4.9)
\end{aligned}$$

E a razão capital/output é dada por:

$$\frac{\bar{k}}{\bar{y}} = \frac{\bar{k}/\bar{l}}{\bar{y}/\bar{l}} = \frac{\left(\frac{\bar{z}\alpha}{\rho+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\bar{z}^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{\alpha}{\rho+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} = \frac{\left(\frac{\alpha}{\rho+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\left(\frac{\alpha}{\rho+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} = \left(\frac{\alpha}{\rho+\delta}\right)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha}} = \frac{\alpha}{\rho+\delta}, \tag{4.4.10}$$

que não depende de $\bar{z}$. Da restrição de recursos (4.4.7"), obtemos a razão consumo/output:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{c}+\delta\bar{k}}{\bar{y}} &= 1 \\ \frac{\bar{c}}{\bar{y}} &= 1 - \frac{\delta\bar{k}}{\bar{y}} = 1 - \delta\left(\frac{\alpha}{\rho+\delta}\right), \end{aligned} \tag{4.4.11}$$

que também não depende de $\bar{z}$. De (4.4.4"), segue que

$$\begin{aligned} \bar{c}\bar{l}^{\varphi} &= \bar{z}(1-\alpha)\left[\left(\frac{\bar{z}\alpha}{\rho+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right]^{\alpha} \\ \bar{c}\bar{l}^{\varphi} &= (1-\alpha)\bar{z}^{1+\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left(\frac{\alpha}{\rho+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \\ \bar{c}\bar{l}^{\varphi} &= (1-\alpha)\bar{z}^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{\alpha}{\rho+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \\ \bar{c}\bar{l}^{\varphi} &= (1-\alpha)\frac{\bar{y}}{\bar{l}} && \text{(usando (4.4.9))} \\ \bar{l}^{1+\varphi} &= (1-\alpha)\frac{\bar{y}}{\bar{c}} = \frac{(1-\alpha)}{\bar{c}/\bar{y}} \\ \bar{l}^{1+\varphi} &= \frac{(1-\alpha)}{1-\delta\left(\frac{\alpha}{\rho+\delta}\right)} && \text{(usando (4.4.11))} \\ \bar{l}^{1+\varphi} &= \frac{(1-\alpha)}{\left(\frac{\rho+\delta-\delta\alpha}{\rho+\delta}\right)} \\ \bar{l}^{1+\varphi} &= \frac{(1-\alpha)(\rho+\delta)}{\rho+\delta(1-\alpha)} \\ \bar{l} &= \left[\frac{(1-\alpha)(\rho+\delta)}{\rho+\delta(1-\alpha)}\right]^{\frac{1}{1+\varphi}}, && (4.4.12) \end{aligned}$$

que é novamente independente de $\bar{z}$. Portanto,

- um aumento permanente em $\bar{z}$ não altera a quantidade de trabalho $\bar{l}$;
- como, em (4.4.9), $\bar{y}/\bar{l}$ é crescente em $\bar{z}$, e $\bar{l}$ não depende de $\bar{z}$, então $\bar{y}$ é crescente em $\bar{z}$; e
- como, em (4.4.11), $\bar{c}/\bar{y}$ é independente de $\bar{z}$, mas sabemos que $\bar{y}$ é crescente em $\bar{z}$, então $\bar{c}$ deve crescer na mesma proporção que $\bar{y} \implies \bar{c}$ é crescente em $\bar{z}$.
- como, em (4.4.10), $\bar{k}/\bar{y}$ é independente de $\bar{z}$, mas sabemos que $\bar{y}$ é crescente em $\bar{z}$, então $\bar{k}$ deve crescer na mesma proporção que $\bar{y} \implies \bar{k}$ é crescente em $\bar{z}$. ■

(d) Suponha que os possíveis valores de z_t são $\mathscr{Z} = \{0.8, 1, 1.2\}$ e que a matriz de transição é dada por

$$\pi = \begin{pmatrix} 0.20 & 0.5 & 0.3 \\ 0.10 & 0.6 & 0.3 \\ 0.25 & 0.25 & 0.50 \end{pmatrix}.$$

Sejam $\alpha = 0.3, \beta = 1/1.05, \delta = 0.05, \varphi = 1$. Escreva um código Python para calcular a função valor e funções políticas. Use um grid para o capital entre 0 e 100.[3]

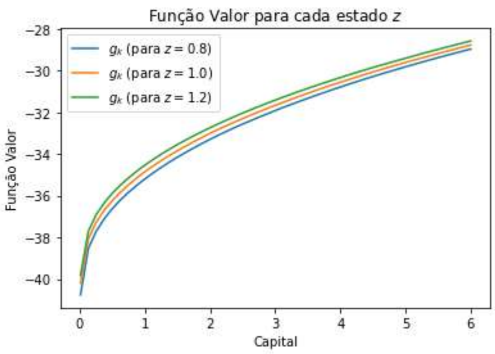
```python
# Definição dos par metros
k_grid = np.linspace(0.01, 6, 51)
n_k = len(k_grid)
alpha = 0.3
beta = 1 / 1.05
delta = 0.05
phi = 1
n_grid = np.linspace(0, 1, 11)
# n_grid = np.array([1/4, 2/4, 3/4, 1])
n_n = len(n_grid)
z_grid = np.array([0.8, 1.0, 1.2])
n_z = len(z_grid)
pi = np.array([[0.20, 0.50, 0.30],
               [0.10, 0.60, 0.30],
               [0.25, 0.25, 0.50]])


# Criando lista de listas para incluir funções valor e política
# Note que, num modelo que considera incerteza, teremos uma função para cada z
v_it = [np.zeros((n_k, n_z))]
gk_it = [np.zeros((n_k, n_z))]
gn_it = [np.zeros((n_k, n_z))]


# Estabelecendo variáveis para realizar os loops
tol_norma = 1e-5  # Dist ncia entre funções máxima para considerar converg ncia
tol_it = 500  # Número máximo de iterações (caso não convirja antes)
norma = np.inf  # Valor apenas para entrar no loop
it = 0  # N  iterações (antes utilizamos n - agora usado para trabalho)


while norma > tol_norma and it < tol_it:
    it += 1  # Atualizando o número da iteração

    # Criando objetos para preencher com funções objetivo, valor e política
    f_obj = np.zeros((n_k, n_z, n_k, n_n))  # Lista com n_k matrizes n_k x z
    Tv = np.zeros((n_k, n_z))
    gn = np.zeros((n_k, n_z))
    gk = np.zeros((n_k, n_z))

    for i_k, k in enumerate(k_grid):
        for i_z, z in enumerate(z_grid):
            for i_kk, kk in enumerate(k_grid):
                for i_n, n in enumerate(n_grid):
                    c = z*(k**alpha * n**(1 - alpha)) + (1 - delta)*k - kk
                    if c > 0:
                        Ev = np.dot(pi[i_z,:], v_it[it - 1][i_kk,:])
                        f_obj[i_k, i_z, i_kk, i_n] = log(c) - (n**(1 + phi) / 1 + phi) + beta*Ev
                    else:
                        f_obj[i_k, i_z, i_kk, i_n] = -np.inf

```

[3] Usar o zero para capital não é uma boa ideia.

```
            # Preenchida uma matriz kk x n, encontrar elemento que maximiza
            indice_max = np.argmax(f_obj[i_k, i_z])
            indice_gk = indice_max // n_n  # Divisão Inteira - Índice de k'
            indice_gn = indice_max % n_n  # Resto da Divisão - Índice de n

            Tv[i_k, i_z] = np.max(f_obj[i_k, i_z])
            gk[i_k, i_z] = indice_gk
            gn[i_k, i_z] = indice_gn


    # Após preencher totalmente gk e gn, trocar índices pelos valores nos grids
    for p in range(len(gk)):
        for q in range(len(gk[0])):
            gk[p, q] = k_grid[int(gk[p, q])]
            gn[p, q] = n_grid[int(gn[p, q])]

    v_it.append(Tv)
    gk_it.append(gk)
    gn_it.append(gn)

    norma = np.max(abs(v_it[it] - v_it[it - 1]))
    print('A iteração {} terminou com norma igual a {:.5f}'.format(it,norma))
```

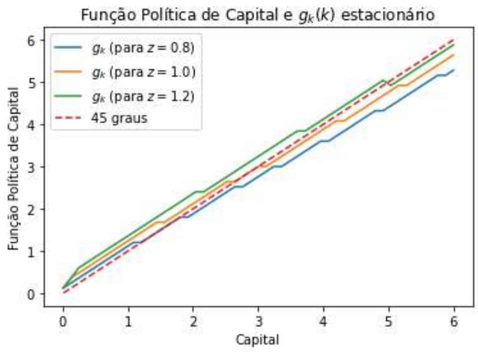
```
A iteração 1 terminou com norma igual a 3.32584
A iteração 2 terminou com norma igual a 2.94468
(...)
A iteração 247 terminou com norma igual a 0.00001
A iteração 248 terminou com norma igual a 0.00001
```

```
""" Visualização Gráfica da Função Valor """
fig, ax = plt.subplots()

# Inclusão de cada função valor no gráfico
ax.plot(k_grid, v_it[it][:,0], label='$g_k$ (para $z = 0.8)')
ax.plot(k_grid, v_it[it][:,1], label='$g_k$ (para $z = 1.0)')
ax.plot(k_grid, v_it[it][:,2], label='$g_k$ (para $z = 1.2)')

# Legendas
ax.set_xlabel('Capital')
ax.set_ylabel('Função Política')
ax.set_title('Função Política e $g(k)$ estacionário')
ax.legend()
```




```
""" Visualização Gráfica da Função Política do Capital """
fig, ax = plt.subplots()

# Inclusão de cada função valor no gráfico
ax.plot(k_grid, gk_it[it][:,0], label='$g_k$ (para $z = 0.8)')
ax.plot(k_grid, gk_it[it][:,1], label='$g_k$ (para $z = 1.0)')
ax.plot(k_grid, gk_it[it][:,2], label='$g_k$ (para $z = 1.2)')
ax.plot(k_grid, k_grid, '--', label='45 graus')
```

```python

# Limites do gráfico
# ax.set_ylim([4.5, 6])  # tamanho mínimo e máximo vertical
# ax.set_xlim([4.5, 6])  # tamanho mínimo e máximo horizontal

# Legendas
ax.set_xlabel('Capital')
ax.set_ylabel('Função Política')
ax.set_title('Função Política e $g(k)$ estacionário')
ax.legend()

plt.show()
```




```python
""" Visualização Gráfica da Função Política do Trabalho """
fig, ax = plt.subplots()

# Inclusão de cada função valor no gráfico
ax.plot(k_grid, gn_it[it][:,0], label='$g_n$ (para $z = 0.8)')
ax.plot(k_grid, gn_it[it][:,1], label='$g_n$ (para $z = 1.0)')
ax.plot(k_grid, gn_it[it][:,2], label='$g_n$ (para $z = 1.2)')

# Legendas
ax.set_xlabel('Capital')
ax.set_ylabel('Função Política')
ax.set_title('Função Política e $g(k)$ estacionário')
ax.legend()
```


```python
""" Cálculo dos capitais estocásticos """
for i_z, z in enumerate(z_grid):
    i_k = 0
    loop = 0
    # Achar índice do capital estacionário
    while k_grid[i_k] != gk_it[it][i_k, i_z] and loop < 100:  # até termos k = k'
        i_k = np.where(k_grid == gk_it[it][i_k, i_z])[0][0]  # Aplica o índice de k' em k
        loop += 1  # Inserido por loops infinitos próximo ao k estacionário

    print('O capital estacionário para z = {} é {:.3f}'.format(z, k_grid[i_k]))
```

```
O capital estacionário para z = 0.8 é 1.208
O capital estacionário para z = 1.0 é 2.646
O capital estacionário para z = 1.2 é 5.042
```