

# Recursive Formulation of Social Planner Problem

## **Value Function Iteration: Numerical Approach**

**Dirk Krueger (2017) - Seção 3.2.3**

May 4, 2023

# Formulação Recursiva do Problema do Planejador Social (1/2)

- A função valor  $v$  soluciona a seguinte recursão

$$v(k) = \max_{0 \leq k' \leq f(k)} \{U(f(k) - k') + \beta v(k')\} = (Tv)(k) \quad (3.2)$$

em que:

- (3.2): Equação Funcional ou “Equação de Bellman”
  - $v$ : função valor
  - $k$ : estoque de capital que o planejador traz para o período atual, ou seja, que é resultado de decisões anteriores (variável de estado)
  - $k'$ : é escolhida hoje pelo planejador social (variável de controle), definindo o estoque capital do próximo período.
- Queremos encontrar a função valor  $v$  e a função política ótima  $k' = g(k)$ .

# Formulação Recursiva do Problema do Planejador Social (2/2)

- Assuma que:

- $U(c) = \ln(c)$
- $F(k, n) = k^\alpha n^{1-\alpha}$
- Depreciação total:  $\delta = 1$
- Logo,  $f(k) = F(k, 1) + (1 - \delta)k = k^\alpha$

(no ótimo,  $n = 1$ )

- Portanto, (3.2) pode ser reescrita como:

$$v(k) = \max_{0 \leq k' \leq f(k)} \{ \ln(k^\alpha - k') + \beta v(k') \} \quad (1)$$

- Suponha

- $k, k' \in \mathcal{K} = \{0.04, 0.08, 0.12, 0.16, 0.20\}$
- $\alpha = 0.3$  e  $\beta = 0.6$
- Palpite inicial:  $v_0(k) = 0, \forall k \in \mathcal{K}$ , ou seja,  $v_0 = \{0, 0, 0, 0, 0\}$

## Resolvendo $v_1(k)$ - 1ª iteração (1/2)

- Definiremos

$$v_1(k) \equiv \max_{0 \leq k' \leq k^\alpha} \{ \ln(k^\alpha - k') + \beta v_0(k') \} = (Tv_0)(k)$$

- Como  $v_0(k) = 0, \forall k \in \mathcal{K}$ , o problema será:

$$v_1(k) = \max_{0 \leq k' \leq k^\alpha} \{ \ln(k^\alpha - k') \}$$

- Note que, para todo  $k \in \mathcal{K} = \{0.04, 0.08, 0.12, 0.16, 0.20\}$ , o valor de  $k'$  que maximiza a expressão é sempre  $k' = 0.04$  neste caso.
- Logo, sabemos que, nesta 1ª iteração, a função política ótima

$$k'(k) = g_1(k) = 0.04, \forall k \in \mathcal{K}.$$

Note que 0.04 é o menor valor permitido em  $\mathcal{K}$ .

## Resolvendo $v_1(k)$ - 1ª iteração (2/2)

- Calculando os valores de  $v_1(k)$  para cada  $k$  e com  $k' = 0.04$ , obtemos

$$v_1(k = 0.04) = \ln(0.04^{0.3} - 0.04) = -1.077$$

$$v_1(k = 0.08) = \ln(0.08^{0.3} - 0.04) = -0.847$$

$$v_1(k = 0.12) = \ln(0.12^{0.3} - 0.04) = -0.715$$

$$v_1(k = 0.16) = \ln(0.16^{0.3} - 0.04) = -0.622$$

$$v_1(k = 0.20) = \ln(0.20^{0.3} - 0.04) = -0.550$$

- Função valor  $v_1$  ( $\equiv Tv_0 \neq v_0$ ) e função política  $g_1$  são dadas por

$k$	$v_1(k)$	$g_1(k)$
0.04	-1.077	0.04
0.08	-0.847	0.04
0.12	-0.715	0.04
0.16	-0.622	0.04
0.20	-0.550	0.04

## Resolvendo $v_2(k)$ - 2ª iteração (1/2)

- Definiremos

$$v_2(k) \equiv \max_{0 \leq k' \leq k^\alpha} \{ \ln(k^\alpha - k') + \beta v_1(k') \} = (Tv_1)(k)$$

- Como  $v_1(k')$  não é nulo para todo  $k'$ , precisamos agora verificar qual é o  $k'$  que maximiza  $v_2(k)$  para cada  $k$ .
- para  $k = 0.04$ , temos os possíveis  $v_2(k)$ :

$$v_2(k = 0.04) = \ln(0.04^{0.3} - 0.04) + 0.6 * (-1.077) = -1.7227 \quad (k' = 0.04)$$

$$v_2(k = 0.04) = \ln(0.04^{0.3} - 0.08) + 0.6 * (-0.847) = -1.7097 \quad (k' = 0.08)$$

$$v_2(k = 0.04) = \ln(0.04^{0.3} - 0.12) + 0.6 * (-0.715) = -1.7731 \quad (k' = 0.12)$$

$$v_2(k = 0.04) = \ln(0.04^{0.3} - 0.16) + 0.6 * (-0.622) = -1.8838 \quad (k' = 0.16)$$

$$v_2(k = 0.04) = \ln(0.04^{0.3} - 0.20) + 0.6 * (-0.550) = -2.0407 \quad (k' = 0.20)$$

- Logo, para maximizar  $v_2(k = 0.04)$ , escolhe-se  $k' = 0.08$

## Resolvendo $v_2(k)$ - 2ª iteração (2/2)

- Repete-se esse processo feito para  $k = 0.04$  para os demais possíveis valores de  $k$ :

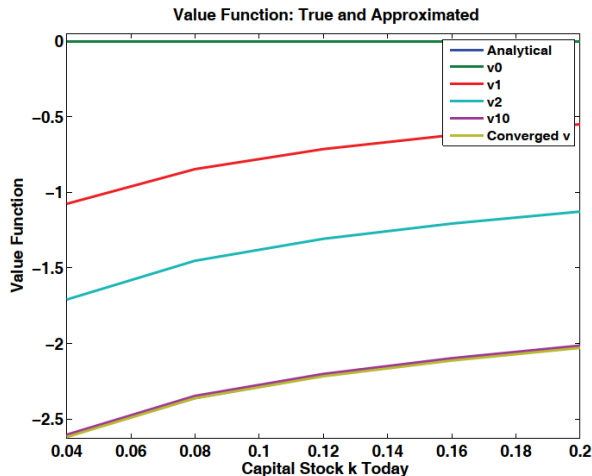
$k \backslash k'$	0.04	0.08	0.12	0.16	0.2
0.04	-1.7227	-1.7097*	-1.7731	-1.8838	-2.0407
0.08	-1.4929	-1.4530*	-1.4822	-1.5482	-1.6439
0.12	-1.3606	-1.3081*	-1.3219	-1.3689	-1.4405
0.16	-1.2676	-1.2072*	-1.2117	-1.2474	-1.3052
0.2	-1.1959	-1.1298	-1.1279*	-1.1560	-1.2045

- Função valor  $v_2 (\equiv Tv_1 \neq v_1)$  e função política  $g_2$  são dadas por

$k$	$v_2(k)$	$g_2(k)$
0.04	-1.7097	0.08
0.08	-1.4530	0.08
0.12	-1.3081	0.08
0.16	-1.2072	0.08
0.20	-1.1279	0.12

# Demais iterações - Função Valor

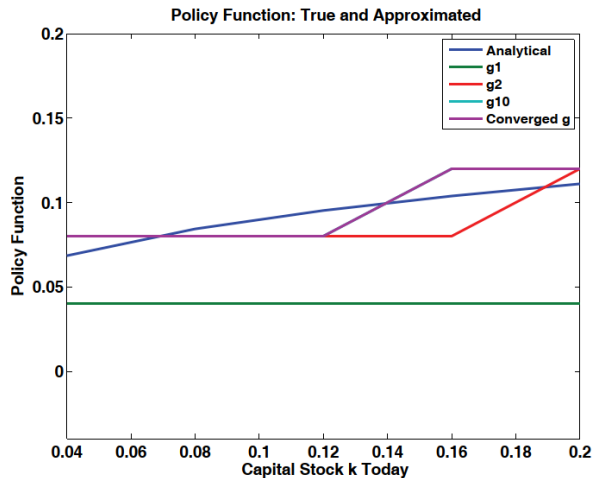
- Ao repetir mais iterações, a função valor converge para a função valor real, ou seja, quando  $v_n = v_{n+1} = Tv_n$ . No entanto, numericamente, não chegará a ser igual.





# Demais iterações - Função Política

- E também encontramos a função política,  $g(k)$ .



# Capital Estacionário $k^*$

- A partir da função política encontrada,  $g(k)$ , podemos obter o capital estacionário,  $k^*$ :
  - (1) A partir de  $k_0$ , encontrar  $k_1 = g(k_0)$
  - (2) Se  $k_0 = k_1$ , então encontramos o capital estacionário.
  - (3) Se  $k_0 \neq k_1$ , então vamos para o próximo período e verificamos se  $k_1 = g(k_1) = k_2$
  - (4) Repete-se isso até encontrar  $k_t = k_{t+1}$ .
- Note que o capital estacionário  $k^* = g(k^*)$ , ou seja,  $k^*$  é ponto fixo de  $g(k)$ .

