

Transformations de cercles orientés tangents sur la sphère de Riemann

Samuel Leblanc

RÉSUMÉ Nous classifions toutes les transformations préservant la tangence entre les cercles orientés sur la sphère de Riemann. Pour faire cela, nous allons établir une correspondance entre ces cercles et une partie du sous-espace des lagrangiens dans \mathbb{R}^4 . Nous montrerons ensuite que l'action de $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$ sur ces lagrangiens correspond aux transformations préservant la tangence. Finalement, nous introduirons les notions nécessaires pour visualiser ces transformations.

1 Introduction

À la fin du 19^e siècle, le mathématicien allemand Felix Klein suggère un nouveau paradigme en géométrie, aujourd'hui connu sous le nom de *programme d'Erlangen*. En plus d'avoir aidé à unifier les différentes géométries, ce programme transforme l'étude de la géométrie en proposant d'utiliser la théorie des groupes pour abstraire la notion de symétrie des objets étudiés.

Dans la même veine, le présent article introduira le groupe de symétries des cercles orientés tangents sur le plan complexe augmenté du point à l'infini, nommé la sphère de Riemann. Pour y arriver, nous étudierons le sous-espace des lagrangiens dans \mathbb{R}^4 et nous montrerons qu'un sous-ensemble de celui-ci est en bijection avec les cercles orientés sur la sphère de Riemann. De plus, nous montrerons que le groupe de symétries de ces lagrangiens correspond aux transformations préservant la tangence entre les cercles orientés. Cette correspondance fut étudiée en détail dans [BK21]. Finalement, nous présenterons la méthode utilisée dans [Leb23] pour visualiser ces transformations.

Partout dans l'article, nous fixons K un corps commutatif infini. De plus, K^* dénotera ce corps sans son zéro et l'ensemble des matrices sur K de taille $n \times n$ sera noté $M_n(K)$.

2 Géométrie projective

Définition 2.1. Soit V un K -espace vectoriel non trivial de dimension fini. L'espace projectif associé à V est l'ensemble quotient $(V \setminus \{0\})/\sim$, où \sim est la

J'aimerais remercier Jean-Philippe Burelle pour son temps et son aide lors de la réalisation du projet de visualisation et de la rédaction de l'article.

relation d'équivalence définie par :

$$x \sim y \text{ si et seulement si il existe } \lambda \in K^* \text{ tel que } x = \lambda y.$$

Remarque 2.2. Soit V un K -espace vectoriel non trivial de dimension n , pour $n \geq 1$. Alors, la dimension de l'espace projectif associé à V est $n - 1$.

Définition 2.3. La *droite projective complexe*, notée \mathbb{CP}^1 , est l'espace projectif associé à \mathbb{C}^2 .

Notation 2.4. Les éléments de \mathbb{CP}^1 sont les classes d'équivalences $[z]$, pour $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, que nous noterons $[z_1 : z_2]$.

Définition 2.5. La *sphère de Riemann*, notée $\hat{\mathbb{C}}$, est le plan complexe augmenté du point à l'infini, c'est-à-dire $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Il est commun d'illustrer la sphère de Riemann par la figure 1.

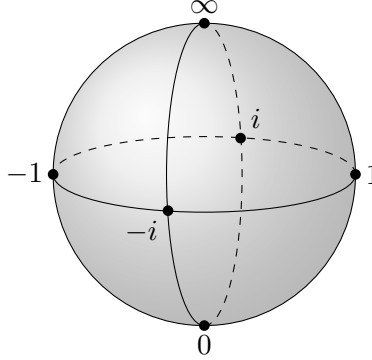


FIGURE 1 : La sphère de Riemann.

En ajoutant l'infini aux nombres complexes, il est nécessaire, pour pouvoir l'utiliser, de spécifier le comportement de ce dernier. Les règles d'opérations sur ∞ sont :

$$\begin{aligned} z + \infty &= \infty \text{ pour tout } z \in \hat{\mathbb{C}}; \\ z \cdot \infty &= \infty \text{ pour tout } z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}; \\ \frac{z}{0} &= \infty \text{ pour tout } z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}; \\ \frac{z}{\infty} &= 0 \text{ pour tout } z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Notons cependant que $\infty - \infty$, $\infty \cdot 0$, $\frac{\infty}{\infty}$ et $\frac{0}{0}$ restent indéfinis.

Soit $[z_1 : z_2] \in \mathbb{CP}^1$. Si $z_2 \neq 0$, alors $[z_1 : z_2] = \left[\frac{z_1}{z_2} : 1 \right]$ et si $z_2 = 0$, alors z_1 est nécessairement non nul et $[z_1 : z_2] = [1 : 0]$. Nous identifierons, $\{[z : 1] \in \mathbb{CP}^1\}$ à \mathbb{C} et $[1 : 0]$ à ∞ . Cela implique que nous avons une correspondance entre $\hat{\mathbb{C}}$ et \mathbb{CP}^1 et plus particulièrement, qu'il sera possible de visualiser la droite projective complexe en tant que sphère de Riemann.

2.1 Transformations de Möbius

En géométrie projective, donc sur la sphère de Riemann, il est commun de considérer les droites comme étant des cercles de rayon infini. Dans ce cas, les cercles et les droites sont appelés des cercles généralisés. Nous introduirons alors les transformations de Möbius, qui sont des transformations qui envoient des cercles généralisés à des cercles généralisés ([Tho17], Théorème 3.10).

Définition 2.6. Une *transformation de Möbius* M est une fonction

$$M : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$$

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $ad - bc \neq 0$.

Les transformations de Möbius suivent les mêmes règles définies plus haut quant aux opérations qui traitent de l'infini. Cependant, nous remarquons que $M(\infty)$ n'est pas bien défini. Nous poserons alors $M(\infty) = \frac{a}{c}$, car $M(z)$ converge à $\frac{a}{c}$ lorsque $z \rightarrow \infty$.

Proposition 2.7. ([Tho17], 3.2) *Les transformations de Möbius forment un groupe.*

Proposition 2.8. ([And05], Sect. 2.2) *Soient (z_1, z_2, z_3) , (w_1, w_2, w_3) deux triplets d'éléments distincts dans $\hat{\mathbb{C}}$. Il existe une unique transformation de Möbius M telle que $M(z_i) = w_i$ pour $i = 1, 2, 3$.*

Proposition 2.9. *Soient $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ tous deux à deux distincts. L'application $M_{\infty,0,1} : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ définie par*

$$M_{\infty,0,1}(z) = \frac{(z_3 - z_1)z - (z_3 - z_1)z_2}{(z_3 - z_2)z - (z_3 - z_2)z_1}$$

est l'unique transformation de Möbius qui envoie le triplet (z_1, z_2, z_3) à $(\infty, 0, 1)$.

Démonstration. Premièrement, $M_{\infty,0,1}$ est une transformation de Möbius, car $-(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)z_1 + (z_3 - z_2)(z_3 - z_1)z_2 \neq 0$. De plus, nous remarquons que

$$M_{\infty,0,1}(z) = \frac{(z - z_2)(z_3 - z_1)}{(z - z_1)(z_3 - z_2)}.$$

Dans ce cas, nous voyons facilement que $M_{\infty,0,1}(z_1) = \frac{w_1}{0} = \infty$, $M_{\infty,0,1}(z_2) = \frac{0}{w_2} = 0$ et $M_{\infty,0,1}(z_3) = \frac{w_3}{w_3} = 1$. Par la proposition 2.8, cette transformation est unique. \square

Le corollaire suivant nous donne une formule explicite pour la transformation de Möbius qui envoie un triplet d'éléments distincts de $\hat{\mathbb{C}}$ à un autre.

Corollaire 2.10. Soient $M_{\infty,0,1}$ l'unique transformation de Möbius qui envoie le triplet (z_1, z_2, z_3) à $(\infty, 0, 1)$ et $M'_{\infty,0,1}$ l'unique transformation de Möbius qui envoie le triplet (w_1, w_2, w_3) à $(\infty, 0, 1)$. Alors, $M'^{-1}_{\infty,0,1} \circ M_{\infty,0,1}$ est l'unique transformation de Möbius qui envoie le triplet (z_1, z_2, z_3) à (w_1, w_2, w_3) .

Définition 2.11. Le groupe spécial linéaire sur K , noté $\text{SL}(n, K)$, est le groupe des matrices de $M_n(K)$ avec un déterminant de 1.

Définition 2.12. Le groupe projectif spécial linéaire est le groupe $\text{PSL}(n, K) := \text{SL}(n, K) / \{\lambda I_n \mid \lambda \in K^*\}$.

Proposition 2.13. Le groupe des transformations de Möbius est isomorphe à $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$.

Démonstration. Soit M une transformation de Möbius. La correspondance entre $\hat{\mathbb{C}}$ et \mathbb{CP}^1 définie plus haut implique que les transformations de Möbius peuvent être définies sur \mathbb{CP}^1 . En effet, on remarque qu'en posant

$$\begin{aligned} M : \mathbb{CP}^1 &\rightarrow \mathbb{CP}^1 \\ [z : 1] &\mapsto [az + b : cz + d] \\ [1 : 0] &\mapsto [a : c], \end{aligned}$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $ad - bc \neq 0$, nous avons une transformation de Möbius. Soit $[z : w] \in \mathbb{CP}^1$ où $w \in \{0, 1\}$. La fonction M peut être décrite par la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, où $M([z : w]) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$. Puisque \mathbb{CP}^1 traite les éléments à un multiple près comme identiques, nous avons que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda \sqrt{ad-bc}} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et le résultat s'en suit. \square

3 Groupes et algèbres de Lie matriciels

Un groupe de Lie est, intuitivement, un groupe de transformations continues. L'objectif de cette section sera d'introduire les groupes de Lie matriciels, c'est-à-dire les groupes de matrices représentant des transformations continues, ainsi que leur algèbre associée.

Désormais, nous identifierons $M_n(\mathbb{C})$ à \mathbb{C}^{n^2} . Donc, la notion de convergence et celle de dérivée sur $M_n(\mathbb{C})$ seront les mêmes que sur \mathbb{C}^{n^2} .

Définition 3.1. Le groupe général linéaire sur K , noté $\text{GL}(n, K)$, est le groupe des matrices inversibles dans $M_n(K)$.

Définition 3.2. ([Hal15], 1.3) Soit A_m une suite de matrices dans $M_n(\mathbb{C})$. On dit que A_m converge à une matrice A si chaque entrée de A_m converge, lorsque $m \rightarrow \infty$, à l'entrée correspondante de A . C'est-à-dire que $(A_m)_{ij}$ converge à A_{ij} pour tout $1 \leq i, j \leq n$.

Définition 3.3. ([Hal15], 1.4) Un groupe de Lie matriciel est un sous-groupe G de $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ tel que, si A_m est une suite de matrices dans G et que A_m converge à une matrice A , alors A est soit dans G , soit non inversible.

Exemple 3.4. Les groupes $\mathrm{GL}(n, K)$ et $\mathrm{SL}(n, K)$ sont des groupes de Lie matriciels pour $K = \mathbb{R}$ et pour $K = \mathbb{C}$.

Définition 3.5. Soit $E \subseteq M_n(K)$. La *dimension* de E est le nombre maximal de paramètres indépendants pour les matrices de E .

Exemple 3.6. Le groupe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ a n^2 dimensions complexes et $(2n)^2$ dimensions réelles.

Le groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ a 3 dimensions réelles. En effet, pour tout $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, on a que $ad - bc = 1$, ce qui implique qu'au moins un de ces éléments est non nul et en divisant par celui-ci, nous pouvons exprimer les trois autres paramètres en fonction de ce dernier.

Proposition 3.7. Soit $E \subseteq M_n(K)$ un ensemble de matrices de dimension k . Si $S \subseteq E$ est un sous-ensemble de E de dimension k et chaque paramètre indépendant de $A \in S$ a le même domaine qu'un paramètre indépendant de $B \in E$, alors $S = E$.

Démonstration. Soient $A \in S$ et $B \in E$. Alors, chaque paramètre indépendant de A est un paramètre indépendant de B . Mais, le nombre de paramètres indépendants de A est égal à celui de B , ce qui implique que A et B ont les mêmes paramètres indépendants. De plus, chaque paramètre indépendant de A a le même domaine que ceux de B , ce qui implique que $S = E$. \square

Le reste de la section sera dédié à l'introduction des algèbres de Lie matricielles.

Définition 3.8. Soit $A \in M_n(K)$. L'*exponentielle* de A , notée e^A , est la série

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!},$$

où A^0 est la matrice identité.

Remarque 3.9. Soit $A \in M_n(K)$. L'exponentielle de A est une série convergente.

Proposition 3.10. ([Hal15], 2.3) Soient $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Nous avons les deux propriétés suivantes :

i. e^A est inversible et $(e^A)^{-1} = e^{-A}$;

ii. $e^{BAB^{-1}} = Be^AB^{-1}$.

Définition 3.11. ([Hal15], 3.18) Soit G un groupe de Lie matriciel. L'*algèbre de Lie* de G , notée \mathfrak{g} , est l'ensemble des matrices A telles que $e^{tA} \in G$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

La définition de l'algèbre de Lie matricielle motive la définition suivante.

Définition 3.12. ([Hal15], 3.40) Soient G un groupe de Lie matriciel et \mathfrak{g} son algèbre de Lie. Nous nommerons l'application $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ l'*application exponentielle* pour G .

Proposition 3.13. Soient G un groupe de Lie matriciel et \mathfrak{g} son algèbre de Lie. Les dimensions de G et \mathfrak{g} sont égales.

Démonstration. Soit $A \in \mathfrak{g}$. Cela implique que $e^A \in G$ et puisque que e^A a autant de paramètres indépendants que A , $\dim G \geq \dim \mathfrak{g}$.

Soit $B \in G$. Alors, $Be^AB^{-1} \in G$ et par la proposition 3.10, cette expression est égale à $e^{BAB^{-1}}$ ce qui implique que $BAB^{-1} \in \mathfrak{g}$ et puisque cette matrice a au moins autant de paramètres indépendants que B , $\dim \mathfrak{g} \geq \dim G$. \square

Lemme 3.14. ([Hal15], 3.46) Soit $G \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ un groupe de Lie matriciel avec algèbre de Lie \mathfrak{g} . Alors, une matrice A est dans \mathfrak{g} si et seulement s'il existe une courbe différentiable γ dans $M_n(\mathbb{C})$ avec $\gamma(t) \in G$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ telle que $\gamma(0) = I_n$ et $d\gamma/dt|_{t=0} = A$.

Il suit du lemme précédent que \mathfrak{g} est l'espace tangent à l'identité de G .

4 Géométrie symplectique

Définition 4.1. Soit V un espace vectoriel. Une *forme symplectique* sur V est une application bilinéaire $\omega : V \times V \rightarrow K$ telle que ω est

- i. Alternée : $\omega(u, u) = 0$ pour tout $u \in V$;
- ii. Non dégénérée : $\omega(u, v) = 0$ pour tout $v \in V$ implique que $u = 0$.

Un *espace vectoriel symplectique* est un espace vectoriel muni d'une forme symplectique.

Remarque 4.2. En fixant une base, il est possible de représenter ω par une matrice. Nous nommerons cette matrice une *forme symplectique matricielle*.

4.1 Lagrangiens

L'objectif de cette section sera de construire une application pour laquelle nous aurons une bijection entre des lagrangiens et les cercles orientés sur la sphère de Riemann.

Définition 4.3. Soient V un espace vectoriel symplectique de forme symplectique ω et $W \subseteq V$ un sous-espace vectoriel. Alors,

$$W^\perp := \{v \in V \mid \omega(u, v) = 0 \forall u \in W\}$$

est appelé l'*orthogonal* de W .

Définition 4.4. Soient V un espace vectoriel symplectique et $W \subseteq V$ un sous-espace vectoriel. Alors, W est un *lagrangien* si $W = W^\perp$.

Notation 4.5. L'ensemble des lagrangiens dans V sera noté $\text{Lag}(V)$.

Nous laisserons la proposition suivante sans démonstration.

Proposition 4.6. *Soient V un espace vectoriel symplectique et $W \subseteq V$ un sous-espace vectoriel. Alors, $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$.*

À partir de maintenant, nous nous intéresserons à l'espace vectoriel symplectique \mathbb{R}^4 avec la forme symplectique matricielle

$$\Omega := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $R \subseteq \mathbb{R}^4$. Dans ce cas, un lagrangien $L \in \text{Lag}(\mathbb{R}^4)$ sera un ensemble $L = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid u^T \Omega v = 0 \forall u \in R\}$.

La proposition 4.6 implique directement le corollaire suivant.

Corollaire 4.7. *La dimension de $\text{Lag}(\mathbb{R}^4)$ est 2.*

Dans l'optique de travailler avec des matrices, nous représenterons $L \in \text{Lag}(\mathbb{R}^4)$ par une matrice réelle de taille 4×2 , où l'ensemble des vecteurs $l \in L$ sera donné par l'ensemble des combinaisons linéaires des colonnes de L . Cela entraîne que L reste inchangé suite à la multiplication à droite par une matrice 2×2 inversible.

En prenant des vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^4$ et en calculant $u^T \Omega v$, nous obtenons les conditions suivantes pour être un lagrangien.

Proposition 4.8. *Soient $u = (u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4)^T, v = (v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4)^T \in \mathbb{R}^4$. Alors, $(u \mid v) \in \text{Lag}(\mathbb{R}^4)$ si et seulement si $u_1 v_4 + u_2 v_3 - u_3 v_2 - u_4 v_1 = 0$.*

Proposition 4.9. *Soit $L \in \text{Lag}(\mathbb{R}^4)$. Si le bloc 2×2 inférieur est inversible, alors*

$$L = \begin{pmatrix} a & -b+c \\ b+c & a \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pour $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Démonstration. En multipliant à droite par l'inverse du bloc inférieur, nous obtenons

$$L = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pour $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$. Par la proposition 4.8, nous avons que $x_1 = x_4$ et donc que

$$L = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons le résultat en posant $x_1 = a$, $x_2 = -b + c$ et $x_3 = b + c$ pour $a, b, c \in \mathbb{R}$. On remarque que x_2 et x_3 restent indépendants l'un de l'autre puisque $-b + c$ et $b + c$ le sont. \square

Soit $L \in \text{Lag}(\mathbb{R}^4)$ et considérons la bijection

$$j : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{C}^2$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u_1 + iu_2 \\ u_3 + iu_4 \end{pmatrix}.$$

Définissons l'application $P : L \rightarrow \mathbb{CP}^1$, qui envoie $l \in L$ à sa classe d'équivalence dans \mathbb{CP}^1 . Si $\rho : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{CP}^1$ est l'application qui envoie naturellement un élément de \mathbb{C}^2 à sa classe d'équivalence dans \mathbb{CP}^1 , alors $P = \rho \circ j$ et nous obtenons, pour $L = (u \mid v)$, que

$$\begin{aligned} P(l) &= \rho\left(j\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} t\right)\right) \\ &= \rho\left(\begin{pmatrix} u_1 + iu_2 \\ u_3 + iu_4 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} v_1 + iv_2 \\ v_3 + iv_4 \end{pmatrix} t\right) \\ &= [(u_1 + iu_2)s + (v_1 + iv_2)t : (u_3 + iu_4)s + (v_3 + iv_4)t] \end{aligned}$$

où $s, t \in \mathbb{R}$ et $(s, t) \neq (0, 0)$.

En considérant cette application, nous obtenons le résultat suivant.

Proposition 4.10. *Soit $L \in \text{Lag}(\mathbb{R}^4)$. Si*

$$L = \begin{pmatrix} a & -b + c \\ b + c & a \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

alors $P(L)$ est un cercle de centre $a + ib$ et de rayon $|c|$.

Remarque 4.11. Nous dirons qu'un point est un cercle de rayon nul.

Démonstration. Le résultat suit d'un calcul direct. En effet,

$$\begin{aligned} P(L) &= [(a + ib + ic)s + (-b + c + ia)t : s + it] \\ &= [(a + ib)(s + it) + ic(s - it) : s + it] \\ &= \left[a + bi + ic \frac{s - it}{s + it} : 1 \right] \end{aligned}$$

et $\left\{ \frac{s - it}{s + it} \mid s, t \in \mathbb{R} \text{ et } (s, t) \neq (0, 0) \right\} = \{e^{i\theta} \mid \theta \in [0, 2\pi)\}$ ce qui correspond au cercle centré de rayon unitaire. \square

Pour le reste de la section, nous ne considérerons que les lagrangiens $L \in \text{Lag}(\mathbb{R}^4)$ tels que $P(L)$ est un cercle de rayon non nul.

Définition 4.12. Soit $L \in \text{Lag}(\mathbb{R}^4)$. L'*orientation* de $P(L)$ est le signe de c , noté $\text{sgn}(c)$.

Suivant la définition précédente, il est possible d'assigner un vecteur pointant vers l'extérieur ou vers le centre du cercle à chaque point du cercle.

Proposition 4.13. Soient $L \in \text{Lag}(\mathbb{R}^4)$ et $l \in L$. Si $l = (l_1 \ l_2 \ l_3 \ l_4)^T$, alors $P(l)$ est de direction $\text{sgn}(c)i \frac{l_3 - il_4}{l_3 + il_4}$.

Démonstration. Par la proposition 4.9,

$$\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b + c \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} -b + c \\ a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t$$

ce qui implique que $l_3 = s$ et $l_4 = t$, pour $s, t \in \mathbb{R}$ où $(s, t) \neq (0, 0)$. Puisque

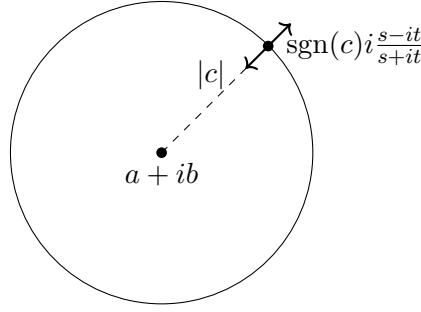
$$P(l) = \left[a + bi + ic \frac{s - it}{s + it} : 1 \right],$$

nous avons que la direction par rapport au centre du cercle est déterminée par $\text{sgn}(c)i \frac{l_3 - il_4}{l_3 + il_4}$. \square

Définition 4.14. Soient $L_1, L_2 \in \text{Lag}(\mathbb{R}^4)$. On dit que L_1 et L_2 sont *tangents* si $P(L_1)$ et $P(L_2)$ ont un unique point en commun et que la direction à ce point est la même.

La prochaine proposition nous donne une condition suffisante et nécessaire pour que deux lagrangiens soient tangents.

Proposition 4.15. Soient $L_1, L_2 \in \text{Lag}(\mathbb{R}^4)$. Alors, L_1 et L_2 sont tangents si et seulement si la dimension de $L_1 \cap L_2$ est de 1.

FIGURE 2 : $P(L)$ est un cercle de centre $a + ib$ et de rayon $|c|$.

Démonstration. Supposons L_1 et L_2 tangents. Par définition de la tangence, nous savons qu'il existe $l_1 \in L_1$ et $l_2 \in L_2$ tels que $P(l_1) = P(l_2)$ et donc que $\rho(j(l_1)) = \rho(j(l_2))$. Posons $h_1 := j(l_1)$ et $h_2 := j(l_2)$. Puisque j est inversible, nous avons que $P(l_1) = P(l_2)$ si et seulement si que $\rho(h_1) = \rho(h_2)$ si et seulement si $h_1 = \lambda h_2$ pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Nous prétendons qu'en fait, $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Supposons l'inverse et notons

$$h_1 = \begin{pmatrix} u_1 + iu_2 \\ u_3 + iu_4 \end{pmatrix} \text{ et } h_2 = (a + ib) \begin{pmatrix} u_1 + iu_2 \\ u_3 + iu_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au_1 - bu_2 + i(au_2 + bu_1) \\ au_3 - bu_4 + i(au_4 + bu_3) \end{pmatrix}.$$

Cela implique que

$$l_2 = j^{-1}(h_2) = \begin{pmatrix} au_1 - bu_2 \\ au_2 + bu_1 \\ au_3 - bu_4 \\ au_4 + bu_3 \end{pmatrix},$$

mais $j^{-1}(h_2) \in L_2$ que si $b = 0$ ce qui implique que $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Donc, $l_1 = \lambda l_2$ ce qui implique que $l_1, l_2 \in L_1$ et $l_1, l_2 \in L_2$ ce qui implique que $\dim(L_1 \cap L_2) \geq 1$ et nous avons l'égalité par l'unicité.

Supposons $\dim(L_1 \cap L_2) = 1$. Alors, $L_1 \cap L_2 = \{\lambda l \mid \lambda \in \mathbb{R}^*\}$ ce qui implique que $P(l_1) = P(l_2)$ pour tous $l_1, l_2 \in L_1 \cap L_2$ ce qui implique que $P(L_1)$ et $P(L_2)$ ont un unique point en commun et que la direction à ce point est la même. \square

4.2 Groupe symplectique

Définition 4.16. Le *groupe symplectique*, noté $\text{Sp}(n, K)$, est le groupe des transformations linéaires d'un K -espace vectoriel symplectique de dimension n préservant la forme symplectique. Dans notre cas, nous nous intéresserons au groupe

$$\text{Sp}(4, \mathbb{R}) := \{A \in M_4(\mathbb{R}) \mid A^T \Omega A = \Omega\}.$$

La proposition suivante étant bien connue, nous omettrons la démonstration.

Proposition 4.17. $\text{Sp}(4, \mathbb{R})$ est un groupe de Lie matriciel.

Définition 4.18. Soient G un groupe, e l'élément neutre de G et E un ensemble. Une *action* de G sur E est une opération

$$\begin{aligned} \cdot : G \times E &\rightarrow E \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

telle que

- i. $e \cdot x = x$ pour tout $x \in E$;
- ii. $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$ pour tous $g, h \in G$ et pour tout $x \in E$.

Dans ce cas, nous dirons que G agit sur E .

Proposition 4.19. Soient $A \in \text{Sp}(4, \mathbb{R})$ et $L \in \text{Lag}(\mathbb{R}^4)$. Alors, $A \cdot L := AL$ est une action de $\text{Sp}(4, \mathbb{R})$ sur $\text{Lag}(\mathbb{R}^4)$.

Démonstration. Soient $A \in \text{Sp}(4, \mathbb{R})$ et $L \in \text{Lag}(\mathbb{R}^4)$. Nous montrerons uniquement que l'opération est bien définie, c'est-à-dire que $AL \in \text{Lag}(\mathbb{R}^4)$, car les deux axiomes d'une action de groupe suivent directement de la multiplication matricielle. Bien sûr, nous savons que $A^T \Omega A = \Omega$ et que $L^T \Omega L = 0$. Cela implique que $L^T A^T \Omega AL = 0$ et donc que $AL \in \text{Lag}(\mathbb{R}^4)$. \square

Proposition 4.20. Soient $A \in \text{Sp}(4, \mathbb{R})$ et $L_1, L_2 \in \text{Lag}(\mathbb{R}^4)$. Si L_1 et L_2 sont tangents, alors AL_1 et AL_2 sont tangents.

Démonstration. Supposons L_1 et L_2 tangents. Par la proposition 4.15, nous savons que $\dim(L_1 \cap L_2) = 1$. Il suit de la proposition 4.19 que AL_1 et AL_2 sont dans $\text{Lag}(\mathbb{R}^4)$ et par la formule de Grassmann et le fait que A est inversible, nous avons que $\dim(AL_1 \cap AL_2) = 1$ ce qui implique que AL_1 et AL_2 sont tangents. \square

Lemme 4.21. L'action de $\text{Sp}(4, \mathbb{R})$ sur $\text{Lag}(\mathbb{R}^4)$ donne toutes les transformations préservants la tangence.

Démonstration. La proposition 4.20 implique que l'action de $\text{Sp}(4, \mathbb{R})$ sur $\text{Lag}(\mathbb{R}^4)$ donne des transformations préservants la tangence. Nous montrerons qu'elle donne toutes ces transformations.

Posons $\xi := A^T \Omega A$ avec A inversible et supposons que $L^T \xi L = 0$ si et seulement si $L \in \text{Lag}(\mathbb{R}^4)$. Alors, nous savons que ξ impose les mêmes conditions sur L que Ω . C'est-à-dire que, pour tout $u, v \in \mathbb{R}^4$, $(u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4)^T \xi v = (-u_4 \ -u_3 \ u_2 \ u_1)^T v$ ce qui implique que $\xi = \Omega$ et donc que $A \in \text{Sp}(4, \mathbb{R})$. \square

Considérons l'application

$$\begin{aligned} f : M_2(\mathbb{C}) &\rightarrow M_4(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a_1 + ia_2 & b_1 + ib_2 \\ c_1 + ic_2 & d_1 + id_2 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 & b_1 & -b_2 \\ a_2 & a_1 & b_2 & b_1 \\ c_1 & -c_2 & d_1 & -d_2 \\ c_2 & c_1 & d_2 & d_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

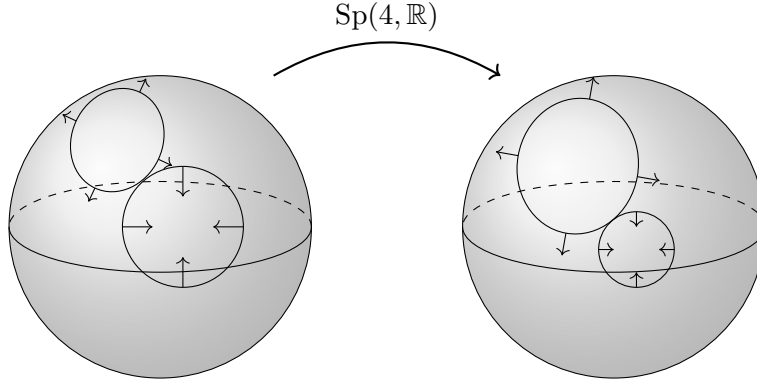


FIGURE 3 : Action de $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$ sur deux lagrangiens tangents, visualisée sur $\hat{\mathbb{C}}$.

et posons $\mathrm{PSL}_{2,\mathbb{C}}(4, \mathbb{R}) := f(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}))$, c'est-à-dire l'image de f où le domaine est restreint à $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$. Nous avons le résultat trivial suivant.

Proposition 4.22. *L'ensemble $\mathrm{PSL}_{2,\mathbb{C}}(4, \mathbb{R})$ est un groupe pour la multiplication matricielle et ce groupe est isomorphe à $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$.*

Proposition 4.23. *Le groupe $\mathrm{PSL}_{2,\mathbb{C}}(4, \mathbb{R})$ est un sous-groupe de Lie matriciel de $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$.*

Démonstration. Soit $A \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$. Alors, $\det(A) = 1$ ce qui implique plus précisément que $\Re(\det(A)) = 1$ et que $\Im(\det(A)) = 0$. Ces conditions impliquent que $f(A)^T \Omega f(A) = \Omega$ et donc que $f(A) \in \mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$. Par la proposition 4.22, $\mathrm{PSL}_{2,\mathbb{C}}(4, \mathbb{R})$ est un groupe et donc est un sous-groupe de $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$.

Soit B_m une suite de matrices de $\mathrm{PSL}_{2,\mathbb{C}}(4, \mathbb{R})$ qui converge à B . Pour toute B_i dans B_m , $\det(f^{-1}(B_i)) = 1$. Puisque le déterminant est un polynôme et donc continue, $\det(f^{-1}(B)) = 1$ ce qui implique, par isomorphisme, que B est inversible et que $B \in \mathrm{PSL}_{2,\mathbb{C}}(4, \mathbb{R})$. \square

Les propositions 4.22 et 4.23 impliquent que, à isomorphisme près, le groupe des transformations de Möbius agit sur $\mathrm{Lag}(\mathbb{R}^4)$ et plus particulièrement, que l'action préserve la tangence.

Le lemme suivant, avec la proposition 3.13, nous aidera à trouver la dimension de $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$ en nous donnant la forme exacte des matrices dans $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{R})$.

Lemme 4.24. *Soit $A \in M_4(\mathbb{R})$. Alors, $A \in \mathfrak{sp}(4, \mathbb{R})$ si et seulement si $A^T \Omega + \Omega A = 0$.*

Démonstration. Supposons $A \in \mathfrak{sp}(4, \mathbb{R})$. Alors, par le lemme 3.14, il existe une courbe différentiable $\gamma \in M_4(\mathbb{C})$ avec $\gamma(t) \in \mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, telle que $\gamma(0) = I$ et $d\gamma/dt|_{t=0} = A$. Cela implique que $\gamma(t)^T \Omega \gamma(t) = \Omega$ et en dérivant, nous obtenons $\frac{d}{dt} \gamma(t)^T|_{t=0} \Omega \gamma(0) + \gamma(0)^T \Omega \frac{d}{dt} \gamma(t)|_{t=0} = 0$ ce qui nous donne $A^T \Omega + \Omega A = 0$.

Soient $t \in \mathbb{R}$ et $A \in M_4(\mathbb{R})$ telle que $A^T \Omega + \Omega A = 0$. Cela implique que $tA^T \Omega = -\Omega tA$ et puisque Ω est inversible, nous avons que $tA^T = -\Omega tA \Omega^{-1}$. La

proposition 3.10 implique que $e^{tA^T} = \Omega e^{-tA} \Omega^{-1}$ ce qui implique que $e^{tA^T} \Omega e^{tA} = \Omega$ et donc que $e^{tA} \in \mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$ ce qui implique que $A \in \mathfrak{sp}(4, \mathbb{R})$. \square

Proposition 4.25. *La dimension de $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$ est 10.*

Démonstration. Soit $A \in \mathfrak{sp}(4, \mathbb{R})$. Par le lemme 4.24, $A^T \Omega + \Omega A = 0$ ce qui implique que $\Omega A = -A^T \Omega$ et puisque $-\Omega = \Omega^T$, nous avons que $\Omega A = (\Omega A)^T =: S$ une matrice symétrique. Mais, Ω est inversible ce qui implique que $A = \Omega^{-1} S$. Cela implique que les 6 éléments sous la diagonale de A sont connus si et seulement si les 6 éléments au dessus de la diagonale de A sont connus. Alors, le nombre de paramètres pour A est $4^2 - 6 = 10$ ce qui implique que $\dim \mathfrak{sp}(4, \mathbb{R}) = 10$ et par la proposition 3.13, $\dim \mathrm{Sp}(4, \mathbb{R}) = 10$. \square

Proposition 4.26. *Posons*

$$\mathcal{E}_{4, \mathbb{R}} := \left\{ e^A \left| A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & c \\ b & -a & c & 0 \\ 0 & d & a & -b \\ d & 0 & -b & -a \end{pmatrix}, \text{ où } a, b, c, d \in \mathbb{R} \right. \right\}.$$

Alors, $\mathcal{E}_{4, \mathbb{R}}$ est un sous-ensemble de $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$.

Démonstration. Soit $e^A \in \mathcal{E}_{4, \mathbb{R}}$. Nous pouvons vérifier que $A^T \Omega + \Omega A = 0$ ce qui implique, par le lemme 4.24, que $A \in \mathfrak{sp}(4, \mathbb{R})$ ce qui implique, par définition de l'algèbre de Lie matricielle, que $e^A \in \mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$. \square

Le résultat suivant aidera grandement à la visualisation de l'action de $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$.

Théorème 4.27. *L'ensemble $\{AB \mid A \in \mathrm{PSL}_{2, \mathbb{C}}(4, \mathbb{R}) \text{ et } B \in \mathcal{E}_{4, \mathbb{R}}\}$ est une paramétrisation du groupe $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$.*

Démonstration. Par la proposition 4.23, $\mathrm{PSL}_{2, \mathbb{C}}(4, \mathbb{R}) \subseteq \mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$ et par la proposition 4.26, $\mathcal{E}_{4, \mathbb{R}} \subseteq \mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$. Puisque $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$ est un groupe, nous avons que le produit d'un élément de $\mathrm{PSL}_{2, \mathbb{C}}(4, \mathbb{R})$ avec un élément de $\mathcal{E}_{4, \mathbb{R}}$ est dans $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$.

Les transformations de Möbius est un groupe de 3 dimensions complexes et donc de 6 dimensions réelles, ce qui implique, par la proposition 4.22, que $\mathrm{PSL}_{2, \mathbb{C}}(4, \mathbb{R})$ est un groupe à 6 dimensions. Par définition de $\mathcal{E}_{4, \mathbb{R}}$, cet ensemble est paramétré par 4 paramètres et donc a 4 dimensions. Nous prétendons que $\mathrm{PSL}_{2, \mathbb{C}}(4, \mathbb{R}) \cap \mathcal{E}_{4, \mathbb{R}} = \{I\}$ ce qui implique que l'ensemble des produits des éléments de $\mathrm{PSL}_{2, \mathbb{C}}(4, \mathbb{R})$ et de $\mathcal{E}_{4, \mathbb{R}}$ a $6 + 4 = 10$ dimensions.

Soit $e^A \in \mathcal{E}_{4, \mathbb{R}}$ avec paramètres $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et posons $\lambda := (a^2 + b^2 + cd)$. Puisque $A^2 = \lambda I$, $A^{2n} = \lambda^n I$ et $A^{2n+1} = \lambda^n A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ce qui implique que

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!} \lambda I + \frac{1}{3!} \lambda A + \cdots = \alpha I + \beta A$$

pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ et donc que $e^A \in \mathrm{PSL}_{2, \mathbb{C}}(4, \mathbb{R})$ si et seulement si $A = 0$ si et seulement si $e^A = I$. De plus, les paramètres de $\mathrm{PSL}_{2, \mathbb{C}}(4, \mathbb{R})$ et de $\mathcal{E}_{4, \mathbb{R}}$ ont \mathbb{R} comme domaine, ce qui implique, par la proposition 3.7, que cet ensemble égale $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$. \square

5 Visualisation

Nous présenterons en détail le programme [Leb23] pour visualiser de manière interactive les transformations préservant la tangence entre les cercles orientés sur la sphère de Riemann.

5.1 Sélectionner et appliquer la transformation

La proposition 4.19 implique que $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$ agit sur $\mathrm{Lag}(\mathbb{R}^4)$ et le lemme 4.21 implique que c'est le groupe des transformations préservant la tangence. Par le théorème 4.27, nous pouvons paramétrer $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$ par la multiplication des éléments de $\mathrm{PSL}_{2, \mathbb{C}}(4, \mathbb{R})$ avec les éléments de $\mathcal{E}_{4, \mathbb{R}}$. Par la proposition 4.22, $\mathrm{PSL}_{2, \mathbb{C}}(4, \mathbb{R})$ est le groupe des transformations de Möbius. Il suit de la proposition 2.8 qu'étant donné deux triplets d'éléments distincts (z_1, z_2, z_3) et (w_1, w_2, w_3) de $\hat{\mathbb{C}}$, il existe une unique transformation de Möbius qui envoie z_i à w_i pour $i = 1, 2, 3$.

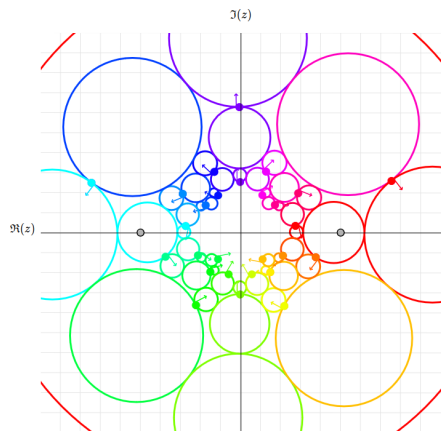
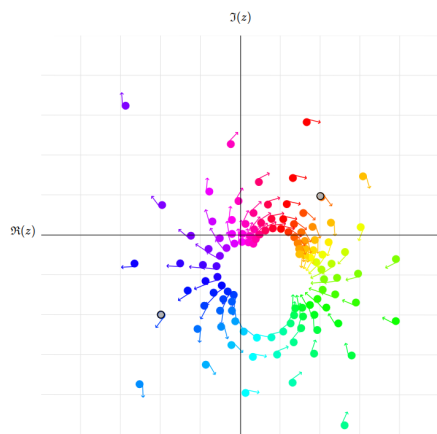
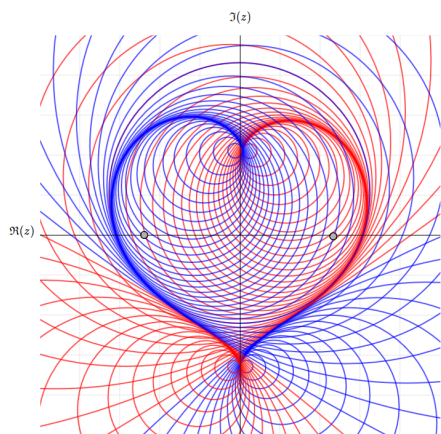
Pour choisir une transformation, nous sélectionnons les quatre paramètres pour obtenir $A \in \mathcal{E}_{4, \mathbb{R}}$ et en fixant deux points, par exemple $z_1 = w_1$ et $z_2 = w_2$, nous pouvons glisser la souris pour spécifier $z_3 \mapsto w_3$. Le corollaire 2.10 nous donne l'unique transformation de Möbius représentant cette transformation et les propositions 2.13 et 4.22 nous donnent la matrice $B \in \mathrm{PSL}_{2, \mathbb{C}}(4, \mathbb{R})$ de la transformation. En multipliant A et B , nous obtenons un élément de $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$ et il suffit qu'à le multiplier aux lagrangiens représentant un cercle pour appliquer la transformation.

5.2 Afficher les cercles orientés

La proposition 4.19 implique que ABL pour $L \in \mathrm{Lag}(\mathbb{R}^4)$ est un lagrangien. Supposons que le bloc 2×2 inférieur de ABL est inversible et que $ABL = (u \mid v)$. Pour visualiser le cercle associé à ce lagrangien, nous multiplions à droite la matrice inverse du bloc inférieur pour obtenir $(u' \mid v')$, la forme à la proposition 4.9. La proposition 4.10 nous donne le centre et le rayon du cercle, que nous pouvons afficher. Pour visualiser l'orientation, nous illustrons le point, ainsi que le vecteur, associé à u . La position de u nous est donnée par $P(u)$ et la direction de u nous est donnée par la proposition 4.13.

Références

- [And05] James W. ANDERSON : *Hyperbolic Geometry*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer London, 2 édition, 2005.
- [BK21] Jean-Philippe BURELLE et Ryan KIRK : Piecewise circular curves and positivity, 2021.
- [Hal15] Brian C. HALL : *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations*. Graduate Texts in Mathematics. Springer Cham, 2 édition, 2015.

FIGURE 4 : Action de $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$ sur des lagrangiens $L \in \mathrm{Lag}(\mathbb{R}^4)$.FIGURE 5 : Action de $\mathrm{PSL}_{2,\mathbb{C}}(4, \mathbb{R})$ sur des vecteurs $l \in L$.FIGURE 6 : $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$ agit aussi sur la *surface de Veronese*.

- [Leb23] Samuel LEBLANC : riemannsphere. <https://github.com/samueleblanc/riemannsphere>, 2023.
- [Tho17] Kevin THOUIN : Géométrie hyperbolique : le demi-plan de poincaré. *Cahiers Mathématiques de l'Université de Sherbrooke (CaMUS)*, (6): 29–44, 2017.

SAMUEL LEBLANC

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Courriel: Samuel.LebLANC6@USherbrooke.ca