

Transformations de cercles orientés tangents sur la sphère de Riemann

Samuel Leblanc

RÉSUMÉ Nous classifions toutes les transformations linéaires préservant la tangence entre les cercles orientés sur la sphère de Riemann. Pour faire cela, nous allons établir une correspondance entre ces cercles et l'espace des lagrangiens dans \mathbb{R}^4 . Nous montrerons ensuite que l'action de $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$ sur ces lagrangiens correspond aux transformations préservant la tangence. Finalement, nous introduirons les notions nécessaires pour visualiser ces transformations.

1 Introduction

À la fin du 19^e siècle, le mathématicien allemand Felix Klein suggère un nouveau paradigme en géométrie, aujourd'hui connu sous le nom de *programme d'Erlangen*. En plus d'avoir aidé à unifier les différentes géométries, ce programme transforme l'étude de la géométrie en proposant d'utiliser la théorie des groupes pour abstraire la notion de symétrie des objets étudiés.

Dans la même veine, le présent article introduira le groupe des transformations linéaires qui envoient des cercles orientés tangents, c'est-à-dire qu'ils ont un point en commun et la direction à ce point est la même, à des cercles orientés tangents sur le plan complexe augmenté du point à l'infini, nommé la sphère de Riemann. Pour y arriver, nous étudierons l'espace des lagrangiens dans \mathbb{R}^4 et nous montrerons que celui-ci est en bijection avec les cercles orientés sur la sphère de Riemann. De plus, nous montrerons que le groupe de symétries de ces lagrangiens correspond aux transformations linéaires préservant la tangence entre les cercles orientés. Cette correspondance fut premièrement étudiée en détail dans [Lie72] et plus récemment dans [BK21]. Finalement, nous présenterons la méthode utilisée dans [Leb23] pour visualiser ces transformations.

Partout dans l'article, K désignera le corps des nombres complexes ou le corps des nombres réels. De plus, K^* dénotera ce corps sans son zéro et l'ensemble des matrices sur K de taille $n \times n$ sera noté $M_n(K)$.

2 Géométrie projective

Définition 2.1. Soit V un K -espace vectoriel de dimension finie. L'*espace projectif* associé à V est l'ensemble quotient $(V \setminus \{0\})/\sim$, où \sim est la relation

J'aimerais remercier Jean-Philippe Burelle pour son temps et son aide lors de la réalisation du projet de visualisation et de la rédaction de l'article.

d'équivalence définie par :

$$x \sim y \text{ si et seulement s'il existe } \lambda \in K^* \text{ tel que } x = \lambda y.$$

Remarque 2.2. Soit V un K -espace vectoriel de dimension n , pour $n \geq 1$. Alors, la dimension de l'espace projectif associé à V est $n - 1$.

Définition 2.3. La *droite projective complexe*, notée \mathbb{CP}^1 , est l'espace projectif associé à \mathbb{C}^2 .

Notation 2.4. Les éléments de \mathbb{CP}^1 sont les classes d'équivalences $[z]$, pour $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, que nous noterons $[z_1 : z_2]$.

Définition 2.5. La *sphère de Riemann*, notée $\hat{\mathbb{C}}$, est le plan complexe augmenté du point à l'infini, c'est-à-dire $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Il est commun d'illustrer la sphère de Riemann par la figure 1.

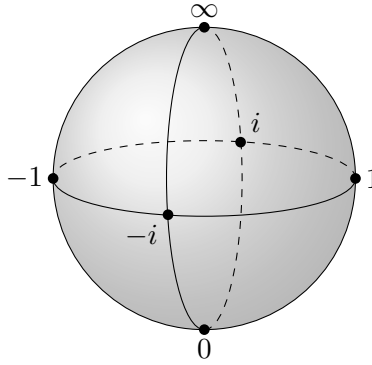


FIGURE 1 : La sphère de Riemann.

En ajoutant l'infini aux nombres complexes, il est nécessaire, pour pouvoir l'utiliser, de spécifier le comportement de ce dernier. Les règles d'opérations sur ∞ sont :

$$\begin{aligned} z + \infty &= \infty && \text{pour tout } z \in \hat{\mathbb{C}}; \\ z \cdot \infty &= \infty && \text{pour tout } z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}; \\ \frac{z}{0} &= \infty && \text{pour tout } z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}; \\ \frac{z}{\infty} &= 0 && \text{pour tout } z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Notons cependant que $\infty - \infty$, $\infty \cdot 0$, $\frac{\infty}{\infty}$ et $\frac{0}{0}$ restent indéfinis.

Soit $[z_1 : z_2] \in \mathbb{CP}^1$. Si $z_2 \neq 0$, alors $[z_1 : z_2] = \left[\frac{z_1}{z_2} : 1 \right]$ et si $z_2 = 0$, alors z_1 est nécessairement non nul et $[z_1 : z_2] = [1 : 0]$. Nous identifierons, $\{[z : 1] \in \mathbb{CP}^1\}$ à \mathbb{C} et $[1 : 0]$ à ∞ . Cela implique que nous avons une correspondance entre $\hat{\mathbb{C}}$ et \mathbb{CP}^1 et plus particulièrement, qu'il sera possible de visualiser la droite projective complexe en tant que sphère de Riemann.

2.1 Transformations de Möbius

En géométrie projective, donc sur la sphère de Riemann, il est commun de considérer les droites comme étant des cercles de rayon infini. Avec cette notion plus générale de cercle, nous introduirons les transformations de Möbius, qui sont des transformations qui envoient des cercles à des cercles ([Tho17], Théorème 3.10).

Définition 2.6. Une *transformation de Möbius* M est une fonction

$$M : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$$

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $ad - bc \neq 0$.

Les transformations de Möbius suivent les mêmes règles définies plus haut quant aux opérations qui traitent de l'infini. Cependant, nous remarquons que $M(\infty)$ n'est pas bien défini. Nous poserons alors $M(\infty) = \frac{a}{c}$, car $M(z)$ converge à $\frac{a}{c}$ lorsque $z \rightarrow \infty$.

Proposition 2.7. ([Tho17], 3.2) *Les transformations de Möbius forment un groupe.*

Proposition 2.8. ([And05], Sect. 2.2) *Soient $(z_1, z_2, z_3), (w_1, w_2, w_3)$ deux triplets d'éléments distincts dans $\hat{\mathbb{C}}$. Il existe une unique transformation de Möbius M telle que $M(z_i) = w_i$ pour $i = 1, 2, 3$.*

Proposition 2.9. *Soient $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ tous deux à deux distincts. L'application $M_{\infty,0,1} : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ définie par*

$$M_{\infty,0,1}(z) = \frac{(z_3 - z_1)z - (z_3 - z_1)z_2}{(z_3 - z_2)z - (z_3 - z_2)z_1}$$

est l'unique transformation de Möbius qui envoie le triplet (z_1, z_2, z_3) à $(\infty, 0, 1)$.

Démonstration. Premièrement, $M_{\infty,0,1}$ est une transformation de Möbius, car $(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)(z_2 - z_1) \neq 0$. De plus, nous remarquons que

$$M_{\infty,0,1}(z) = \frac{(z - z_2)(z_3 - z_1)}{(z - z_1)(z_3 - z_2)}.$$

Dans ce cas, nous voyons facilement que $M_{\infty,0,1}(z_1) = \frac{w_1}{0} = \infty$, $M_{\infty,0,1}(z_2) = \frac{0}{w_2} = 0$ et $M_{\infty,0,1}(z_3) = \frac{w_3}{w_3} = 1$ pour $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}^*$. En vertu de la proposition 2.8, cette transformation est unique. \square

Le corollaire suivant nous donne une formule explicite pour la transformation de Möbius qui envoie un triplet d'éléments distincts de $\hat{\mathbb{C}}$ à un autre.

Corollaire 2.10. *Soient $M_{\infty,0,1}$ l'unique transformation de Möbius qui envoie le triplet (z_1, z_2, z_3) à $(\infty, 0, 1)$ et $M'_{\infty,0,1}$ l'unique transformation de Möbius qui envoie le triplet (w_1, w_2, w_3) à $(\infty, 0, 1)$. Alors, $M'^{-1}_{\infty,0,1} \circ M_{\infty,0,1}$ est l'unique transformation de Möbius qui envoie le triplet (z_1, z_2, z_3) à (w_1, w_2, w_3) .*

Définition 2.11. Le *groupe spécial linéaire* sur K , noté $\mathrm{SL}(n, K)$, est le groupe des matrices de $M_n(K)$ avec un déterminant de 1.

Définition 2.12. Le *groupe projectif spécial linéaire* est le groupe $\mathrm{PSL}(n, K) := \mathrm{SL}(n, K) / \{\lambda I_n \mid \lambda \in K^*\}$.

Proposition 2.13. *Le groupe des transformations de Möbius est isomorphe à $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$.*

Démonstration. Soit M une transformation de Möbius. La correspondance entre $\hat{\mathbb{C}}$ et \mathbb{CP}^1 définie plus haut implique que les transformations de Möbius peuvent être définies sur \mathbb{CP}^1 . En effet, on remarque qu'en posant

$$\begin{aligned} M : \mathbb{CP}^1 &\rightarrow \mathbb{CP}^1 \\ [z : 1] &\mapsto [az + b : cz + d] \\ [1 : 0] &\mapsto [a : c], \end{aligned}$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $ad - bc \neq 0$, nous avons une transformation de Möbius. Soit $[z : w] \in \mathbb{CP}^1$ où $w \in \{0, 1\}$. La fonction M peut être décrite par la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, où $M([z : w]) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$. Puisque \mathbb{CP}^1 traite les éléments à un multiple près comme identiques, nous avons que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ définit la même transformation de Möbius que $\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$. En particulier, en prenant $\lambda = \frac{1}{\sqrt{ad-bc}}$, nous avons que chaque transformation peut être définie par une matrice de déterminant 1. Le résultat s'en suit. \square

3 Groupes et algèbres de Lie matriciels

Un groupe de Lie est, intuitivement, un groupe de transformations continu. L'objectif de cette section sera d'introduire les groupes de Lie matriciels, c'est-à-dire les groupes de Lie où les éléments sont des matrices, ainsi que leur algèbre associée.

Définition 3.1. Le *groupe général linéaire* sur K , noté $\mathrm{GL}(n, K)$, est le groupe des matrices inversibles dans $M_n(K)$.

Désormais, nous identifierons $M_n(\mathbb{C})$ à \mathbb{C}^{n^2} . Donc, la notion de convergence et celle de dérivée sur $M_n(\mathbb{C})$ seront les mêmes que sur \mathbb{C}^{n^2} .

Définition 3.2. ([Hal15], 1.4) Un *groupe de Lie matriciel* est un sous-groupe G de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ tel que, si A_m est une suite de matrices dans G et que A_m converge à une matrice A , c'est-à-dire que $(A_m)_{ij}$ converge à A_{ij} pour tous $1 \leq i, j \leq n$, alors A est soit dans G , soit non inversible.

Exemple 3.3. Les groupes $\mathrm{GL}(n, K)$ et $\mathrm{SL}(n, K)$ sont des groupes de Lie matriciels.

Définition 3.4. ([Hal15], 1.9) Soit G un groupe de Lie matriciel. On dit que G est *connexe*, si pour toutes $A, B \in G$, il existe une courbe continue $\gamma(t) \in G$, où $a \leq t \leq b$, avec $\gamma(a) = A$ et $\gamma(b) = B$.

En topologie, la définition précédente désigne plutôt la *connexité par arcs*. Cependant, puisqu'un groupe de Lie matriciel est connexe, selon la définition usuelle, si et seulement s'il est connexe par arcs, nous ne ferons pas la distinction entre les deux termes.

Nous introduirons maintenant les algèbres de Lie matricielles.

Définition 3.5. Soit $A \in M_n(K)$. L'exponentielle de A , notée e^A , est la série

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!},$$

où A^0 est la matrice identité.

Proposition 3.6. ([Hal15], 2.1) Soit $A \in M_n(K)$. L'exponentielle de A est une série convergente et est une fonction continue de A .

Proposition 3.7. ([Hal15], 2.3) Soient $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Nous avons les deux propriétés suivantes :

- i. e^A est inversible et $(e^A)^{-1} = e^{-A}$;
- ii. $e^{BAB^{-1}} = Be^AB^{-1}$.

Définition 3.8. ([Hal15], 3.18) Soit G un groupe de Lie matriciel. L'algèbre de Lie de G , notée \mathfrak{g} , est l'ensemble des matrices A telles que $e^{tA} \in G$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Puisqu'une algèbre de Lie matricielle est aussi un espace vectoriel, nous avons la définition suivante.

Définition 3.9. Soient G un groupe de Lie matriciel et \mathfrak{g} son algèbre de Lie. La *dimension* de \mathfrak{g} est sa dimension en tant qu'espace vectoriel. De plus, la dimension de G est la dimension de \mathfrak{g} .

Exemple 3.10. Le groupe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ a n^2 dimensions complexes et $2n^2$ dimensions réelles.

Le groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ a 3 dimensions réelles. En effet, pour tout $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, on a que $ad - bc = 1$, ce qui implique qu'au moins un de ces éléments est non nul et en divisant par celui-ci, nous pouvons exprimer les trois autres paramètres en fonction de ce dernier.

Puisque la démonstration de la proposition suivante nécessite des notions qui sortent du cadre de l'article, elle sera omise.

Proposition 3.11. Soient G un groupe de Lie matriciel connexe et $H \subseteq G$ un sous-groupe de Lie matriciel. Si les dimensions de G et H sont égales, alors $G = H$.

Lemme 3.12. ([Hal15], 3.46) Soit $G \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ un groupe de Lie matriciel avec algèbre de Lie \mathfrak{g} . Alors, une matrice A est dans \mathfrak{g} si et seulement s'il existe une courbe différentiable γ dans $M_n(\mathbb{C})$ avec $\gamma(t) \in G$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ telle que $\gamma(0) = I_n$ et $d\gamma/dt|_{t=0} = A$.

Il suit du lemme précédent que \mathfrak{g} est l'espace tangent à l'identité de G .

4 Géométrie symplectique

Définition 4.1. Soit V un K -espace vectoriel. Une *forme symplectique* sur V est une application bilinéaire $\omega : V \times V \rightarrow K$ telle que ω est

- i. Alternée : $\omega(u, u) = 0$ pour tout $u \in V$;
- ii. Non dégénérée : $\omega(u, v) = 0$ pour tout $v \in V$ implique que $u = 0$.

Un *espace vectoriel symplectique* est un espace vectoriel muni d'une forme symplectique.

Remarque 4.2. En fixant une base, il est possible de représenter ω par une matrice Ω , où $\omega(u, v) = u^T \Omega v$. Nous dirons que Ω est une *forme symplectique matricielle*.

4.1 Lagrangiens

L'objectif de cette section sera de construire une application pour laquelle nous aurons une bijection entre les lagrangiens et les cercles orientés sur la sphère de Riemann.

Définition 4.3. Soient V un espace vectoriel symplectique de forme symplectique ω et $W \subseteq V$ un sous-espace vectoriel. Alors,

$$W^\perp := \{v \in V \mid \omega(u, v) = 0 \forall u \in W\}$$

est appelé l'*orthogonal* de W .

Définition 4.4. Soient V un espace vectoriel symplectique et $W \subseteq V$ un sous-espace vectoriel. Alors, W est un *lagrangien* si $W = W^\perp$.

Notation 4.5. L'ensemble des lagrangiens dans V sera noté $\text{Lag}(V)$.

Nous laisserons la proposition suivante sans démonstration.

Proposition 4.6. Soient V un espace vectoriel symplectique et $W \subseteq V$ un sous-espace vectoriel. Alors, $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$.

À partir de maintenant, nous nous intéresserons à l'espace vectoriel symplectique \mathbb{R}^4 avec la forme symplectique matricielle

$$\Omega := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La proposition 4.6 implique directement le corollaire suivant.

Corollaire 4.7. La dimension de $\text{Lag}(\mathbb{R}^4)$ est 2.

Dans l'optique de travailler avec des matrices, nous représenterons $L \in \text{Lag}(\mathbb{R}^4)$ par une matrice réelle de taille 4×2 , où l'ensemble des vecteurs $l \in L$ sera donné par l'ensemble des combinaisons linéaires des colonnes de L . Cela entraîne que L reste inchangé suite à la multiplication à droite par une matrice 2×2 inversible.

En prenant des vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^4$ et en calculant $u^T \Omega v$, nous obtenons les conditions suivantes pour être un lagrangien.

Proposition 4.8. *Soient $u = (u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4)^T, v = (v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4)^T \in \mathbb{R}^4$. Alors, $(u \mid v) \in \text{Lag}(\mathbb{R}^4)$ si et seulement si $u_1 v_4 + u_2 v_3 - u_3 v_2 - u_4 v_1 = 0$.*

Proposition 4.9. *Soit $L \in \text{Lag}(\mathbb{R}^4)$. Si le bloc 2×2 inférieur est inversible, alors*

$$L = \begin{pmatrix} a & -b + c \\ b + c & a \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pour $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Démonstration. En multipliant à droite par l'inverse du bloc inférieur, nous obtenons

$$L = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pour $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$. Par la proposition 4.8, nous avons que $x_1 = x_4$ et donc que

$$L = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons le résultat en posant $x_1 = a$, $x_2 = -b + c$ et $x_3 = b + c$ pour $a, b, c \in \mathbb{R}$. On remarque que x_2 et x_3 restent indépendants l'un de l'autre puisque $-b + c$ et $b + c$ le sont. \square

Soit $L \in \text{Lag}(\mathbb{R}^4)$ et considérons la bijection

$$j : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{C}^2$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u_1 + iu_2 \\ u_3 + iu_4 \end{pmatrix}.$$

Définissons l'application $P : L \rightarrow \mathbb{CP}^1$, qui envoie $l \in L$ à sa classe d'équivalence dans \mathbb{CP}^1 . Si $\rho : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{CP}^1$ est l'application qui envoie naturellement un élément

de \mathbb{C}^2 à sa classe d'équivalence dans \mathbb{CP}^1 , alors $P = \rho \circ j$ et nous obtenons, pour $L = (u \mid v)$, que

$$\begin{aligned} P(l) &= \rho(j(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} t)) \\ &= \rho(\begin{pmatrix} u_1 + iu_2 \\ u_3 + iu_4 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} v_1 + iv_2 \\ v_3 + iv_4 \end{pmatrix} t) \\ &= [(u_1 + iu_2)s + (v_1 + iv_2)t : (u_3 + iu_4)s + (v_3 + iv_4)t] \end{aligned}$$

où $s, t \in \mathbb{R}$ et $(s, t) \neq (0, 0)$.

En considérant cette application, nous obtenons le résultat suivant.

Proposition 4.10. *Soit $L \in \text{Lag}(\mathbb{R}^4)$. Si*

$$L = \begin{pmatrix} a & -b + c \\ b + c & a \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

alors $P(L)$ est un cercle de centre $a + ib$ et de rayon $|c|$.

Remarque 4.11. Nous dirons qu'un point est un cercle de rayon nul.

Démonstration. Le résultat suit d'un calcul direct. En effet,

$$\begin{aligned} P(L) &= [(a + ib + ic)s + (-b + c + ia)t : s + it] \\ &= [(a + ib)(s + it) + ic(s - it) : s + it] \\ &= \left[a + bi + ic \frac{s - it}{s + it} : 1 \right] \end{aligned}$$

et $\{\frac{s - it}{s + it} \mid s, t \in \mathbb{R} \text{ et } (s, t) \neq (0, 0)\} = \{e^{i\theta} \mid \theta \in [0, 2\pi)\}$ ce qui correspond au cercle centré de rayon unitaire. \square

Notation 4.12. L'ensemble des lagrangiens $L \in \text{Lag}(\mathbb{R}^4)$ tels que $P(L)$ est un cercle de rayon non nul sera noté $\text{Lag}^\circ(\mathbb{R}^4)$.

Définition 4.13. Soit $L \in \text{Lag}^\circ(\mathbb{R}^4)$. L'*orientation* de $P(L)$ est le signe de c , noté $\text{sgn}(c)$.

Suivant la définition précédente, il est possible d'assigner un vecteur pointant vers l'extérieur ou vers le centre du cercle à chaque point du cercle.

Proposition 4.14. *Soient $L \in \text{Lag}^\circ(\mathbb{R}^4)$ et $l \in L$. Si $l = (l_1 \ l_2 \ l_3 \ l_4)^T$, alors $P(l)$ est de direction $\text{sgn}(c)i \frac{l_3 - il_4}{l_3 + il_4}$.*

Démonstration. Par la proposition 4.9,

$$\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b+c \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} -b+c \\ a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t$$

ce qui implique que $l_3 = s$ et $l_4 = t$, pour $s, t \in \mathbb{R}$ où $(s, t) \neq (0, 0)$. Puisque

$$P(l) = \left[a + bi + ic \frac{s - it}{s + it} : 1 \right],$$

nous avons que la direction par rapport au centre du cercle est déterminée par $\operatorname{sgn}(c)i \frac{l_3 - il_4}{l_3 + il_4}$. \square

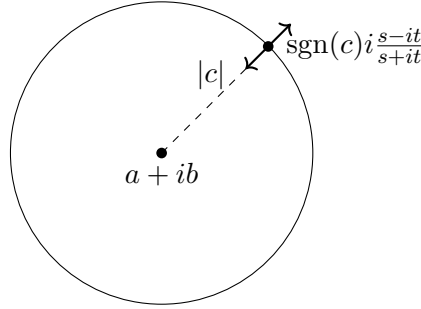


FIGURE 2 : $P(L)$ est un cercle de centre $a + ib$ et de rayon $|c|$.

Définition 4.15. Soient $L_1, L_2 \in \operatorname{Lag}^\circ(\mathbb{R}^4)$. On dit que L_1 et L_2 sont *tangents* si $P(L_1)$ et $P(L_2)$ ont un unique point en commun et que la direction à ce point est la même.

La prochaine proposition nous donne une condition suffisante et nécessaire pour que deux lagrangiens soient tangents.

Proposition 4.16. Soient $L_1, L_2 \in \operatorname{Lag}^\circ(\mathbb{R}^4)$. Alors, L_1 et L_2 sont tangents si et seulement si la dimension de $L_1 \cap L_2$ est de 1.

Démonstration. Supposons L_1 et L_2 tangents. Par définition de la tangence, nous savons qu'il existe $l_1 \in L_1$ et $l_2 \in L_2$ tels que $P(l_1) = P(l_2)$ et donc que $\rho(j(l_1)) = \rho(j(l_2))$. Posons $h_1 := j(l_1)$ et $h_2 := j(l_2)$. Puisque j est inversible, nous avons que $P(l_1) = P(l_2)$ si et seulement si que $\rho(h_1) = \rho(h_2)$ si et seulement si $h_1 = \lambda h_2$ pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Nous prétendons qu'en fait, $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Supposons l'inverse et notons

$$h_1 = \begin{pmatrix} u_1 + iu_2 \\ u_3 + iu_4 \end{pmatrix} \text{ et } h_2 = (a + ib) \begin{pmatrix} u_1 + iu_2 \\ u_3 + iu_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au_1 - bu_2 + i(au_2 + bu_1) \\ au_3 - bu_4 + i(au_4 + bu_3) \end{pmatrix}.$$

Cela implique que

$$l_2 = j^{-1}(h_2) = \begin{pmatrix} au_1 - bu_2 \\ au_2 + bu_1 \\ au_3 - bu_4 \\ au_4 + bu_3 \end{pmatrix},$$

mais $j^{-1}(h_2) \in L_2$ que si $b = 0$ ce qui implique que $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Donc, $l_1 = \lambda l_2$ ce qui implique que $l_1, l_2 \in L_1$ et $l_1, l_2 \in L_2$ ce qui implique que $\dim(L_1 \cap L_2) \geq 1$ et nous avons l'égalité par l'unicité.

Supposons $\dim(L_1 \cap L_2) = 1$. Alors, $L_1 \cap L_2 = \{\lambda l \mid \lambda \in \mathbb{R}^*\}$ ce qui implique que $P(l_1) = P(l_2)$ pour tous $l_1, l_2 \in L_1 \cap L_2$ ce qui implique que $P(L_1)$ et $P(L_2)$ ont un unique point en commun et que la direction à ce point est la même. \square

Soit $L \in \text{Lag}(\mathbb{R}^4) \setminus \text{Lag}^\circ(\mathbb{R}^4)$. Nous laisserons sans démonstration et sans plus de détail le fait que $P(L)$ est un point ou est une droite. Puisque l'orientation de $P(L)$ n'est pas bien définie et pour ne pas avoir qu'à considérer les éléments de $\text{Lag}^\circ(\mathbb{R}^4)$, nous dirons que deux lagrangiens $L_1, L_2 \in \text{Lag}(\mathbb{R}^4)$ sont *tangent* si $\dim(L_1 \cap L_2) = 1$. Cette définition est bien sûr cohérente avec celle pour les cercles, en plus d'être applicable à tous les éléments de $\text{Lag}(\mathbb{R}^4)$.

4.2 Groupe symplectique

Définition 4.17. Le *groupe symplectique*, noté $\text{Sp}(n, K)$, est le groupe des transformations linéaires d'un K -espace vectoriel symplectique de dimension n préservant la forme symplectique. Dans notre cas, nous nous intéresserons au groupe

$$\text{Sp}(4, \mathbb{R}) := \{A \in M_4(\mathbb{R}) \mid A^T \Omega A = \Omega\}.$$

La proposition suivante étant bien connue, nous omettrons la démonstration.

Proposition 4.18. $\text{Sp}(4, \mathbb{R})$ est un groupe de Lie matriciel.

Une propriété importante de $\text{Sp}(4, \mathbb{R})$ est donnée par la proposition suivante.

Proposition 4.19. ([GM10], 5.6) *Le groupe $\text{Sp}(4, \mathbb{R})$ est connexe.*

Définition 4.20. Soient G un groupe, e l'élément neutre de G et E un ensemble. Une *action* de G sur E est une opération

$$\begin{aligned} \cdot : G \times E &\rightarrow E \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

telle que

- i. $e \cdot x = x$ pour tout $x \in E$;
- ii. $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$ pour tous $g, h \in G$ et pour tout $x \in E$.

Dans ce cas, nous dirons que G agit sur E .

Proposition 4.21. Soient $A \in \text{Sp}(4, \mathbb{R})$ et $L \in \text{Lag}(\mathbb{R}^4)$. Alors, $A \cdot L := AL$ est une action de $\text{Sp}(4, \mathbb{R})$ sur $\text{Lag}(\mathbb{R}^4)$.

Démonstration. Soient $A \in \text{Sp}(4, \mathbb{R})$ et $L \in \text{Lag}(\mathbb{R}^4)$. Nous montrerons uniquement que l'opération est bien définie, c'est-à-dire que $AL \in \text{Lag}(\mathbb{R}^4)$, car les deux axiomes d'une action de groupe suivent directement de la multiplication matricielle. Bien sûr, nous savons que $A^T \Omega A = \Omega$ et que $L^T \Omega L = 0$. Cela implique que $L^T A^T \Omega A L = 0$ et donc que $AL \in \text{Lag}(\mathbb{R}^4)$. \square

Théorème 4.22. L'action de $\text{Sp}(4, \mathbb{R})$ sur $\text{Lag}(\mathbb{R}^4)$ donne toutes les transformations linéaires préservant la tangence.

Démonstration. Soient $A \in \text{Sp}(4, \mathbb{R})$ et $L_1, L_2 \in \text{Lag}(\mathbb{R}^4)$ tels que $\dim(L_1 \cap L_2) = 1$. Il suit de la proposition 4.21 que AL_1 et AL_2 sont dans $\text{Lag}(\mathbb{R}^4)$ et par la formule de Grassmann et le fait que A est inversible, nous avons que $\dim(AL_1 \cap AL_2) = 1$ ce qui implique que AL_1 et AL_2 sont tangents et la transformation est linéaire, car A est une matrice.

De plus, il est nécessaire que A soit dans $\text{Sp}(4, \mathbb{R})$, puisque c'est exactement le groupe des transformations linéaires qui préserve Ω et donc le groupe qui envoie des lagrangiens à des lagrangiens. \square

Puisque $-I$ agit comme l'identité sur $\text{Lag}(\mathbb{R}^4)$, le *groupe projectif symplectique* $\text{PSp}(4, \mathbb{R}) := \text{Sp}(4, \mathbb{R}) / \{-I, I\}$ est le groupe des transformations linéaires préservant la tangence. Pour le reste de l'article, nous ne considérerons pas ce fait et nous nous concentrerons sur $\text{Sp}(4, \mathbb{R})$, puisque c'est ce groupe qui sera utilisé pour visualiser ces transformations.

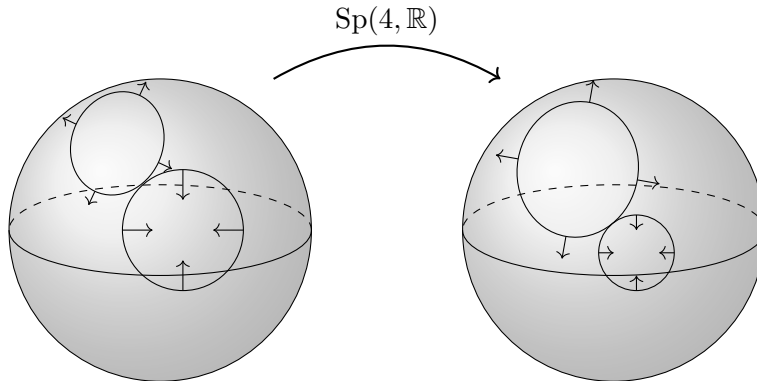


FIGURE 3 : Action de $\text{Sp}(4, \mathbb{R})$ sur deux lagrangiens tangents, visualisée sur $\hat{\mathbb{C}}$.

Considérons l'application

$$f : M_2(\mathbb{C}) \rightarrow M_4(\mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} a_1 + ia_2 & b_1 + ib_2 \\ c_1 + ic_2 & d_1 + id_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 & b_1 & -b_2 \\ a_2 & a_1 & b_2 & b_1 \\ c_1 & -c_2 & d_1 & -d_2 \\ c_2 & c_1 & d_2 & d_1 \end{pmatrix}.$$

Nous avons le résultat trivial suivant.

Proposition 4.23. *L'ensemble $f(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}))$ est un groupe pour la multiplication matricielle et ce groupe est isomorphe à $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$.*

Proposition 4.24. *Le groupe $f(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}))$ est un sous-groupe de Lie matriciel de $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$.*

Démonstration. Soit $A \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$. Alors, $\det(A) = 1$ ce qui implique plus précisément que $\Re(\det(A)) = 1$ et que $\Im(\det(A)) = 0$. Ces conditions impliquent que $f(A)^T \Omega f(A) = \Omega$ et donc que $f(A) \in \mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$. Par la proposition 4.23, $f(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}))$ est un groupe et donc est un sous-groupe de $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$.

Soit B_m une suite de matrices de $f(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}))$ qui converge à B . Pour toute B_i dans B_m , $\det(f^{-1}(B_i)) = 1$. Puisque le déterminant est un polynôme et donc continue, $\det(f^{-1}(B)) = 1$ ce qui implique, par isomorphisme, que B est inversible et que $B \in f(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}))$. \square

Les propositions 4.23 et 4.24 impliquent que, à isomorphisme près, le groupe des transformations de Möbius agit sur $\mathrm{Lag}(\mathbb{R}^4)$ et plus particulièrement, que l'action préserve la tangence.

Le lemme suivant nous aidera à trouver la dimension de $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$ en nous donnant la forme exacte des matrices dans $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{R})$.

Lemme 4.25. *Soit $A \in M_4(\mathbb{R})$. Alors, $A \in \mathfrak{sp}(4, \mathbb{R})$ si et seulement si $A^T \Omega + \Omega A = 0$.*

Démonstration. Supposons $A \in \mathfrak{sp}(4, \mathbb{R})$. Alors, par le lemme 3.12, il existe une courbe différentiable $\gamma \in M_4(\mathbb{C})$ avec $\gamma(t) \in \mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, telle que $\gamma(0) = I$ et $d\gamma/dt|_{t=0} = A$. Cela implique que $\gamma(t)^T \Omega \gamma(t) = \Omega$ et en dérivant, nous obtenons $\frac{d}{dt} \gamma(t)^T|_{t=0} \Omega \gamma(0) + \gamma(0)^T \Omega \frac{d}{dt} \gamma(t)|_{t=0} = 0$ ce qui nous donne $A^T \Omega + \Omega A = 0$.

Soient $t \in \mathbb{R}$ et $A \in M_4(\mathbb{R})$ telle que $A^T \Omega + \Omega A = 0$. Cela implique que $tA^T \Omega = -\Omega tA$ et puisque Ω est inversible, nous avons que $tA^T = -\Omega tA \Omega^{-1}$. La proposition 3.7 implique que $e^{tA^T} = \Omega e^{-tA} \Omega^{-1}$ ce qui implique que $e^{tA^T} \Omega e^{tA} = \Omega$ et donc que $e^{tA} \in \mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$ ce qui implique que $A \in \mathfrak{sp}(4, \mathbb{R})$. \square

Proposition 4.26. *La dimension de $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$ est 10.*

Démonstration. Soit $A \in \mathfrak{sp}(4, \mathbb{R})$. Par le lemme 4.25, $A^T \Omega + \Omega A = 0$ ce qui implique que $\Omega A = -A^T \Omega$ et puisque $-\Omega = \Omega^T$, nous avons que $\Omega A = (\Omega A)^T =: S$ une matrice symétrique. Mais, Ω est inversible ce qui implique que $A = \Omega^{-1} S$. Cela implique que les 6 éléments sous la diagonale de A sont connus si et seulement si les 6 éléments au dessus de la diagonale de A sont connus. Alors, le nombre de paramètres pour A est $4^2 - 6 = 10$ ce qui implique que $\dim \mathfrak{sp}(4, \mathbb{R}) = 10$ et donc que $\dim \mathrm{Sp}(4, \mathbb{R}) = 10$. \square

Proposition 4.27. *Posons*

$$\mathcal{E}_{4,\mathbb{R}} := \left\{ e^A \left| A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & c \\ b & -a & c & 0 \\ 0 & d & a & -b \\ d & 0 & -b & -a \end{pmatrix}, \text{ où } a, b, c, d \in \mathbb{R} \right. \right\}.$$

Alors, $\mathcal{E}_{4,\mathbb{R}}$ est un sous-ensemble de $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$.

Démonstration. Soit $e^A \in \mathcal{E}_{4,\mathbb{R}}$. Nous pouvons vérifier que $A^T \Omega + \Omega A = 0$ ce qui implique, par le lemme 4.25, que $A \in \mathfrak{sp}(4, \mathbb{R})$ ce qui implique, par définition de l'algèbre de Lie matricielle, que $e^A \in \mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$. \square

Proposition 4.28. *Considérons l'ensemble généré par $f(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}))$ et $\mathcal{E}_{4,\mathbb{R}}$, que nous noterons $\langle f(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})), \mathcal{E}_{4,\mathbb{R}} \rangle$. Alors, $\langle f(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})), \mathcal{E}_{4,\mathbb{R}} \rangle$ est un sous-groupe matriciel de Lie de $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$.*

Démonstration. Par la proposition 4.24, $f(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})) \subseteq \mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$ et par la proposition 4.27, $\mathcal{E}_{4,\mathbb{R}} \subseteq \mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$. Puisque $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$ est un groupe, nous avons que le produit d'un nombre fini éléments de $f(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}))$ avec un nombre fini d'éléments de $\mathcal{E}_{4,\mathbb{R}}$ est dans $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$. Donc, $\langle f(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})), \mathcal{E}_{4,\mathbb{R}} \rangle \subseteq \mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$.

Il en découle des propositions 3.7 et 4.24 que chaque élément dans l'ensemble $\langle f(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})), \mathcal{E}_{4,\mathbb{R}} \rangle$ est inversible, ce qui implique que pour $A, B \in \langle f(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})), \mathcal{E}_{4,\mathbb{R}} \rangle$, nous avons que $AB^{-1} \in \langle f(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})), \mathcal{E}_{4,\mathbb{R}} \rangle$ ce qui implique que $\langle f(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})), \mathcal{E}_{4,\mathbb{R}} \rangle$ est un sous-groupe de $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$.

Soit C_m une suite de matrices dans $\mathcal{E}_{4,\mathbb{R}}$ qui converge à C . On remarque que cette suite peut être définie par e^{D_m} , où D_m converge à D , car, par la proposition 3.6, l'application exponentielle est continue. Par la proposition 3.7, e^D est inversible et il est facilement vérifiable que D répond aux conditions pour que $e^D \in \mathcal{E}_{4,\mathbb{R}}$. Alors, $\langle f(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})), \mathcal{E}_{4,\mathbb{R}} \rangle$ est un groupe de Lie matriciel et donc un sous-groupe matriciel de Lie de $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$. \square

Proposition 4.29. *Le groupe $\langle f(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})), \mathcal{E}_{4,\mathbb{R}} \rangle$ a 10 dimensions.*

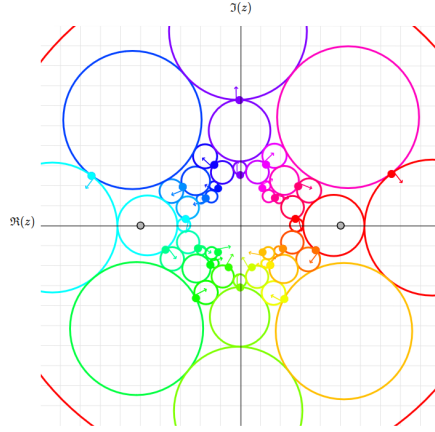
Le résultat suivant aidera grandement à la visualisation de l'action de $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$.

Théorème 4.30. *Les groupes $\langle f(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})), \mathcal{E}_{4,\mathbb{R}} \rangle$ et $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$ sont égaux.*

Démonstration. Par la proposition 4.28, $\langle f(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})), \mathcal{E}_{4,\mathbb{R}} \rangle$ est un sous-groupe de Lie matriciel de $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$ et par la proposition 4.29, ce sous-groupe est de 10 dimensions. De plus, par la proposition 4.19, $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$ est connexe et par la proposition 4.26, ce groupe a aussi 10 dimensions. Cela implique, par la proposition 3.11, que $\langle f(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})), \mathcal{E}_{4,\mathbb{R}} \rangle = \mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$. \square

5 Visualisation

Nous présenterons en détail le programme [Leb23] pour visualiser de manière interactive un sous-ensemble de 10 dimensions des transformations préservant la tangence entre les cercles orientés sur la sphère de Riemann.

FIGURE 4 : Action de $\text{Sp}(4, \mathbb{R})$ sur des lagrangiens $L \in \text{Lag}(\mathbb{R}^4)$.

5.1 Sélectionner et appliquer la transformation

La proposition 4.21 implique que $\text{Sp}(4, \mathbb{R})$ agit sur $\text{Lag}(\mathbb{R}^4)$ et le théorème 4.22 implique que c'est le groupe des transformations linéaires préservant la tangence. Par le théorème 4.30, nous pouvons paramétrer $\text{Sp}(4, \mathbb{R})$ par la multiplication des éléments de $f(\text{PSL}(2, \mathbb{C}))$ avec les éléments de $\mathcal{E}_{4, \mathbb{R}}$. Par la proposition 4.23, $f(\text{PSL}(2, \mathbb{C}))$ est le groupe des transformations de Möbius. Il suit de la proposition 2.8 qu'étant donné deux triplets d'éléments distincts (z_1, z_2, z_3) et (w_1, w_2, w_3) de $\hat{\mathbb{C}}$, il existe une unique transformation de Möbius qui envoie z_i à w_i pour $i = 1, 2, 3$.

Pour choisir une transformation, nous sélectionnons les quatre paramètres pour obtenir $A \in \mathcal{E}_{4, \mathbb{R}}$ et en fixant deux points, par exemple $z_1 = w_1$ et $z_2 = w_2$, nous pouvons glisser la souris pour spécifier $z_3 \mapsto w_3$. Le corollaire 2.10 nous donne l'unique transformation de Möbius représentant cette transformation et les propositions 2.13 et 4.23 nous donnent la matrice $B \in f(\text{PSL}(2, \mathbb{C}))$ de la transformation. En multipliant A et B , nous obtenons un élément de $\text{Sp}(4, \mathbb{R})$ et il suffit qu'à le multiplier aux lagrangiens représentant un cercle pour appliquer la transformation.

5.2 Afficher les cercles orientés

La proposition 4.21 implique que ABL pour $L \in \text{Lag}(\mathbb{R}^4)$ est un lagrangien. Supposons que le bloc 2×2 inférieur de ABL est inversible et que $ABL = (u \mid v)$. Pour visualiser le cercle associé à ce lagrangien, nous multiplions à droite la matrice inverse du bloc inférieur pour obtenir $(u' \mid v')$, la forme à la proposition 4.9. La proposition 4.10 nous donne le centre et le rayon du cercle, que nous pouvons afficher. Pour visualiser l'orientation, nous illustrons le point, ainsi que le vecteur, associé à u . La position de u nous est donnée par $P(u)$ et la direction de u nous est donnée par la proposition 4.14.

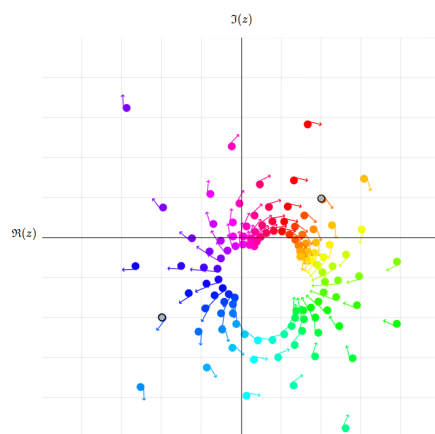


FIGURE 5 : Action de $f(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}))$ sur des vecteurs $l \in L$.

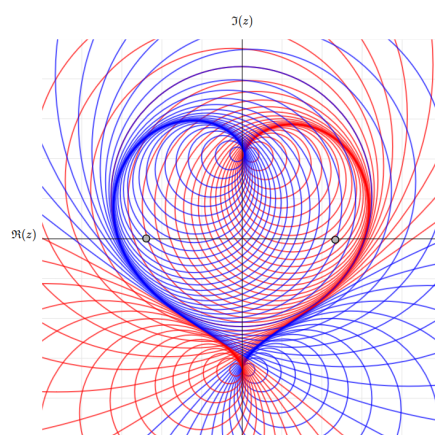


FIGURE 6 : $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$ agit aussi sur la *surface de Veronese*.

Références

- [And05] James W. ANDERSON : *Hyperbolic Geometry*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer London, 2 édition, 2005.
- [BK21] Jean-Philippe BURELLE et Ryan KIRK : Piecewise circular curves and positivity, 2021.
- [GM10] Ved Prakash GUPTA et Mukund Madhav MISHRA : On the topology of certain matrix groups, 2010. <https://www.jnu.ac.in/Faculty/vedgupta/matrix-gps-gupta-mishra.pdf>.
- [Hal15] Brian C. HALL : *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations*. Graduate Texts in Mathematics. Springer Cham, 2 édition, 2015.
- [Leb23] Samuel LEBLANC : riemannsphere. <https://github.com/samueleblanc/riemannsphere>, 2023.
- [Lie72] Sophus LIE : On complexes - in particular, line and sphere complexes - with applications to the theory of partial differential equations. *Mathematische Annalen*, (5):145–208, 1872.
- [Tho17] Kevin THOUIN : Géométrie hyperbolique : le demi-plan de poincaré. *Cahiers Mathématiques de l'Université de Sherbrooke (CaMUS)*, (6): 29–44, 2017.

SAMUEL LEBLANC

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Courriel: Samuel.LebLANC6@USherbrooke.ca