Visualisation de transformations sur la sphère de Riemann

Samuel Leblanc

Université de Sherbrooke

21 mars 2024

Géométrie projective

Partout dans cette présentation, K désignera le corps des nombres complexes ou le corps des nombres réels. Notons $K^* := K \setminus \{0\}$.

Géométrie projective

Partout dans cette présentation, K désignera le corps des nombres complexes ou le corps des nombres réels. Notons $K^* := K \setminus \{0\}$.

Définition 1.1

Soit V un K-espace vectoriel. L'**espace projectif** associé à V est l'ensemble quotient $(V \setminus \{0\})/\sim$, où $\sim$ est la relation d'équivalence définie par :

$$x \sim y \text{ si et seulement s'il existe } \lambda \in K^* \text{ tel que } x = \lambda y.$$

Géométrie projective

Partout dans cette présentation, K désignera le corps des nombres complexes ou le corps des nombres réels. Notons $K^* := K \setminus \{0\}$.

Définition 1.1

Soit V un K-espace vectoriel. L'**espace projectif** associé à V est l'ensemble quotient $(V \setminus \{0\})/\sim$, où $\sim$ est la relation d'équivalence définie par :

$$x \sim y \text{ si et seulement s'il existe } \lambda \in K^* \text{ tel que } x = \lambda y.$$

Définition 1.2

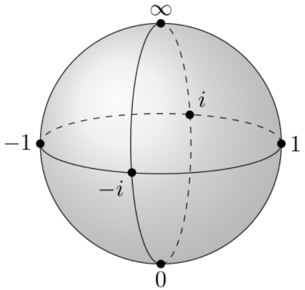
La **droite projective complexe**, notée $\mathbb{CP}^1$, est l'espace projectif associé à $\mathbb{C}^2$.

Les éléments de $\mathbb{CP}^1$ sont les classes d'équivalences $[z]$, pour $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, que nous noterons $[z_1 : z_2]$.

Géométrie projective

Définition 1.3

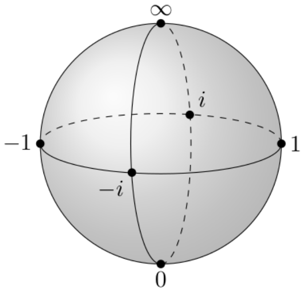
La **sphère de Riemann**, notée $\hat{\mathbb{C}}$, est le plan complexe augmenté du point à l'infini, c'est-à-dire $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.



Géométrie projective

Définition 1.3

La **sphère de Riemann**, notée $\hat{\mathbb{C}}$, est le plan complexe augmenté du point à l'infini, c'est-à-dire $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.



Théorème 1.4

Les espaces $\hat{\mathbb{C}}$ *et* $\mathbb{CP}^1$ *sont homéomorphes.*

Géométrie projective

Définition 1.5

Une **transformation de Möbius** M est une fonction

$$M : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$$
$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $ad - bc \neq 0$.

Définition 1.5

Une **transformation de Möbius** M est une fonction

$$M : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$$
$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $ad - bc \neq 0$.

Proposition 1.6

Les transformations de Möbius forment un groupe pour la composition de fonctions, que nous noterons $\mathcal{M}$.

Géométrie projective

Définition 1.5

Une **transformation de Möbius** M est une fonction

$$\begin{aligned} M : \hat{\mathbb{C}} &\to \hat{\mathbb{C}} \\ z &\mapsto \frac{az+b}{cz+d} \end{aligned}$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $ad - bc \neq 0$.

Proposition 1.6

Les transformations de Möbius forment un groupe pour la composition de fonctions, que nous noterons $\mathcal{M}$.

Lemme 1.7

Soient (z_1, z_2, z_3), (w_1, w_2, w_3) deux triplets composés d'éléments distincts dans $\hat{\mathbb{C}}$. Il existe une unique transformation de Möbius M telle que $M(z_i) = w_i$ pour $i = 1, 2, 3$.

Définition 1.8

Le **groupe spécial linéaire** sur K, noté $\mathrm{SL}(n, K)$, est le groupe des matrices de $M_n(K)$ avec un déterminant de 1.

Définition 1.9

Le **groupe projectif spécial linéaire** est le groupe

$$\mathrm{PSL}(n, K) \coloneqq \mathrm{SL}(n, K)/\{-I, I\}.$$

Géométrie projective

Définition 1.8

Le **groupe spécial linéaire** sur K, noté $\mathrm{SL}(n, K)$, est le groupe des matrices de $M_n(K)$ avec un déterminant de 1.

Définition 1.9

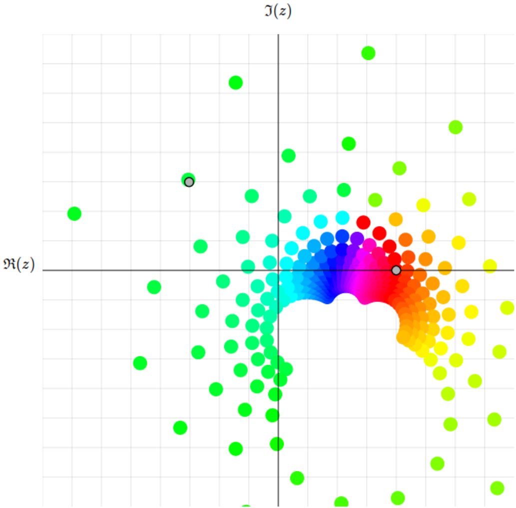
Le **groupe projectif spécial linéaire** est le groupe

$$\mathrm{PSL}(n, K) \coloneqq \mathrm{SL}(n, K)/\{-I, I\}.$$

Lemme 1.10

Le groupe des transformations de Möbius $\mathcal{M}$ est isomorphe à $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$.

Transformation de Möbius



Géométrie symplectique

Définition 2.1

Soit V un K-espace vectoriel. Une **forme symplectique** sur V est une application bilinéaire $\omega : V \times V \to K$ telle que ω est

i. Alternée : $\omega(u, u) = 0$ pour tout $u \in V$;
ii. Non dégénérée : $\omega(u, v) = 0$ pour tout $v \in V$ implique que $u = 0$.

Un **espace vectoriel symplectique** est un espace vectoriel muni d'une forme symplectique.

Remarque 2.2

En fixant une base, il est possible de représenter ω par une matrice Ω, où $\omega(u, v) = u^T \Omega v$. Nous dirons que Ω est une **forme symplectique matricielle**.

Définition 2.3

Soient V un espace vectoriel symplectique de forme symplectique ω et $W \subseteq V$ un sous-espace vectoriel. Alors,

$$W^{\perp} := \{v \in V \mid \omega(u, v) = 0 \,\forall u \in W\}$$

est appelé l'**orthogonal** de W.

Définition 2.4

Soient V un espace vectoriel symplectique et $W \subseteq V$ un sous-espace vectoriel. Alors, W est un **lagrangien** si $W = W^{\perp}$.

Géométrie symplectique

À partir de maintenant, nous nous intéresserons à l'espace vectoriel symplectique $\mathbb{R}^4$ avec la forme symplectique matricielle

$$\Omega := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des lagrangiens dans $\mathbb{R}^4$ sera noté $\mathrm{Lag}(\mathbb{R}^4)$.

Proposition 2.5

Soit $L \in \mathrm{Lag}(\mathbb{R}^4)$. *Alors,* $\dim L = 2$.

Géométrie symplectique

Soit $L \in \mathrm{Lag}(\mathbb{R}^4)$ et notons $L^* := L \setminus \{0\}$. Définissons l'application $P := \rho \circ j : L^* \to \mathbb{CP}^1$, où

$$\begin{array}{ccccc} L^* & \overset{j}{\rightarrowtail} & \mathbb{C}^2 & \overset{\rho}{\twoheadrightarrow} & \mathbb{CP}^1 \\ \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} l_1 + il_2 \\ l_3 + il_4 \end{pmatrix} & \longmapsto & [l_1 + il_2 : l_3 + il_4] \,. \end{array}$$

Géométrie symplectique

Proposition 2.6

Soit $L \in \mathrm{Lag}(\mathbb{R}^4)$ vu comme un sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$. Alors,

$$L \cap \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, x, y \in \mathbb{R} \right\} = 0 \iff L = \begin{pmatrix} a & -b+c \\ b+c & a \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pour $a, b, c \in \mathbb{R}$ et dans ce cas, $P(L)$, l'image de L par P, est un cercle de centre $a + ib$ et de rayon $|c|$.

Remarque 2.7

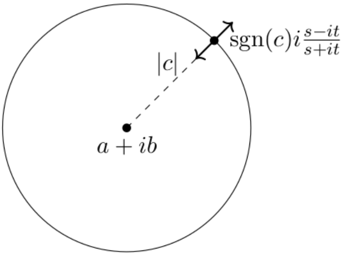
Nous dirons qu'un point est un cercle de rayon nul.

Géométrie symplectique

On assigne à chaque point du cercle un vecteur pointant vers l'extérieur ou vers le centre du cercle.

Proposition 2.8

Soient $L \in \mathrm{Lag}(\mathbb{R}^4)$ *où* $P(L)$ *est un cercle de rayon non nul et* $l \in L^*$. *Si* $l = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 & l_4 \end{pmatrix}^T$, *alors le vecteur associé à* $P(l)$ *est de direction* $\mathrm{sgn}(c) i \frac{l_3 - i l_4}{l_3 + i l_4}$.

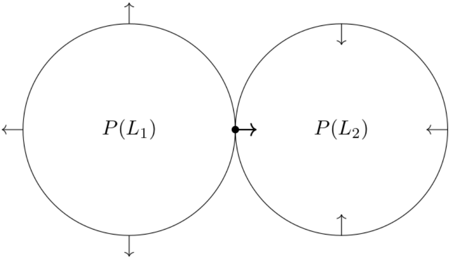


Géométrie symplectique

Définition 2.9

Deux lagrangiens $L_1, L_2 \in \mathrm{Lag}(\mathbb{R}^4)$ sont dits **tangents** si $\dim(L_1 \cap L_2) = 1$.

En outre, si $P(L_1)$ et $P(L_2)$ sont des cercles de rayon non nul, alors $P(L_1)$ et $P(L_2)$ ont un unique point en commun et la direction à ce point est la même.



Géométrie symplectique

Définition 2.10

Le **groupe symplectique**, noté $\mathrm{Sp}(n, K)$, est le groupe des transformations linéaires d'un K-espace vectoriel symplectique de dimension n préservant la forme symplectique.

Définition 2.11

Le **groupe projectif symplectique**, noté $\mathrm{PSp}(n, K)$, est le groupe $\mathrm{Sp}(n, K)/\{-I, I\}$.

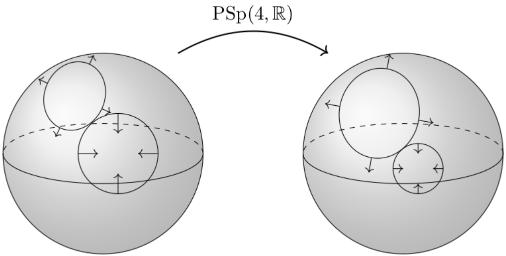
Dans notre cas, nous nous intéresserons au groupe

$$\mathrm{PSp}(4, \mathbb{R}) := \{A \in M_4(\mathbb{R}) \mid A^T \Omega A = \Omega\}/\{-I, I\}.$$

Géométrie symplectique

Proposition 2.12

Soient $[A] \in \mathrm{PSp}(4, \mathbb{R})$ *et* $L \in \mathrm{Lag}(\mathbb{R}^4)$. *Alors,* $[A] \cdot L := AL$ *est une action de* $\mathrm{PSp}(4, \mathbb{R})$ *sur* $\mathrm{Lag}(\mathbb{R}^4)$.



Plus généralement, définissons

$$\mathrm{PSp}^{\pm}(4,\mathbb{R}) := \{A \in M_4(\mathbb{R}) \mid A^T \Omega A = \pm\Omega\}/\{-I, I\}.$$

Soient $[A] \in \mathrm{PSp}^{\pm}(4,\mathbb{R})$ et $L \in \mathrm{Lag}(\mathbb{R}^4)$. Alors, $[A] \cdot L := AL$ est une action de $\mathrm{PSp}^{\pm}(4,\mathbb{R})$ sur $\mathrm{Lag}(\mathbb{R}^4)$.

Plus généralement, définissons

$$\mathrm{PSp}^{\pm}(4,\mathbb{R}) := \{A \in M_4(\mathbb{R}) \mid A^T \Omega A = \pm\Omega\}/\{-I, I\}.$$

Soient $[A] \in \mathrm{PSp}^{\pm}(4,\mathbb{R})$ et $L \in \mathrm{Lag}(\mathbb{R}^4)$. Alors, $[A] \cdot L := AL$ est une action de $\mathrm{PSp}^{\pm}(4,\mathbb{R})$ sur $\mathrm{Lag}(\mathbb{R}^4)$.

Théorème 2.13

L'action de $\mathrm{PSp}^{\pm}(4,\mathbb{R})$ *sur* $\mathrm{Lag}(\mathbb{R}^4)$ *donne toutes les transformations linéaires préservant la tangence.*

Géométrie symplectique

Plus généralement, définissons

$$\mathrm{PSp}^{\pm}(4,\mathbb{R}) := \{A \in M_4(\mathbb{R}) \mid A^T \Omega A = \pm\Omega\}/\{-I, I\}.$$

Soient $[A] \in \mathrm{PSp}^{\pm}(4,\mathbb{R})$ et $L \in \mathrm{Lag}(\mathbb{R}^4)$. Alors, $[A] \cdot L := AL$ est une action de $\mathrm{PSp}^{\pm}(4,\mathbb{R})$ sur $\mathrm{Lag}(\mathbb{R}^4)$.

Théorème 2.13

L'action de $\mathrm{PSp}^{\pm}(4,\mathbb{R})$ sur $\mathrm{Lag}(\mathbb{R}^4)$ donne toutes les transformations linéaires préservant la tangence.

Lemme 2.14

$\mathrm{PSp}(4,\mathbb{R})$ *est un sous-groupe d'indice* 2 *de* $\mathrm{PSp}^{\pm}(4,\mathbb{R})$.

Géométrie symplectique

Considérons l'application

$$f : M_2(\mathbb{C}) \to M_4(\mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} a_1 + ia_2 & b_1 + ib_2 \\ c_1 + ic_2 & d_1 + id_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 & b_1 & -b_2 \\ a_2 & a_1 & b_2 & b_1 \\ c_1 & -c_2 & d_1 & -d_2 \\ c_2 & c_1 & d_2 & d_1 \end{pmatrix}.$$

Géométrie symplectique

Considérons l'application

$$f : M_2(\mathbb{C}) \to M_4(\mathbb{R})$$
$$\begin{pmatrix} a_1 + ia_2 & b_1 + ib_2 \\ c_1 + ic_2 & d_1 + id_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 & b_1 & -b_2 \\ a_2 & a_1 & b_2 & b_1 \\ c_1 & -c_2 & d_1 & -d_2 \\ c_2 & c_1 & d_2 & d_1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 2.15

L'ensemble $f(\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}))/\{-I, I\}$ est un groupe pour la multiplication matricielle et ce groupe est isomorphe à $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$.

Proposition 2.16

Le groupe $f(\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}))/\{-I, I\}$ est un sous-groupe de $\mathrm{PSp}(4,\mathbb{R})$.

Proposition 2.17

Posons

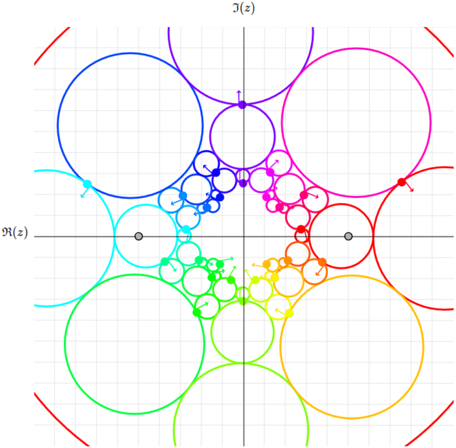
$$\mathcal{E}_{4,\mathbb{R}} := \left\{ \left[e^A\right] \;\middle|\; A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & c \\ b & -a & c & 0 \\ 0 & d & a & -b \\ d & 0 & -b & -a \end{pmatrix}, \text{ pour } a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\},$$

où $\left[e^A\right] = \left\{-e^A, e^A\right\}$. *Alors,* $\mathcal{E}_{4,\mathbb{R}}$ *est un sous-ensemble de* $\mathrm{PSp}(4, \mathbb{R})$.

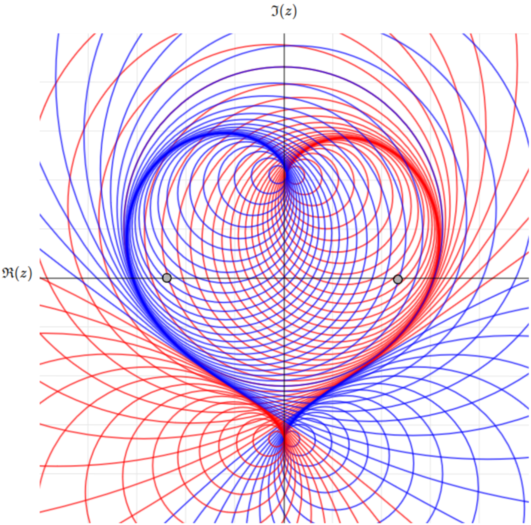
Action de $\mathrm{PSp}(4,\mathbb{R})$

Théorème 2.18

Les groupes $\langle f(\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}))/\{-I,I\},\ \mathcal{E}_{4,\mathbb{R}}\rangle$ *et* $\mathrm{PSp}(4,\mathbb{R})$ *sont égaux.*



$\mathrm{PSp}(4, \mathbb{R})$ agit aussi sur la *courbe de Veronese*



Références

James W. Anderson. *Hyperbolic Geometry*. 2e éd. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer London, 2005

Jean-Philippe Burelle et Ryan Kirk. *Piecewise circular curves and positivity*. 2021. arXiv : 2108.08680 [math.DG]

Ved Prakash Gupta et Mukund Madhav Mishra. *On the topology of certain matrix groups*. https://www.jnu.ac.in/Faculty/vedgupta/matrix-gps-gupta-mishra.pdf. 2010

Brian C. Hall. *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations*. 2e éd. Graduate Texts in Mathematics. Springer Cham, 2015

Références

Samuel Leblanc. *riemannsphere*. https://github.com/samueleblanc/riemannsphere. 2023

Sophus Lie. "On complexes - in particular, line and sphere complexes - with applications to the theory of partial differential equations". Trad. par D. H. Delphenich. In : *Mathematische Annalen* 5 (1872), p. 145-208

Kevin Thouin. "Géométrie hyperbolique : le demi-plan de Poincaré". In : *Cahiers Mathématiques de l'Université de Sherbrooke (CaMUS)* 6 (2017), p. 29-44