

# Transformations de cercles orientés tangents sur la sphère de Riemann

Samuel Leblanc

**RÉSUMÉ** Nous présenterons les notions nécessaires pour visualiser les transformations linéaires préservant la tangence entre les cercles orientés sur la sphère de Riemann. Pour faire cela, nous allons établir une correspondance entre ces cercles et les sous-espaces vectoriels lagrangiens dans  $\mathbb{R}^4$ , pour une forme symplectique  $\omega$ . Nous montrerons ensuite que  $\mathrm{PSp}(4, \mathbb{R})$  est un sous-groupe d'indice 2 du groupe des transformations linéaires préservant la tangence. Finalement, nous expliciterons  $\mathrm{PSp}(4, \mathbb{R})$  en tant que groupe engendré par un sous-groupe et un sous-ensemble, ce qui aidera à la visualisation.

## 1 Introduction

À la fin du 19<sup>e</sup> siècle, le mathématicien allemand Felix Klein suggère un nouveau paradigme en géométrie, aujourd'hui connu sous le nom de *programme d'Erlangen*. En plus d'avoir aidé à unifier les différentes géométries, ce programme transforme l'étude de la géométrie en proposant d'utiliser la théorie des groupes pour abstraire la notion de symétrie des objets étudiés.

Dans la même veine, le présent article introduira un groupe de transformations qui envoient des cercles orientés tangents, c'est-à-dire des cercles ayant un point en commun et où la direction à ce point est la même, à des cercles orientés tangents sur le plan complexe augmenté du point à l'infini, nommé la sphère de Riemann. Pour y arriver, nous étudierons l'espace des lagrangiens dans  $\mathbb{R}^4$  et nous montrerons que celui-ci est en bijection avec les cercles orientés sur la sphère de Riemann. Nous donnerons ensuite une introduction aux groupes de Lie matriciels et à leurs algèbres de Lie. Finalement, nous montrerons que le groupe de symétries de ces lagrangiens, un groupe de Lie matriciel, correspond aux transformations linéaires préservant la tangence entre les cercles orientés. Cette correspondance fut premièrement étudiée en détail dans [Lie72] et plus récemment dans [BK21].

Une fois ces notions présentées, nous formulerons la méthode utilisée dans [Leb23] pour visualiser ces transformations, en ayant préalablement explicité le groupe des transformations linéaires préservant la tangence comme un groupe engendré par un sous-groupe et un sous-ensemble. Cette nouvelle façon d'écrire le groupe est à la base du fonctionnement de [Leb23].

---

J'aimerais remercier Jean-Philippe Burelle pour son temps et son aide lors de la réalisation du projet de visualisation et de la rédaction de l'article.

Partout dans l'article,  $K$  désignera le corps des nombres complexes ou le corps des nombres réels. De plus,  $K^*$  dénotera ce corps sans son zéro et l'ensemble des matrices sur  $K$  de taille  $n \times n$  sera noté  $M_n(K)$ .

## 2 Géométrie projective

**Définition 2.1.** Soit  $V$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie. L'espace projectif associé à  $V$  est l'ensemble quotient  $(V \setminus \{0\})/\sim$ , où  $\sim$  est la relation d'équivalence définie par :

$$x \sim y \text{ si et seulement si il existe } \lambda \in K^* \text{ tel que } x = \lambda y.$$

En outre, si la dimension de  $V$  est  $n$ , pour  $n \geq 1$ , alors la *dimension* de l'espace projectif associé à  $V$  est  $n - 1$ .

**Définition 2.2.** La droite projective complexe, notée  $\mathbb{CP}^1$ , est l'espace projectif associé à  $\mathbb{C}^2$ .

*Notation 2.3.* Les éléments de  $\mathbb{CP}^1$  sont les classes d'équivalences  $[z]$ , pour  $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ , que nous noterons  $[z_1 : z_2]$ .

**Définition 2.4.** La sphère de Riemann, notée  $\hat{\mathbb{C}}$ , est le plan complexe augmenté du point à l'infini, c'est-à-dire  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .

Il est commun d'illustrer la sphère de Riemann par la figure 1.

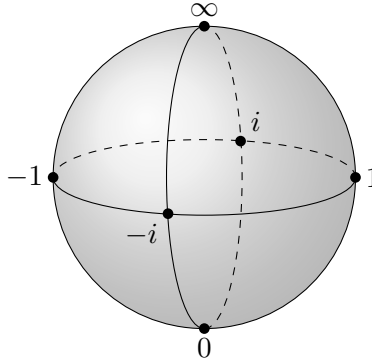


FIGURE 1 : La sphère de Riemann.

En ajoutant l'infini aux nombres complexes, il est nécessaire, pour pouvoir l'utiliser, de spécifier le comportement de ce dernier. Les règles d'opérations sur  $\infty$  sont :

$$\begin{aligned} z + \infty &= \infty && \text{pour tout } z \in \hat{\mathbb{C}}; \\ z \cdot \infty &= \infty && \text{pour tout } z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}; \\ \frac{z}{0} &= \infty && \text{pour tout } z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}; \\ \frac{z}{\infty} &= 0 && \text{pour tout } z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Notons cependant que  $\infty - \infty$ ,  $\infty \cdot 0$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$  et  $\frac{0}{0}$  restent indéfinis.

Soit  $[z_1 : z_2] \in \mathbb{CP}^1$ . Si  $z_2 \neq 0$ , alors  $[z_1 : z_2] = \left[ \frac{z_1}{z_2} : 1 \right]$  et si  $z_2 = 0$ , alors  $z_1$  est nécessairement non nul et  $[z_1 : z_2] = [1 : 0]$ . Nous identifierons  $\{[z : 1] \in \mathbb{CP}^1\}$  à  $\mathbb{C}$  et  $[1 : 0]$  à  $\infty$ . Par conséquent, nous avons une correspondance entre  $\hat{\mathbb{C}}$  et  $\mathbb{CP}^1$  et plus particulièrement, il sera possible de visualiser la droite projective complexe en tant que sphère de Riemann.

## 2.1 Transformations de Möbius

En géométrie projective, donc sur la sphère de Riemann, il est commun de considérer les droites comme étant des cercles de rayon infini. Avec cette notion plus générale de cercle, nous introduirons les transformations de Möbius, qui sont des transformations qui envoient des cercles à des cercles ([Tho17], 3.10).

**Définition 2.5.** Une *transformation de Möbius*  $M$  est une fonction

$$M : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$$

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

avec  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  tels que  $ad - bc \neq 0$ .

Les transformations de Möbius suivent les mêmes règles définies plus haut quant aux opérations qui traitent de l'infini. Cependant, nous remarquons que  $M(\infty)$  n'est pas bien défini. Nous poserons alors  $M(\infty) = \frac{a}{c}$ , car  $M(z)$  converge à  $\frac{a}{c}$  lorsque  $z \rightarrow \infty$ .

**Proposition 2.6.** ([Tho17], 3.2) *Les transformations de Möbius forment un groupe pour la composition de fonctions, que nous noterons  $\mathcal{M}$ .*

**Proposition 2.7.** ([And05], Sect. 2.2) *Soient  $(z_1, z_2, z_3)$ ,  $(w_1, w_2, w_3)$  deux triplets composés d'éléments distincts dans  $\hat{\mathbb{C}}$ . Il existe une unique transformation de Möbius  $M$  telle que  $M(z_i) = w_i$  pour  $i = 1, 2, 3$ .*

**Proposition 2.8.** *Soient  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$  tous deux à deux distincts. L'application  $M_{\infty, 0, 1} : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  définie par*

$$M_{\infty, 0, 1}(z) = \frac{(z_3 - z_1)z - (z_3 - z_1)z_2}{(z_3 - z_2)z - (z_3 - z_2)z_1}$$

*est l'unique transformation de Möbius qui envoie le triplet  $(z_1, z_2, z_3)$  à  $(\infty, 0, 1)$ .*

*Démonstration.* Premièrement,  $M_{\infty, 0, 1}$  est une transformation de Möbius, car  $(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)(z_2 - z_1) \neq 0$ . De plus, nous remarquons que

$$M_{\infty, 0, 1}(z) = \frac{(z - z_2)(z_3 - z_1)}{(z - z_1)(z_3 - z_2)}.$$

Dans ce cas, nous voyons facilement que  $M_{\infty, 0, 1}(z_1) = \frac{w_1}{0} = \infty$ ,  $M_{\infty, 0, 1}(z_2) = \frac{0}{w_2} = 0$  et  $M_{\infty, 0, 1}(z_3) = \frac{w_3}{w_3} = 1$  pour  $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}^*$ . En vertu de la proposition 2.7, cette transformation est unique.  $\square$

Le corollaire suivant nous donne une formule explicite pour la transformation de Möbius qui envoie un triplet d'éléments distincts de  $\hat{\mathbb{C}}$  à un autre.

**Corollaire 2.9.** *Soient  $M_{\infty,0,1}$  l'unique transformation de Möbius qui envoie le triplet  $(z_1, z_2, z_3)$  à  $(\infty, 0, 1)$  et  $M'_{\infty,0,1}$  l'unique transformation de Möbius qui envoie le triplet  $(w_1, w_2, w_3)$  à  $(\infty, 0, 1)$ . Alors,  $M'^{-1}_{\infty,0,1} \circ M_{\infty,0,1}$  est l'unique transformation de Möbius qui envoie le triplet  $(z_1, z_2, z_3)$  à  $(w_1, w_2, w_3)$ .*

**Définition 2.10.** Le groupe spécial linéaire sur  $K$ , noté  $\text{SL}(n, K)$ , est le groupe des matrices de  $M_n(K)$  avec un déterminant de 1.

**Définition 2.11.** Le groupe projectif spécial linéaire est le groupe

$$\text{PSL}(n, K) := \text{SL}(n, K) / \{-I_n, I_n\}.$$

Définissons maintenant l'application

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{M} &\rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{C}) \\ \left( z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \right) &\mapsto \left[ \frac{1}{\sqrt{ad-bc}} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

Vérifions que cette application est bien définie. Soient  $M_1 = M_2 \in \mathcal{M}$  et supposons que  $M_1(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  et  $M_2(z) = \frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d}$  pour  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ . Il en suit que

$$\frac{1}{\sqrt{ad-bc}} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{\sqrt{\lambda^2(ad-bc)}} \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$$

et donc,  $\psi(M_1) = \psi(M_2) \in \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ .

Avec la prochaine proposition, nous obtenons que  $\mathcal{M} \cong \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ .

**Proposition 2.12.** *L'application  $\psi$  est un isomorphisme.*

*Démonstration.* Premièrement,  $\psi$  est inversible. En effet, son inverse est donné par  $\psi^{-1}\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = M$ , où  $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ .

Par ailleurs, pour  $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ , on a

$$\begin{aligned} \psi(M_1 \circ M_2) &= \left[ \frac{1}{\sqrt{a_1 d_1 - b_1 c_1} \sqrt{a_2 d_2 - b_2 c_2}} \begin{pmatrix} a_1 a_2 + b_1 c_2 & a_1 b_2 + b_1 d_2 \\ c_1 a_2 + d_1 c_2 & c_1 b_2 + d_1 d_2 \end{pmatrix} \right] \\ &= \left[ \frac{1}{\sqrt{a_1 d_1 - b_1 c_1}} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \right] \left[ \frac{1}{\sqrt{a_2 d_2 - b_2 c_2}} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \right] \\ &= \psi(M_1) \psi(M_2), \end{aligned}$$

ce qui entraîne que  $\psi$  est un homomorphisme. □

### 3 Géométrie symplectique

**Définition 3.1.** Soit  $V$  un  $K$ -espace vectoriel. Une *forme symplectique* sur  $V$  est une application bilinéaire  $\omega : V \times V \rightarrow K$  telle que  $\omega$  est

- i. Alternée :  $\omega(u, u) = 0$  pour tout  $u \in V$  ;
- ii. Non dégénérée :  $\omega(u, v) = 0$  pour tout  $v \in V$  implique que  $u = 0$ .

Un *espace vectoriel symplectique* est un espace vectoriel muni d'une forme symplectique.

*Remarque 3.2.* En fixant une base, il est possible de représenter  $\omega$  par une matrice  $\Omega$ , où  $\omega(u, v) = u^T \Omega v$ . Nous dirons que  $\Omega$  est une *forme symplectique matricielle*.

#### 3.1 Lagrangiens

L'objectif de cette section sera de construire une application pour laquelle nous aurons une bijection entre les lagrangiens et les cercles orientés sur la sphère de Riemann.

**Définition 3.3.** Soient  $V$  un espace vectoriel symplectique de forme symplectique  $\omega$  et  $W \subseteq V$  un sous-espace vectoriel. Alors,

$$W^\perp := \{v \in V \mid \omega(u, v) = 0 \forall u \in W\}$$

est appelé l'*orthogonal* de  $W$ .

**Définition 3.4.** Soient  $V$  un espace vectoriel symplectique et  $W \subseteq V$  un sous-espace vectoriel. Alors,  $W$  est un *lagrangien* si  $W = W^\perp$ .

*Notation 3.5.* L'ensemble des lagrangiens dans  $V$  sera noté  $\text{Lag}(V)$ .

Nous laisserons le lemme suivant sans démonstration.

**Lemme 3.6.** Soient  $V$  un espace vectoriel symplectique et  $W \subseteq V$  un sous-espace vectoriel. Alors,  $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$ .

À partir de maintenant, nous nous intéresserons à l'espace vectoriel symplectique  $\mathbb{R}^4$  avec la forme symplectique matricielle

$$\Omega := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Le lemme 3.6 implique directement le corollaire suivant.

**Corollaire 3.7.** Soit  $L \in \text{Lag}(\mathbb{R}^4)$ . Alors,  $\dim L = 2$ .

Dans l'optique de travailler avec des matrices, nous représenterons  $L \in \text{Lag}(\mathbb{R}^4)$  par une matrice réelle de taille  $4 \times 2$ , où l'ensemble des vecteurs  $l \in L$  sera donné par l'ensemble des combinaisons linéaires des colonnes de  $L$ . Cela entraîne que  $L$  reste inchangé suite à la multiplication à droite par une matrice réelle  $2 \times 2$  inversible.

**Proposition 3.8.** *Soient  $u = (u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4)^T, v = (v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4)^T \in \mathbb{R}^4$ . Alors,  $(u \mid v) \in \text{Lag}(\mathbb{R}^4)$  si et seulement si  $u_1v_4 + u_2v_3 - u_3v_2 - u_4v_1 = 0$ .*

*Démonstration.* Nous obtenons le résultat lorsqu'on résout  $u^T \Omega v = 0$ .  $\square$

**Proposition 3.9.** *Soit  $L \in \text{Lag}(\mathbb{R}^4)$ . Alors,*

$$L \cap \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R} \right\} = \{0\} \text{ si et seulement si } L = \begin{pmatrix} a & -b+c \\ b+c & a \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

pour  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

*Démonstration.* L'intersection est nulle si et seulement si le bloc  $2 \times 2$  inférieur est inversible. En multipliant à droite par l'inverse du bloc inférieur, nous obtenons

$$L = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pour  $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ . Par la proposition 3.8, nous avons que  $x_1 = x_4$ . Nous obtenons le résultat en posant  $a = x_1$ ,  $b = \frac{1}{2}(-x_2 + x_3)$  et  $c = \frac{1}{2}(x_2 + x_3)$ . On remarque que  $b$  et  $c$  sont indépendants l'un de l'autre puisque  $-x_2 + x_3$  et  $x_2 + x_3$  le sont.  $\square$

Soit  $L \in \text{Lag}(\mathbb{R}^4)$  et notons  $L^* := L \setminus \{0\}$ . Considérons l'injection

$$j : L^* \rightarrow \mathbb{C}^2$$

$$\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} l_1 + il_2 \\ l_3 + il_4 \end{pmatrix}$$

et l'application  $\rho : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{CP}^1$ , qui envoie naturellement un élément de  $\mathbb{C}^2$  à sa classe d'équivalence dans  $\mathbb{CP}^1$ . Définissons l'application  $P := \rho \circ j : L^* \rightarrow \mathbb{CP}^1$ .

Nous obtenons, pour  $L = (u \mid v)$  et  $l \in L^*$ , que

$$\begin{aligned} P(l) &= \rho(j(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} t)) \\ &= \rho(\begin{pmatrix} u_1 + iu_2 \\ u_3 + iu_4 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} v_1 + iv_2 \\ v_3 + iv_4 \end{pmatrix} t) \\ &= [(u_1 + iu_2)s + (v_1 + iv_2)t : (u_3 + iu_4)s + (v_3 + iv_4)t] \end{aligned}$$

où  $s, t \in \mathbb{R}$  et  $(s, t) \neq (0, 0)$ .

En considérant cette application, nous obtenons le résultat suivant.

**Proposition 3.10.** *Soit  $L \in \text{Lag}(\mathbb{R}^4)$  vu comme un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^4$ . Alors,*

$$L = \begin{pmatrix} a & -b + c \\ b + c & a \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si et seulement si  $P(L)$ , l'image de  $L$  par  $P$ , est un cercle de centre  $a + ib$  et de rayon  $|c|$ .

*Remarque 3.11.* Nous dirons qu'un point est un cercle de rayon nul.

*Démonstration.* Le résultat suit d'un calcul direct. En effet,

$$\begin{aligned} P(L) &= [(a + ib + ic)s + (-b + c + ia)t : s + it] \\ &= [(a + ib)(s + it) + ic(s - it) : s + it] \\ &= \left[ a + ib + ic \frac{s - it}{s + it} : 1 \right] \end{aligned}$$

et  $\{\frac{s - it}{s + it} \mid s, t \in \mathbb{R} \text{ et } (s, t) \neq (0, 0)\} = \{e^{i\theta} \mid \theta \in [0, 2\pi)\}$  ce qui correspond au cercle centré en  $(0, 0)$  de rayon unitaire.  $\square$

*Notation 3.12.* L'ensemble des lagrangiens  $L \in \text{Lag}(\mathbb{R}^4)$  tels que  $P(L)$  est un cercle de rayon non nul sera noté  $\text{Lag}^\circ(\mathbb{R}^4)$ .

**Définition 3.13.** Soit  $L \in \text{Lag}^\circ(\mathbb{R}^4)$ . L'orientation de  $P(L)$  est le signe de  $c$ , noté  $\text{sgn}(c)$ .

Suivant la définition précédente, on assigne à chaque point du cercle un vecteur pointant vers l'extérieur ou vers le centre du cercle (voir figure 2).

**Proposition 3.14.** Soient  $L \in \text{Lag}^\circ(\mathbb{R}^4)$  et  $l \in L^*$ . Si  $l = (l_1 \ l_2 \ l_3 \ l_4)^T$ , alors le vecteur associé à  $P(l)$  est de direction  $\text{sgn}(c)i\frac{l_3 - il_4}{l_3 + il_4}$ .

*Démonstration.* Par la proposition 3.10,

$$\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b+c \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} -b+c \\ a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t$$

ce qui implique que  $l_3 = s$  et  $l_4 = t$ , pour  $s, t \in \mathbb{R}$  où  $(s, t) \neq (0, 0)$ . Puisque

$$P(l) = \left[ a + ib + ic \frac{s - it}{s + it} : 1 \right],$$

nous avons que la direction par rapport au centre du cercle est déterminée par  $\text{sgn}(c)i \frac{l_3 - il_4}{l_3 + il_4}$ .  $\square$

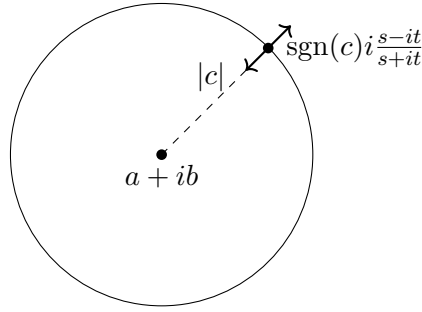


FIGURE 2 :  $P(L)$  est un cercle de centre  $a + ib$  et de rayon  $|c|$ .

**Définition 3.15.** Soient  $L_1, L_2 \in \text{Lag}^\circ(\mathbb{R}^4)$ . On dit que  $L_1$  et  $L_2$  sont *tangents* si  $P(L_1)$  et  $P(L_2)$  ont un unique point en commun et que la direction à ce point est la même (voir figure 3).

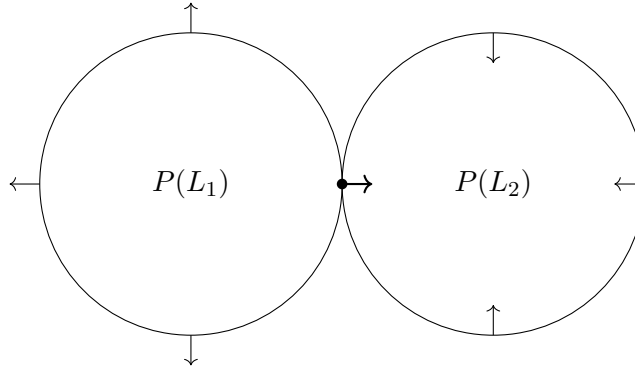


FIGURE 3 :  $L_1$  et  $L_2$  sont tangents.

La prochaine proposition nous donne une condition suffisante et nécessaire pour que deux lagrangiens soient tangents.



**Proposition 3.16.** *Soient  $L_1, L_2 \in \text{Lag}^\circ(\mathbb{R}^4)$ . Alors,  $L_1$  et  $L_2$  sont tangents si et seulement si la dimension de  $L_1 \cap L_2$  est de 1.*

*Démonstration.* Supposons  $L_1$  et  $L_2$  tangents. Par définition de la tangence, nous savons qu'il existe  $l_1 \in L_1$  et  $l_2 \in L_2$  tels que  $P(l_1) = P(l_2)$  et donc que  $\rho(j(l_1)) = \rho(j(l_2))$ . Posons  $h_1 := j(l_1)$  et  $h_2 := j(l_2)$ . Nous avons que  $P(l_1) = P(l_2)$  si et seulement si  $\rho(h_1) = \rho(h_2)$  si et seulement si  $h_2 = \lambda h_1$  pour  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ . Nous prétendons qu'en fait,  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ . Supposons l'inverse et notons

$$h_1 = \begin{pmatrix} u_1 + iu_2 \\ u_3 + iu_4 \end{pmatrix} \text{ et } h_2 = (a + ib) \begin{pmatrix} u_1 + iu_2 \\ u_3 + iu_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au_1 - bu_2 + i(au_2 + bu_1) \\ au_3 - bu_4 + i(au_4 + bu_3) \end{pmatrix}.$$

Puisque  $j$  est injective, elle induit une bijection sur son image. Cela implique que

$$l_2 = j^{-1}(h_2) = \begin{pmatrix} au_1 - bu_2 \\ au_2 + bu_1 \\ au_3 - bu_4 \\ au_4 + bu_3 \end{pmatrix},$$

mais  $j^{-1}(h_2) \in L_2$  que si  $b = 0$ , car  $(u_1, u_2, u_3, u_4)^T$  et  $(-u_2, u_1, -u_4, u_3)^T$  sont linéairement indépendants pour n'importe quels  $u_1, u_2, u_3, u_4 \in \mathbb{R}$  non tous nuls, ce qui entraîne que  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ . Donc,  $l_1 = \lambda l_2$  ce qui implique que  $l_1, l_2 \in L_1$  et  $l_1, l_2 \in L_2$  ce qui nous donne que  $\dim(L_1 \cap L_2) \geq 1$  et nous avons l'égalité par l'unicité.

Supposons  $\dim(L_1 \cap L_2) = 1$ . Alors,  $L_1 \cap L_2 = \{\lambda l_1 \mid \lambda \in \mathbb{R}^*\}$  ce qui implique que  $P(l_1) = P(l_2)$  pour tous  $l_1, l_2 \in L_1 \cap L_2$  ce qui implique que  $P(L_1)$  et  $P(L_2)$  ont un unique point en commun et que la direction à ce point est la même.  $\square$

Soit  $L \in \text{Lag}(\mathbb{R}^4) \setminus \text{Lag}^\circ(\mathbb{R}^4)$ . Nous laisserons sans démonstration et sans plus de détail le fait que  $P(L)$  est un point ou est une droite. Puisque l'orientation de  $P(L)$  n'est pas bien définie et pour ne pas avoir qu'à considérer les éléments de  $\text{Lag}^\circ(\mathbb{R}^4)$ , nous introduisons la définition suivante.

**Définition 3.17.** Deux lagrangiens  $L_1, L_2 \in \text{Lag}(\mathbb{R}^4)$  sont dits *tangents* si  $\dim(L_1 \cap L_2) = 1$ .

Cette définition est bien sûr cohérente avec celle pour les cercles, en plus d'être applicable à tous les éléments de  $\text{Lag}(\mathbb{R}^4)$ .

## 4 Groupes et algèbres de Lie matriciels

Un groupe de Lie est, intuitivement, un groupe de transformations continu. L'objectif de cette section sera d'introduire les groupes de Lie matriciels, c'est-à-dire les groupes de Lie où les éléments sont des matrices, ainsi que leur algèbre associée.

## 4.1 Groupes de Lie matriciels

**Définition 4.1.** Le *groupe général linéaire* sur  $K$ , noté  $\mathrm{GL}(n, K)$ , est le groupe des matrices inversibles dans  $M_n(K)$ .

Désormais, nous identifierons  $M_n(\mathbb{C})$  à  $\mathbb{C}^{n^2}$ . Donc, la notion de convergence et celle de dérivée sur  $M_n(\mathbb{C})$  seront les mêmes que sur  $\mathbb{C}^{n^2}$ .

**Définition 4.2.** ([Hal15], 1.4) Un *groupe de Lie matriciel* est un sous-groupe  $G$  de  $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$  tel que, si  $A_m$  est une suite de matrices dans  $G$  et que  $A_m$  converge à une matrice  $A$ , c'est-à-dire que  $(A_m)_{ij}$  converge à  $A_{ij}$  pour tous  $1 \leq i, j \leq n$ , alors  $A$  est soit dans  $G$ , soit non inversible.

**Exemple 4.3.** Les groupes  $\mathrm{GL}(n, K)$  et  $\mathrm{SL}(n, K)$  sont des groupes de Lie matriciels.

**Définition 4.4.** ([Hal15], 1.9) Soit  $G$  un groupe de Lie matriciel. On dit que  $G$  est *connexe*, si pour toutes  $A, B \in G$ , il existe une courbe continue  $\gamma(t) \in G$ , où  $a \leq t \leq b$ , avec  $\gamma(a) = A$  et  $\gamma(b) = B$ .

En topologie, la définition précédente désigne plutôt la *connexité par arcs*. Cependant, puisqu'un groupe de Lie matriciel est connexe, selon la définition usuelle, si et seulement s'il est connexe par arcs, nous ne ferons pas la distinction entre les deux termes.

## 4.2 Exponentielle de matrices

Avant de présenter les algèbres de Lie matricielles, nous introduirons l'exponentielle de matrices ainsi que certaines propriétés importantes de celle-ci.

**Définition 4.5.** Soit  $A \in M_n(K)$ . L'*exponentielle* de  $A$ , notée  $e^A$ , est la série

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!},$$

où  $A^0$  est la matrice identité.

**Proposition 4.6.** ([Hal15], 2.1) Soit  $A \in M_n(K)$ . L'*exponentielle* de  $A$  est une série convergente et est une fonction continue de  $A$ .

**Proposition 4.7.** ([Hal15], 2.3 et 2.12) Soient  $A \in M_n(\mathbb{C})$  et  $B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ . Nous avons les trois propriétés suivantes :

- i.  $e^A$  est inversible et  $(e^A)^{-1} = e^{-A}$  ;
- ii.  $e^{BAB^{-1}} = Be^AB^{-1}$  ;
- iii.  $\det(e^A) = e^{\mathrm{trace}(A)}$ .

**Théorème 4.8. (Formule de Lie)** ([Hal15], 2.11) Soient  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ . Nous avons que

$$e^{A+B} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( e^{\frac{A}{n}} e^{\frac{B}{n}} \right)^n.$$

### 4.3 Algèbres de Lie matricielles

Nous introduirons la notion générale d'une algèbre de Lie et d'une sous-algèbre de Lie avant de présenter l'algèbre de Lie associée à un groupe de Lie matriciel.

**Définition 4.9.** ([Hal15], 3.1) Une *algèbre de Lie* est un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie  $\mathfrak{g}$  avec une application  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  respectant les propriétés suivantes :

- i.  $[\cdot, \cdot]$  est bilinéaire ;
- ii.  $[\cdot, \cdot]$  est antisymétrique :  $[X, Y] = -[Y, X]$  pour tous  $X, Y \in \mathfrak{g}$  ;
- iii.  $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$  pour tous  $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ .

L'application  $[\cdot, \cdot]$  est nommée *crochet de Lie* et la condition iii. est appelée *l'identité de Jacobi*.

**Exemple 4.10.** Nous avons que  $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^3$  est une algèbre de Lie avec le crochet de Lie  $[\cdot, \cdot] : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  défini par  $[x, y] = x \times y$ , le produit vectoriel.

**Définition 4.11.** ([Hal15], 3.5) Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie. Une *sous-algèbre de Lie* de  $\mathfrak{g}$  est un sous-espace vectoriel  $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$  tel que  $[H_1, H_2] \in \mathfrak{h}$  pour tous  $H_1, H_2 \in \mathfrak{h}$ .

**Définition 4.12.** ([Hal15], 3.18) Soit  $G$  un groupe de Lie matriciel. L'*algèbre de Lie* de  $G$ , notée  $\mathfrak{g}$ , est l'ensemble des matrices  $A$  telles que  $e^{tA} \in G$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

L'algèbre de Lie d'un groupe de Lie matriciel est une algèbre de Lie avec le *commutateur*  $[X, Y] = XY - YX$  pour  $X, Y \in \mathfrak{g}$ .

**Exemple 4.13.** L'algèbre de Lie de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  est  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \{A \in M_2(\mathbb{C}) \mid \mathrm{trace}(A) = 0\}$ . En effet, par la proposition 4.7,  $\det(e^A) = 1$  si et seulement si  $e^{\mathrm{trace}(A)} = 1$  si et seulement si  $\mathrm{trace}(A) = 0$  si et seulement si  $\mathrm{trace}(tA) = 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

**Lemme 4.14.** ([Hal15], 3.46) Soit  $G \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$  un groupe de Lie matriciel avec algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . Alors, une matrice  $A$  est dans  $\mathfrak{g}$  si et seulement s'il existe une courbe différentiable  $\gamma$  dans  $M_n(\mathbb{C})$  avec  $\gamma(t) \in G$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$  telle que  $\gamma(0) = I_n$  et  $d\gamma/dt|_{t=0} = A$ .

Il suit du lemme précédent que  $\mathfrak{g}$  est l'espace tangent à l'identité de  $G$ .

**Théorème 4.15.** ([Hal15], 5.20) Soient  $G$  un groupe de Lie matriciel avec algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{h}$  une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$ . Alors, il existe un unique sous-groupe de Lie connexe  $H$  de  $G$  avec algèbre de Lie  $\mathfrak{h}$ .

Un cas particulier du théorème précédent nous donne le prochain corollaire.

**Corollaire 4.16.** Soient  $G$  un groupe de Lie matriciel connexe et  $H \subseteq G$  un sous-groupe de Lie matriciel. Si  $G$  et  $H$  ont la même algèbre de Lie, alors  $G = H$ .

## 5 Groupe projectif symplectique

**Définition 5.1.** Le *groupe symplectique*, noté  $\mathrm{Sp}(n, K)$ , est le groupe des transformations linéaires d'un  $K$ -espace vectoriel symplectique de dimension  $n$  préservant la forme symplectique. Dans notre cas, nous nous intéresserons au groupe

$$\mathrm{Sp}(4, \mathbb{R}) := \{A \in M_4(\mathbb{R}) \mid A^T \Omega A = \Omega\},$$

où  $\Omega$  est donnée par l'équation (1).

**Proposition 5.2.**  $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$  est un groupe de Lie matriciel.

Ce dernier résultat étant bien connu, nous omettons la démonstration.

**Proposition 5.3.** ([GM10], 5.6) Le groupe  $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$  est connexe.

Le lemme suivant nous donnera la forme exacte des matrices dans  $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{R})$ .

**Lemme 5.4.** Soit  $A \in M_4(\mathbb{R})$ . Alors,  $A \in \mathfrak{sp}(4, \mathbb{R})$  si et seulement si  $A^T \Omega + \Omega A = 0$ .

*Démonstration.* Supposons  $A \in \mathfrak{sp}(4, \mathbb{R})$ . Alors, par le lemme 4.14, il existe une courbe différentiable  $\gamma \in M_4(\mathbb{C})$  avec  $\gamma(t) \in \mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , telle que  $\gamma(0) = I$  et  $d\gamma/dt|_{t=0} = A$ . Cela implique que  $\gamma(t)^T \Omega \gamma(t) = \Omega$  et en dérivant, nous obtenons  $\frac{d}{dt} \gamma(t)^T|_{t=0} \Omega \gamma(0) + \gamma(0)^T \Omega \frac{d}{dt} \gamma(t)|_{t=0} = 0$  ce qui nous donne  $A^T \Omega + \Omega A = 0$ .

Soient  $t \in \mathbb{R}$  et  $A \in M_4(\mathbb{R})$  telle que  $A^T \Omega + \Omega A = 0$ . Cela implique que  $tA^T \Omega = -\Omega tA$  et puisque  $\Omega$  est inversible, nous avons que  $tA^T = -\Omega tA \Omega^{-1}$ . La proposition 4.7 implique que  $e^{tA^T} = \Omega e^{-tA} \Omega^{-1}$  ce qui implique que  $e^{tA^T} \Omega e^{tA} = \Omega$  et donc que  $e^{tA} \in \mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$  ce qui implique que  $A \in \mathfrak{sp}(4, \mathbb{R})$ .  $\square$

**Définition 5.5.** Soient  $G$  un groupe,  $e$  l'élément neutre de  $G$  et  $E$  un ensemble. Une *action* de  $G$  sur  $E$  est une opération

$$\begin{aligned} \cdot : G \times E &\rightarrow E \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

telle que

- i.  $e \cdot x = x$  pour tout  $x \in E$ ;
- ii.  $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$  pour tous  $g, h \in G$  et pour tout  $x \in E$ .

Dans ce cas, nous dirons que  $G$  agit sur  $E$ .

**Définition 5.6.** Le *groupe projectif symplectique*, noté  $\mathrm{PSp}(n, K)$ , est le groupe  $\mathrm{Sp}(n, K)/\{-I_n, I_n\}$ .

Nous serons désormais intéressé par le cas particulier :

$$\mathrm{PSp}(4, \mathbb{R}) := \mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})/\{-I_4, I_4\}.$$

**Proposition 5.7.** *Soient  $[A] \in \mathrm{PSp}(4, \mathbb{R})$  et  $L \in \mathrm{Lag}(\mathbb{R}^4)$ . Alors,  $[A] \cdot L := AL$  est une action de  $\mathrm{PSp}(4, \mathbb{R})$  sur  $\mathrm{Lag}(\mathbb{R}^4)$ .*

*Démonstration.* Soient  $[A] \in \mathrm{PSp}(4, \mathbb{R})$  et  $L = (l \mid l') \in \mathrm{Lag}(\mathbb{R}^4)$ . Nous montrons uniquement que l'opération est bien définie, c'est-à-dire que  $AL \in \mathrm{Lag}(\mathbb{R}^4)$  et  $[-A] \cdot L = [A] \cdot L$ , car les deux axiomes d'une action de groupe suivent directement de la multiplication matricielle.

Par hypothèse, nous avons  $A^T \Omega A = \Omega$  et  $l^T \Omega l' = 0$ . Cela implique que  $l^T A^T \Omega A l' = 0$  et ainsi que  $AL \in \mathrm{Lag}(\mathbb{R}^4)$ . De plus,  $[-A] \cdot L = -AL = AL(-I_2) = AL = [A] \cdot L$ , car l'ensemble des combinaisons linéaires des colonnes de  $L$  ne change pas suite à la multiplication à droite par une matrice inversible.  $\square$

Plus généralement, définissons

$$\mathrm{PSp}^\pm(4, \mathbb{R}) := \{A \in M_4(\mathbb{R}) \mid A^T \Omega A = \pm \Omega\} / \{-I_4, I_4\}.$$

Il est important de voir qu'une classe peut être dans  $\mathrm{PSp}^\pm(4, \mathbb{R})$  sans être dans  $\mathrm{PSp}(4, \mathbb{R})$ . Notamment,  $[\mathcal{A}^-] \in \mathrm{PSp}^\pm(4, \mathbb{R}) \setminus \mathrm{PSp}(4, \mathbb{R})$ , où

$$\mathcal{A}^- := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

La démonstration de la proposition 5.7 se généralise facilement pour obtenir le prochain résultat.

**Proposition 5.8.** *Soient  $[A] \in \mathrm{PSp}^\pm(4, \mathbb{R})$  et  $L \in \mathrm{Lag}(\mathbb{R}^4)$ . Alors,  $[A] \cdot L := AL$  est une action de  $\mathrm{PSp}^\pm(4, \mathbb{R})$  sur  $\mathrm{Lag}(\mathbb{R}^4)$ .*

**Définition 5.9.** Soient  $G$  un groupe et  $H \subseteq G$  un sous-groupe. L'indice de  $H$  est le nombre de classes d'équivalences de  $G$  à gauche (ou à droite) modulo  $H$ .

**Lemme 5.10.**  $\mathrm{PSp}(4, \mathbb{R})$  est un sous-groupe de  $\mathrm{PSp}^\pm(4, \mathbb{R})$  d'indice 2.

*Démonstration.* Soit

$$\begin{aligned} \varphi : \mathrm{PSp}^\pm(4, \mathbb{R}) &\rightarrow \{0, I\} \cong \mathbb{Z}_2 \\ [A] &\mapsto \frac{1}{2}(I - A^T \Omega A \Omega^{-1}) \end{aligned}$$

une application surjective de noyau  $\mathrm{PSp}(4, \mathbb{R})$ . Nous montrerons que  $\varphi$  est un homomorphisme de groupes. Soient  $[A], [B] \in \mathrm{PSp}^\pm(4, \mathbb{R})$ . En premier lieu, on remarque que  $\varphi([A]) = \varphi([-A])$  et donc que  $\varphi$  est bien définie. Si  $[A], [B] \notin \mathrm{PSp}(4, \mathbb{R})$ , alors  $[AB] \in \mathrm{PSp}(4, \mathbb{R})$ . En effet,  $B^T A^T \Omega A B = -B^T \Omega B = \Omega$ . Il en suit que  $\varphi([AB]) = 0$  si et seulement si exactement un de  $[A]$  ou  $[B]$  est dans  $\mathrm{PSp}(4, \mathbb{R})$ , ce qui entraîne que  $\varphi([AB]) = \varphi([A]) + \varphi([B])$  et donc que  $\varphi$  est un homomorphisme. Le premier théorème d'isomorphisme implique que  $\ker \varphi = \mathrm{PSp}(4, \mathbb{R})$  est un sous-groupe de  $\mathrm{PSp}^\pm(4, \mathbb{R})$  et que  $\mathrm{PSp}^\pm(4, \mathbb{R}) / \mathrm{PSp}(4, \mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}_2$ . Par conséquent, l'indice de  $\mathrm{PSp}(4, \mathbb{R})$  est 2.  $\square$

Tout sous-groupe d'indice 2 est normal, ce qui amène le prochain corollaire.

**Corollaire 5.11.** *Soit  $\mathcal{A}^-$  la matrice donnée par l'équation (2). Alors, les éléments de  $\mathrm{PSp}(4, \mathbb{R})$  avec  $[\mathcal{A}^-]$  engendrent  $\mathrm{PSp}^\pm(4, \mathbb{R})$ .*

**Théorème 5.12.** *L'action de  $\mathrm{PSp}^\pm(4, \mathbb{R})$  sur  $\mathrm{Lag}(\mathbb{R}^4)$  donne toutes les transformations linéaires préservant la tangence.*

*Démonstration.* Soient  $[A] \in \mathrm{PSp}^\pm(4, \mathbb{R})$  et  $L_1, L_2 \in \mathrm{Lag}(\mathbb{R}^4)$  tels que  $\dim(L_1 \cap L_2) = 1$ . Il suit de la proposition 5.8 que  $AL_1$  et  $AL_2$  sont dans  $\mathrm{Lag}(\mathbb{R}^4)$  et puisque  $A$  est inversible, nous avons que  $\dim(AL_1 \cap AL_2) = \dim(A(L_1 \cap L_2)) = 1$  ce qui implique que  $AL_1$  et  $AL_2$  sont tangents et la transformation est linéaire, car  $A$  est une matrice.

Soit  $B \in M_4(\mathbb{R})$  une transformation linéaire, sous une forme matricielle, préservant la tangence. C'est-à-dire que  $B$  est telle que  $\dim(BL_1 \cap BL_2) = 1$  et si  $L \in \mathrm{Lag}(\mathbb{R}^4)$ , alors  $BL \in \mathrm{Lag}(\mathbb{R}^4)$ . Notons par  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^4$ . Avec la proposition 3.8, nous obtenons que  $(\mathbf{e}_1 \mid \mathbf{e}_2), (\mathbf{e}_1 \mid \mathbf{e}_3), (\mathbf{e}_2 \mid \mathbf{e}_4), (\mathbf{e}_3 \mid \mathbf{e}_4) \in \mathrm{Lag}(\mathbb{R}^4)$  et donc que  $\mathbf{e}_i^T B^T \Omega B \mathbf{e}_j = 0$  pour les couples  $(i, j)$  donnés précédemment. Nous obtenons, en utilisant ces égalités, que

$$B^T \Omega B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & -b & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pour  $a, b \in \mathbb{R}$ . Encore avec la proposition 3.8, nous avons que  $(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \mid \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4) \in \mathrm{Lag}(\mathbb{R}^4)$ . Cela implique que

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathbf{e}_1^T B^T + \mathbf{e}_3^T B^T) \Omega (B \mathbf{e}_2 + B \mathbf{e}_4) \\ &= \mathbf{e}_1^T B^T \Omega B \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1^T B^T \Omega B \mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_3^T B^T \Omega B \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3^T B^T \Omega B \mathbf{e}_4 \\ &= a - b \end{aligned}$$

si et seulement si  $a = b$ . Nous obtenons ainsi que  $B^T \Omega B = a \Omega$ . Nous savons que  $a \neq 0$ , car  $B \neq 0$  puisque  $\dim(BL_1 \cap BL_2) = 1$ . Posons  $\lambda := 1/\sqrt{|a|}$ . En particulier, la matrice  $\lambda B$  définit la même transformation que  $B$ , car  $BL = BL(\lambda I_2) = \lambda BL$ . Cela nous donne que chaque transformation linéaire préservant la tangence envoie  $\Omega$  à  $\pm \Omega$ . Puisque  $B$  et  $-B$  définissent la même transformation, nous avons sans ambiguïté que  $[B] \in \mathrm{PSp}^\pm(4, \mathbb{R})$ .  $\square$

Nous retournons à l'étude de  $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$ . Considérons l'application

$$f : M_2(\mathbb{C}) \rightarrow M_4(\mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} a_1 + ia_2 & b_1 + ib_2 \\ c_1 + ic_2 & d_1 + id_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 & b_1 & -b_2 \\ a_2 & a_1 & b_2 & b_1 \\ c_1 & -c_2 & d_1 & -d_2 \\ c_2 & c_1 & d_2 & d_1 \end{pmatrix}.$$

Nous avons le résultat suivant.

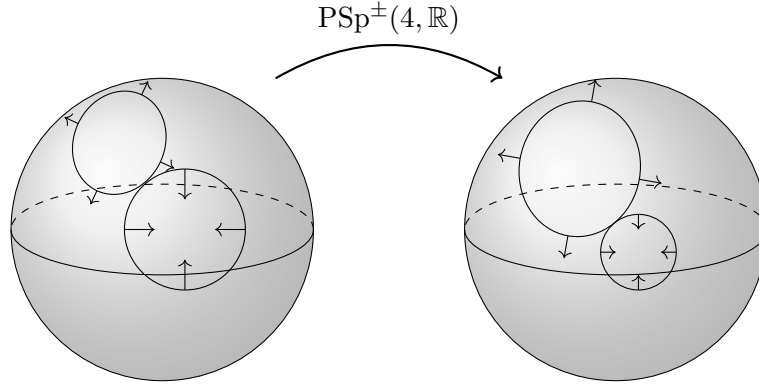


FIGURE 4 : Action de  $\mathrm{PSp}^\pm(4, \mathbb{R})$  sur deux lagrangiens tangents, vue sur  $\hat{\mathbb{C}}$ .

**Proposition 5.13.** *L'ensemble  $f(\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$  est un groupe pour la multiplication matricielle et ce groupe est isomorphe à  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ .*

**Proposition 5.14.** *Le groupe  $f(\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$  est un sous-groupe de Lie matriciel de  $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$ .*

*Démonstration.* Soit  $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ . Alors,  $\det(A) = 1$  ce qui implique plus précisément que  $\Re(\det(A)) = 1$  et que  $\Im(\det(A)) = 0$ . Ces conditions impliquent que  $f(A)^T \Omega f(A) = \Omega$  ce qui entraîne que  $f(A) \in \mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$ . Par la proposition 5.13,  $f(\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$  est un groupe et donc est un sous-groupe de  $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$ .

Soit  $B_m$  une suite de matrices de  $f(\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$  qui converge à  $B$ . Pour toute  $B_i$  dans  $B_m$ ,  $\det(f^{-1}(B_i)) = 1$ . Puisque le déterminant est un polynôme et donc continue,  $\det(f^{-1}(B)) = 1$  ce qui implique, par isomorphisme, que  $B$  est inversible et que  $B \in f(\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$ .  $\square$

**Corollaire 5.15.** *Notons  $\mathrm{Pf}(\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})) := f(\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))/\{-I_4, I_4\}$ . Nous avons que  $\mathrm{Pf}(\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$  est un sous-groupe de  $\mathrm{PSp}(4, \mathbb{R})$  et ce groupe est isomorphe à  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ .*

Ce corollaire implique que le groupe des transformations de Möbius agit sur  $\mathrm{Lag}(\mathbb{R}^4)$  et plus particulièrement, que l'action préserve la tangence. Effectivement, pour  $M \in \mathcal{M}$  et  $L \in \mathrm{Lag}(\mathbb{R}^4)$ , l'action est donnée par  $M \cdot L := f(\psi(M))L$ . C'est un abus de notation, car  $f$  n'est pas bien définie sur  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ . Cependant, tout représentant d'une classe d'équivalence correspond à la même transformation sur  $L$ .

**Proposition 5.16.** *Posons*

$$\mathcal{E}_{4, \mathbb{R}} := \left\{ e^A \left| A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & c \\ b & -a & c & 0 \\ 0 & d & a & -b \\ d & 0 & -b & -a \end{pmatrix}, \text{ pour } a, b, c, d \in \mathbb{R} \right. \right\},$$

*Alors,  $\mathcal{E}_{4, \mathbb{R}}$  est un sous-ensemble de  $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$ .*

*Démonstration.* Soit  $e^A \in \mathcal{E}_{4,\mathbb{R}}$ . Nous pouvons vérifier que  $A^T\Omega + \Omega A = 0$  ce qui implique, par le lemme 5.4, que  $A \in \mathfrak{sp}(4, \mathbb{R})$  ce qui entraîne, par définition de l'algèbre de Lie matricielle, que  $e^A \in \mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$ .  $\square$

**Proposition 5.17.** *Soit  $\langle f(\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})), \mathcal{E}_{4,\mathbb{R}} \rangle$ , le groupe engendré par  $f(\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$  et  $\mathcal{E}_{4,\mathbb{R}}$ . Alors,  $\langle f(\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})), \mathcal{E}_{4,\mathbb{R}} \rangle$  est un sous-groupe de Lie matriciel de  $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$ .*

*Démonstration.* Le résultat est général, puisqu'un groupe généré par un sous-ensemble est nécessairement un sous-groupe.  $\square$

**Lemme 5.18.** *Considérons l'ensemble  $\widetilde{\mathcal{E}_{4,\mathbb{R}}}$  des matrices  $X$  telles que  $e^X \in \mathcal{E}_{4,\mathbb{R}}$  et les algèbres de Lie de  $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$  et de  $f(\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$ ,  $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{R})$  et  $f(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$  respectivement en tant qu'espaces vectoriels. Alors,*

$$\mathfrak{sp}(4, \mathbb{R}) = f(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})) \oplus \widetilde{\mathcal{E}_{4,\mathbb{R}}}.$$

*Démonstration.* L'inclusion  $f(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})) + \widetilde{\mathcal{E}_{4,\mathbb{R}}} \subseteq \mathfrak{sp}(4, \mathbb{R})$  est donnée par les propositions 5.14 et 5.16.

Nous pouvons vérifier, avec les définitions de  $f(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$  et de  $\widetilde{\mathcal{E}_{4,\mathbb{R}}}$ , que  $f(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})) \cap \widetilde{\mathcal{E}_{4,\mathbb{R}}} = 0$ . Or, la somme est directe.

Soit  $A \in \mathfrak{sp}(4, \mathbb{R})$ . Par le lemme 5.4, nous avons que  $A = -\Omega^{-1}A^T\Omega = \Omega A^T\Omega$  et un calcul direct nous donne que  $\dim \mathfrak{sp}(4, \mathbb{R}) = 10$ . Suivant l'exemple 4.13, nous avons que  $f(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$  a 6 dimensions réelles et il suit de la définition de  $\widetilde{\mathcal{E}_{4,\mathbb{R}}}$  que cet espace est de 4 dimensions. Donc,  $f(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})) \oplus \widetilde{\mathcal{E}_{4,\mathbb{R}}} = \mathfrak{sp}(4, \mathbb{R})$ .  $\square$

**Théorème 5.19.** *Les groupes  $\langle f(\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})), \mathcal{E}_{4,\mathbb{R}} \rangle$  et  $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$  sont égaux.*

*Démonstration.* Notons  $G := \langle f(\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})), \mathcal{E}_{4,\mathbb{R}} \rangle$  et par  $\mathfrak{g}$  l'algèbre de Lie de  $G$ . Nous montrerons que  $f(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})) \oplus \widetilde{\mathcal{E}_{4,\mathbb{R}}} \subseteq \mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{sp}(4, \mathbb{R})$  et il découlera du lemme 5.18 que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(4, \mathbb{R})$ .

Par la proposition 5.17,  $G \subseteq \mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$  ce qui implique que  $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{sp}(4, \mathbb{R})$ . Soient  $A \in f(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$ ,  $B \in \widetilde{\mathcal{E}_{4,\mathbb{R}}}$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Par la formule de Lie (théorème 4.8),  $e^{\alpha A + \beta B} = \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{\frac{\alpha A}{n}} e^{\frac{\beta B}{n}})^n$ , où  $\alpha A + \beta B \in f(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})) \oplus \widetilde{\mathcal{E}_{4,\mathbb{R}}}$ . Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , il suit de la définition de  $G$  et de la définition d'une algèbre de Lie matricielle que  $(e^{\frac{\alpha A}{m}} e^{\frac{\beta B}{m}})^m \in G$  ce qui implique, par définition d'un groupe de Lie matriciel, que  $e^{\alpha A + \beta B} \in G$  et donc que  $f(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})) \oplus \widetilde{\mathcal{E}_{4,\mathbb{R}}} \subseteq \mathfrak{g}$ .

Par la proposition 5.3,  $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$  est connexe, ce qui implique, par le corollaire 4.16, que  $G = \mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$ .  $\square$

Le corollaire suivant est à la base de la visualisation de l'action de  $\mathrm{PSp}(4, \mathbb{R})$ .

**Corollaire 5.20.** *Nous avons les deux égalités suivantes :*

$$\begin{aligned} \langle Pf(\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})), \mathcal{E}_{4,\mathbb{R}} / \{-I_4, I_4\} \rangle &= \mathrm{PSp}(4, \mathbb{R}) \\ \langle Pf(\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})), \mathcal{E}_{4,\mathbb{R}} / \{-I_4, I_4\}, [\mathcal{A}^-] \rangle &= \mathrm{PSp}^\pm(4, \mathbb{R}), \end{aligned}$$

où  $\mathcal{A}^-$  est définie à l'équation (2).



## 6 Visualisation

Nous présenterons en détail le programme [Leb23] pour visualiser de manière interactive un sous-ensemble de 10 dimensions des transformations préservant la tangence entre les cercles orientés sur la sphère de Riemann.

### 6.1 Sélectionner et appliquer la transformation

La proposition 5.8 implique que  $\mathrm{PSp}^\pm(4, \mathbb{R})$  agit sur  $\mathrm{Lag}(\mathbb{R}^4)$  et le théorème 5.12 implique que c'est le groupe des transformations linéaires préservant la tangence. En vertu du corollaire 5.20, nous pouvons paramétrer  $\mathrm{PSp}(4, \mathbb{R})$  par la multiplication des éléments de  $Pf(\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$  avec les éléments de  $\mathcal{E}_{4, \mathbb{R}}$ . Par le corollaire 5.15,  $Pf(\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$  est isomorphe au groupe des transformations de Möbius. Il suit de la proposition 2.7 qu'étant donné deux triplets d'éléments distincts  $(z_1, z_2, z_3)$  et  $(w_1, w_2, w_3)$  de  $\hat{\mathbb{C}}$ , il existe une unique transformation de Möbius qui envoie  $z_i$  à  $w_i$  pour  $i = 1, 2, 3$ .

Pour choisir une transformation, nous sélectionnons les quatre paramètres pour obtenir  $A \in \mathcal{E}_{4, \mathbb{R}}$  et en fixant deux points, par exemple  $z_1 = w_1$  et  $z_2 = w_2$ , nous pouvons glisser la souris pour spécifier  $z_3 \mapsto w_3$ . Le corollaire 2.9 nous donne l'unique transformation de Möbius représentant cette transformation et les propositions 2.12 et 5.15 nous donnent la matrice  $B \in Pf(\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$  de la transformation. En multipliant  $A$  et  $B$ , nous obtenons un élément de  $\mathrm{PSp}(4, \mathbb{R})$  et il suffit qu'à le multiplier aux lagrangiens représentant un cercle pour appliquer la transformation. Pour appliquer une transformation qui est dans  $\mathrm{PSp}^\pm(4, \mathbb{R})$ , mais qui n'est pas dans  $\mathrm{PSp}(4, \mathbb{R})$ , nous n'avons qu'à multiplier la transformation courante par  $\mathcal{A}^-$ , en appuyant sur le bouton respectif.

### 6.2 Afficher les cercles orientés

La proposition 5.7 implique que  $ABL$  pour  $L \in \mathrm{Lag}(\mathbb{R}^4)$  est un lagrangien. Supposons que le bloc  $2 \times 2$  inférieur de  $ABL$  est inversible et que  $ABL = (u \mid v)$ . Pour visualiser le cercle associé à ce lagrangien, nous multiplions à droite la matrice inverse du bloc inférieur pour obtenir  $(u' \mid v')$ , la forme à la proposition 3.9. La proposition 3.10 nous donne le centre et le rayon du cercle, que nous pouvons afficher. Pour visualiser l'orientation, nous illustrons le point, ainsi que le vecteur, associé à  $u$ . La position de  $u$  nous est donnée par  $P(u)$  et la direction du vecteur associé à  $u$  nous est donnée par la proposition 3.14.

## Références

- [And05] James W. ANDERSON : *Hyperbolic Geometry*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer London, 2 édition, 2005.
- [BK21] Jean-Philippe BURELLE et Ryan KIRK : *Piecewise circular curves and positivity*, 2021.

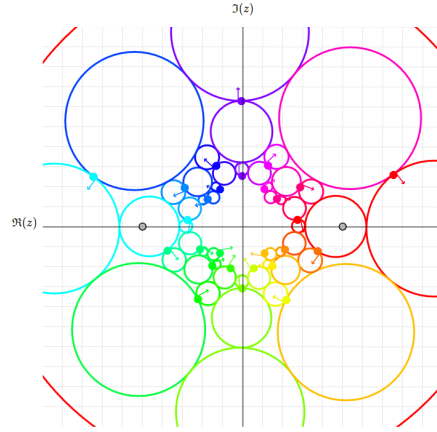


FIGURE 5 : Action de  $\mathrm{PSp}^{\pm}(4, \mathbb{R})$  sur des lagrangiens  $L \in \mathrm{Lag}(\mathbb{R}^4)$ .

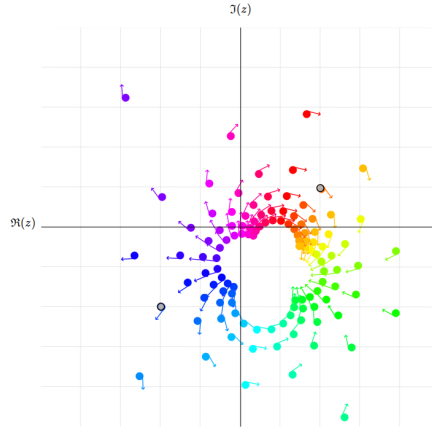


FIGURE 6 : Action de  $\mathrm{Pf}(\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})) \cong \mathcal{M}$  sur des vecteurs  $l \in L^*$ .

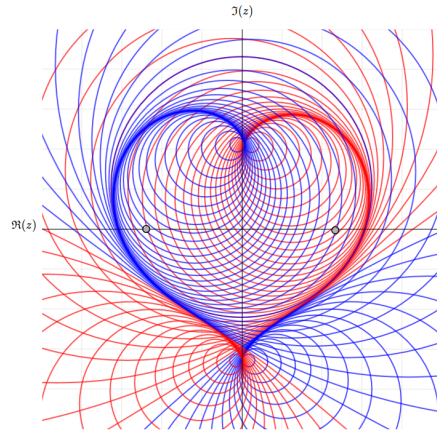


FIGURE 7 :  $\mathrm{PSp}(4, \mathbb{R})$  agit aussi sur la *courbe de Veronese*.

- [GM10] Ved Prakash GUPTA et Mukund Madhav MISHRA : On the topology of certain matrix groups, 2010. <https://www.jnu.ac.in/Faculty/vedgupta/matrix-gps-gupta-mishra.pdf>.
- [Hal15] Brian C. HALL : *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations*. Graduate Texts in Mathematics. Springer Cham, 2 édition, 2015.
- [Leb23] Samuel LEBLANC : riemannsphere. <https://github.com/samueleblanc/riemannsphere>, 2023.
- [Lie72] Sophus LIE : On complexes - in particular, line and sphere complexes - with applications to the theory of partial differential equations. *Mathematische Annalen*, (5):145–208, 1872.
- [Tho17] Kevin THOUIN : Géométrie hyperbolique : le demi-plan de Poincaré. *Cahiers Mathématiques de l'Université de Sherbrooke (CaMUS)*, (6): 29–44, 2017.

SAMUEL LEBLANC

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

*Courriel:* Samuel.LebLANC6@USherbrooke.ca