

Dégénération des représentations de carquois de type \mathbb{A}_3 à deux puits

Samuel Leblanc

RÉSUMÉ Nous présenterons de façon explicite les dégénération des représentations des carquois de type \mathbb{A}_3 à deux puits en utilisant principalement l'algèbre linéaire. D'abord, nous décrirons l'orbite des représentations matricielles de ce carquois, ainsi que la fermeture de cette dernière. Nous introduisons, au préalable, certaines notions de topologie et de la théorie des groupes.

1 Introduction

La théorie des représentations est une théorie mathématique qui a pour but de *représenter* les structures algébriques par des transformations linéaires d'espaces vectoriels. Elle permet alors d'étudier ces objets de manière concrète, avec les opérations matricielles usuelles et autres outils de l'algèbre linéaire. Dans le présent article, nous étudierons plus précisément les dégénération des représentations de carquois. Les représentations de carquois ont été introduites par le mathématicien français Pierre Gabriel (1933-2015), aussi appelé Peter Gabriel, dans [Gab72]. Cette théorie sert principalement à l'étude des algèbres et ainsi trouve entre autres des applications en géométrie et en physique théorique.

Les dégénération des représentations de carquois ont notamment été étudiées dans [ADK81], [AD84], [AD85], [Rie86] et [Bon95]. Les principaux résultats de cet article ont été obtenus dans [AD85] dans une plus grande généralité. La différence dans notre approche est que nous avons travaillé directement avec des matrices. Or, nos démonstrations se résument à des manipulations matricielles et par le fait même, sont très concrètes. Des méthodes similaires ont été utilisées dans [Roy17], pour le cas du carquois de type \mathbb{A}_2 . Dans cet article, nous nous intéresserons aux dégénération du carquois de type \mathbb{A}_3 à deux puits.

Plus précisément, la section 2 servira d'introduction à la topologie. Nous présenterons ce qu'est la topologie de Zariski et ce qu'est la fermeture d'un sous-ensemble d'un espace topologique. Dans la section 3, nous introduirons la notion de carquois et d'une représentation de carquois. Le groupe $\prod_{i \in I} \mathrm{GL}_{n_i}(K)$ agit sur les représentations K -linéaires de carquois, ce qui nous permettra de définir l'orbite d'une telle représentation. La section 4 sera dédiée à l'étude des orbites des représentations d'un carquois de type \mathbb{A}_3 à deux puits. Nous en donnerons une description complète. Finalement, la section 5 contient le résultat principal, qui est une classification des dégénération des représentations de \mathbb{A}_3 .

J'aimerais remercier Emily Cliff et Shiping Liu pour leur aide et leur support financier tout au long du stage et de la rédaction de l'article.

2 Topologie

Dans cette section, nous présenterons quelques définitions et résultats en topologie qui nous serviront tout au long de l'article. Bien que nous ne définirons pas ce qu'est une dégénération dans cette portion du texte, il est à noter que cette notion est principalement de nature topologique. Les démonstrations dans cette partie seront omises. Cependant, elles sont faites dans [Roy17] et nous donnons une référence pour chaque énoncé.

Définition 2.1. Soit X un ensemble non vide. Une *topologie* \mathcal{T} sur X est une collection de sous-ensembles de X telle que

- i. $\emptyset \in \mathcal{T}$ et $X \in \mathcal{T}$,
- ii. L'union arbitraire d'éléments de \mathcal{T} est dans \mathcal{T} ,
- iii. Une intersection finie d'éléments de \mathcal{T} est dans \mathcal{T} .

Le couple (X, \mathcal{T}) est nommé un *espace topologique* et les éléments de \mathcal{T} sont appelés des *ouverts*. Un sous-ensemble de X est *fermé* si son complément est un ouvert. Pour alléger la notation, nous écrirons X au lieu de (X, \mathcal{T}) .

Définition 2.2. Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction entre deux espaces topologiques. Alors, f est *continue* si $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X lorsque U est ouvert dans Y .

Remarque 2.3. La fonction f n'étant pas nécessairement inversible, f^{-1} correspond à la préimage de f .

Définition 2.4. Soient X et Y deux espaces topologiques. Une fonction $f : X \rightarrow Y$ est un *homéomorphisme* si

- i. f est bijective,
- ii. f est continue,
- iii. f^{-1} est continue.

Définition 2.5. Soit K un corps. Un *n -espace affine* sur K , noté \mathbb{A}^n , est l'ensemble des points $P = (a_1, \dots, a_n)$ avec $a_i \in K$.

Soit $R := K[x_1, \dots, x_n]$ l'anneau des polynômes à n indéterminés sur le corps K . En interprétant les éléments f de R comme étant des fonctions à n variables

$$\begin{aligned} f : \mathbb{A}^n &\rightarrow K \\ P &\mapsto f(P) = f(a_1, \dots, a_n), \end{aligned}$$

nous pouvons définir les zéros de f .

Définition 2.6. Soit $f \in R$. Les *zéros de f* sont l'ensemble $Z(f) := \{P \in \mathbb{A}^n \mid f(P) = 0\}$. Plus généralement, pour $\mathcal{F} \subseteq R$, on définit

$$Z(\mathcal{F}) := \{P \in \mathbb{A}^n \mid f(P) = 0 \forall f \in \mathcal{F}\}$$

les *zéros de \mathcal{F}* .

Définition 2.7. Un sous-ensemble $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ est un *ensemble algébrique* s'il existe $\mathcal{F} \subseteq R$ tel que $Y = Z(\mathcal{F})$.

En d'autres mots, un ensemble algébrique est l'ensemble des zéros communs pour un ensemble de polynômes dans R .

Proposition 2.8. ([Har77], 1.1) *L'union de deux ensembles algébriques est un ensemble algébrique et l'intersection d'une famille finie d'ensembles algébriques est un ensemble algébrique. De plus, l'ensemble vide et l'espace complet sont des ensembles algébriques.*

Définition 2.9. La *topologie de Zariski* sur \mathbb{A}^n est définie en prenant les ouverts comme étant les compléments des ensembles algébriques.

La topologie de Zariski permet d'étudier les ensembles algébriques avec les outils de la topologie, indépendamment d'un choix de topologie sur K . D'ailleurs, il est possible de vérifier que cela forme bel et bien une topologie avec la proposition 2.8 et la loi de De Morgan.

À partir de maintenant, nous fixerons K un corps algébriquement clos infini et le n -espace affine sur K , \mathbb{A}^n , sera un espace topologique avec la topologie de Zariski.

Définition 2.10. Soient X un espace topologique et $U \subseteq X$. La *fermeture* de U , notée \overline{U} , est le plus petit ensemble fermé contenant U .

Il est à noter que \overline{U} est fréquemment appelée l'*adhérence* de U .

Lemme 2.11. ([Roy17], 2.17) *Soient $U \subseteq \mathbb{A}^n$ et $f : \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{A}^n$ une application continue. Si $f(x) \in U$ pour tout $x \in K \setminus \{0\}$, alors $f(0) \in \overline{U}$.*

Définition 2.12. Une application $\phi : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^m$ est *régulière* s'il existe $\phi_1, \dots, \phi_m \in K[x_1, \dots, x_n]$ tels que $\phi(P) = (\phi_1(P), \dots, \phi_m(P))$ pour tout $P \in \mathbb{A}^n$.

Lemme 2.13. ([Roy17], 2.13) *Soit $\phi : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^m$ une application régulière. Alors, ϕ est continue.*

Le lemme précédent est aussi démontré dans un cadre plus général dans [Har77], Lemme 3.1.

3 Représentations de carquois

Définition 3.1. Un *carquois* $Q = (Q_0, Q_1, s, b)$ est composé d'un graphe orienté (Q_0, Q_1) où Q_0 est l'ensemble des sommets et Q_1 est l'ensemble des flèches reliant les sommets, ainsi que de deux applications $s, b : Q_1 \rightarrow Q_0$. Si $\alpha : i \rightarrow j$ est une flèche, alors $s(\alpha) = i$ est la *source* et $b(\alpha) = j$ est le *but*.

En outre, on dit que $j \in Q_0$ est un *puits* de Q si j n'est la source d'aucune flèche de Q . Enfin, un carquois est dit *fini* si Q_0 et Q_1 sont finis.

Pour le reste de la section, $Q = (Q_0, Q_1, s, b)$ représentera un carquois fini.

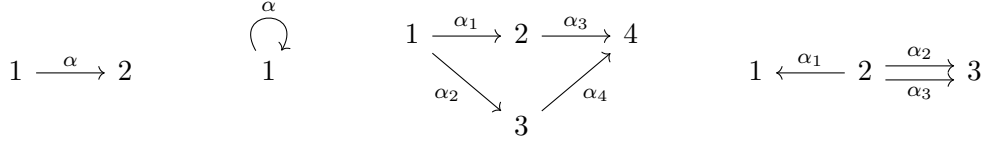


FIGURE 1 : Exemples de carquois

Définition 3.2. Une *représentation* K -linéaire M de Q est une famille de K -espaces vectoriels de dimensions finies $M(i)$ pour $i \in Q_0$ et d'une famille d'applications K -linéaires $M(\alpha) : M(i) \rightarrow M(j)$, avec $\alpha : i \rightarrow j$ les flèches, parcourant Q_1 .

Exemple 3.3. Si Q est

$$1 \xrightarrow{\alpha} 2,$$

une représentation M de Q est

$$M(1) \xrightarrow{M(\alpha)} M(2).$$

Définition 3.4. Un Q -vecteur, noté \underline{d} , est un vecteur d'entiers non négatifs de la forme $\underline{d} = (d_i)_{i \in Q_0}$. On dit que \underline{d} est *sincère* si $d_i > 0$ pour tout $i \in Q_0$.

Définition 3.5. Soient \underline{d} un Q -vecteur et M une représentation K -linéaire de Q . Alors, \underline{d} est le *vecteur-dimension* de M , si $\underline{d} = (\dim M(i))_{i \in Q_0}$. On dira que M est *sincère* si \underline{d} est sincère.

Notation 3.6. Soit \underline{d} un Q -vecteur. L'ensemble des représentations K -linéaires de Q de vecteur-dimension \underline{d} sera noté $\text{rep}_{\underline{d}}(Q, K)$.

3.1 Représentations matricielles de carquois

Pour travailler aisément sur les représentations avec les outils de l'algèbre linéaire, il est pratique d'utiliser les matrices. L'objectif de cette sous-section sera d'introduire une méthode pour associer des matrices aux représentations.

Définition 3.7. Soit $\underline{d} = (d_i)_{i \in Q_0}$ un Q -vecteur sincère. À chaque flèche $\alpha : i \rightarrow j$ dans Q_1 , on associe une matrice M_α sur K de taille $d_i \times d_j$. On appelle la collection $\tilde{M} = (M_\alpha)_{\alpha \in Q_1}$ une *représentation matricielle* sur K de Q du vecteur-dimension \underline{d} .

Exemple 3.8. Supposons que nous avons le carquois Q suivant :

$$1 \xrightarrow{\alpha} 2$$

et la représentation M de Q du vecteur-dimension $\underline{d} = (2,3)$ suivante :

$$M(1) \xrightarrow{M(\alpha)} M(2),$$

alors une représentation matricielle associée à M serait illustrée par :

$$M(1) \xrightarrow{M_\alpha = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}} M(2).$$

Notation 3.9. L'ensemble des représentations matricielles sur K de Q du Q -vecteur \underline{d} sera noté $\text{Mat}_{\underline{d}}(Q, K)$.

Soit \underline{d} un Q -vecteur sincère. Il y a une correspondance entre $\text{rep}_{\underline{d}}(Q, K)$ et $\text{Mat}_{\underline{d}}(Q, K)$ donnée de la façon suivante.

Soit $M \in \text{rep}_{\underline{d}}(Q, K)$. Pour chaque $i \in Q_0$, on fixe une base \mathcal{B}_i de $M(i)$ et pour chaque $\alpha : i \rightarrow j$ dans Q_1 , on considère la matrice M_α de $M(\alpha) : M(i) \rightarrow M(j)$ dans les bases \mathcal{B}_i et \mathcal{B}_j . Ainsi, $\tilde{M} = (M_\alpha)_{\alpha \in Q_1} \in \text{Mat}_{\underline{d}}(Q, K)$ est une représentation matricielle associée à M .

Réciproquement, étant donnée $\tilde{N} = (N_\alpha)_{\alpha \in Q_1} \in \text{Mat}_{\underline{d}}(Q, K)$, on prend $N(i) = K^{d_i}$ le K -espace vectoriel des matrices de taille $1 \times d_i$ pour tout $i \in Q_0$. Pour toute $\alpha : i \rightarrow j$ dans Q_1 , on pose :

$$\begin{aligned} N(\alpha) : K^{d_i} &\rightarrow K^{d_j} \\ u &\mapsto uN_\alpha \end{aligned}$$

et on obtient une représentation N de $\text{rep}_{\underline{d}}(Q, K)$. Il nous suffira donc de travailler avec $\text{Mat}_{\underline{d}}(Q, K)$.

Définition 3.10. Soient $\tilde{M} \in \text{Mat}_{\underline{d}}(Q, K)$ et $\tilde{N} \in \text{Mat}_{\underline{d}'}(Q, K)$. Un *morphisme* $P : \tilde{M} \rightarrow \tilde{N}$ est une famille de matrices P_i de taille $\dim M(i) \times \dim N(i)$ pour $i \in Q_0$ telles que, pour toute $\alpha \in Q_1$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} M(i) & \xrightarrow{M_\alpha} & M(j) \\ P_i \downarrow & & \downarrow P_j \\ N(i) & \xrightarrow{N_\alpha} & N(j), \end{array}$$

c'est-à-dire que $P_i N_\alpha = M_\alpha P_j$.

Remarque 3.11. On dit que P est un *isomorphisme*, si P_i est inversible pour tout $i \in Q_0$.

Soit $\underline{d} = (d_i)_{i \in Q_0}$ un Q -vecteur sincère et posons $q := \sum_{\alpha \in Q_1} d_{s(\alpha)} d_{t(\alpha)}$. En écrivant les matrices en ligne, on identifie $\text{Mat}_{\underline{d}}(Q, K)$ au q -espace affine \mathbb{A}^q avec la topologie de Zariski.

Exemple 3.12. Soient $Q : 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$ un carquois et $\underline{d} = (2, 2, 1)$ un Q -vecteur. Alors, $\text{Mat}_{\underline{d}}(Q, K) \cong \mathbb{A}^6$. En effet, en écrivant en ligne chaque $\tilde{M} = (A, B) \in \text{Mat}_{\underline{d}}(Q, K)$, où $A = (a_{ij})_{i=1,2; j=1,2}$ et $B = (b_{ij})_{i=1,2; j=1}$, on obtient $\text{Mat}_{\underline{d}}(Q, K) \cong \{((a_{11} \ a_{12} \ a_{21} \ a_{22}), (b_{11} \ b_{21})) \mid a_{ij}, b_{ij} \in K\}$, qu'on identifiera à \mathbb{A}^6 .

En traitant $\text{Mat}_{\underline{d}}(Q, K)$ en tant qu'espace topologique, nous définirons une action de groupe sur ce dernier.

3.2 Action de groupe

Définition 3.13. Soient G un groupe, e son élément neutre et X un espace topologique. Une *action* (à droite) de G sur X est une opération

$$\begin{aligned} \cdot : X \times G &\rightarrow X \\ (x, g) &\mapsto x \cdot g \end{aligned}$$

respectant les propriétés suivantes :

- i. $x \cdot e = x$ pour tout $x \in X$;
- ii. $x \cdot (g_1 g_2) = (x \cdot g_1) \cdot g_2$ pour tous $g_1, g_2 \in G$ et pour tout $x \in X$;
- iii. Pour tout $g \in G$, l'application $g : X \rightarrow X$ définie par $g(x) = x \cdot g$ est un homéomorphisme.

Nous remarquons que les deux premières conditions sont celles d'une action de groupe sur un ensemble, tandis que la dernière est ajoutée lorsqu'on considère une action de groupe sur un espace topologique.

Définition 3.14. Soient X un espace topologique et G un groupe agissant sur X . Pour tout $x \in X$, on définit $x \cdot G := \{x \cdot g \mid g \in G\}$, la G -orbite de x .

Le prochain théorème nous donne de l'information sur la fermeture d'une G -orbite. Il peut être déduit de la démonstration de la proposition 8.3 dans [Hum75].

Théorème 3.15. ([Roy17], 3.3) *Soient X un espace topologique, G un groupe agissant sur X et $x \in X$. Si $y \in \overline{x \cdot G}$, alors $y \cdot G \subseteq \overline{x \cdot G}$.*

Soit $\underline{d} = (d_i)_{i \in Q_0}$ un Q -vecteur sincère. Le groupe qui nous intéressera pour l'instant est le produit direct

$$\prod_{i \in Q_0} \text{GL}_{d_i}(K) = (\text{GL}_{d_1}(K), \dots, \text{GL}_{d_n}(K)),$$

où $\text{GL}_n(K)$ dénote le groupe des matrices inversibles sur K de taille $n \times n$ pour la multiplication matricielle. Ce groupe sera noté $\text{GL}_{\underline{d}}(K)$.

Proposition 3.16. ([Roy17], 4.9) Soient $\tilde{M} = (M_\alpha)_{\alpha \in Q_1} \in \text{Mat}_{\underline{d}}(Q, K)$ où \underline{d} est un Q -vecteur sincère et $g = (g_i)_{i \in Q_0} \in \text{GL}_{\underline{d}}(K)$. Alors,

$$\tilde{M} \cdot g := (g_{s(\alpha)}^{-1} M_\alpha g_{b(\alpha)})_{\alpha \in Q_1}$$

est une action de $\text{GL}_{\underline{d}}(K)$ sur $\text{Mat}_{\underline{d}}(Q, K)$.

Notation 3.17. Soit $\tilde{M} \in \text{Mat}_{\underline{d}}(Q, K)$. Nous noterons la $\text{GL}_{\underline{d}}(K)$ -orbite de \tilde{M} par $\mathcal{O}(\tilde{M})$.

Exemple 3.18. Reprenons la représentation matricielle de l'exemple 3.8. Alors,

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\tilde{M}) &= \{\tilde{M} \cdot g \mid g \in \text{GL}_{\underline{d}}(K)\} \\ &= \{g_1^{-1} M_\alpha g_2 \mid g_1 \in \text{GL}_2(K) \text{ et } g_2 \in \text{GL}_3(K)\}. \end{aligned}$$

Avant de travailler sur les représentations matricielles, nous rappellerons certains résultats de l'algèbre linéaire.

Lemme 3.19. *Toute matrice A se réduit suite à des opérations élémentaires de lignes et de colonnes à*

$$\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où $k = \text{rg}(A)$.

Lemme 3.20. *Toute suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes à partir d'une matrice correspond à la multiplication à gauche par une matrice inversible. De la même façon, toute suite finie d'opérations élémentaires sur les colonnes à partir d'une matrice correspond à la multiplication à droite par une matrice inversible.*

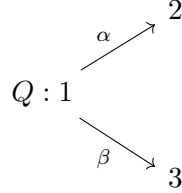
Puisque les lemmes 3.19 et 3.20 sont des résultats bien connus, leurs démonstrations sont omises.

Lemme 3.21. *Soit I la matrice identité. Si E est obtenue à partir de I suite à des opérations élémentaires de lignes, alors E se réduit à I par des opérations élémentaires de colonnes.*

Démonstration. Supposons que E ait été obtenue à partir de I suite à des opérations élémentaires de lignes. Par le lemme 3.20, il existe une matrice J inversible telle que $E = JI$, ce qui implique que $EJ^{-1} = I$ et par conséquent que $E^{-1} = J^{-1}$ est la matrice associée aux opérations élémentaires de colonnes qui réduira E à I . \square

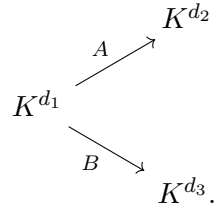
4 Orbites des représentations de \mathbb{A}_3

Pour le reste de l'article, on se fixe Q un carquois de type \mathbb{A}_3 à deux puits



et $\underline{d} = (d_1, d_2, d_3)$ un Q -vecteur sincère.

Dans ce cas, une représentation matricielle $\tilde{M} \in \text{Mat}_{\underline{d}}(Q, K)$ est un couple de matrices $\tilde{M} = (A, B)$ où A est de taille $d_1 \times d_2$ et B est de taille $d_1 \times d_3$. Alors, \tilde{M} peut être illustrée par

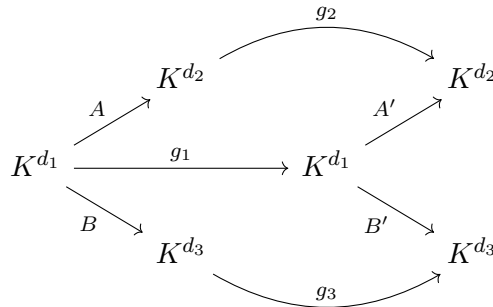


Le reste de l'article sera consacré à l'étude de ces représentations matricielles. Dans cette section, nous donnerons une description des orbites de ces représentations matricielles.

Le lemme suivant justifie partiellement notre intérêt pour les orbites de représentations matricielles.

Lemme 4.1. *Les classes d'isomorphismes de $\text{Mat}_{\underline{d}}(Q, K)$ sont les orbites de $\text{Mat}_{\underline{d}}(Q, K)$.*

Démonstration. Soit $\tilde{M} = (A, B) \in \text{Mat}_{\underline{d}}(Q, K)$. Considérons la classe d'isomorphisme de \tilde{M} , c'est-à-dire l'ensemble des représentations matricielles $\tilde{M}' = (A', B')$ tel que le diagramme suivant commute



avec g_1 , g_2 et g_3 inversibles. Nous avons que $Ag_2 = g_1A'$ et $g_1B' = Bg_3$ ce qui équivaut à $A' = g_1^{-1}Ag_2$ et $B' = g_1^{-1}Bg_3$. La classe d'isomorphisme de \tilde{M} est l'ensemble des A' et B' respectant cette condition, ce qui est exactement l'orbite de \tilde{M} ; $\{(g_1^{-1}Ag_2, g_1^{-1}Bg_3) \mid (g_1, g_2, g_3) \in \text{GL}_{\underline{d}}(K)\} = \mathcal{O}(\tilde{M})$. \square

Définition 4.2. Une matrice partagée $(A \mid B)$, où A est de taille $d_1 \times d_2$ et B est de taille $d_1 \times d_3$ est dite une *matrice partagée de type* $d_1 \times [d_2|d_3]$.

Notons par $\text{Mat}_{d_1 \times [d_2|d_3]}(Q, K)$ l'ensemble des matrices partagées de type $d_1 \times [d_2|d_3]$. Comme avec $\text{Mat}_{\underline{d}}(Q, K)$, nous identifierons $\text{Mat}_{d_1 \times [d_2|d_3]}(Q, K)$ avec l'espace topologique $\mathbb{A}^{d_1(d_2+d_3)}$.

Les résultats suivants nous permettront de travailler avec $\text{Mat}_{d_1 \times [d_2|d_3]}(Q, K)$.

Proposition 4.3. Soient $(A \mid B) \in \text{Mat}_{d_1 \times [d_2|d_3]}(Q, K)$ et $g = (g_1, g_2, g_3) \in \text{GL}_{\underline{d}}(K)$. Alors,

$$(A \mid B) \cdot g := g_1^{-1} (A \mid B) \begin{pmatrix} g_2 & 0 \\ 0 & g_3 \end{pmatrix}$$

est une action de $\text{GL}_{\underline{d}}(K)$ sur $\text{Mat}_{d_1 \times [d_2|d_3]}(Q, K)$.

La démonstration étant similaire à celle de la proposition 3.16, elle sera omise.

Notation 4.4. Nous noterons par $\mathcal{O}(A \mid B)$ la $\text{GL}_{\underline{d}}(K)$ -orbite de $(A \mid B)$ avec l'action de groupe définie à la proposition précédente.

Théorème 4.5. Définissons l'application

$$\begin{aligned} \Psi : \text{Mat}_{\underline{d}}(Q, K) &\rightarrow \text{Mat}_{d_1 \times [d_2|d_3]}(Q, K) \\ (A, B) &\mapsto (A \mid B). \end{aligned}$$

et écrivons $\Psi(\mathcal{O}(A, B)) := \{\Psi(A', B') \mid (A', B') \in \mathcal{O}(A, B)\}$.

Nous obtenons les deux résultats qui suivent.

i. Ψ est un homéomorphisme.

ii. $\Psi(\mathcal{O}(A, B)) = \mathcal{O}(\Psi(A, B))$ pour tout $(A, B) \in \text{Mat}_{\underline{d}}(Q, K)$.

Démonstration. (i.) La vérification de ce résultat est directe.

(ii.) Soit $(A', B') \in \mathcal{O}(A, B)$. Ainsi, $(A', B') = (g_1^{-1}Ag_2, g_1^{-1}Bg_3)$ pour $(g_1, g_2, g_3) \in \text{GL}_{\underline{d}}(K)$. Par définition de Ψ , on a que

$$\begin{aligned} \Psi(g_1^{-1}Ag_2, g_1^{-1}Bg_3) &= (g_1^{-1}Ag_2 \mid g_1^{-1}Bg_3) \\ &= g_1^{-1} (A \mid B) \begin{pmatrix} g_2 & 0 \\ 0 & g_3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ce qui entraîne que $\Psi(\mathcal{O}(A, B)) = \mathcal{O}(A \mid B) = \mathcal{O}(\Psi(A, B))$. \square

Ce théorème nous dit entre autres que les espaces topologiques $\text{Mat}_{\underline{d}}(Q, K)$ et $\text{Mat}_{d_1 \times [d_2|d_3]}(Q, K)$ sont homéomorphes. Par conséquent, nous travaillerons désormais avec $\text{Mat}_{d_1 \times [d_2|d_3]}(Q, K)$.

Nous introduisons le prochain exemple, qui nous suivra pour le reste de l'article.

Exemple 4.6. Soit $\tilde{M} = (A, B) \in \text{Mat}_{(2,1,2)}(Q, \mathbb{C})$, où

$$\begin{array}{ccc} & A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} & \nearrow \mathbb{C} \\ \tilde{M} = \mathbb{C}^2 & & \\ & B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} & \searrow \mathbb{C}^2. \end{array}$$

Il en suit que

$$\Psi(\tilde{M}) = \left(\begin{array}{c|cc} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \in \text{Mat}_{2 \times [1|2]}(Q, \mathbb{C}).$$

Par ailleurs, $\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{smallmatrix} \right), (1), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{smallmatrix} \right) \right) \in \text{GL}_{(2,1,2)}(\mathbb{C})$ agit sur $\Psi(\tilde{M})$ par

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|cc} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right).$$

Pour atteindre l'objectif actuel qui est de trouver l'orbite des matrices de $\text{Mat}_{d_1 \times [d_2|d_3]}(Q, K)$, nous énoncerons certains résultats importants. Nous débuterons par introduire l'équivalent du lemme 3.20 pour les matrices partagées.

Lemme 4.7. Soit $(A \mid B) \in \text{Mat}_{d_1 \times [d_2|d_3]}(Q, K)$. Toute suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes de $(A \mid B)$ correspond à la multiplication à gauche par une matrice inversible. Toute suite finie d'opérations élémentaires sur les colonnes de A ou sur les colonnes de B correspond à la multiplication à droite par une matrice diagonale par bloc $\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}$, avec $g \in \text{GL}_{d_2}(K)$ et $h \in \text{GL}_{d_3}(K)$.

Démonstration. Le cas des opérations de lignes est traité par le lemme 3.20. Pour ce qui est des opérations de colonnes, le lemme 3.20 implique qu'il existe g, h des matrices inversibles où leurs multiplications à droite correspondent aux opérations de colonnes sur A et sur B , respectivement. Le résultat suit de la multiplication par bloc. En effet, $(Ag \mid Bh) = (A \mid B) \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}$. \square

Le résultat précédent motive la prochaine définition.

Définition 4.8. Soit $(A \mid B) \in \text{Mat}_{d_1 \times [d_2|d_3]}(Q, K)$. Une opération élémentaire sur $(A \mid B)$ est une *opération admissible*, si l'opération est une opération élémentaire sur les lignes de $(A \mid B)$, sur les colonnes de A ou sur les colonnes de B .

Proposition 4.9. Soient $(A \mid B), (A' \mid B') \in \text{Mat}_{d_1 \times [d_2|d_3]}(Q, K)$. Alors, $(A' \mid B') \in \mathcal{O}(A \mid B)$ si et seulement si $(A' \mid B')$ a été obtenue à partir de $(A \mid B)$ par des opérations admissibles.

Démonstration. Ce résultat découle directement de la proposition 4.3 et du lemme 4.7. \square

Théorème 4.10. *Soit $(A \mid B) \in \text{Mat}_{d_1 \times [d_2 | d_3]}(Q, K)$. Alors, $(A \mid B)$ se réduit par des opérations admissibles à la matrice partagée*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} I_r & 0 & 0 & I_r & 0 & 0 \\ 0 & I_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) =: I_{(r,s,t)},$$

où $r = \text{rg}(A) + \text{rg}(B) - \text{rg}(A \mid B)$, $s = \text{rg}(A \mid B) - \text{rg}(B)$ et $t = \text{rg}(A \mid B) - \text{rg}(A)$.

Démonstration. Nous débuterons par l'introduction de chaque manipulation à faire pour obtenir la matrice $I_{(r,s,t)}$. Par les lemmes 3.19 et 3.20, on sait qu'il existe $G^{(1)}$ et $H^{(1)} = \begin{pmatrix} H_{11}^{(1)} & 0 \\ 0 & I_{d_3} \end{pmatrix}$ des matrices inversibles telles que

$$G^{(1)} (A \mid B) H^{(1)} = \left(\begin{array}{cc|cc} I_{\text{rg}(A)} & 0 & B_{11}^{(1)} & \\ 0 & 0 & B_{21}^{(1)} & \end{array} \right) =: (A^{(1)} \mid B^{(1)}).$$

Par les lemmes 3.19 et 3.20, il existe $G^{(2)}$ et $H^{(2)} = \begin{pmatrix} I_{d_2} & 0 \\ 0 & H_{22}^{(2)} \end{pmatrix}$ des matrices inversibles telles que la multiplication à gauche par $G^{(2)}$ et la multiplication à droite par $H^{(2)}$ réduira $B_{21}^{(1)}$. Nous obtenons ainsi, pour $t := \text{rg}(B_{21}^{(1)})$,

$$G^{(2)} (A^{(1)} \mid B^{(1)}) H^{(2)} = \left(\begin{array}{cc|cc} I_{\text{rg}(A)} & 0 & B_{11}^{(2)} & B_{12}^{(2)} \\ 0 & 0 & I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) =: (A^{(2)} \mid B^{(2)}).$$

L'objectif étant d'éliminer le bloc $B_{11}^{(2)}$, nous poserons

$$G^{(3)} := \begin{pmatrix} I_{\text{rg}(A)} & -B_{11}^{(2)} & 0 \\ 0 & I_t & 0 \\ 0 & 0 & I_{d_1 - \text{rg}(A) - t} \end{pmatrix}$$

et suite à la multiplication à gauche par cette matrice, on obtient

$$\begin{aligned} G^{(3)} (A^{(2)} \mid B^{(2)}) &= \begin{pmatrix} I_{\text{rg}(A)} & -B_{11}^{(2)} & 0 \\ 0 & I_t & 0 \\ 0 & 0 & I_{d_1 - \text{rg}(A) - t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{\text{rg}(A)} & 0 & B_{11}^{(2)} & B_{12}^{(2)} \\ 0 & 0 & I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_{\text{rg}(A)} & 0 & 0 & B_{12}^{(2)} \\ 0 & 0 & I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &=: (A^{(3)} \mid B^{(3)}). \end{aligned}$$

Par les lemmes 3.19 et 3.20, il existe $G_{11}^{(4)}$ et $H_{44}^{(4)}$ des matrices telles que lorsque multipliées à droite et à gauche respectivement, réduira $B_{12}^{(2)}$. Par le lemme 3.21, la multiplication à droite par $G_{11}^{(4)-1}$ annulera les opérations sur les lignes correspondantes à la multiplication de $G_{11}^{(4)}$ faite sur $I_{\text{rg}(A)}$ et par conséquent, la laissera inchangée. En effet, si $r := \text{rg}(B_{12}^{(2)})$, nous aurons

$$\begin{aligned}
G^{(4)} \left(A^{(3)} \mid B^{(3)} \right) H^{(4)} &= \begin{pmatrix} G_{11}^{(4)} & 0 & 0 \\ 0 & I_t & 0 \\ 0 & 0 & I_{d_1 - \text{rg}(A) - t} \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cc|cc} I_{\text{rg}(A)} & 0 & 0 & B_{12}^{(2)} \\ 0 & 0 & I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) H^{(4)} \\
&= \begin{pmatrix} G_{11}^{(4)} I_{\text{rg}(A)} & 0 & 0 & B_{12}^{(3)} \\ 0 & 0 & I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{11}^{(4)-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{d_2 - \text{rg}(A)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{44}^{(4)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} I_{\text{rg}(A)} & 0 & 0 & \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ 0 & 0 & I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&=: \left(A^{(4)} \mid B^{(4)} \right).
\end{aligned}$$

En posant $s := \text{rg}(A) - r$ et en sous divisant la matrice en plus de blocs, nous obtenons

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 & 0 & 0 & I_r \\ 0 & I_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: \left(A^{(5)} \mid B^{(5)} \right).$$

Par le lemme 3.20, il existe $H^{(5)} = \begin{pmatrix} I_{d_2} & 0 \\ 0 & H_{22}^{(5)} \end{pmatrix}$ où $H_{22}^{(5)}$ est la matrice associée à la permutation des colonnes de $B^{(5)}$ telle que $(A^{(5)} \mid B^{(5)})H^{(5)} = I_{(r,s,t)}$.

Finalement, par construction de $I_{(r,s,t)}$, on a que $r + s = \text{rg}(A)$, $r + t = \text{rg}(B)$ et $r + s + t = \text{rg}(A \mid B)$. Nous pouvons remarquer que $r = \text{rg}(A) + \text{rg}(B) - \text{rg}(A \mid B)$. En substituant r dans les égalités ci-dessus, nous obtenons que $s = \text{rg}(A \mid B) - \text{rg}(B)$ et que $t = \text{rg}(A \mid B) - \text{rg}(A)$. \square

Remarque 4.11. Par la formule de Grassmann, nous avons que $r = \dim(\mathcal{C}(A) \cap \mathcal{C}(B))$, la dimension de l'intersection de l'espace colonne de A et de l'espace colonne de B ([Ass21], II.3.25).

Remarque 4.12. Étant donnée $(A \mid B) \in \text{Mat}_{d_1 \times [d_2 | d_3]}(Q, K)$, la matrice partagée $I_{(r,s,t)}$ obtenue à partir de $(A \mid B)$ est unique. En effet, par le lemme 4.7, faire des opérations admissibles est équivalent à multiplier A , B et $(A \mid B)$ par des matrices inversibles, ce qui entraîne que $\text{rg}(A)$, $\text{rg}(B)$ et $\text{rg}(A \mid B)$ resteront inchangés ce qui implique que r , s et t ne changent pas et donc que la matrice $I_{(r,s,t)}$ obtenue à partir de $(A \mid B)$ est unique. Nous appellerons cette matrice la *forme canonique de $(A \mid B)$* .

Exemple 4.13. Continuons l'exemple 4.6. La proposition 4.9 nous dit que l'action de groupe est une opération admissible. Or, la forme canonique de $(A \mid B)$ est

$$\left(\begin{array}{c|cc} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = I_{(1,0,1)}.$$

Proposition 4.14. Soient $(A \mid B) \in \text{Mat}_{d_1 \times [d_2|d_3]}(Q, K)$ et $I_{(r,s,t)}$ la forme canonique de $(A \mid B)$. Alors, $\mathcal{O}(I_{(r,s,t)}) = \mathcal{O}(A \mid B)$.

Démonstration. Puisque $I_{(r,s,t)}$ est obtenue à partir de $(A \mid B)$ suite à des opérations admissibles, on a, par la proposition 4.9, que $I_{(r,s,t)} \in \mathcal{O}(A \mid B)$ ce qui entraîne que $\mathcal{O}(I_{(r,s,t)}) = \mathcal{O}(A \mid B)$. \square

Le problème de calculer $\mathcal{O}(A \mid B)$ revient alors à calculer $\mathcal{O}(I_{(r,s,t)})$. En combinant les résultats obtenus dans le théorème 4.10 et la proposition 4.14, nous avons le lemme suivant.

Lemme 4.15. Soit $(A \mid B) \in \text{Mat}_{d_1 \times [d_2|d_3]}(Q, K)$. Donc,

$$\mathcal{O}(A \mid B) = \left\{ (A' \mid B') \in \text{Mat}_{d_1 \times [d_2|d_3]}(Q, K) \left| \begin{array}{l} \text{rg}(A') = \text{rg}(A) \\ \text{rg}(B') = \text{rg}(B) \\ \text{rg}(A' \mid B') = \text{rg}(A \mid B) \end{array} \right. \right\}.$$

Démonstration. Soit $(A' \mid B') \in \mathcal{O}(A \mid B)$. Supposons que $(A \mid B)$ se réduit à $I_{(r,s,t)}$. Par la proposition 4.14, on a que $(A' \mid B') \in \mathcal{O}(I_{(r,s,t)})$, ce qui implique, par la proposition 4.9, que $(A' \mid B')$ se réduit aussi à $I_{(r,s,t)}$. Cela implique que r, s et t sont les mêmes pour $(A' \mid B')$ et $(A \mid B)$ et donc, par le théorème 4.10, on en conclut que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A')$, $\text{rg}(B) = \text{rg}(B')$ et $\text{rg}(A \mid B) = \text{rg}(A' \mid B')$.

Soit $(A' \mid B')$ une matrice telle que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A')$, $\text{rg}(B) = \text{rg}(B')$ et $\text{rg}(A \mid B) = \text{rg}(A' \mid B')$. Il en découle du théorème 4.10 que r, s et t sont les mêmes pour $(A \mid B)$ et $(A' \mid B')$ et donc que leurs formes canoniques sont les mêmes. On obtient, par la proposition 4.14, que $\mathcal{O}(A' \mid B') = \mathcal{O}(I_{(r,s,t)}) = \mathcal{O}(A \mid B)$ et en particulier que $(A' \mid B') \in \mathcal{O}(A \mid B)$. \square

Une fois l'orbite de $(A \mid B)$ calculée, il est naturel de se demander combien il y a d'orbites possibles pour un Q -vecteur donné. Par la qualification de l'orbite donnée au lemme 4.15, nous obtenons le résultat suivant.

Lemme 4.16. Posons $m_1 := \min(d_1, d_2)$, $m_2 := \min(d_1, d_3)$, $m_3 := \min(d_1, d_2 + d_3)$ et $q := m_1 + m_2 - m_3$. Le nombre d'orbites de $\text{Mat}_{d_1 \times [d_2|d_3]}(Q, K)$ est

$$\frac{m_1 + 1}{6} \left(m_1(3m_2 - m_1 + 1) + 6(m_2 + 1) \right) - m,$$

$$\text{où } m = \begin{cases} 0, & \text{si } q \leq 0 \\ \frac{1}{6}(q-1)(q+4)q + q, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Soit $(A \mid B) \in \text{Mat}_{d_1 \times [d_2 | d_3]}(Q, K)$. Par le lemme 4.15, on a que l'orbite de $(A \mid B)$ est uniquement déterminée par $\text{rg}(A)$, $\text{rg}(B)$ et $\text{rg}(A \mid B)$, ce qui implique que le nombre d'orbites de $\text{Mat}_{d_1 \times [d_2 | d_3]}(Q, K)$ sera le nombre de triplets $(\text{rg}(A), \text{rg}(B), \text{rg}(A \mid B))$ possible. Cependant, il y a des restrictions sur $\text{rg}(A)$, $\text{rg}(B)$ et $\text{rg}(A \mid B)$. En effet, nous avons que $0 \leq \text{rg}(A) \leq m_1$ et que $0 \leq \text{rg}(B) \leq m_2$. Pour ce qui est de $\text{rg}(A \mid B)$, nous savons qu'il ne peut être plus petit que $\text{rg}(A)$ ou que $\text{rg}(B)$, mais qu'il ne peut dépasser ni $\text{rg}(A) + \text{rg}(B)$ ni m_3 . Nous obtenons ainsi la condition : $\max(\text{rg}(A), \text{rg}(B)) \leq \text{rg}(A \mid B) \leq \min(\text{rg}(A) + \text{rg}(B), m_3)$. On remarque aussi qu'étant donné un triplet (i, j, x) tel que $0 \leq i \leq m_1$, $0 \leq j \leq m_2$ et $\max(i, j) \leq x \leq \min(i + j, m_3)$, il est possible de construire une matrice partagée $(A \mid B) \in \text{Mat}_{d_1 \times [d_2 | d_3]}(Q, K)$ où $\text{rg}(A) = i$, $\text{rg}(B) = j$ et $\text{rg}(A \mid B) = x$. Notons alors $(i, j, x) := (\text{rg}(A), \text{rg}(B), \text{rg}(A \mid B))$. Le nombre de combinaisons sera la somme du nombre de valeurs possibles pour x , pour toute combinaison de i et de j possible, ce qui équivaut à la somme suivante :

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} \#\{x \in \mathbb{N} \mid \max(i, j) \leq x \leq \min(i + j, m_3)\} \\
&= \sum_{i=0}^{m_1} \left(\sum_{j=0}^{m_2} \left[\#\{x \in \mathbb{N} \mid \max(i, j) \leq x \leq i + j\} - \sum_{k=m_3+1}^{i+j} 1 \right] \right) \\
&= \sum_{i=0}^{m_1} \left(\sum_{j=0}^i \left[\#\{x \in \mathbb{N} \mid i \leq x \leq i + j\} - \sum_{k=m_3+1}^{i+j} 1 \right] \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=i+1}^{m_2} \left[\#\{x \in \mathbb{N} \mid j \leq x \leq i + j\} - \sum_{k=m_3+1}^{i+j} 1 \right] \right) \\
&= \sum_{i=0}^{m_1} \left(\sum_{j=0}^i \left[j + 1 - \sum_{k=0}^{i+j-m_3-1} 1 \right] + \sum_{j=i+1}^{m_2} \left[i + 1 - \sum_{k=0}^{i+j-m_3-1} 1 \right] \right) \\
&= \sum_{i=0}^{m_1} \left((i + 1)(m_2 - \frac{i}{2} + 1) - \sum_{j=0}^{m_2} \sum_{k=0}^{i+j-m_3-1} 1 \right) \\
&= \frac{m_1 + 1}{6} \left(m_1(3m_2 - m_1 + 1) + 6(m_2 + 1) \right) - \underbrace{\sum_{i=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} \sum_{k=0}^{i+j-m_3-1} 1}_m.
\end{aligned}$$

□

5 Dégénération des représentations de \mathbb{A}_3

Soient X un espace topologique, $x \in X$ et G un groupe agissant sur X . Une dégradation de x peut être vue comme une approximation grossière de x . Il est effectivement possible d'inférer des caractéristiques de la G -orbite de x en

connaissant les dégénéralions de x , ou plus précisément, d'inférer des caractéristiques de la fermeture de $x \cdot G$.

Définissons maintenant ce qu'est une dégénéralion dans le contexte précis dans lequel nous travaillons.

Définition 5.1. Soient $(A \mid B), (A' \mid B') \in \text{Mat}_{d_1 \times [d_2 \mid d_3]}(Q, K)$. On dit que $(A' \mid B')$ est une *dégénéralion* de $(A \mid B)$, notée $(A \mid B) \leq_{\text{deg}} (A' \mid B')$, si $\mathcal{O}(A' \mid B') \subseteq \overline{\mathcal{O}(A \mid B)}$.

Le théorème principal de cet article fournit les conditions suffisantes et nécessaires pour être une dégénéralion d'une matrice partagée de $\text{Mat}_{d_1 \times [d_2 \mid d_3]}(Q, K)$. Il peut être énoncé comme suit.

Théorème 5.2. Soient $(A \mid B), (A' \mid B') \in \text{Mat}_{d_1 \times [d_2 \mid d_3]}(Q, K)$. Alors, $(A' \mid B')$ est une dégénéralion de $(A \mid B)$ si et seulement si $\dim(\mathcal{C}(A') \cap \mathcal{C}(B')) \leq \dim(\mathcal{C}(A) \cap \mathcal{C}(B))$, $\text{rg}(A') \leq \text{rg}(A)$, $\text{rg}(B') \leq \text{rg}(B)$ et $\text{rg}(A' \mid B') \leq \text{rg}(A \mid B)$.

Le reste de la section sera dédié à faire la démonstration de ce théorème. Pour y arriver, nous aurons besoin de résultats additionnels.

Proposition 5.3. La dégénéralion est une relation transitive.

Démonstration. Cela découle directement de la définition d'une dégénéralion et de celle de la fermeture. \square

Lemme 5.4. Le triplet (r, s, t) est tel que $r, s, t \geq 0$, $r + s + t \leq d_1$, $r + s \leq d_2$ et $r + t \leq d_3$ si et seulement si $I_{(r, s, t)} \in \text{Mat}_{d_1 \times [d_2 \mid d_3]}(Q, K)$.

Démonstration. La direction inverse est triviale.

Supposons (r, s, t) tel que $r, s, t \geq 0$, $r + s + t \leq d_1$, $r + s \leq d_2$ et $r + t \leq d_3$. Ces conditions entraînent que $\max(r + s, r + t) \leq r + s + t \leq \min(d_1, d_2 + d_3)$, $0 \leq r + s \leq \min(d_1, d_2)$ et $0 \leq r + t \leq \min(d_1, d_3)$, ce qui implique qu'il existe $(A \mid B) \in \text{Mat}_{d_1 \times [d_2 \mid d_3]}(Q, K)$ telle que $\text{rg}(A \mid B) = r + s + t$, $\text{rg}(A) = r + s$ et $\text{rg}(B) = r + t$. Le théorème 4.10 implique que $(A \mid B)$ se réduit à $I_{(r, s, t)} \in \text{Mat}_{d_1 \times [d_2 \mid d_3]}(Q, K)$. \square

Soit (r, s, t) un triplet d'entiers. Définissons les opérations :

$$\begin{aligned} \varrho_1(r, s, t) &= (r - 1, s, t + 1); \\ \varrho_2(r, s, t) &= (r - 1, s + 1, t); \\ \varrho_3(r, s, t) &= (r, s - 1, t); \\ \varrho_4(r, s, t) &= (r, s, t - 1). \end{aligned}$$

La proposition suivante est facilement vérifiable.

Proposition 5.5. Soit (r, s, t) tel que $r, s, t \geq 0$, $r + s + t \leq d_1$, $r + s \leq d_2$ et $r + t \leq d_3$ et posons $\varrho_i(r, s, t) = (r', s', t')$ pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Alors, (r', s', t') est tel que $r' + s' + t' \leq d_1$, $r' + s' \leq d_2$ et $r' + t' \leq d_3$.

Lemme 5.6. *Soient $I_{(r,s,t)} \in \text{Mat}_{d_1 \times [d_2|d_3]}(Q, K)$ et $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Si $\varrho_i(r, s, t) = (r', s', t')$ est tel que $r', s', t' \geq 0$, alors $I_{(r', s', t')} \in \text{Mat}_{d_1 \times [d_2|d_3]}(Q, K)$ et $I_{(r', s', t')}$ est une dégénération de $I_{(r,s,t)}$.*

Démonstration. Nous ferons la démonstration complète pour $i = 1$. Ensuite, puisque les démonstrations des cas suivants sont similaires, seulement les fonctions seront énoncées.

1) Posons $\varrho_1(r, s, t) = (r', s', t')$ et considérons la fonction

$$f_1 : K \rightarrow \mathbb{A}^{d_1(d_2+d_3)}$$

$$\lambda \mapsto I_{(r,s,t)} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & I_{d_2+d_3-1} \end{pmatrix}.$$

Par le lemme 5.4 et la proposition 5.5, $I_{(r', s', t')} \in \text{Mat}_{d_1 \times [d_2|d_3]}(Q, K)$.

L'application f_1 étant régulière, le lemme 2.13 implique qu'elle est continue et il en suit du lemme 2.11 que, puisque $f_1(\lambda) \in \mathcal{O}(I_{(r,s,t)})$ pour tout $\lambda \in K \setminus \{0\}$, alors $f_1(\lambda) \in \overline{\mathcal{O}(I_{(r,s,t)})}$ pour $\lambda = 0$. Le théorème 3.15 implique que $\mathcal{O}(f_1(0)) \subseteq \overline{\mathcal{O}(I_{(r,s,t)})}$. Mais, $f_1(0) \in \mathcal{O}(I_{(r', s', t')})$, car

$$f_1(0) = \begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 & \big| & I_r & 0 & 0 \\ 0 & I_s & 0 & \big| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \big| & 0 & 0 & I_t \\ 0 & 0 & 0 & \big| & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I_{r-1} & 0 & 0 & \big| & I_{r-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \big| & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \big| & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_s & 0 & \big| & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \big| & 0 & 0 & 0 & I_t \\ 0 & 0 & 0 & \big| & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui se réduit, suite à une permutation de lignes et de colonnes du deuxième bloc, à

$$\begin{pmatrix} I_{r-1} & 0 & 0 & \big| & I_{r-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \big| & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_s & 0 & \big| & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \big| & 0 & 0 & I_{t+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \big| & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I_{(r', s', t')}$$

ce qui entraîne, par la proposition 4.9, que $f_1(0) \in \mathcal{O}(I_{(r', s', t')})$ et donc que $\mathcal{O}(f_1(0)) = \mathcal{O}(I_{(r', s', t')})$. Cela implique que $\mathcal{O}(I_{(r', s', t')}) \subseteq \overline{\mathcal{O}(I_{(r,s,t)})}$ ce qui est équivalent à $I_{(r,s,t)} \leq_{\text{deg}} I_{(r', s', t')}$.

Nous présenterons maintenant les fonctions associées aux trois derniers cas.

2)

$$f_2 : K \rightarrow \mathbb{A}^{d_1(d_2+d_3)}$$

$$\lambda \mapsto I_{(r,s,t)} \begin{pmatrix} I_{d_2} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & I_{d_3-1} \end{pmatrix}$$

3)

$$f_3 : K \rightarrow \mathbb{A}^{d_1(d_2+d_3)}$$

$$\lambda \mapsto I_{(r,s,t)} \begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & I_{d_2+d_3-r-1} \end{pmatrix}$$

4)

$$f_4 : K \rightarrow \mathbb{A}^{d_1(d_2+d_3)}$$

$$\lambda \mapsto I_{(r,s,t)} \begin{pmatrix} I_{d_2+d_3-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Puisque $\mathcal{O}(f_i(0)) \subseteq \overline{\mathcal{O}(I_{(r,s,t)})}$ et $\mathcal{O}(f_i(0)) = \mathcal{O}(I_{\varrho_i(r,s,t)})$ pour $i = 1, 2, 3, 4$, nous avons que $I_{(r,s,t)} \leq_{\deg} I_{\varrho_i(r,s,t)}$ pour $i = 1, 2, 3, 4$. \square

Exemple 5.7. Considérons la forme canonique $I_{(1,0,1)}$ de l'exemple 4.13. Puisque $\varrho_1(1,0,1) = (0,0,2)$, nous obtenons que

$$I_{(1,0,1)} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \leq_{\deg} \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = I_{(0,0,2)}.$$

Nous pouvons remarquer que les opérations ϱ_i sont commutatives. De plus, puisqu'il est possible d'enchaîner ces opérations, nous remarquons que $\varrho_1^{a_1}(r,s,t) = (r - a_1, s, t + a_1)$, $\varrho_2^{a_2}(r,s,t) = (r - a_2, s - a_2, t)$, $\varrho_3^{a_3}(r,s,t) = (r, s - a_3, t)$ et $\varrho_4^{a_4}(r,s,t) = (r, s, t - a_4)$ sont les résultats des opérations de type ϱ_i fait a_i fois. Il en découle que toute séquence peut être donnée par la composition $\varrho_1^{a_1}(\varrho_2^{a_2}(\varrho_3^{a_3}(\varrho_4^{a_4}(r,s,t))))$, où $a_1, a_2, a_3, a_4 \geq 0$.

Une conséquence directe du lemme 5.6 et de la transitivité de la dégénération (proposition 5.3) est le corollaire suivant.

Corollaire 5.8. Soient $I_{(r,s,t)} \in \text{Mat}_{d_1 \times [d_2|d_3]}(Q, K)$ et $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Supposons que $\varrho_1^{a_1}(\varrho_2^{a_2}(\varrho_3^{a_3}(\varrho_4^{a_4}(r,s,t)))) = (r', s', t')$ est tel que $r', s', t' \geq 0$. Alors, $I_{(r',s',t')} \in \text{Mat}_{d_1 \times [d_2|d_3]}(Q, K)$ et $I_{(r',s',t')}$ est une dégénération de $I_{(r,s,t)}$.

Proposition 5.9. Soient (r,s,t) et (r',s',t') deux triplets d'entiers non négatifs. Alors, $\varrho_1^{a_1}(\varrho_2^{a_2}(\varrho_3^{a_3}(\varrho_4^{a_4}(r,s,t)))) = (r',s',t')$ si et seulement si $r' \leq r$, $r'+s' \leq r+s$, $r'+t' \leq r+t$ et $r'+s'+t' \leq r+s+t$.

Démonstration. Supposons que $\varrho_1^{a_1}(\varrho_2^{a_2}(\varrho_3^{a_3}(\varrho_4^{a_4}(r,s,t)))) = (r',s',t')$. Nous nous retrouvons alors avec le système suivant :

$$\begin{cases} r' &= r - a_1 - a_2 \\ s' &= s + a_2 - a_3 \\ t' &= t + a_1 - a_4 \end{cases} \quad (1)$$

En regroupant les termes, on obtient

$$\begin{cases} r' + a_1 + a_2 &= r \\ r' + s' + a_1 + a_3 &= r + s \\ r' + t' + a_2 + a_4 &= r + t \\ r' + s' + t' + a_3 + a_4 &= r + s + t \end{cases}$$

ce qui implique que $r' \leq r$, $r' + s' \leq r + s$, $r' + t' \leq r + t$ et $r' + s' + t' \leq r + s + t$.

Supposons (r',s',t') tel que $r' \leq r$, $r' + s' \leq r + s$, $r' + t' \leq r + t$ et $r' + s' + t' \leq r + s + t$ et posons

$$\begin{cases} r' &= r - x_1 \\ r' + s' &= r + s - x_2 \\ r' + t' &= r + t - x_3 \\ r' + s' + t' &= r + s + t - x_4 \end{cases}$$

pour $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ et où x_4 est nécessairement égal à $x_2 + x_3 - x_1$. Il est possible de résoudre le système et obtenir

$$\begin{cases} r' &= r - x_1 \\ s' &= s + x_1 - x_2 \\ t' &= t + x_1 - x_3 \end{cases}$$

En posant $x_1 = a_1 + a_2$, $x_2 = a_1 + a_3$ et $x_3 = a_2 + a_4$, nous obtenons (1) ce qui implique que $\varrho_1^{a_1}(\varrho_2^{a_2}(\varrho_3^{a_3}(\varrho_4^{a_4}(r,s,t)))) = (r',s',t')$. \square

5.1 Fermeture

Pour être en mesure de donner toutes les dégénération de $(A \mid B)$, nous devons trouver la fermeture de l'orbite de $(A \mid B)$.

Définition 5.10. Soient A une matrice de taille $k_1 \times k_2$ et $k \leq \min(k_1, k_2)$ un entier positif. Un *mineur* de A d'ordre k est le déterminant d'une sous-matrice de A de taille $k \times k$.

Les deux lemmes suivants étant bien connus, leurs démonstrations seront omises.

Lemme 5.11. Soit A une matrice. Le rang de A est plus petit ou égal à k si et seulement si tous les mineurs d'ordre $k + 1$ sont nuls.

Lemme 5.12. Soient A une matrice et A' une matrice obtenue à partir de A suite à une opération élémentaire de ligne ou de colonne. Le déterminant de A est nul si et seulement si le déterminant de A' est nul.

Définition 5.13. Soit $(A \mid B) \in \text{Mat}_{d_1 \times [d_2 | d_3]}(Q, K)$. Alors, $(C_1 \mid C_2)$ est une sous-matrice partagée de $(A \mid B)$ de type $k_1 \times [k_2 | k_3]$ où $k_1 \leq d_1$, $k_2 \leq d_2$ et $k_3 \leq d_3$, si $(C_1 \mid C_2)$ est une sous-matrice de $(A \mid B)$, C_1 est une sous-matrice de A et C_2 est une sous-matrice de B .

Définition 5.14. Soit $(C_1 \mid C_2)$ une sous-matrice partagée de $(A \mid B)$ de type $k \times [k | k]$. Un mineur partagé de type $k \times [k | k]$ est le produit des déterminants de C_1 et de C_2 .

La proposition qui suit est une généralisation du lemme 5.12.

Proposition 5.15. Soit $(A \mid B) \in \text{Mat}_{d_1 \times [d_2 | d_3]}(Q, K)$. Si $(A' \mid B')$ est une matrice partagée obtenue à partir de $(A \mid B)$ par des opérations admissibles, alors tous les mineurs partagés de type $k \times [k | k]$ de $(A \mid B)$ sont nuls si et seulement si tous les mineurs partagés de type $k \times [k | k]$ de $(A' \mid B')$ sont nuls.

Démonstration. Les opérations admissibles étant inversibles, nous montrerons uniquement la suffisance. Soit $(C_1 \mid C_2)$ une sous-matrice partagée de $(A \mid B)$ de type $k \times [k | k]$ et supposons que tous les mineurs partagés de $(A \mid B)$ de ce type sont nuls. Supposons aussi que $(A' \mid B')$ a été obtenue à partir de $(A \mid B)$ à la suite d'une opération admissible.

Si l'opération n'utilisait que les lignes ou les colonnes de $(C_1 \mid C_2)$ ou que l'opération n'utilisait aucune de ces lignes et ces colonnes, alors, nous obtenons la sous-matrice partagée $(C'_1 \mid C'_2)$ de $(A' \mid B')$ où, par le lemme 5.12, $\det(C'_1)$ sera nul si $\det(C_1)$ est nul et $\det(C'_2)$ sera nul si $\det(C_2)$ est nul.

Si l'opération était la permutation d'une ligne ou la permutation (admissible) d'une colonne de $(C_1 \mid C_2)$ avec une ligne ou une colonne qui n'est pas dans $(C_1 \mid C_2)$, alors nous obtenons une sous-matrice partagée $(C'_1 \mid C'_2)$ composée de lignes ou de colonnes différentes. Puisque le mineur partagé de la sous-matrice partagée de $(A \mid B)$ composée des mêmes lignes et des mêmes colonnes que $(C'_1 \mid C'_2)$ était nul, nous nous retrouvons dans la même situation qu'au cas précédent ce qui entraîne que le mineur partagé de $(C'_1 \mid C'_2)$ sera nul.

Si l'opération est l'ajout d'un multiple d'une ligne ou l'ajout (admissible) d'un multiple d'une colonne de $(C_1 \mid C_2)$ à une ligne ou une colonne d'une autre sous-matrice partagée, alors le mineur partagé ne changera pas et donc sera nul. Supposons le cas alternatif, où un multiple d'une ligne (respectivement une colonne) qui n'est pas dans $(C_1 \mid C_2)$ est ajouté à une ligne (respectivement une colonne) qui est dans $(C_1 \mid C_2)$. Dans un premier temps, nous ferons la démonstration dans le cas où un multiple d'une ligne est ajouté. Notons

$$(C_1 \mid C_2) := \left(\begin{array}{c|c} L_1(C_1) & L_1(C_2) \\ \vdots & \vdots \\ L_{k-1}(C_1) & L_{k-1}(C_2) \\ L_k(C_1) & L_k(C_2) \end{array} \right) \text{ et } (D_1 \mid D_2) := \left(\begin{array}{c|c} L_1(C_1) & L_1(C_2) \\ \vdots & \vdots \\ L_{k-1}(C_1) & L_{k-1}(C_2) \\ L_k(D_1) & L_k(D_2) \end{array} \right)$$

pour $L_k(C_1 \mid C_2) \neq L_k(D_1 \mid D_2)$. Supposons donc que

$$(C'_1 \mid C'_2) = \left(\begin{array}{c|c} L_1(C_1) & L_1(C_2) \\ \vdots & \vdots \\ L_{k-1}(C_1) & L_{k-1}(C_2) \\ L_k(C_1) + L_k(D_1) & L_k(C_2) + L_k(D_2) \end{array} \right)$$

est la matrice obtenue suite à l'opération. Nous avons deux cas à vérifier : (i) si le déterminant de C_1 et le déterminant de D_1 sont nuls ou si le déterminant de C_2 et le déterminant de D_2 sont nuls et (ii) si le déterminant de C_1 et le déterminant de D_2 sont nuls ou le déterminant de C_2 et le déterminant de D_1 sont nuls. Commençons par (i). Sans perte de généralité, assumons que les déterminants de C_1 et de D_1 sont nuls. Or, il est possible d'écrire $L_k(C_1) = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i L_i(C_1)$ pour $\lambda_i \in K$ et nous obtenons

$$C'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{k-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1(C_1) \\ \vdots \\ L_{k-1}(C_1) \\ L_k(D_1) \end{pmatrix}$$

ce qui implique que $\det(C'_1) = 1 \det(D_1) = 0$ et donc que le mineur partagé de $(C'_1 \mid C'_2)$ est nul. Dans le cas de (ii), nous supposons que le déterminant de C_1 et le déterminant de D_2 sont nuls. Nous montrerons que le déterminant de D_1 ou que le déterminant de C_2 sera nécessairement nul, ce qui correspond au cas précédent. Considérons la sous-matrice partagée de $(A \mid B)$ de type $k \times [k|k]$ suivante :

$$(E_1 \mid E_2) := \left(\begin{array}{c|c} L_1(C_1) & L_1(C_2) \\ \vdots & \vdots \\ L_{k-2}(C_1) & L_{k-2}(C_2) \\ L_k(C_1) & L_k(C_2) \\ L_k(D_1) & L_k(D_2) \end{array} \right).$$

Nous savons que le mineur partagé de $(E_1 \mid E_2)$ est nul. Si le déterminant de E_1 est nul, alors $L_k(D_1)$ est combinaison linéaire de $L_1(C_1), \dots, L_{k-2}(C_1), L_k(C_1)$, mais, par hypothèse, le déterminant de C_1 est nul, ce qui implique que $L_k(C_1)$ est une combinaison linéaire de $L_1(C_1), \dots, L_{k-1}(C_1)$, ce qui implique que $L_k(D_1)$ est combinaison linéaire de $L_1(C_1), \dots, L_{k-1}(C_1)$ et donc le déterminant de D_1 est nul. De la même façon, si le déterminant de E_2 est nul, alors le déterminant de C_2 est nul.

Finalement, supposons le dernier cas, c'est-à-dire qu'un multiple d'une colonne qui n'est pas dans $(C_1 \mid C_2)$ est ajouté à une colonne dans $(C_1 \mid C_2)$. Sans perte de généralité, assumons que le déterminant de C_1 est nul. Si le multiple de la colonne est ajouté à une colonne de C_1 , nous pouvons faire le même argument qu'à la partie (i) précédente. Si le multiple de la colonne est ajouté à une colonne de C_2 , alors C_1 est inchangée et le mineur partagé restera nul. \square

Proposition 5.16. *Soit $(A \mid B) \in \text{Mat}_{d_1 \times [d_2|d_3]}(Q, K)$. Pour que tous les mineurs partagés de $(A \mid B)$ de type $k \times [k|k]$ soient nuls, il faut et il suffit que la dimension de l'intersection de l'espace colonne de A et de l'espace colonne de B soit strictement plus petite que k .*

Démonstration. Posons $(A' \mid B') := I_{(r,s,t)}$ la forme canonique de $(A \mid B)$. Dû aux remarques 4.11 et 4.12, nous savons que $\dim(\mathcal{C}(A) \cap \mathcal{C}(B)) = \dim(\mathcal{C}(A') \cap \mathcal{C}(B'))$. Suite à la proposition 5.15, nous avons que tous les mineurs partagés de type $k \times [k|k]$ de $(A \mid B)$ sont nuls si et seulement si tous les mineurs partagés de type $k \times [k|k]$ de $(A' \mid B')$ sont nuls. Nous montrerons donc que tous les mineurs partagés de type $k \times [k|k]$ de $(A' \mid B')$ sont nuls si et seulement si la dimension de l'intersection de l'espace colonne de A' et de l'espace colonne de B' est strictement plus petite que k .

Par contraposée, supposons $\dim(\mathcal{C}(A') \cap \mathcal{C}(B')) \geq k$. Par la remarque 4.11, on a que $r = k + l$ pour $l \geq 0$ et donc que

$$(A' \mid B') = \left(\begin{array}{ccc|ccc} I_{k+l} & 0 & 0 & I_{k+l} & 0 & 0 \\ 0 & I_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \quad (2)$$

Considérons la sous-matrice partagée $(I_k \mid I_k)$ formée des k premières lignes de $(A' \mid B')$, des k premières colonnes de A' et des k premières colonnes de B' . Le mineur partagé associé à cette sous-matrice partagée est de type $k \times [k|k]$ et est égal à 1, donc non nul.

Encore une fois, par contraposée, supposons qu'il existe un mineur partagé de type $k \times [k|k]$ de $(A' \mid B')$ non nul. Cela implique qu'il existe au moins k lignes de $(A' \mid B')$ avec un élément non nul dans le bloc A' et dans le bloc B' . Par définition de la forme canonique, ces k lignes se trouvent dans les r premières lignes, ce qui entraîne que $k \leq r$ et donc, par la remarque 4.11, $k \leq \dim(\mathcal{C}(A') \cap \mathcal{C}(B'))$. \square

Proposition 5.17. *Soit $(A \mid B) \in \text{Mat}_{d_1 \times [d_2|d_3]}(Q, K)$ et posons*

$$\mathcal{X}_{A,B} := \left\{ (A' \mid B') \in \text{Mat}_{d_1 \times [d_2|d_3]}(Q, K) \left| \begin{array}{l} \text{rg}(A') \leq \text{rg}(A) \\ \text{rg}(B') \leq \text{rg}(B) \\ \text{rg}(A' \mid B') \leq \text{rg}(A \mid B) \\ \dim(\mathcal{C}(A') \cap \mathcal{C}(B')) \leq \dim(\mathcal{C}(A) \cap \mathcal{C}(B)) \end{array} \right. \right\}.$$

Alors, $\mathcal{X}_{A,B}$ est fermé.

Démonstration. Considérons la matrice partagée d'indéterminés $X = (X_1 \mid X_2)$ où $X_1 = (x_{ij})_{1 \leq i \leq d_1; 1 \leq j \leq d_2}$ et $X_2 = (x_{ij})_{1 \leq i \leq d_1; d_2+1 \leq j \leq d_2+d_3}$. Notons $R := K[x_{11}, \dots, x_{d_1(d_2+d_3)}]$ l'anneau des polynômes à $d_1(d_2+d_3)$ indéterminés sur K . Il en suit que les mineurs et les mineurs partagés de X sont des éléments de R . Posons \mathcal{F}_1 l'ensemble des mineurs d'ordre $\text{rg}(A) + 1$ de X_1 , \mathcal{F}_2 l'ensemble des mineurs d'ordre $\text{rg}(B) + 1$ de X_2 , \mathcal{F}_3 l'ensemble des mineurs d'ordre $\text{rg}(A \mid B) + 1$ de X et \mathcal{F}_4 l'ensemble des mineurs partagés de type $k \times [k|k]$ où

$k = \dim(\mathcal{C}(A) \cap \mathcal{C}(B)) + 1$ de X . Donc, $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4 \subseteq R$ et le lemme 5.11 et la proposition 5.16 impliquent que :

$$\begin{aligned} Z(\mathcal{F}_1) &= \{(A' \mid B') \in \text{Mat}_{d_1 \times [d_2|d_3]}(Q, K) \mid \text{rg}(A') \leq \text{rg}(A)\}, \\ Z(\mathcal{F}_2) &= \{(A' \mid B') \in \text{Mat}_{d_1 \times [d_2|d_3]}(Q, K) \mid \text{rg}(B') \leq \text{rg}(B)\}, \\ Z(\mathcal{F}_3) &= \{(A' \mid B') \in \text{Mat}_{d_1 \times [d_2|d_3]}(Q, K) \mid \text{rg}(A' \mid B') \leq \text{rg}(A \mid B)\}, \\ Z(\mathcal{F}_4) &= \{(A' \mid B') \in \text{Mat}_{d_1 \times [d_2|d_3]}(Q, K) \mid \dim(\mathcal{C}(A') \cap \mathcal{C}(B')) \leq \dim(\mathcal{C}(A) \cap \mathcal{C}(B))\} \end{aligned}$$

sont des ensembles algébriques. Par la proposition 2.8, $Z(\mathcal{F}_1) \cap Z(\mathcal{F}_2) \cap Z(\mathcal{F}_3) \cap Z(\mathcal{F}_4)$ est un ensemble algébrique et donc, est fermé. Mais, cet ensemble est exactement $\mathcal{X}_{A,B}$. \square

Lemme 5.18. *Soit $(A \mid B) \in \text{Mat}_{d_1 \times [d_2|d_3]}(Q, K)$. Alors, $\overline{\mathcal{O}(A \mid B)} = \mathcal{X}_{A,B}$.*

Démonstration. On remarque que $\mathcal{O}(A \mid B) \subseteq \mathcal{X}_{A,B}$ et par la proposition 5.17, $\mathcal{X}_{A,B}$ est fermé. Cela implique que $\overline{\mathcal{O}(A \mid B)} \subseteq \mathcal{X}_{A,B}$.

Supposons maintenant $(A' \mid B') \in \mathcal{X}_{A,B}$. Par le théorème 4.10, $(A' \mid B')$ se réduit à $I_{(r',s',t')}$ et la proposition 5.9 implique que (r',s',t') a été obtenu par l'opération $\varrho_1^{a_1}(\varrho_2^{a_2}(\varrho_3^{a_3}(\varrho_4^{a_4}(r,s,t))))$. Le corollaire 5.8 implique que $I_{(r,s,t)} \leq_{\text{deg}} I_{(r',s',t')}$, c'est-à-dire $\mathcal{O}(I_{(r',s',t')}) \subseteq \overline{\mathcal{O}(I_{(r,s,t)})}$. Par la proposition 4.14, on a que $\mathcal{O}(I_{(r',s',t')}) = \mathcal{O}(A' \mid B')$ et que $\mathcal{O}(I_{(r,s,t)}) = \mathcal{O}(A \mid B)$. Il en découle que $(A' \mid B') \in \overline{\mathcal{O}(A \mid B)}$ et donc $\mathcal{X}_{A,B} \subseteq \overline{\mathcal{O}(A \mid B)}$. \square

Exemple 5.19. Reprenons le contexte des exemples 4.6, 4.13 et 5.7. Il suit des lemmes 4.15 et 5.18 que la fermeture de l'orbite de $(A \mid B)$ est

$$\overline{\mathcal{O}\left(\begin{array}{c|cc} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right)} = \overline{\mathcal{O}\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)} = \bigcup_{a,b,c \in \{0,1\}} \mathcal{O}\left(\begin{array}{c|cc} a & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{array}\right).$$

Nous voyons également que le terme de droite est l'union de $2^3 = 8$ orbites. Par contre, seulement 7 sont distinctes, car $a = b = 0$ et $c = 1$ ainsi que $a = c = 0$ et $b = 1$ correspondent à la même orbite. Par le lemme 4.16, le vecteur-dimension $(2,1,2)$ admet $\frac{2}{3}(6+6 \cdot 3) - 1 = 7$ orbites. Or, dans ce cas, $\overline{\mathcal{O}(A \mid B)}$ est composée de l'union de toutes les orbites possibles.

Rappelons le résultat principal de l'article, qui est le théorème suivant.

Théorème 5.2. *Soient $(A \mid B), (A' \mid B') \in \text{Mat}_{d_1 \times [d_2|d_3]}(Q, K)$. Alors, $(A' \mid B')$ est une dégénération de $(A \mid B)$ si et seulement si $\dim(\mathcal{C}(A') \cap \mathcal{C}(B')) \leq \dim(\mathcal{C}(A) \cap \mathcal{C}(B))$, $\text{rg}(A') \leq \text{rg}(A)$, $\text{rg}(B') \leq \text{rg}(B)$ et $\text{rg}(A' \mid B') \leq \text{rg}(A \mid B)$.*

Nous pouvons désormais en faire la démonstration.

Démonstration. Supposons $(A \mid B) \leq_{\text{deg}} (A' \mid B')$, c'est-à-dire $\mathcal{O}(A' \mid B') \subseteq \overline{\mathcal{O}(A \mid B)}$. Par le lemme 5.18, nous avons que $\overline{\mathcal{O}(A \mid B)} = \mathcal{X}_{A,B}$ ce qui implique que $\mathcal{O}(A' \mid B') \subseteq \mathcal{X}_{A,B}$ et en particulier que $(A' \mid B') \in \mathcal{X}_{A,B}$. Donc, $\dim(\mathcal{C}(A') \cap \mathcal{C}(B')) \leq \dim(\mathcal{C}(A) \cap \mathcal{C}(B))$, $\text{rg}(A') \leq \text{rg}(A)$, $\text{rg}(B') \leq \text{rg}(B)$ et $\text{rg}(A' \mid B') \leq \text{rg}(A \mid B)$.

$\mathcal{C}(B')) \leq \dim(\mathcal{C}(A) \cap \mathcal{C}(B))$, $\text{rg}(A') \leq \text{rg}(A)$, $\text{rg}(B') \leq \text{rg}(B)$ et $\text{rg}(A' \mid B') \leq \text{rg}(A \mid B)$.

Supposons $\dim(\mathcal{C}(A') \cap \mathcal{C}(B')) \leq \dim(\mathcal{C}(A) \cap \mathcal{C}(B))$, $\text{rg}(A') \leq \text{rg}(A)$, $\text{rg}(B') \leq \text{rg}(B)$ et $\text{rg}(A' \mid B') \leq \text{rg}(A \mid B)$, ce qui est équivalent, par le théorème 4.10, à $r' \leq r$, $r' + s' \leq r + s$, $r' + t' \leq r + t$ et $r' + s' + t' \leq r + s + t$ où $I_{(r',s',t')}$ est la forme canonique de $(A' \mid B')$ et $I_{(r,s,t)}$ est la forme canonique de $(A \mid B)$. Par la proposition 5.9, nous avons que $(r',s',t') = \varrho_1^{a_1}(\varrho_2^{a_2}(\varrho_3^{a_3}(\varrho_4^{a_4}(r,s,t))))$ ce qui entraîne, par le corollaire 5.8, que $I_{(r,s,t)} \leq_{\text{deg}} I_{(r',s',t')}$ ce qui implique, par la proposition 4.14, que $(A \mid B) \leq_{\text{deg}} (A' \mid B')$. \square

Références

- [AD84] S. ABEASIS et A. DEL FRA : Degenerations for the Representations of an Equioriented Quiver of Type D_m . *Advances in Mathematics*, (52):81–172, 1984.
- [AD85] S. ABEASIS et A. DEL FRA : Degenerations for the Representations of a Quiver of Type A_m . *Journal of Algebra*, (93):376–412, 1985.
- [ADK81] S. ABEASIS, A. DEL FRA et H. KRAFT : The Geometry of Representations of A_m . *Mathematische Annalen*, (256):401–418, 1981.
- [Ass21] Ibrahim ASSEM : *Algèbre linéaire*. Presses internationales Polytechnique, 2021.
- [Bon95] Klaus BONGARTZ : Degenerations for representations of tame quivers. *Annales scientifiques de l'É.N.S.*, (28):647–668, 1995.
- [Gab72] P. GABRIEL : Unzerlegbare Darstellungen I. *Manuscripta Math*, (6):71–103, 1972.
- [Har77] Robin HARTSHORNE : *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1977.
- [Hum75] James E. HUMPHREYS : *Linear Algebraic Groups*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1975.
- [Rie86] Christine RIEDTMANN : Degenerations for representations of quivers with relations. *Annales scientifiques de l'É.N.S.*, (19):275–301, 1986.
- [Roy17] Vincent ROY : Dégénération des représentations des carquois. *Cahiers Mathématiques de l'Université de Sherbrooke (CaMUS)*, (6):69–79, 2017.

SAMUEL LEBLANC

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Courriel: Samuel.LebLANC6@USherbrooke.ca