

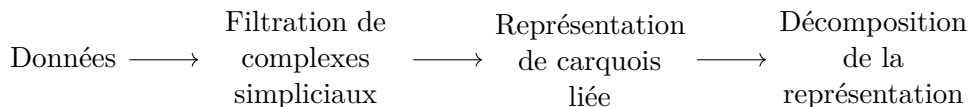
# Multiplicité de la représentation indicatrice

Laurianne Baril et Samuel Leblanc

**RÉSUMÉ** Nous présenterons une manière plus efficace de calculer la multiplicité  $\text{mult}(M, \mathbb{I}_{\mathcal{P}})$  de la représentation indicatrice  $\mathbb{I}_{\mathcal{P}}$  dans la décomposition d’une représentation de carquois liée  $M$  possédant un seul élément minimal et un seul élément maximal. Pour ce faire, nous débuterons en introduisant des notions de la théorie des catégories et de celle des représentations de carquois. Ceci nous permettra de lier les représentations de carquois aux modules de persistance. Ensuite, quelques concepts de topologie algébrique et d’analyse topologique de données seront présentés pour justifier notre intérêt pour le calcul de  $\text{mult}(M, \mathbb{I}_{\mathcal{P}})$ .

## 1 Introduction

L’analyse topologique de données a pour objectif principal l’étude de la *forme* d’un ensemble de données. Par exemple, ce domaine des mathématiques appliquées tente de répondre à diverses questions comme : “Est-ce que les données sont séparées en *lots* et si oui, combien ?” ou “Est-ce qu’il y a des *trous* dans les données et si oui, combien ?”. Ce questionnement de nature topologique est résolu, ou partiellement résolu, de la façon suivante. À partir d’un ensemble de données, nous construisons une *filtration* de *complexes simpliciaux*, pour ensuite prendre l’*homologie* de cette filtration pour obtenir une *représentation de carquois liée*. Cette représentation donne l’information cherchée dans sa décomposition en *représentations indécomposables*. Le processus est illustré ci-dessous.



Bien que l’analyse topologique de données touche plusieurs domaines des mathématiques, dans cet article nous nous concentrerons presque uniquement sur la portion algébrique du sujet. Plus précisément, l’article sera divisé de la manière suivante. La section 2 portera sur la théorie des catégories et nous fournira un

---

Nous tenons à remercier le professeur Thomas Brüstle pour son aide et ses idées, ainsi que Justin Desrochers pour ses conseils. La première autrice nommée aimerait également remercier le professeur Thomas Brüstle pour sa supervision lors d’un stage de recherche à l’hiver 2025, ainsi que la professeure Emily Cliff pour son financement partiel. Elle remercie aussi le CRSNG pour une bourse qui a été le financement principal de son stage. Finalement, la majeure partie de ce travail a été fait lorsque le second auteur nommé était à l’Université de Sherbrooke.

langage qui facilitera le reste de l'exposition. La section 3 introduira ce qu'est un carquois et ce qu'est une représentation d'un carquois en plus de mentionner certains résultats sur celles-ci. Les mots filtration, complexe simplicial et homologie, mentionnés précédemment, seront définis dans la partie 4, sur la topologie algébrique. Cette brève exposition se fera dans un contexte propre à l'analyse topologique de données, contrairement aux sections qui l'auront précédée. Ensuite, nous introduirons l'analyse topologique de données dans un cadre plus formel avec les outils et le langage développés au cours de l'article dans la section 5. En particulier, pour  $\mathcal{P}$  un poset fini, nous montrerons au théorème 5.16 que les catégories  $\text{rep}(Q_{\mathcal{P}}, \mathcal{I}_C)$  et  $\text{mod}\mathcal{P} := \text{Fun}(\mathcal{P}, \text{vect}_K)$  sont équivalentes, où  $(Q_{\mathcal{P}}, \mathcal{I}_C)$  est le carquois de Hasse de  $\mathcal{P}$ . Finalement, notre résultat principal sera démontré dans la section 6. Ce résultat peut être énoncé comme suit.

Soient  $\mathcal{P}$  un poset fini et  $M \in \text{rep}(Q_{\mathcal{P}}, \mathcal{I}_C)$  ou, de façon équivalente (voir théorème 5.16) un foncteur  $M : \mathcal{P} \rightarrow \text{vect}_K$ . Nous appellerons ces foncteurs des  *$\mathcal{P}$ -modules de persistences*. Notons par  $\mathbb{I}_{\mathcal{P}}$  la *représentation indicatrice*, c'est-à-dire, la représentation de  $(Q_{\mathcal{P}}, \mathcal{I}_C)$  telle que  $\mathbb{I}_{\mathcal{P}}(x) = K$  et  $\mathbb{I}_{\mathcal{P}}(x \leq y) = 1$  pour tous  $x \leq y$  dans  $\mathcal{P}$ . Écrivons par  $\text{res}_{\partial\mathcal{P}}M$  la restriction de  $M$  sur le sous-poset plein  $\partial\mathcal{P}$  de  $\mathcal{P}$  ne contenant que les éléments minimaux et maximaux et notons  $\text{mult}(M, \mathbb{I}_{\mathcal{P}})$  la multiplicité de  $\mathbb{I}_{\mathcal{P}}$  dans la décomposition de  $M$  en représentations indécomposables. Nous obtenons le théorème qui suit.

**Théorème 1.1. (Théorème 6.5).** *Soit  $\mathcal{P}$  un poset fini et connexe ayant un unique élément minimal et maximal. Alors,  $\text{mult}(M, \mathbb{I}_{\mathcal{P}}) = \text{mult}(\text{res}_{\partial\mathcal{P}}M, \mathbb{I}_{\partial\mathcal{P}})$ .*

## 2 Catégories

Nous présenterons une courte introduction à la théorie des catégories. Ceci nous donnera le langage approprié pour le reste de l'article. Pour plus d'informations sur la théorie des catégories, nous référons le lecteur à [Lan78] et [Rie16].

**Définition 2.1.** Une *catégorie*  $\mathcal{C}$  est la donnée

1. d'une classe d'objets  $\text{Obj}\mathcal{C}$ ,
2. d'une classe de morphismes  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$  pour  $x, y \in \text{Obj}\mathcal{C}$  (dans ce cas,  $x$  est le *domaine* des morphismes et  $y$  est le *codomaine*) et
3. d'une composition

$$\begin{aligned} \circ : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z) \\ (f, g) &\mapsto g \circ f = gf \end{aligned}$$

sujette aux axiomes suivants :

- i. La composition est associative.
- ii. Il y a un morphisme identité  $\mathbb{1}_x : x \rightarrow x$  pour chaque objet  $x \in \text{Obj}\mathcal{C}$ . C'est-à-dire que pour tout  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ , on a  $f \circ \mathbb{1}_x = f$  et  $\mathbb{1}_y \circ f = f$ .

Les catégories ayant été introduites pour encapsuler plusieurs notions à première vue distinctes, il y a énormément d'exemples de catégories. En voici quelques-unes.

**Exemple 2.2.** La catégorie triviale  $*$  ne contient qu'un objet et le morphisme identité. La catégorie des ensembles  $\mathcal{E}ns$  a pour objets les ensembles et pour morphismes les fonctions d'ensembles. La catégorie des groupes  $\mathcal{G}rp$  contient les groupes comme objets et les homomorphismes de groupes comme morphismes. Si  $K$  dénote un corps, la catégorie  $\mathbf{vect}_K$  des  $K$ -espaces vectoriels de dimension finie a comme objets les  $K$ -espaces vectoriels de dimension finie et comme morphismes les applications  $K$ -linéaires. Plus généralement, pour un anneau  $A$ , on note  $\mathbf{mod}_A$  la catégorie des  $A$ -modules avec les applications  $A$ -linéaires comme morphismes. La catégorie  $\mathcal{T}op$  a pour objets les espaces topologiques et pour morphismes les fonctions continues.

Les catégories mentionnées dans l'exemple qui précède sont toutes *localement petites*, c'est-à-dire que la classe de morphismes entre chaque paire d'objets est un ensemble. En particulier, la classe des objets de  $\mathcal{E}ns$  n'est pas un ensemble, mais étant donné deux ensembles  $E, F \in \mathbf{Obj}(\mathcal{E}ns)$ , la classe des fonctions entre ces ensembles,  $\mathbf{Hom}_{\mathcal{E}ns}(E, F)$ , est un ensemble.

Nous supposons tout au long de l'article que nos catégories sont localement petites.

**Définition 2.3.** Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie et  $f \in \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ . Alors,  $f$  est un *isomorphisme* s'il existe un morphisme  $g \in \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(y, x)$  tel que  $gf = \mathbb{1}_x$  et  $fg = \mathbb{1}_y$ . Nous dirons que  $x$  et  $y$  sont *isomorphes* et nous noterons  $x \cong y$ .

En suivant l'exemple 2.2, les isomorphismes dans  $\mathcal{E}ns$  sont les bijections, ceux dans  $\mathcal{G}rp$  sont les isomorphismes de groupes et finalement, ceux dans  $\mathcal{T}op$  sont les homéomorphismes.

Certaines structures bien connues sont elles-mêmes des catégories. Notamment, il est possible de définir un groupe comme une catégorie avec un objet et où les morphismes sont des isomorphismes. Le poset est un autre tel exemple, qui sera très important pour nous.

**Définition 2.4.** Soit  $\mathcal{P}$  un ensemble. La relation  $\leq$  est un *ordre partiel* sur  $\mathcal{P}$  si, pour tous  $a, b, c \in \mathcal{P}$ , elle est

- i. *Réflexive* :  $a \leq a$  ;
- ii. *Anti-symétrique* :  $a \leq b$  et  $b \leq a$  implique que  $a = b$  ;
- iii. *Transitive* :  $a \leq b$  et  $b \leq c$  implique que  $a \leq c$ .

Le couple  $(\mathcal{P}, \leq)$  est nommé *poset*. Nous noterons simplement  $\mathcal{P}$  lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion. De plus, nous écrirons  $a < b$  si  $a \leq b$  et  $b \not\leq a$ .

**Exemple 2.5.** Le couple  $(\mathbb{Z}, \leq)$  où  $\leq$  est l'ordre usuel est un poset. Soit  $E$  un ensemble et soit  $P(E)$  l'ensemble des sous-ensembles de  $E$ . Alors,  $(P(E), \subseteq)$  est un poset.

Soit  $\mathcal{P} = (\mathcal{P}, \leq)$  un poset. Nous pouvons voir  $\mathcal{P}$  comme une catégorie ayant comme objets les éléments de  $\mathcal{P}$  et pour tous  $a, b \in \text{Obj}\mathcal{P}$ ,

$$\text{Hom}_{\mathcal{P}}(a, b) = \begin{cases} \{a \rightarrow b\} & \text{si } a \leq b, \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

La réflexivité nous donne l'existence de l'identité  $\mathbb{1}_a \in \text{Hom}_{\mathcal{P}}(a, a)$  et la transitivité nous donne la composition.

Finalement, un graphe orienté peut être vu comme une catégorie. En effet, il suffit de prendre les sommets comme objets et les chemins orientés dans le graphe comme morphismes. La composition est donnée par la concaténation et les morphismes identités sont les chemins de longueur nulle associés à chaque sommet.

**Définition 2.6.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie. La *catégorie opposée* de  $\mathcal{C}$ , notée  $\mathcal{C}^{op}$ , est obtenue en renversant le sens des morphismes. Donc,  $\text{Obj}\mathcal{C} = \text{Obj}(\mathcal{C}^{op})$ , mais  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(y, x)$ , pour tous  $x, y \in \text{Obj}\mathcal{C}$ .

Étant donné un énoncé concernant une catégorie  $\mathcal{C}$ , son énoncé *dual* est celui obtenu en renversant le sens des flèches et or, est l'énoncé analogue dans  $\mathcal{C}^{op}$ . Cette remarque pouvant paraître banale sera utilisée à maintes reprises dans l'article. Par exemple, la limite d'un foncteur  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  est la colimite du foncteur opposé  $F^{op} : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{D}^{op}$  (voir définition 2.15).

**Définition 2.7.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie. Une *sous-catégorie*  $\mathcal{D}$  de  $\mathcal{C}$  est une catégorie où  $\text{Obj}\mathcal{D} \subseteq \text{Obj}\mathcal{C}$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(x, y) \subseteq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$  et  $\mathbb{1}_x \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(x, x)$  pour tous  $x, y \in \text{Obj}\mathcal{D}$  et la composition dans  $\mathcal{D}$  est induite par celle dans  $\mathcal{C}$ .

En outre, nous dirons qu'une sous-catégorie est *pleine* si  $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(x, y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$  pour tous  $x, y \in \text{Obj}\mathcal{D}$ .

**Exemple 2.8.** Les groupes abéliens forment une catégorie  $\mathcal{Ab}$  qui est une sous-catégorie pleine de  $\mathcal{Grp}$ . De plus,  $\text{vect}_K$  est une sous-catégorie pleine de  $\text{Vect}_K$ , les  $K$ -espaces vectoriels, incluant ceux de dimension infinie.

## 2.1 Foncteurs

Nous avons vu que les catégories contiennent des morphismes entre les objets. Nous étendons ce concept naturel à celui de “morphisme” de catégories.

**Définition 2.9.** Soient  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  des catégories. Un *foncteur covariant*, ou simplement *foncteur*,  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  associe à chaque objet  $x \in \text{Obj}\mathcal{C}$  un objet  $Fx \in \text{Obj}\mathcal{D}$  et à chaque morphisme  $f : x \rightarrow y$  de  $\mathcal{C}$  un morphisme  $Ff : Fx \rightarrow Fy$  de  $\mathcal{D}$ . Ces associations sont soumises aux contraintes suivantes : si  $f$  et  $g$  sont des morphismes composables de  $\mathcal{C}$ , alors  $F(gf) = F(g)F(f)$  et  $F(\mathbb{1}_x) = \mathbb{1}_{Fx}$  pour tout  $x \in \text{Obj}\mathcal{C}$ .

La notion duale de foncteur est celle de *foncteur contravariant*, qui sont des foncteurs covariants  $\mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{D}$ .

**Proposition 2.10.** *Les foncteurs envoient les isomorphismes aux isomorphismes.*

*Démonstration.* Soient  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un foncteur et  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$  un isomorphisme. Alors, il existe  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, x)$  tel que  $gf = \mathbb{1}_x$  et  $fg = \mathbb{1}_y$ . Or,  $F(\mathbb{1}_x) = F(gf) = F(g)F(f) = \mathbb{1}_{Fx}$  et de la même façon,  $F(\mathbb{1}_y) = F(fg) = F(f)F(g) = \mathbb{1}_{Fy}$ . Il en suit que  $Ff$  est un isomorphisme.  $\square$

La définition suivante nous permettra, entre autres, de faire de l'ensemble des foncteurs entre deux catégories, une catégorie.

**Définition 2.11.** Soient  $F, F' : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  deux foncteurs. Une *transformation naturelle* est une famille  $\varphi = (\varphi_x)_{x \in \text{Obj} \mathcal{C}}$  composée d'un morphisme  $\varphi_x \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(Fx, F'x)$  pour chaque  $x \in \text{Obj} \mathcal{C}$  tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} Fx & \xrightarrow{\varphi_x} & F'x \\ Ff \downarrow & & \downarrow F'f \\ Fy & \xrightarrow{\varphi_y} & F'y \end{array},$$

c'est-à-dire que  $F'(f)\varphi_x = \varphi_y F(f)$ , pour tout  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ . On note  $\varphi : F \rightarrow F'$ . Un *isomorphisme naturel* est une transformation naturelle  $\varphi = (\varphi_x)_{x \in \text{Obj} \mathcal{C}}$  où les  $\varphi_x$  sont des isomorphismes. Dans ce cas, nous noterons parfois  $\varphi : F \xrightarrow{\sim} F'$ .

Soient  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  des catégories. Les foncteurs de  $\mathcal{C}$  à  $\mathcal{D}$  forment une catégorie  $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ , où les objets sont les foncteurs et les morphismes sont les transformations naturelles entre ces foncteurs.

La prochaine notion est cruciale à l'étude des catégories.

**Définition 2.12.** Soient  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  des catégories. Nous dirons que ces catégories sont *équivalentes* et nous noterons  $\mathcal{C} \cong \mathcal{D}$ , s'il existe des foncteurs  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  et  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  admettant des isomorphismes naturels  $GF \xrightarrow{\sim} \mathbb{1}_{\mathcal{C}}$  et  $FG \xrightarrow{\sim} \mathbb{1}_{\mathcal{D}}$ . En outre,  $F$  et  $G$  sont nommés des *équivalences* de catégories.

**Exemple 2.13.** Définissons la catégorie  $\mathcal{C} = \text{Mat}_K$ , qui a pour objet les nombres naturels et où  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(n, m)$  est l'ensemble des matrices sur  $K$  de taille  $m \times n$ . La composition est la multiplication matricielle. On fixe  $\mathcal{B}_n$  une base de  $K^n$ . Alors, les catégories  $\text{Mat}_K$  et  $\text{vect}_K$  sont équivalentes. En effet, définissons les foncteurs

$$\begin{aligned} F : \text{Mat}_K &\rightarrow \text{vect}_K \\ n &\mapsto K^n \\ A = A_{m \times n} &\mapsto \left( \begin{array}{l} FA : K^n \rightarrow K^m \\ x \mapsto Ax \end{array} \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} G : \text{vect}_K &\rightarrow \text{Mat}_K \\ V &\mapsto \dim V \\ (f : V \rightarrow W) &\mapsto \mathcal{B}_{\dim V}[f]\mathcal{B}_{\dim W}, \end{aligned}$$

où  $\mathcal{B}_{\dim V}[f]_{\mathcal{B}_{\dim W}}$  est la matrice de  $f$  dans les bases  $\mathcal{B}_{\dim V}$  et  $\mathcal{B}_{\dim W}$ . Il est ainsi possible de trouver des isomorphismes naturels  $GF \xrightarrow{\sim} \mathbb{1}_{\text{Mat}_K}$  et  $FG \xrightarrow{\sim} \mathbb{1}_{\text{vect}_K}$ .

Soit  $\varphi = (\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  où  $\varphi_n$  est la matrice inversible  $n \times n$  qui amène la base  $\mathcal{B}_n$  à la base canonique de  $K^n$ . Pour toute matrice  $A = A_{m \times n}$ , le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} GF(n) = n & \xrightarrow{\varphi_n} & \mathbb{1}_{\text{Mat}_K}(n) = n \\ GF(A) \downarrow & & \downarrow \mathbb{1}_{\text{Mat}_K}(A) = A \\ GF(m) = m & \xrightarrow{\varphi_m} & \mathbb{1}_{\text{Mat}_K}(m) = m. \end{array}$$

Or,  $\varphi : GF \rightarrow \mathbb{1}_{\text{Mat}_K}$  est un isomorphisme naturel. Dans le cas inverse, l'isomorphisme naturel  $FG \xrightarrow{\sim} \mathbb{1}_{\text{vect}_K}$  est encore donné par les changements de bases appropriés.

**Définition 2.14.** Soit  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un foncteur. Un *cône* de  $F$  est une paire  $(n, \phi)$  constituée d'un  $n \in \text{Obj } \mathcal{D}$  et d'une famille de morphismes  $\phi = (\phi_x)_{x \in \text{Obj } \mathcal{C}}$  où  $\phi_x \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(n, Fx)$  telle que, pour tout morphisme  $f : x \rightarrow y$  de  $\mathcal{C}$ , on a  $Ff \circ \phi_x = \phi_y$ .

Dualement, un *co-cône* de  $F$  est une paire  $(m, \psi)$  formée d'un  $m \in \text{Obj } \mathcal{D}$  et d'une famille de morphismes  $\psi = (\psi_x)_{x \in \text{Obj } \mathcal{C}}$  où  $\psi_x \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(Fx, m)$  telle que, pour tout  $f : x \rightarrow y$  de  $\mathcal{C}$ , nous avons  $\psi_y \circ Ff = \psi_x$ .

**Définition 2.15.** Soit  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un foncteur. Une *limite* de  $F$  est un cône  $(\ell, \lambda)$  de  $F$  tel que, pour chaque cône  $(n, \phi)$  de  $F$ , il existe un unique morphisme  $\nu : n \rightarrow \ell$  qui rend le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccccc} n & & \xrightarrow{\phi_x} & & Fx \\ & \searrow \nu & & \searrow \lambda_x & \\ & & \ell & \xrightarrow{\lambda_x} & Fx \\ & & \downarrow \lambda_y & & \downarrow Ff \\ & & Fy & & \end{array}$$

$\phi_y$  (sur l'arc de gauche),  $\lambda_y$  (sur la flèche verticale),  $Ff$  (sur la flèche diagonale descendante à droite).

pour tout  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ , c'est-à-dire que  $\lambda_x \circ \nu = \phi_x$  et  $\lambda_y \circ \nu = \phi_y$ .

Dualement, une *colimite* de  $F$  est un co-cône  $(p, \gamma)$  de  $F$  tel que, pour chaque co-cône  $(m, \psi)$  de  $F$ , il existe un unique morphisme  $\mu : p \rightarrow m$  qui rend le diagramme résultant commutatif pour tout  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$  :

$$\begin{array}{ccccc} & & Fy & & \\ & \nearrow Ff & \downarrow \gamma_y & \searrow \psi_y & \\ Fx & \xrightarrow{\gamma_x} & p & \xrightarrow{\mu} & m, \\ & \searrow \psi_x & & & \end{array}$$

c'est-à-dire  $\mu \circ \gamma_x = \psi_x$  et  $\mu \circ \gamma_y = \psi_y$ .

**Exemple 2.16.** Le noyau d'un morphisme de groupes est un exemple de limite. En effet, soient  $G, H$  des groupes et  $f : G \rightarrow H$  un morphisme de groupes. Notons  $e_H$  l'élément neutre de  $H$  et considérons le morphisme  $\varepsilon : G \rightarrow H$  défini par  $\varepsilon(g) = e_H$  pour tout  $g \in G$ . Vérifions que  $\ker f$ , avec le morphisme d'inclusion  $j : \ker f \rightarrow G$ , correspond à la limite du foncteur  $(\bullet \rightrightarrows \bullet) \rightarrow \mathcal{G}rp$  suivant :

$$G \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{\varepsilon} \end{array} H.$$

Premièrement,  $f(j(g)) = e_H = \varepsilon(j(g))$  pour tout  $g \in G$  et donc  $f \circ j = \varepsilon \circ j$ . Deuxièmement, si nous avons un morphisme de groupes  $\varphi : G' \rightarrow G$  tel que  $f(\varphi(g')) = \varepsilon(\varphi(g')) = e_H$  pour tout  $g' \in G$ , alors  $\text{im } \varphi \subseteq \ker f$  et donc  $\varphi = j \circ \varphi$  ce qui entraîne que  $\ker f$  est une limite.

Dualement, le conoyau est un exemple de colimite.

**Proposition 2.17.** *La limite (et la colimite), si elle existe, est unique à isomorphisme près.*

*Démonstration.* Soit  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un foncteur. Supposons qu'on a deux limites de  $F$ , notées  $(\ell, \phi)$  et  $(\ell', \phi')$ . En particulier,  $\ell'$  est un cône, ce qui implique qu'il y a un unique morphisme  $\nu : \ell' \rightarrow \ell$  qui fait commuter le diagramme de la définition 2.15, c'est-à-dire tel que  $\phi_x \circ \nu = \phi'_x$ . De la même façon, il existe un unique morphisme  $\nu' : \ell \rightarrow \ell'$  tel que  $\phi'_x \circ \nu' = \phi_x$ . Alors, si on prend  $\nu \circ \nu'$ , on obtient en fait une application telle que  $\nu \circ \nu' : \ell \rightarrow \ell$  qui passe par  $\ell'$ . Il en suit que  $\phi_x \circ \nu \circ \nu' = (\phi_x \circ \nu) \circ \nu' = \phi'_x \circ \nu' = \phi_x$ . Par unicité d'un morphisme du cône  $\ell$  vers la limite  $\ell$ , on a que  $\nu \circ \nu' = \mathbb{1}_\ell$ . De manière analogue, on peut montrer que  $\nu' \circ \nu = \mathbb{1}_{\ell'}$ . Il en suit que  $\ell$  et  $\ell'$  sont isomorphes et, ainsi, que la limite est unique à isomorphisme près.  $\square$

Soit  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un foncteur. Dû à la proposition précédente, nous noterons respectivement par  $\lim F$  et  $\text{colim } F$  la limite et la colimite de  $F$ , si elles existent.

**Proposition 2.18.** *Soient  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un foncteur et  $E : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$  une équivalence de catégories. Supposons que  $F$  admet une limite (respectivement une colimite). Alors,  $E(\lim F) \cong \lim EF$  (respectivement  $E(\text{colim } F) \cong \text{colim } EF$ ).*

*Démonstration.* Ceci découle, par exemple, des théorèmes 4.3.3, 4.4.2 et 4.4.3 dans [Rie16].  $\square$

### 3 Représentations de carquois

Dans cette section, nous présenterons ce qu'est un carquois et ce qu'est une représentation de carquois. Ces représentations de carquois nous donneront un cadre rigoureux pour illustrer une catégorie d'intérêt particulière pour ce présent article. Pour une introduction plus complète à la théorie des représentations des carquois, nous suggérons [ASS06] et [Sch14].

Pour le reste de l'article,  $K$  dénote un corps (commutatif).

**Définition 3.1.** Un *carquois*  $Q = (Q_0, Q_1, s, b)$  est composé d'un graphe orienté  $(Q_0, Q_1)$ , où  $Q_0$  est l'ensemble des sommets et  $Q_1$  est l'ensemble des flèches reliant les sommets, ainsi que de deux applications  $s, b : Q_1 \rightarrow Q_0$ . Si  $\alpha : i \rightarrow j$  est une flèche dans  $Q_1$ , alors  $s(\alpha) = i$  est la *source* et  $b(\alpha) = j$  est le *but*.

Par ailleurs, un carquois  $Q$  est dit *fini* si  $Q_0$  et  $Q_1$  sont finis et il est *connexe* si  $(Q_0, Q_1)$  est un graphe connexe.

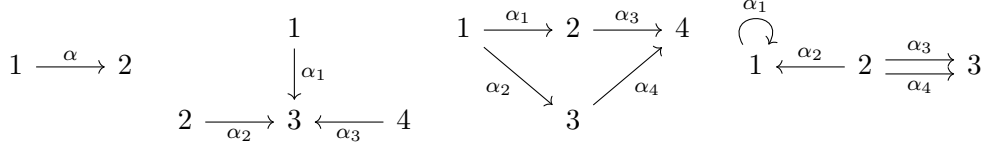


FIGURE 1 : Exemples de carquois

**Définition 3.2.** Soit  $Q = (Q_0, Q_1, s, b)$  un carquois et soit  $K$  un corps. Une *représentation* de  $Q$  sur  $K$  est une paire  $M = (M_i, \psi_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ , où  $(M_i)_{i \in Q_0}$  est une famille de  $K$ -espaces vectoriels et  $(\psi_\alpha : M_{s(\alpha)} \rightarrow M_{b(\alpha)})_{\alpha \in Q_1}$  est une famille d'applications  $K$ -linéaires.

Nous dirons qu'une représentation est de *dimension finie* si les espaces vectoriels sont tous de dimension finie.

Pour le reste de l'article, nous supposons que les carquois sont finis et que les représentations de carquois sont de dimension finie.

**Exemple 3.3.** Supposons que nous avons le carquois

$$Q : 1 \xrightarrow{\alpha} 2.$$

Une représentation  $M$  de  $Q$  serait :

$$M_1 \xrightarrow{\psi_\alpha} M_2,$$

où  $M_1$  et  $M_2$  sont des  $K$ -espaces vectoriels et  $\psi_\alpha$  est une application  $K$ -linéaire. En fixant des bases,  $\psi_\alpha$  serait donnée par une matrice sur  $K$  de taille  $\dim M_2 \times \dim M_1$ .

**Définition 3.4.** Soient  $Q$  un carquois et  $M = (M_i, \psi_\alpha)$ ,  $N = (N_i, \phi_\alpha)$  deux représentations de  $Q$ . Une application  $f = (f_i)_{i \in Q_0} : M \rightarrow N$ , où  $f_i$  est  $K$ -linéaire pour tout  $i \in Q_0$  est un *morphisme* de représentations si, pour toute  $\alpha : i \rightarrow j \in Q_1$ , le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{\psi_\alpha} & M_j \\ f_i \downarrow & & \downarrow f_j \\ N_i & \xrightarrow{\phi_\alpha} & N_j. \end{array}$$

De plus,  $f$  est un *isomorphisme* si  $f_i$  est inversible pour tout  $i \in Q_0$ .



Soit  $Q$  un carquois. Alors, les représentations de  $Q$  de dimension finie avec les morphismes définis ci-dessus forment une catégorie, que nous noterons  $\text{rep}Q$ . Pour alléger la notation, nous noterons  $M \in \text{rep}Q$  au lieu de  $M \in \text{Obj}(\text{rep}Q)$ .

Par ailleurs, pour faciliter les calculs, il est bien commun de fixer des bases et par le fait même, noter les morphismes de  $\text{rep}Q$  matriciellement.

**Définition 3.5.** Soient  $M = (M_i, \psi_\alpha), N = (N_i, \phi_\alpha) \in \text{rep}Q$ . La *somme directe* de  $M$  et  $N$  est

$$M \oplus N := \left( M_i \oplus N_i, \begin{bmatrix} \psi_\alpha & 0 \\ 0 & \phi_\alpha \end{bmatrix} \right)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}.$$

**Exemple 3.6.** Soient

$$M = K \xrightarrow{1} K,$$

$$N = K^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}} K$$

deux représentations. Alors,

$$M \oplus N = K \oplus K^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} K \oplus K \cong K^3 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}} K^2 \in \text{rep}Q.$$

Par récurrence, nous définissons la *somme directe* de  $M^{(1)}, \dots, M^{(n-1)}, M^{(n)} \in \text{rep}Q$  par  $(M^{(1)} \oplus \dots \oplus M^{(n-1)}) \oplus M^{(n)}$ .

**Définition 3.7.** Soit  $M \in \text{rep}Q$ . On note par  $0 \in \text{rep}Q$  la représentation où  $M_i = 0$  pour tout  $i \in Q_0$ . Nous dirons que  $M$  est *indécomposable*, si  $M \neq 0$  et si  $M \cong M' \oplus M''$  implique que  $M' = 0$  ou que  $M'' = 0$ .

Nous dirons qu'un carquois  $Q$  est de *type fini* s'il y a un nombre fini de classes d'isomorphismes de représentations indécomposables dans  $\text{rep}Q$ .

**Exemple 3.8.** Les représentations suivantes de  $1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xleftarrow{\beta} 3$  sont indécomposables :

$$K \xrightarrow{1} K \xleftarrow{1} K \text{ et } 0 \longrightarrow K \longleftarrow 0.$$

**Théorème 3.9. (Krull-Remak-Schmidt).** Soit  $M \in \text{rep}Q$ . Alors,

$$M \cong M^{(1)} \oplus \dots \oplus M^{(n)}$$

où  $M^{(r)}$  est indécomposable pour tout  $r = 1, \dots, n$  et cette décomposition est unique à permutation et isomorphisme des facteurs directs près.

*Démonstration.* Pour l'unicité, voir I.4.10 dans [ASS06].

L'existence de la décomposition est toutefois plus simple à montrer. Soit  $M \in \text{rep}Q$ . Si  $M$  est indécomposable, alors la démonstration est terminée. Sinon, montrons l'existence de la décomposition par récurrence. Prenons le cas de base  $M \cong M^{(1)} \oplus M^{(2)}$ . Si  $M^{(1)}$  et  $M^{(2)}$  sont indécomposables, la démonstration

est terminée. Sinon, on a  $M^{(1)} \cong M^{(3)} \oplus M^{(4)}$  et  $M^{(2)} \cong M^{(5)} \oplus M^{(6)}$ . Par récurrence, on obtient  $M^{(1)} \cong M^{(r_1)} \oplus M^{(r_2)} \oplus \dots \oplus M^{(r_m)}$  et  $M^{(2)} \cong M^{(s_1)} \oplus M^{(s_2)} \oplus \dots \oplus M^{(s_n)}$  où, pour tous  $1 \leq j \leq m$  et  $1 \leq k \leq n$ , on a que  $M^{(r_j)}$  et  $M^{(s_k)}$  sont indécomposables. Cette décomposition se termine effectivement en un nombre fini d'étapes.

Supposons au contraire que la décomposition ne se termine pas en un nombre fini d'étapes et notons  $\dim M := (\dim M_i)_{i \in Q_0}$ . Avec un changement d'indices, on a que  $M \cong M^{(1)} \oplus M^{(2)} \oplus \dots$  et, par la définition de somme directe, que  $\dim M = \sum_{t=1}^{\infty} \dim M^{(t)}$ . De plus,  $M^{(t)} \neq 0$  pour tout  $t \geq 1$ . Puisque  $Q$  est fini, cela signifie qu'il existe un  $i \in Q_0$  et un ensemble d'indices infini  $L \subseteq \mathbb{N}$  pour lesquels  $\dim M_i^{(\ell)} \geq 1$  pour tout  $\ell \in L$ . On a une contradiction, car la somme infinie de nombres naturels non nuls est infinie, mais  $\dim M_i$  est finie pour tout  $i \in Q_0$ .  $\square$

### 3.1 Représentations de carquois liées

Dans cette sous-section, nous généraliserons la notion de représentation de carquois à celle de représentation de carquois liée. Un cas particulier de cette notion est central à l'analyse topologique de données.

**Définition 3.10.** Soient  $Q$  un carquois et  $i, j \in Q_0$ . Un *chemin*  $c$  de  $i$  à  $j$  de longueur  $\ell$  est une suite

$$c = (i \mid \alpha_1, \dots, \alpha_\ell \mid j)$$

avec  $\alpha_t \in Q_1$  pour tout  $1 \leq t \leq \ell$  et où  $s(\alpha_1) = i$ ,  $s(\alpha_t) = b(\alpha_{t-1})$  et  $b(\alpha_\ell) = j$ .

Un chemin  $c = (i \mid \alpha_1, \dots, \alpha_\ell \mid j)$  peut être illustré comme suit :

$$i = s_0 \xrightarrow{\alpha_1} s_1 \xrightarrow{\alpha_2} \dots \xrightarrow{\alpha_\ell} s_\ell = j.$$

Nous définissons la *source* de  $c$  par  $s(c) := s(\alpha_1) = i$  et le *but* par  $b(c) := b(\alpha_\ell) = j$ . Pour chaque  $i \in Q_0$ , on définit le *chemin stationnaire* comme étant le chemin de longueur nulle,  $\varepsilon_i := (i \parallel i)$ . Un chemin  $c$  de longueur  $\ell \geq 1$  est appelé *cycle*, si  $s(c) = b(c)$ . Si  $\ell = 1$ , un cycle est nommé une *boucle*.

**Définition 3.11.** Soit  $Q$  un carquois. Une *relation*  $R$  dans  $Q$  est une combinaison  $K$ -linéaire de chemins de longueur au moins 2 ayant les mêmes source et but. Or, nous avons que

$$R = \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i$$

où  $\lambda_i \in K \setminus \{0\}$ ,  $s(c_i) = s(c_j)$ ,  $b(c_i) = b(c_j)$  et la longueur de  $c_i$  est au moins égale à 2 pour tous  $i, j = 1, \dots, n$ .

**Définition 3.12.** Soit  $M = (M_i, \psi_\alpha) \in \text{rep} Q$ . Pour un chemin  $c = (i \mid \alpha_1, \dots, \alpha_\ell \mid j)$  tel que  $\ell \geq 1$ , on définit l'*évaluation* de  $M$  sur  $c$  comme étant l'application  $K$ -linéaire  $\psi_c := \psi_{\alpha_\ell} \psi_{\alpha_{\ell-1}} \dots \psi_{\alpha_1}$ .

Naturellement, pour une combinaison linéaire de chemins  $R = \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i$ , nous définissons

$$\psi_R := \sum_{i=1}^n \lambda_i \psi_{c_i}.$$

Nous introduirons désormais le concept de représentations de carquois liées.

**Définition 3.13.** Soient  $Q$  un carquois et  $\mathcal{I}$  un ensemble de relations dans  $Q$ . On définit la *catégorie des représentations de  $Q$  liées par  $\mathcal{I}$* , qu'on note  $\text{rep}(Q, \mathcal{I})$ , comme la sous-catégorie pleine de  $\text{rep}Q$  ayant pour objets

$$\text{Obj}(\text{rep}(Q, \mathcal{I})) = \{(M_i, \psi_\alpha) \in \text{rep}Q \mid \psi_R = 0 \text{ pour tout } R \in \mathcal{I}\}.$$

Si  $M \in \text{Obj}(\text{rep}(Q, \mathcal{I}))$ , nous dirons que  $M$  est *liée par  $\mathcal{I}$* .

Comme nous faisons pour  $\text{rep}Q$ , nous noterons  $M \in \text{rep}(Q, \mathcal{I})$  au lieu de  $M \in \text{Obj}(\text{rep}(Q, \mathcal{I}))$ .

**Exemple 3.14.** Soient

$$Q = \begin{array}{ccc} & & 5 \\ & \nearrow \mu & \\ 2 & \xrightarrow{\beta} & 4 \\ \alpha \uparrow & & \uparrow \gamma \\ 1 & \xrightarrow{\delta} & 3 \end{array}$$

un carquois et  $\mathcal{I} = \{\beta\alpha - \gamma\delta, \mu\beta, \mu\gamma\}$ . Alors,

$$M = \begin{array}{ccc} & & K^2 \\ & \nearrow [0 \ 1] & \\ K & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} & K^2 \\ 1 \uparrow & & \uparrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ K & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} & K^2 \end{array}$$

est dans  $\text{rep}(Q, \mathcal{I})$ . En effet, il suffit de vérifier que  $M_\beta M_\alpha = M_\gamma M_\delta$ ,  $M_\mu M_\beta = 0$  et  $M_\mu M_\gamma = 0$ . Finalement, on calcule que  $1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $[0 \ 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$  et  $[0 \ 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

## 4 Topologie algébrique

Dans cette section, nous introduirons les bases de la topologie algébrique qui nous permettront de justifier l'étude des représentations de carquois dans un contexte d'analyse de données. Pour de plus amples détails, nous suggérons les livres [Cro05] et [Hat01].

**Définition 4.1.** Soit  $E$  un ensemble fini. Un *complexe simplicial*  $\Delta$  est un sous-ensemble de  $P(E)$ , l'ensemble des parties de  $E$ , tel que, si  $d \in \Delta$  et  $\emptyset \neq d' \subseteq d$ , alors  $d' \in \Delta$ . La *dimension* d'un complexe simplicial est

$$\dim \Delta := \max_{d \in \Delta} \#d - 1.$$

Les *sommets* de  $\Delta$  sont les éléments  $d \in \Delta$  tels que  $\#d = 1$ , donc les singletons.

**Exemple 4.2.** Soit  $E = \{a, b, c\}$ . Alors,  $\Delta = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}\}$  est un complexe simplicial de dimension 1. Notons que dans ce cas,  $\Delta$  peut être vu comme un graphe

$$a \text{ --- } b \qquad c.$$

Ceci se produit lorsque la dimension du complexe simplicial est au plus 1.

**Définition 4.3.** Soit  $\mathcal{P}$  un poset. Une  $\mathcal{P}$ -*filtration* est une collection d'ensembles  $(E_i)_{i \in \mathcal{P}}$  telle que, si  $i \leq j \in \mathcal{P}$ , alors  $E_i \subseteq E_j$ . Si  $\mathcal{P} = \{1 < 2 < \dots < n\}$ , nous dirons simplement que  $(E_i)_{i=1}^n$  est une *filtration*.

**Exemple 4.4.** La suite  $(\Delta_0, \Delta_1)$  où

$$\Delta_0 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\} \text{ et } \Delta_1 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}\}$$

est une filtration qui est visualisée de la façon suivante

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & & b & & c \end{array} \right\} \subseteq \left\{ \begin{array}{ccc} a & \text{---} & b & & c \end{array} \right\}.$$

## 4.1 Homologie simpliciale

Nous présenterons maintenant ce qu'est l'homologie d'un complexe simplicial et ensuite ce qu'est l'homologie de persistance, calculée à partir d'une filtration de complexes simpliciaux.

Soit  $\Delta$  un complexe simplicial de  $n$  sommets ordonnés  $s_1 < s_2 < \dots < s_n$ . Pour un entier  $0 \leq m \leq \dim \Delta$ , on définit le  $K$ -espace vectoriel  $C_m$  qui a pour base les suites ordonnées de  $m+1$  sommets dans  $\Delta$ . Les éléments de  $C_m$  sont donc les sommes formelles finies  $\sum_i \lambda_i d_i$  avec  $\lambda_i \in K$  et  $d_i = (s_{i_0}, s_{i_1}, \dots, s_{i_m}) \in \Delta$  une suite ordonnée de  $m+1$  sommets. On considère l'application linéaire  $\delta_m : C_m \rightarrow C_{m-1}$ , nommée *opérateur limite*, définie sur la base par

$$\delta_m(s_{i_0}, \dots, s_{i_{j-1}}, s_{i_j}, s_{i_{j+1}}, \dots, s_{i_m}) = \sum_{j=0}^m (-1)^j (s_{i_0}, \dots, s_{i_{j-1}}, s_{i_{j+1}}, \dots, s_{i_m}).$$

Nous nous retrouvons ainsi avec un *complexe de chaînes*  $(C_\bullet, \delta_\bullet)$  de  $\Delta$  :

$$0 \xrightarrow{\delta_{\dim \Delta + 1}} C_{\dim \Delta} \xrightarrow{\delta_{\dim \Delta}} \dots \xrightarrow{\delta_2} C_1 \xrightarrow{\delta_1} C_0 \xrightarrow{\delta_0} 0.$$

**Proposition 4.5.** Soit  $\Delta$  un complexe simplicial et  $(C_\bullet, \delta_\bullet)$  un complexe de chaînes de  $\Delta$ .

- i. Si  $m > \dim \Delta$ , alors  $C_m = 0$ .
- ii. L'opérateur limite  $\delta_m$  est  $K$ -linéaire.
- iii. Pour tout  $m$ , on a  $\text{im } \delta_{m+1} \subseteq \ker \delta_m$ .
- iv. Pour tout  $m$ , nous avons que  $\ker \delta_m / \text{im } \delta_{m+1}$  est un  $K$ -espace vectoriel.

*Démonstration.* (i.) et (ii.) découlent directement des définitions.

(iii.) Il suffit de vérifier que  $\delta_m \delta_{m+1} = 0$ . Soit  $s = (s_{i_0}, \dots, s_{i_{m+1}})$  un élément de la base de  $C_{m+1}$ . On note  $\widehat{s_j}$  la suite de  $C_m$  obtenue à partir de  $s$  en retirant  $s_{i_j}$  et de même on note  $\widehat{s_{j,k}}$  la suite de  $C_{m-1}$  obtenue à partir de  $s$  en retirant  $s_{i_j}$  et  $s_{i_k}$ , pour  $j \neq k$ . Or,  $\widehat{s_{j,k}} = \widehat{s_{k,j}}$ . Alors,

$$\begin{aligned} \delta_m \delta_{m+1}(s) &= \delta_m \left( \sum_{j=0}^{m+1} (-1)^j \widehat{s_j} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{j-1} \sum_{j=0}^{m+1} (-1)^{j+k} \widehat{s_{j,k}} + \sum_{k=j+1}^{m+1} \sum_{j=0}^{m+1} (-1)^{j+k-1} \widehat{s_{j,k}} \\ &= \sum_{k=0}^{j-1} \sum_{j=0}^{m+1} (-1)^{j+k} \widehat{s_{j,k}} - \sum_{k=j+1}^{m+1} \sum_{j=0}^{m+1} (-1)^{j+k} \widehat{s_{j,k}}. \end{aligned}$$

Puisque  $\widehat{s_{j,k}} = \widehat{s_{k,j}}$ , chaque terme dans la somme revient précisément deux fois. Si  $j < k$ , alors  $\widehat{s_{j,k}}$  apparaît dans la partie de droite, tandis que  $\widehat{s_{k,j}}$  se trouve dans la partie de gauche. Si  $j > k$ , c'est l'inverse. Or, les deux sommes s'annulent et  $\delta_m \delta_{m+1}(s) = 0$ .

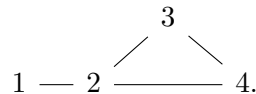
(iv.) Par (ii.),  $\ker \delta_m$  et  $\text{im } \delta_{m+1}$  sont des  $K$ -espaces vectoriels. Le résultat découle alors de (iii.).  $\square$

Pour le reste de la section, on suppose  $K = \mathbb{Z}_2 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , le corps des entiers modulo 2. En particulier, ceci implique que l'ordre donné aux sommets d'un complexe simplicial n'influe pas sur ses groupes d'homologie.

**Définition 4.6.** Soit  $\Delta$  un complexe simplicial et  $(C_\bullet, \delta_\bullet)$  un complexe de chaînes de  $\Delta$ . Le  $\mathbb{Z}_2$ -espace vectoriel  $H_m(\Delta) := \ker \delta_m / \text{im } \delta_{m+1}$  pour  $0 \leq m \leq \dim \Delta$  est appelé le  $m$ -ième *groupe d'homologie* de  $\Delta$ . Par ailleurs, nous dirons que le  $m$ -ième *nombre de Betti* est  $\beta_m := \dim H_m(\Delta)$ .

*Remarque 4.7.* Le  $m$ -ième nombre de Betti  $\beta_m$  représente, de manière informelle, le nombre de trous en  $m+1$  dimensions d'un complexe simplicial. Par exemple, lorsque  $m = 0$ , ce nombre correspond au nombre de composantes connexes. Si  $m = 1$ , ce nombre correspond plutôt au nombre de triangles vides.

**Exemple 4.8.** Soit  $\Delta = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{2,4\}\}$  un complexe simplicial. Puisqu'il est de dimension 1, nous pouvons le voir comme un graphe



Nous calculons que

$$\begin{aligned} C_0 &= \text{span}_{\mathbb{Z}_2} \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\} \\ C_1 &= \text{span}_{\mathbb{Z}_2} \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{2,4\}\}. \end{aligned}$$

Bien sûr,  $\ker \delta_0 = C_0$  et  $\text{im } \delta_2 = 0$ . De plus,

$$\begin{aligned} \text{im } \delta_1 &= \text{span}_{\mathbb{Z}_2} \{\{1\} + \{2\}, \{2\} + \{3\}, \{3\} + \{4\}, \{2\} + \{4\}\} \\ &= \text{span}_{\mathbb{Z}_2} \{\{1\} + \{2\}, \{2\} + \{3\}, \{3\} + \{4\}\}, \end{aligned}$$

car  $\{2\} + \{3\} + \{3\} + \{4\} = \{2\} + \{4\}$  et

$$\ker \delta_1 = \{\{2,3\} + \{3,4\} + \{2,4\}\}.$$

Ainsi, dans  $H_0(\Delta) = \ker \delta_0 / \text{im } \delta_1$ , on a  $\overline{\{1\} + \{2\}} = 0$  si et seulement si  $\overline{\{1\}} = -\overline{\{2\}} = \overline{\{2\}}$ . Par un même raisonnement,  $\overline{\{1\}} = \overline{\{2\}} = \overline{\{3\}} = \overline{\{4\}}$  et il en suit que  $H_0(\Delta) \cong \mathbb{Z}_2$ . De plus, nous avons directement que  $H_1(\Delta) \cong \mathbb{Z}_2$ . En outre,  $\beta_0 = \beta_1 = 1$ . Nous remarquons effectivement que le graphe  $\Delta$  a une seule région connexe et qu'il y a un trou, qui est la région entre les arêtes  $\{2,3\}$ ,  $\{3,4\}$  et  $\{2,4\}$ .

**Définition 4.9.** Soit  $\Delta, \Delta'$  deux complexes simpliciaux. Notons  $S(\Delta)$  et  $S(\Delta')$  les ensembles des sommets de  $\Delta$  et  $\Delta'$ , respectivement. Une application  $f : S(\Delta) \rightarrow S(\Delta')$  telle que, si  $d \in \Delta$ , alors  $f(d) \in \Delta'$  est appelée *application simpliciale*. Cette fonction induit naturellement une fonction  $f : \Delta \rightarrow \Delta'$ .

À partir de la définition précédente, nous pouvons faire de l'ensemble des complexes simpliciaux et des applications simpliciales une catégorie, que nous noterons  $\text{CSim}$ . Ainsi, nous pouvons voir l'homologie comme étant un foncteur  $H_m : \text{CSim} \rightarrow \text{vect}_{\mathbb{Z}_2}$ . Cette fonctorialité nous permettra de généraliser la notion d'homologie à celle d'homologie de persistance.

**Définition 4.10.** Soit  $\Delta_\bullet = (\Delta_i)_{i=0}^n$  une filtration de complexes simpliciaux. Notons  $f_i : \Delta_{i-1} \rightarrow \Delta_i$  le morphisme d'inclusion. Le  $m$ -ième *groupe d'homologie de persistance* de  $\Delta_\bullet$  est

$$H_m(\Delta_\bullet) = H_m(\Delta_0) \xrightarrow{H_m(f_1)} H_m(\Delta_1) \xrightarrow{H_m(f_2)} \dots \xrightarrow{H_m(f_n)} H_m(\Delta_n).$$

Nous remarquons donc qu'un groupe d'homologie de persistance est une représentation du carquois  $0 \rightarrow 1 \rightarrow \dots \rightarrow n$ . Nous formaliserons ce résultat au théorème 5.16.

**Exemple 4.11.** Considérons la filtration  $\Delta_\bullet = (\Delta_0, \Delta_1)$  de l'exemple 4.4. On calcule que  $H_0(\Delta_0) = \text{span}_{\mathbb{Z}_2} \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\} / 0 = \text{span}_{\mathbb{Z}_2} \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\} \cong \mathbb{Z}_2^3$  et que  $H_0(\Delta_1) = \text{span}_{\mathbb{Z}_2} \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\} / \{\{a\} + \{b\}\} = \text{span}_{\mathbb{Z}_2} \{\overline{\{a\}}, \overline{\{c\}}\} \cong \mathbb{Z}_2^2$ . Puisque l'inclusion est donnée par l'application simpliciale définie par  $f_1(\{a\}) = \{a\}$ ,  $f_1(\{b\}) = \{b\}$  et  $f_1(\{c\}) = \{c\}$ , on a que  $H_0(f_1)(\{a\}) = \overline{\{a\}}$ ,  $H_0(f_1)(\{b\}) =$

$\overline{\{b\}} = \overline{\{a\}}$  et  $H_0(f_1)(\{c\}) = \overline{\{c\}}$ . Or, nous nous retrouvons avec le 0-ième groupe d'homologie de persistance

$$H_0(\Delta_\bullet) = \text{span}_{\mathbb{Z}_2}\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\} \xrightarrow{H_0(f_1)} \text{span}_{\mathbb{Z}_2}\{\overline{\{a\}}, \overline{\{c\}}\} \cong \mathbb{Z}_2^3 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \mathbb{Z}_2^2.$$

Cette représentation se décompose en représentations indécomposables de la façon suivante :

$$\left( \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{1} \mathbb{Z}_2 \right)^2 \oplus \left( \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0 \right).$$

Cette décomposition s'interprète comme suit. Au départ, il y avait trois composantes connexes au graphe et à la fin, il y en a deux. Des composantes ont été connectées dès le début, tandis que deux composantes qui n'étaient pas connexes sont restées disjointes.

## 5 Analyse topologique de données

Dans cette section, nous donnerons une idée de ce qu'est l'analyse topologique de données et en quoi les outils discutés jusqu'à présent peuvent être utilisés pour étudier la "forme" des données. Pour une introduction plus complète à l'analyse topologique de données, voir [Oud15], [CdSGO16] et [CM21]. Nous suggérons aussi [BL23] pour en apprendre sur l'analyse topologique de données à  $n$ -paramètres.

Nous avons vu dans la section précédente que l'homologie d'un complexe simplicial donne de l'information sur le nombre de composantes connexes et son nombre de trous. Par ailleurs, l'homologie de persistance nous informe des changements, à travers une filtration, de ces nombres de composantes connexes ou de trous. Intuitivement, nous allons vouloir enrichir nos données d'une filtration de complexes simpliciaux pour avoir une compréhension plus globale de la forme de nos données.

Partout dans cette section,  $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^k$  est un ensemble (ex. : de données) fini et  $\mathbb{R}^k$  est muni d'une distance.

**Définition 5.1.** Soit  $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$  un sous-ensemble non vide. Le *diamètre* de  $\mathcal{Y}$  est la distance maximale entre deux points de  $\mathcal{Y}$ . Nous le noterons  $\text{diam}\mathcal{Y}$ .

**Définition 5.2.** Notons  $\mathbf{VR}_r(\mathcal{X}) := \{\emptyset \neq \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X} \mid \text{diam}\mathcal{Y} \leq r\}$ , pour  $r \geq 0$ . La *filtration de Vietoris-Rips* de  $\mathcal{X}$  est la suite

$$\mathbf{VR}(\mathcal{X}) := (\mathbf{VR}_r(\mathcal{X}))_{r \in [0, \infty)}.$$

La prochaine proposition est facilement vérifiable.

**Proposition 5.3.** La filtration de Vietoris-Rips est une  $[0, \infty)$ -filtration de complexes simpliciaux.

Il est commun de simplement considérer un sous-ensemble de  $\mathbf{VR}(\mathcal{X})$  contenant uniquement des  $\mathbf{VR}_r(\mathcal{X})$  distincts. Puisque  $\mathcal{X}$  est fini, cette nouvelle filtration est finie. Par un abus de notation, nous noterons aussi par  $\mathbf{VR}(\mathcal{X})$  cette nouvelle filtration. Pour le reste de l'article, ce sera cette dernière que nous entendrons par  $\mathbf{VR}(\mathcal{X})$ .

**Exemple 5.4.** Soit  $\mathcal{X} = \{a = (0,0), b = (1,0), c = (2,1), d = (3,0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ . La filtration de Vietoris-Rips de  $\mathcal{X}$ , lorsque nous avons enlevé les répétitions, est  $\mathbf{VR}(\mathcal{X}) = (\mathbf{VR}_0(\mathcal{X}), \mathbf{VR}_1(\mathcal{X}), \mathbf{VR}_{\sqrt{2}}(\mathcal{X}), \mathbf{VR}_2(\mathcal{X}), \mathbf{VR}_{\sqrt{5}}(\mathcal{X}), \mathbf{VR}_3(\mathcal{X})) =$

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{ccc} & c & \\ a & & b \\ & d & \end{array} \right\} \subseteq \left\{ \begin{array}{ccc} & c & \\ a & - & b \\ & d & \end{array} \right\} \subseteq \left\{ \begin{array}{ccc} & c & \\ a & - & b \\ & & \diagup \quad \diagdown \\ & & d \end{array} \right\} \\ & \subseteq \left\{ \begin{array}{ccc} & c & \\ a & - & b \\ & \diagup \quad \diagdown \\ & & d \end{array} \right\} \subseteq \left\{ \begin{array}{ccc} & c & \\ a & - & b \\ & \diagup \quad \diagdown \\ & & d \end{array} \right\} \subseteq \left\{ \begin{array}{ccc} & c & \\ a & - & b \\ & \diagup \quad \diagdown \\ & & d \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Après avoir appliqué le foncteur  $H_0$  à la filtration  $\mathbf{VR}(\mathcal{X})$ , nous obtenons la représentation de carquois suivante :

$$\begin{aligned} & \mathbb{Z}_2^4 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \mathbb{Z}_2^3 \xrightarrow{[1 \ 1 \ 1]} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{1} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{1} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{1} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{1} \mathbb{Z}_2 \\ & \cong \left( \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{1} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{1} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{1} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{1} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{1} \mathbb{Z}_2 \right) \\ & \oplus \left( \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{1} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \right)^3 \\ & \oplus \left( \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \right), \end{aligned}$$

qui s'interprète de façon naturelle en disant qu'une composante connexe a "persistée", trois composantes connexes sont "mortes" à la seconde étape de la filtration et finalement, qu'une composante connexe est "morte" dès la première étape de la filtration. Ceci nous donne une idée de la distribution des données, d'un point de vue géométrique.

La force de la méthode présentée jusqu'à maintenant est qu'elle donne de l'information sur l'aspect géométrique de la distribution des données, et ce, indépendamment de la dimension de l'espace dans lequel les données se trouvent et où toute tentative de visualisation est vouée à l'échec.

Cependant, il est possible que l'unique paramètre, dans ce cas-ci  $r$ , qui dénote une distance, ne soit pas suffisant. Peut-être qu'en plus d'une distance, nous souhaitons avoir un paramètre  $\theta$  pour le temps ou peut-être même souhaitons-nous avoir un troisième paramètre  $\rho$ , qui lui filtre les données selon une densité. Pour pallier à cette demande, nous introduisons le prochain concept, qui généralise les idées discutées précédemment.



Par la fonctorialité de l'homologie  $H_m$ , étant donné une  $\mathcal{P}$ -filtration de complexes simpliciaux  $(\Delta_i)_{i \in \mathcal{P}}$ , nous obtenons, comme avant, le  $m$ -ième groupe d'homologie de cette filtration,  $H_m((\Delta_i)_{i \in \mathcal{P}})$ , qui est aussi une représentation de carquois (voir théorème 5.16). Lorsque

$$\mathcal{P} = \{0 < 1 < \dots < t_1\} \times \{0 < 1 < \dots < t_2\} \times \dots \times \{0 < 1 < \dots < t_n\},$$

nous parlerons d'*analyse topologique de données à  $n$ -paramètres*.

Pour le reste de la section, nous donnons quelques propriétés élémentaires sur les posets et finalement, nous formalisons le lien entre les objets étudiés en analyse topologique de données et les représentations de carquois. Bien entendu, les objets étudiés sont, à une certaine abstraction près, les groupes d'homologie de  $\mathcal{P}$ -filtrations.

### 5.1 Posets

Soit  $\mathcal{P}$  un poset. Nous dirons que  $\mathcal{P}$  est *connexe*, si pour chaque  $x, y \in \mathcal{P}$ , il existe  $z_1, \dots, z_n \in \mathcal{P}$  tels que  $z_i \leq z_{i+1}$  ou  $z_i \geq z_{i+1}$  pour tout  $1 \leq i \leq n-1$  et où  $z_1 = x$  et  $z_n = y$ . Pour  $x < y \in \mathcal{P}$ , nous dirons que  $y$  *couvre*  $x$ , noté  $x \triangleleft y$ , s'il n'existe pas de  $z \in \mathcal{P}$  tel que  $x < z < y$ . Un élément  $y \in \mathcal{P}$  est *minimal* si  $x \leq y$  implique que  $x = y$  et est *maximal* si  $y \leq z$  implique que  $y = z$ . La cardinalité de  $\mathcal{P}$  est notée  $\#\mathcal{P}$ .

**Proposition 5.5.** *Soit  $\mathcal{P}$  un poset fini. Pour tout  $y \in \mathcal{P}$ , soit il existe un  $z \in \mathcal{P}$  qui couvre  $y$ , soit  $y$  est maximal et de la même façon, soit il existe  $x \in \mathcal{P}$  tel que  $y$  couvre  $x$ , soit  $y$  est minimal.*

*Démonstration.* Nous montrerons uniquement la première partie, la seconde étant analogue.

Supposons que  $y$  est maximal. Alors, il n'existe pas que  $z \in \mathcal{P}$  qui couvre  $y$ . En effet, si s'était le cas, nous aurions  $y < z$  ce qui contredirait notre hypothèse.

Supposons maintenant que  $y$  n'est pas maximal. Or, il existe  $z \in \mathcal{P}$  tel que  $y < z$ . Supposons que  $z$  ne couvre pas  $y$ . Dans ce cas, il existe  $z_1 \in \mathcal{P}$  tel que  $y < z_1 < z$ . Si  $z_1$  ne couvre pas  $y$ , nous pouvons répéter ce procédé afin d'obtenir une chaîne croissante  $y < z_n < z_{n-1} < \dots < z_1 < z$ . Ce procédé se termine, par exemple à  $z_n$ , car  $\mathcal{P}$  est fini et dans ce cas,  $z_n$  couvre  $y$ .  $\square$

*Remarque 5.6.* L'hypothèse que l'ensemble soit fini est importante. Par exemple,  $\#\mathbb{Z} = \#\mathbb{Q}$ , mais la proposition précédente est vraie pour  $\mathbb{Z}$  et elle est fausse pour  $\mathbb{Q}$ . En effet, pour  $n, m \in \mathbb{Z}$ , il faut et il suffit que  $n = m + 1$  pour que  $n$  couvre  $m$ . Cependant, dans  $\mathbb{Q}$ , pour toutes  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ , nous avons que  $\frac{a}{b} < \frac{ad+bc}{2bd} < \frac{c}{d}$ .

**Proposition 5.7.** *Soit  $\mathcal{P}$  un poset fini. Il y a au moins un élément minimal et un élément maximal dans  $\mathcal{P}$ .*

*Démonstration.* Supposons qu'il n'y a pas d'élément maximal. Alors, il existe  $x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots \in \mathcal{P}$  ce qui contredit l'hypothèse de la finitude de  $\mathcal{P}$ . L'argument est similaire pour l'existence de l'élément minimal.  $\square$

**Définition 5.8.** Soit  $\mathcal{P}$  un poset. Le *diagramme de Hasse* de  $\mathcal{P}$  est un graphe orienté, où il y a une flèche  $x \rightarrow y$  si et seulement si  $x < y \in \mathcal{P}$ .

**Exemple 5.9.** Le diagramme de Hasse de  $\mathcal{P} = \mathbb{Z}$  est

$$\cdots \longrightarrow -2 \longrightarrow -1 \longrightarrow 0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow \cdots$$

**Définition 5.10.** Soit  $\mathcal{P}$  un poset fini et connexe. Soit  $Q_{\mathcal{P}}$  le carquois tel que  $Q_{\mathcal{P}0} = \mathcal{P}$  et tel qu'il y a une flèche  $\alpha : x \rightarrow y$  dans  $Q_{\mathcal{P}1}$  que si  $x < y \in \mathcal{P}$ . Posons

$$\mathcal{I}_C := \langle c - d \mid c = (i \mid \alpha_1, \dots, \alpha_\ell \mid j), d = (i \mid \beta_1, \dots, \beta_{\ell'} \mid j) \in Q \text{ et } \ell, \ell' \geq 2 \rangle.$$

Le carquois lié  $(Q_{\mathcal{P}}, \mathcal{I}_C)$  est nommé *carquois de Hasse* de  $\mathcal{P}$ .

Il suit de la construction de  $Q$  que ce carquois est fini, connexe et n'a pas de cycle. On appelle  $\mathcal{I}_C$  le *commutateur*.

Nous supposons à partir de maintenant que  $\mathcal{P}$  est un poset fini et connexe.

**Définition 5.11.** Soit  $(\mathcal{P}, \leq)$  un poset. Un poset  $(\mathcal{S}, \preceq)$  est un *sous-poset* de  $(\mathcal{P}, \leq)$  si

- i.  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}$ ;
- ii. Pour tous  $x, y \in \mathcal{S}$ , si  $x \preceq y$ , alors  $x \leq y$ .

Nous dirons que  $\mathcal{S}$  est *plein* si, de plus,  $x \leq y$  implique  $x \preceq y$  pour tous  $x, y \in \mathcal{S}$ .

**Définition 5.12.** Soit  $\mathcal{P}$  un poset et  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}$  un sous-poset. L'*enveloppe convexe* de  $\mathcal{S}$  est le sous-poset plein de  $\mathcal{P}$  avec l'ensemble d'éléments

$$\overline{\mathcal{S}} := \{z \in \mathcal{P} \mid \text{il existe } x, y \in \mathcal{S} \text{ tel que } x \leq z \leq y\}.$$

De plus, la *frontière* de  $\mathcal{S}$ , notée  $\partial\mathcal{S}$ , est le sous-poset plein de  $\mathcal{P}$  ayant pour objets l'ensemble des éléments minimaux et maximaux de  $\mathcal{S}$ .

## 5.2 $\mathcal{P}$ -module de persistance

Nous définissons maintenant l'objet algébrique de base étudié en analyse topologique de données.

**Définition 5.13.** Soit  $\mathcal{P}$  un poset. Un  $\mathcal{P}$ -*module de persistance* est un foncteur  $M : \mathcal{P} \rightarrow \text{vect}_K$ . En outre, la *catégorie des  $\mathcal{P}$ -modules de persistance* est  $\text{mod}\mathcal{P} := \text{Fun}(\mathcal{P}, \text{vect}_K)$ .

*Remarque 5.14.* Soit  $M \in \text{mod}\mathcal{P}$ . Nous décrivons  $M$  en détails. Pour tous  $x \leq y \in \mathcal{P}$ , on a que  $Mx$  et  $My$  sont des  $K$ -espaces vectoriels et  $M_{x \rightarrow y} := Mx \rightarrow My$  est une application linéaire. Il suit de la définition d'un foncteur que  $M_{x \rightarrow x}$  est l'application identité et que si  $x \leq y \leq z \in \mathcal{P}$ , alors  $M_{x \rightarrow y}$  et  $M_{y \rightarrow z}$  se composent pour donner  $M_{x \rightarrow z}$ . Puisque pour chaque  $x \leq y \in \mathcal{P}$ , il y a un unique morphisme  $x \rightarrow y \in \mathcal{P}$ , nous avons une unique application linéaire  $M(x \rightarrow y) = M_{x \rightarrow y}$  dans  $\text{vect}_K$ . Ainsi, pour  $\mathcal{P}$  fini, les applications  $M_{x \rightarrow y}$  où  $y$  couvre  $x$  déterminent l'entière des applications  $M_{x_1 \rightarrow x_\ell}$  pour  $x_1 < x_\ell \in \mathcal{P}$ . En effet, pour n'importe quelle chaîne  $x_1 < x_2 < \cdots < x_{\ell-1} < x_\ell$ , il suit de l'unicité du morphisme  $x_1 \rightarrow x_\ell \in \mathcal{P}$  que  $M_{x_1 \rightarrow x_\ell} = M_{x_{\ell-1} \rightarrow x_\ell} \circ \cdots \circ M_{x_1 \rightarrow x_2}$ .

Les  $\mathcal{P}$ -modules de persistance sont effectivement les bons objets à étudier en analyse topologique de données. L'exemple qui suit en est une justification.

**Exemple 5.15.** Soit  $\mathcal{P}$  un poset considéré comme une catégorie. On se rappelle qu'on peut voir l'homologie comme un foncteur  $H_m : \text{CSim} \rightarrow \text{vect}_{\mathbb{Z}_2}$ . Il est aussi naturel de voir une  $\mathcal{P}$ -filtration comme un foncteur  $F : \mathcal{P} \rightarrow \text{CSim}$ . Par exemple, la filtration de Vietoris-Rips est un foncteur  $\mathbf{VR}(\mathcal{X}) : [0, \infty) \rightarrow \text{CSim}$ . Or, la composition  $H_m \circ F : \mathcal{P} \rightarrow \text{vect}_{\mathbb{Z}_2}$  est un  $\mathcal{P}$ -module de persistance.

Le prochain résultat justifie l'utilisation de la théorie des représentations des carquois dans l'étude des  $\mathcal{P}$ -modules de persistance.

**Théorème 5.16.** Soient  $\mathcal{P}$  un poset fini et  $(Q_{\mathcal{P}}, \mathcal{I}_C)$  le carquois de Hasse de  $\mathcal{P}$ . Les catégories  $\text{rep}(Q_{\mathcal{P}}, \mathcal{I}_C)$  et  $\text{mod}\mathcal{P}$  sont équivalentes.

*Démonstration.* Nous définirons directement deux foncteurs et nous montrerons qu'ils sont équivalents. En premier lieu, nous prenons

$$F : \text{rep}(Q_{\mathcal{P}}, \mathcal{I}_C) \rightarrow \text{mod}\mathcal{P}$$

$$M = (M_i, \psi_{\alpha:i \rightarrow j})_{i \in Q_{\mathcal{P}_0}, \alpha \in Q_{\mathcal{P}_1}} \mapsto \begin{pmatrix} FM : \mathcal{P} \rightarrow \text{vect}_K \\ i \mapsto M_i \\ i \leq j \mapsto \mathbb{1}_{M_i} \\ i < j \mapsto \psi_{\alpha:i \rightarrow j} \end{pmatrix}$$

$$(f = (f_i)_{i \in Q_{\mathcal{P}_0}} : M \rightarrow N) \mapsto (Ff = (f_i)_{i \in Q_{\mathcal{P}_0}} : FM \rightarrow FN)$$

où  $Ff = (f_i)_{i \in Q_{\mathcal{P}_0}}$  est une transformation naturelle. En effet, le diagramme suivant est commutatif dans  $\text{rep}(Q_{\mathcal{P}}, \mathcal{I}_C)$  et dans  $\text{mod}\mathcal{P}$

$$\begin{array}{ccc} M_{s(\alpha)} & \xrightarrow{\psi_{\alpha}} & M_{b(\alpha)} \\ f_{s(\alpha)} \downarrow & & \downarrow f_{b(\alpha)} \\ N_{s(\alpha)} & \xrightarrow{\phi_{\alpha}} & N_{b(\alpha)} \end{array}$$

Notons que par la remarque 5.14, le fait de définir un foncteur  $\mathcal{P} \rightarrow \text{vect}_K$  en ne considérant que les  $i, j \in \mathcal{P}$  tels que  $i < j$  n'a pas d'influence. De plus, la proposition 5.5 nous garantit l'existence de ce  $j$ , pour tout  $i \in \mathcal{P}$ . Nous voulons cependant vérifier que tout chemin  $c = (i \mid \alpha_1, \dots, \alpha_{\ell} \mid j)$  correspondant à une chaîne  $i = i_1 < i_2 < \dots < i_{\ell+1} = j$ , est envoyé par  $F$  à l'unique application  $M_{i \rightarrow j} = M_{i_{\ell} \rightarrow j} \cdots M_{i_2 \rightarrow i_1}$ . La définition de  $F$  nous dit que  $M_{i \rightarrow j} = \psi_c = \psi_{\alpha_{\ell}} \cdots \psi_{\alpha_1}$ . Si  $d = (i \mid \beta_1, \dots, \beta_{\ell'} \mid j)$  est un autre chemin, alors le commutateur  $\mathcal{I}_C$  implique que  $\psi_c - \psi_d = 0$  ce qui entraîne que  $\psi_c = \psi_d = M_{i \rightarrow j}$ . Cette application est donc unique. Or,  $F$  est bien définie. Puisque  $F$  agit comme l'identité sur les morphismes de  $\text{rep}(Q_{\mathcal{P}}, \mathcal{I}_C)$ , il est clair que  $F(gf) = F(g)F(f)$  pour  $f, g \in \text{rep}(Q_{\mathcal{P}}, \mathcal{I}_C)$  et que  $F(\mathbb{1}_M) = F((\mathbb{1}_{M_i})_{i \in Q_0}) = (\mathbb{1}_{M_i})_{i \in \mathcal{P}} = \mathbb{1}_{FM}$ . Ainsi, c'est un foncteur.

Définissons maintenant le foncteur suivant

$$G : \text{mod}\mathcal{P} \rightarrow \text{rep}(Q_{\mathcal{P}}, \mathcal{I}_C)$$

$$\left( \begin{array}{l} M : \mathcal{P} \rightarrow \text{vect}_K \\ i \mapsto M_i \\ i \leq j \mapsto M_{i \rightarrow j} \\ i \leq j \mapsto M_{i \rightarrow j} \end{array} \right) \mapsto GM = (M_i, M_{i \rightarrow j})_{i \in Q_{\mathcal{P}0}, \alpha: i \rightarrow j \in Q_{\mathcal{P}1}}$$

$$(\varphi = (\varphi_i)_{i \in Q_{\mathcal{P}0}} : M \rightarrow N) \mapsto (G\varphi = (\varphi_i)_{i \in Q_{\mathcal{P}0}} : GM \rightarrow GN).$$

Pour les mêmes raisons qu'évoquées plus haut,  $G$  est bien défini et est bel et bien un foncteur.

Il est facilement vérifiable que  $GF \xrightarrow{\sim} \mathbb{1}_{\text{rep}(Q_{\mathcal{P}}, \mathcal{I}_C)}$  et que  $FG \xrightarrow{\sim} \mathbb{1}_{\text{mod}\mathcal{P}}$ . En effet, pour  $M, N \in \text{rep}(Q_{\mathcal{P}}, \mathcal{I}_C)$  et  $f : M \rightarrow N$  un morphisme, alors  $GF(M) = M$ ,  $GF(N) = N$  et  $GF(f) = f$ . Or, il suffit de considérer l'isomorphisme naturel  $(\mathbb{1}_M)_{M \in \text{rep}(Q_{\mathcal{P}}, \mathcal{I}_C)} : GF \xrightarrow{\sim} \mathbb{1}_{\text{rep}(Q_{\mathcal{P}}, \mathcal{I}_C)}$  pour obtenir le résultat. C'est similaire pour  $FG \xrightarrow{\sim} \mathbb{1}_{\text{mod}\mathcal{P}}$ .  $\square$

Vu le résultat précédent, la catégorie  $\text{mod}\mathcal{P}$  a aussi une somme directe. Soient  $M, N \in \text{mod}\mathcal{P}$ . La *somme directe* de  $M$  et  $N$ , notée  $M \oplus N$ , est le  $\mathcal{P}$ -module de persistance où  $(M \oplus N)(i) = M(i) \oplus N(i)$  et  $(M \oplus N)(i \leq j) = M(i \leq j) \oplus N(i \leq j)$  pour tous  $i \leq j$  dans  $\mathcal{P}$ . Nous obtenons la somme directe d'un nombre fini de  $\mathcal{P}$ -module de persistance par récurrence.

La limite et la colimite d'un  $\mathcal{P}$ -module de persistance sont *additives*, dans le sens de la proposition suivante.

**Proposition 5.17.** *Soient  $M, N \in \text{mod}\mathcal{P}$ . Alors,  $\lim(M \oplus N) \cong \lim M \oplus \lim N$  et  $\text{colim}(M \oplus N) \cong \text{colim } M \oplus \text{colim } N$ .*

*Démonstration.* La somme directe est un exemple de limite et de colimite (voir, par exemple, les chapitres III.4 et VIII.2 dans [Lan78]) et les limites (respectivement, les colimites) commutent entre elles (voir, par exemple, le chapitre IX.2 dans [Lan78]).  $\square$

## 6 Multiplicité

Il suit du théorème de Krull-Remak-Schmidt (théorème 3.9) que l'étude de  $\text{rep}Q$  se réduit à la classification des représentations indécomposables. Ce théorème s'applique aussi à  $\text{rep}(Q, \mathcal{I})$  et donc à  $\text{mod}\mathcal{P}$ , en vertu du théorème 5.16. En analyse topologique de données, où nous voyons à présent les  $\mathcal{P}$ -modules de persistance comme des représentations dans  $\text{rep}(Q_{\mathcal{P}}, \mathcal{I}_C)$ , certaines représentations indécomposables ont une signification claire. Or, bien qu'en général il est difficile d'avoir accès à la décomposition complète d'une représentation, il est naturel de se demander combien de fois une certaine représentation indécomposable se retrouve dans la décomposition d'une représentation.

**Définition 6.1.** Soient  $M, U \in \text{rep}(Q_{\mathcal{P}}, \mathcal{I}_C)$  avec  $U$  indécomposable. Supposons que  $M \cong U_1^{t_1} \oplus \dots \oplus U_n^{t_n}$ , où  $U_i^{t_i}$  est la somme directe de  $t_i$  copies de  $U_i \in \text{rep}(Q_{\mathcal{P}}, \mathcal{I}_C)$ , qui est indécomposable et où  $U_i \not\cong U_j$  pour tous  $i \neq j$ . La *multiplicité* de  $U$  dans  $M$  est le nombre

$$\text{mult}(M, U) := \begin{cases} t_i & \text{si } U \cong U_i \text{ pour un certain } 1 \leq i \leq n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Définition 6.2.** Soit  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}$  un sous-poset. On définit la *représentation indicatrice* par  $\mathbb{I}_{\overline{\mathcal{S}}} := (M_i, \psi_\alpha) \in \text{rep}(Q_{\mathcal{P}}, \mathcal{I}_C)$  la représentation telle que

$$M_i = \begin{cases} K & \text{si } i \in \overline{\mathcal{S}}, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \psi_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } s(\alpha) < b(\alpha) \in \overline{\mathcal{S}}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est à noter qu'on trouve aussi *module-intervalle* dans la littérature.

Soient  $i \leq j$  dans  $\mathcal{P}$  et  $M \in \text{rep}(Q_{\mathcal{P}}, \mathcal{I}_C)$ . Notons

$$[i, j] := \{x \in \mathcal{P} \mid i \leq x \leq j\}.$$

On voit que  $\overline{[i, j]} = [i, j]$ . Supposons que  $M$  est le  $k$ -ième groupe d'homologie d'une  $\mathcal{P}$ -filtration de complexes simpliciaux. Le nombre de trous en  $k+1$  dimensions qui persistent de  $i$  à  $j$  est  $\text{mult}(M, \mathbb{I}_{[i, j]})$ . Nous serons alors particulièrement intéressés à calculer ce dernier de manière efficace. Nous consacrerons le reste de l'article à cette fin, pour le cas où  $\mathcal{P} = [i, j]$ .

**Définition 6.3.** Soit  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}$  un sous-poset connexe. Nous définissons le *foncteur de restriction* comme le foncteur  $\text{res}_{\mathcal{S}} : \text{rep}(Q_{\mathcal{P}}, \mathcal{I}_C) \rightarrow \text{rep}(Q_{\mathcal{S}}, \mathcal{I}'_C)$  qui envoie la représentation  $M = (M_i, \psi_\alpha)_{i \in \mathcal{P}, \alpha \in Q_{\mathcal{P}_1}}$  à  $(M_i, \psi_c)_{i \in \mathcal{S}, c \in Q_{\mathcal{S}_1}}$  où, si  $c : i \rightarrow j$  est une flèche dans  $Q_{\mathcal{S}}$ , alors nous avons un chemin  $c = \{i \mid \alpha_1, \dots, \alpha_\ell \mid j\}$  dans  $Q_{\mathcal{P}}$  et dans ce cas  $\psi_c$  est l'évaluation de  $M$  sur  $c$ . Finalement, un morphisme  $f = (f_i)_{i \in \mathcal{P}} : M \rightarrow N$  est envoyé à  $\text{res}_{\mathcal{S}} f = (f_i)_{i \in \mathcal{S}} : \text{res}_{\mathcal{S}} M \rightarrow \text{res}_{\mathcal{S}} N$ .

On remarque que dans la définition précédente, le choix de chemin  $c$  de  $i$  à  $j$  dans  $Q_{\mathcal{P}}$  n'a pas d'importance, puisque si  $c'$  est un autre tel chemin, alors  $\psi_c = \psi_{c'}$ . En effet, ceci découle directement de la définition de  $\text{rep}(Q_{\mathcal{P}}, \mathcal{I}_C)$ . Par ailleurs, la vérification du fait que  $\text{res}_{\mathcal{S}}$  est un foncteur est directe.

**Exemple 6.4.** Supposons  $\mathcal{P} = \{1, 2, 3\} \times \{1, 2\}$  et  $\mathcal{S} = \{(2, 1), (3, 2)\}$  avec la relation  $(x, y) \leq (x', y')$  si et seulement si  $x \leq x'$  et  $y \leq y'$ . Prenons, par exemple, la représentation

$$M = \begin{array}{ccccc} K & \xrightarrow{1} & K & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} & K^2 \\ \uparrow & & \uparrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} & & \uparrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 0 & \longrightarrow & K^2 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} & K^2 \end{array}$$

dans  $\text{rep}(Q_{\mathcal{P}}, \mathcal{I}_C)$ . Alors,

$$\text{res}_{\overline{\mathcal{S}}}(M) = \begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} & K^2 \\ \uparrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} & & \uparrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ K^2 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} & K^2 \end{array} \quad \text{et} \quad \text{res}_{\mathcal{S}}(M) = \begin{array}{ccc} & & K^2 \\ & \nearrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \\ K^2 & & \end{array}.$$

Le foncteur de restriction se décrit aussi dans le contexte des modules de persistance. Soit  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}$  un sous-poset connexe. Notons  $F : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{P}$  le foncteur d'inclusion, donc où  $F(x \leq y) = x \leq y$  pour tout  $x \leq y \in \mathcal{S}$ . Le *foncteur de restriction* est défini par

$$\begin{aligned} \text{res}_{\mathcal{S}} : \text{mod } \mathcal{P} &\rightarrow \text{mod } \mathcal{S} \\ M &\mapsto MF \\ ((f_i)_{i \in \mathcal{P}} : M \rightarrow N) &\mapsto ((f_i)_{i \in \mathcal{S}} : MF \rightarrow NF). \end{aligned}$$

## 6.1 Résultat principal

Nous énoncerons désormais notre résultat principal et nous utiliserons le reste de l'article pour le démontrer.

**Théorème 6.5.** *Soit  $\mathcal{P}$  un poset fini et connexe ayant un unique élément minimal et maximal. Alors,  $\text{mult}(M, \mathbb{I}_{\mathcal{P}}) = \text{mult}(\text{res}_{\partial \mathcal{P}} M, \mathbb{I}_{\partial \mathcal{P}})$  pour tout  $M \in \text{rep}(Q_{\mathcal{P}}, \mathcal{I}_C)$ .*

*Remarque 6.6.* Par le théorème 5.16, le résultat précédent s'applique aussi à  $\text{mod } \mathcal{P}$ . En fait, nous ferons la démonstration en considérant  $M \in \text{mod } \mathcal{P}$ .

Avant de faire la démonstration du théorème 6.5, nous illustrerons son utilité par un exemple.

**Exemple 6.7.** Supposons  $K = \mathbb{R}$  et prenons  $\mathcal{P} = \{1, 2, 3, 4, 5\} \times \{1, 2, 3\} \subset \mathbb{Z}^2$ . Soit  $M \in \text{rep}(Q_{\mathcal{P}}, \mathcal{I}_C)$  la représentation suivante :

$$M = \begin{array}{ccccccccc} & & K^2 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}} & K^2 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}} & K^2 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} & K^3 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}} & K^2 \\ \uparrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & & \uparrow \begin{bmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} & & \uparrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & & \uparrow \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & & \uparrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} & & \uparrow \\ K^3 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} & K^3 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}} & K^2 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} & K^2 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} & K^3 & \\ \uparrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & & \uparrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & & \uparrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & & \uparrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & & \uparrow \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & & \uparrow \\ K^2 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} & K^2 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} & K^3 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}} & K^2 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} & K^2 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} & K^2 \end{array}$$

Nous voulons calculer  $\text{mult}(M, \mathbb{I}_{\mathcal{P}})$ . À première vue, cela n'est pas évident en regardant simplement  $M$ , mais, par le théorème 6.5, il suffit de calculer

$\text{mult}(\text{res}_{\partial\mathcal{P}}M, \mathbb{I}_{\partial\mathcal{P}})$ . Ce dernier calcul est souvent plus simple. En prenant n'importe quel chemin du minimum au maximum et en multipliant les matrices associées, nous obtenons

$$\text{res}_{\partial\mathcal{P}}M = \begin{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & \nearrow \\ K^2 & \end{matrix} K^2$$

On remarque directement que  $\text{mult}(\text{res}_{\partial\mathcal{P}}M, \mathbb{I}_{\partial\mathcal{P}}) = 1$  et donc que  $\text{mult}(M, \mathbb{I}_{\mathcal{P}}) = 1$ . Un corollaire de la démonstration du théorème 6.5 nous donne une autre façon de calculer cette multiplicité. En effet, par le lemme 6.10, on a que

$$\text{mult}(\text{res}_{\partial\mathcal{P}}M, \mathbb{I}_{\partial\mathcal{P}}) = \text{rang} \left( \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = 1$$

et il découle du lemme 6.10 que  $\text{mult}(M, \mathbb{I}_{\mathcal{P}}) = \text{rang} \left( \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$ .

## 6.2 Démonstration du théorème 6.5

Soit  $M \in \text{rep}(Q_{\mathcal{P}}, \mathcal{I}_C)$  où  $\mathcal{P}$  est un poset connexe et fini possédant un seul élément minimal et un seul élément maximal. Par le théorème 5.16, on peut voir  $M$  comme un foncteur  $M : \mathcal{P} \rightarrow \text{vect}_K$ .

Étant donné la limite  $\lim M = (\ell, \lambda)$  et la colimite  $\text{colim } M = (\ell', \gamma)$ , il y a une application linéaire canonique  $\Psi_M : \lim M \rightarrow \text{colim } M$  définie par  $\Psi_M = \gamma_x \circ \lambda_x$  pour  $x \in \mathcal{P}$ . En vue de la proposition suivante,  $\Psi_M$  est bien définie.

**Proposition 6.8.** *L'application linéaire canonique  $\Psi_M$  est indépendante du choix de  $x \in \mathcal{P}$ .*

*Démonstration.* Soient  $x, y \in \mathcal{P}$ . Nous souhaitons montrer l'égalité  $\gamma_x \circ \lambda_x = \gamma_y \circ \lambda_y$ . Par les définitions de cône et co-cône, on a, pour tout  $f : i \leq j$ , que  $Mf \circ \lambda_i = \lambda_j$  et que  $\gamma_j \circ Mf = \gamma_i$ . Ainsi, on obtient  $\gamma_i \circ \lambda_i = \gamma_j \circ Mf \circ \lambda_i = \gamma_j \circ \lambda_j$  pour  $i \leq j$ . Si  $x \leq y$ , on a le résultat souhaité. Sinon, par la connexité de  $\mathcal{P}$ , on sait que pour tous  $x, y$ , il existe une chaîne d'éléments  $z_1, z_2, \dots, z_n$  de  $\mathcal{P}$  telle que  $x \leq z_1 \geq z_2 \leq \dots \geq z_n \leq y$  permettant de relier  $x$  et  $y$ . Par la chaîne d'égalités  $\gamma_x \circ \lambda_x = \gamma_{z_1} \circ \lambda_{z_1} = \dots = \gamma_{z_n} \circ \lambda_{z_n} = \gamma_y \circ \lambda_y$  qui en résulte, on obtient le résultat souhaité.  $\square$

L'application  $\Psi_M$  a été étudiée dans [KM21], où son rang a été nommé *rang généralisé*. Par ailleurs, dans l'exemple 6.7, nous avons obtenu  $\Psi_M = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ . Nous donnons ci-dessous une correspondance entre ce rang généralisé et la multiplicité de la représentation indicatrice. Ce résultat a été montré dans le cadre des représentations de carquois dans [Kin08] et plus tard par [CL18] pour des  $\mathcal{P}$ -modules de persistance. Finalement, un résultat plus général est récemment apparu dans [BDL25], où la catégorie des foncteurs  $\text{Fun}(\mathcal{C}, \text{Vect}_K)$  pour  $\mathcal{C}$  une petite catégorie a été considérée.

**Lemme 6.9.** ([CL18], Lemma 3.1). *Notons  $r := \text{rang } \Psi_M$ . Alors,  $M \cong (\mathbb{I}_{\mathcal{P}})^r \oplus N$  où  $\Psi_N = 0$ .*

*Démonstration.* Premièrement, de l'algèbre linéaire, on a que  $r = \dim \operatorname{im} \Psi_M$ . Notons par  $(\operatorname{im} \Psi_M)_{\mathcal{P}}$  la représentation donnée par  $((\operatorname{im} \Psi_M)_{\mathcal{P}})_x = \operatorname{im} \Psi_M$  et  $((\operatorname{im} \Psi_M)_{\mathcal{P}})_{x \rightarrow y} = 1$  (ou 0, si  $\operatorname{im} \Psi_M = 0$ ) pour tous  $x \leq y$  dans  $\mathcal{P}$ . Alors,  $(\operatorname{im} \Psi_M)_{\mathcal{P}} \cong (\mathbb{I}_{\mathcal{P}})^r$ . Nous montrerons ainsi que  $M \cong (\operatorname{im} \Psi_M)_{\mathcal{P}} \oplus N$ .

Nous avons, encore par l'algèbre linéaire, les décompositions suivantes :

$$\ell \cong \operatorname{im} \Psi_M \oplus \ker \Psi_M \text{ et } \ell' \cong \operatorname{im} \Psi_M \oplus \operatorname{coker} \Psi_M.$$

On considère l'isomorphisme  $\bar{\Psi}_M := \Psi_M|_{\operatorname{im} \Psi_M} : \operatorname{im} \Psi_M \rightarrow \operatorname{im} \Psi_M$ . Puisque  $\Psi_M = \gamma_x \circ \lambda_x : \lim M \rightarrow M_x \rightarrow \operatorname{colim} M$  pour un  $x \in \mathcal{P}$ , on a  $\bar{\Psi}_M = (\gamma_x \circ \lambda_x)|_{\operatorname{im} \Psi_M} = \gamma_x|_{\operatorname{im} \lambda_x|_{\operatorname{im} \Psi_M}} \circ \lambda_x|_{\operatorname{im} \Psi_M}$ . Notons  $\bar{\lambda}_x := \lambda_x|_{\operatorname{im} \Psi_M}$  et  $\bar{\gamma}_x := \gamma_x|_{\operatorname{im} \lambda_x|_{\operatorname{im} \Psi_M}}$ . Nous obtenons, similairement à plus haut, une décomposition  $\operatorname{im} \Psi_M \cong \operatorname{im} \bar{\lambda}_x \oplus \ker \bar{\lambda}_x$ . Puisque  $\bar{\gamma}_x \circ \bar{\lambda}_x$  est un isomorphisme, nous avons que  $\bar{\lambda}_x$  est injectif et donc que  $\ker \bar{\lambda}_x = 0$ . Or,  $\operatorname{im} \Psi_M \cong \operatorname{im} \bar{\lambda}_x$ . Ainsi, on a que  $M_x \cong \operatorname{im} \bar{\lambda}_x \oplus \operatorname{coker} \bar{\lambda}_x \cong \operatorname{im} \Psi_M \oplus \operatorname{coker} \bar{\lambda}_x$  pour tout  $x \in \mathcal{P}$ . Cette décomposition est préservée par les applications  $M_{x \rightarrow y}$ . En effet, ceci est justifié par la commutativité du diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} & \operatorname{im} \Psi_M \oplus \ker \Psi_M & \\ \lambda_x = \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_x & 0 \\ 0 & l_x \end{bmatrix} \swarrow & & \searrow \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_y & 0 \\ 0 & l_y \end{bmatrix} = \lambda_y \\ \operatorname{im} \Psi_M \oplus \operatorname{coker} \bar{\lambda}_x & \xrightarrow{M_{x \rightarrow y}} & \operatorname{im} \Psi_M \oplus \operatorname{coker} \bar{\lambda}_y \\ \swarrow \gamma_x = \begin{bmatrix} \bar{\gamma}_x & 0 \\ 0 & g_x \end{bmatrix} & & \searrow \begin{bmatrix} \bar{\gamma}_y & 0 \\ 0 & g_y \end{bmatrix} = \gamma_y \\ & \operatorname{im} \Psi_M \oplus \operatorname{coker} \Psi_M & \end{array}$$

On pose  $N \in \operatorname{rep}(Q_{\mathcal{P}}, \mathcal{I}_C)$  tel que  $N_x = \operatorname{coker} \bar{\lambda}_x$  et  $N_{x \rightarrow y} = M_{x \rightarrow y}|_{N_x}$  pour tous  $x \leq y \in \mathcal{P}$ . Nous obtenons donc que  $M \cong (\operatorname{im} \Psi_M)_{\mathcal{P}} \oplus N \cong (\mathbb{I}_{\mathcal{P}})^r \oplus N$ .

Il reste à montrer que  $\Psi_N = 0$ , ce qui est équivalent à  $\operatorname{im} \Psi_N = 0$ . Par la proposition 5.17, les limites et les colimites commutent avec les sommes directes finies. De plus, il est évident que l'image commute aussi avec les sommes directes finies. Or, nous avons que

$$\operatorname{im} \Psi_{(\operatorname{im} \Psi_M)_{\mathcal{P}} \oplus N} \cong \operatorname{im} (\Psi_{(\operatorname{im} \Psi_M)_{\mathcal{P}}} \oplus \Psi_N) \cong \operatorname{im} \Psi_{(\operatorname{im} \Psi_M)_{\mathcal{P}}} \oplus \operatorname{im} \Psi_N.$$

Un calcul direct nous donne que  $\operatorname{im} \Psi_{(\operatorname{im} \Psi_M)_{\mathcal{P}}} \cong \operatorname{im} \Psi_M$ . Or, en utilisant la décomposition  $M \cong (\operatorname{im} \Psi_M)_{\mathcal{P}} \oplus N$ , nous obtenons  $\operatorname{im} \Psi_M \cong \operatorname{im} \Psi_M \oplus \operatorname{im} \Psi_N$ , ce qui entraîne que  $\operatorname{im} \Psi_N = 0$  et donc que  $\Psi_N = 0$ .  $\square$

**Lemme 6.10.** *Soit  $\mathcal{P}$  un poset fini et connexe ayant un unique élément minimal et maximal. Alors,  $\operatorname{rang} \Psi_M = \operatorname{rang} \Psi_{\operatorname{res}_{\partial \mathcal{P}} M}$ .*

*Démonstration.* Notons  $\lim M = (\ell, \lambda)$  et  $\lim \operatorname{res}_{\partial \mathcal{P}} M = (r, \psi)$ . Notons l'unique élément minimal de  $\mathcal{P}$  par  $w$ . Soit  $x \in \mathcal{P}$ . Puisque  $\mathcal{P}$  est connexe et  $w$  est unique, nous avons que  $w \leq x$  et donc que  $M_{w \rightarrow x}$  existe. Nous montrerons que  $\ell = M_w$  et que  $\lambda = (M_{w \rightarrow x})_{x \in \mathcal{P}}$ . Premièrement,  $(M_w, (M_{w \rightarrow x})_{x \in \mathcal{P}})$  définit un cône de  $M$ . En effet, soient  $x \leq y$  dans  $\mathcal{P}$ . Alors,  $M_{x \rightarrow y} \circ M_{w \rightarrow x} = M_{w \rightarrow y}$ . Supposons



maintenant que  $(n, \phi)$  est un cône de  $M$ . En particulier, nous avons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} & n & \\ \phi_w \swarrow & & \searrow \phi_w \\ M_w & \xrightarrow{1} & M_w \end{array}$$

ce qui implique qu'il y a une unique application  $n \rightarrow M_w$ , donnée par  $\phi_w$ , qui est telle que  $M_{w \rightarrow x} \circ \phi_w = \phi_x$  pour tout  $x \in \mathcal{P}$ . Ceci montre que  $\lim M = (M_w, (M_{w \rightarrow x})_{x \in \mathcal{P}})$ . De façon complètement analogue, nous montrons que  $r = M_w$  et  $\psi = (M_{w \rightarrow x})_{x \in \partial \mathcal{P}}$ . En particulier,  $w$  est aussi l'unique élément minimal de  $\partial \mathcal{P}$ .

Notons par  $z$  l'unique élément maximal de  $\mathcal{P}$  (et par le fait même de  $\partial \mathcal{P}$ ). Nous obtenons dualement que  $\operatorname{colim} M = (M_z, (M_{y \rightarrow z})_{y \in \mathcal{P}})$  et  $\operatorname{colim} \operatorname{res}_{\partial \mathcal{P}} M = (M_z, (M_{y \rightarrow z})_{y \in \partial \mathcal{P}})$ .

Par la proposition 6.8, nous pouvons choisir un élément arbitraire de  $\mathcal{P}$  pour calculer  $\Psi_M$ . Prenons  $w$ . Alors,  $\Psi_M = M_{w \rightarrow z}$ . De la même façon, nous avons que  $\Psi_{\operatorname{res}_{\partial \mathcal{P}} M} = M_{w \rightarrow z}$ . De la proposition 2.17, les limites et colimites étant uniques à isomorphisme près, le rang de ces applications reste inchangé, d'où le résultat.  $\square$

Nous pouvons maintenant démontrer le résultat principal.

*Démonstration du théorème 6.5.* Par le lemme 6.9, on a  $\operatorname{rang} \Psi_M = \operatorname{mult}(M, \mathbb{I}_{\mathcal{P}})$ . Ensuite, par le lemme 6.10, on trouve que  $\operatorname{rang} \Psi_M = \operatorname{rang} \Psi_{\operatorname{res}_{\partial \mathcal{P}} M}$ . Alors, par le lemme 6.9 appliqué à  $\operatorname{res}_{\partial \mathcal{P}} M$  à la place de  $M$ , le résultat suit directement.  $\square$

## Références

- [ASS06] Ibrahim ASSEM, Andrzej SKOWRONSKI et Daniel SIMSON : *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*, volume 1. Cambridge University Press, 2006.
- [BDL25] Thomas BRÜSTLE, Justin DESROCHERS et Samuel LEBLANC : Generalized rank via minimal subposet, 2025. arXiv.
- [BL23] Magnus Bakke BOTNAN et Michael LESNICK : An introduction to multiparameter persistence. *EMS Press. Representations of Algebras and Related Structures*, pages 77–150, 2023.
- [CdSGO16] Frédéric CHAZAL, Vin de SILVA, Marc GLISSE et Steve OUDOT : *The Structure and Stability of Persistence Modules*. Briefs in Mathematics. Springer, 2016.
- [CL18] Erin Wolf CHAMBERS et David LETSCHER : *Persistent Homology over Directed Acyclic Graphs*, pages 11–32. Association for Women in Mathematics. Springer International Publishing, Cham, 2018.

- [CM21] Frédéric CHAZAL et Bertrand MICHEL : An introduction to topological data analysis : Fundamental and practical aspects for data scientists. *Frontiers in Artificial Intelligence*, 4, 2021.
- [Cro05] Martin D. CROSSLEY : *Essential Topology*. Undergraduate Mathematics Series. Springer, 2005.
- [Hat01] Allen HATCHER : *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2001.
- [Kin08] Ryan KINSER : The rank of a quiver representation. *Journal of Algebra*, 320(6):2363–2387, 2008.
- [KM21] Woojin KIM et Facundo MÉMOLI : Generalized persistence diagrams for persistence modules over posets. *Journal of Applied and Computational Topology*, 5:533–581, 2021.
- [Lan78] Saunders Mac LANE : *Categories for the Working Mathematician*. Springer, 2 édition, 1978.
- [Oud15] Steve Y. OUDOT : *Persistence Theory : From Quiver Representations to Data Analysis*. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, 2015.
- [Rie16] Emily RIEHL : *Category Theory in Context*. Dover Publications, 2016.
- [Sch14] Ralf SCHIFFLER : *Quiver Representations*. Springer, 2014.

LAURIANNE BARIL

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Courriel: Laurianne.Baril@USherbrooke.ca

SAMUEL LEBLANC

DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND STATISTICS, QUEEN'S UNIVERSITY

Courriel: Samuel.LebLANC@QueensU.ca