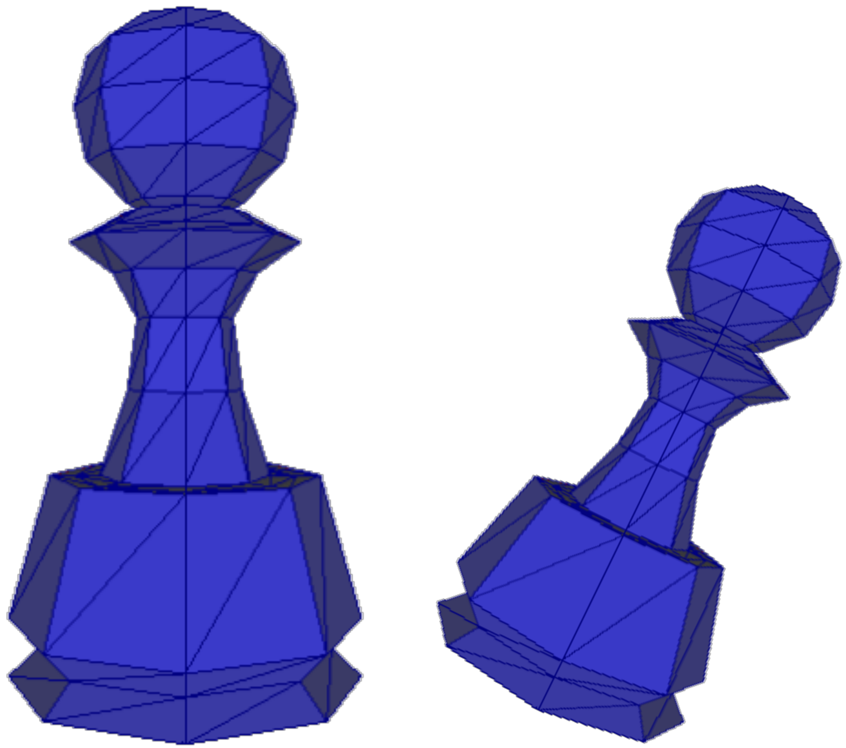
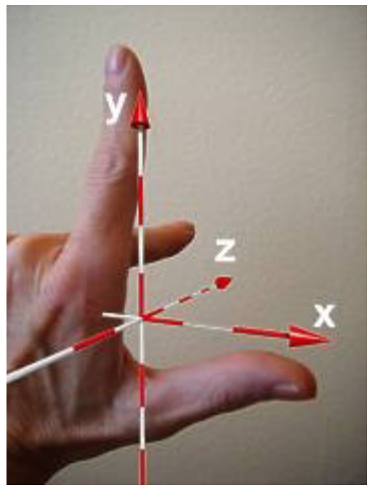
Trasformazioni Geometriche

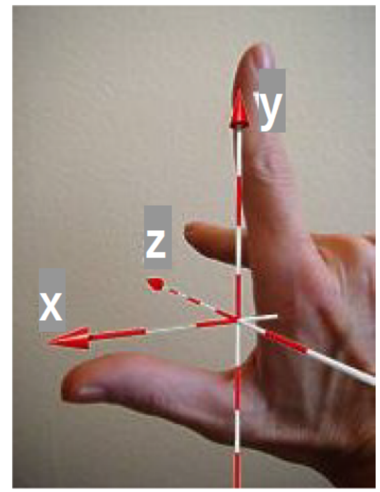


Sistema di Coordinate

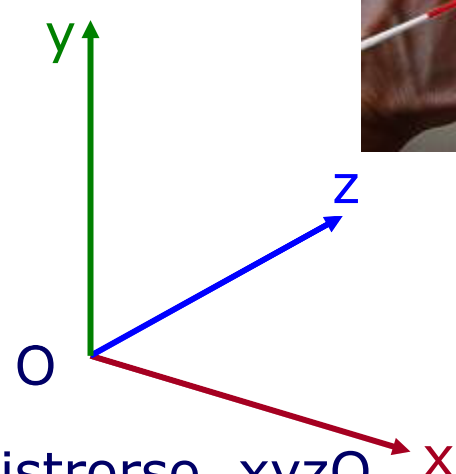
Sia xyzO un sistema di riferimento Cartesiano 3D, allora si distingue tra destrorso e sinistrorso in base alla regola della mano destra o sinistra.

Mano sinistra

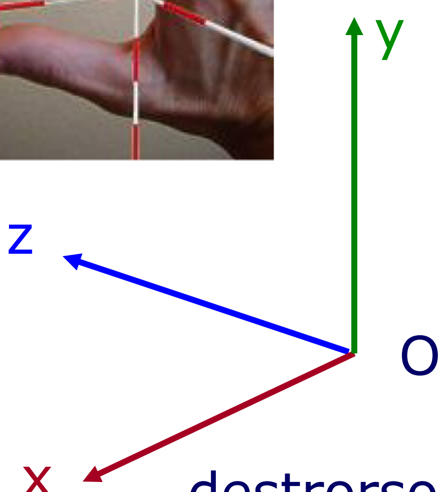




Mano destra



sinistrorso xyzO



destrorso xyzO

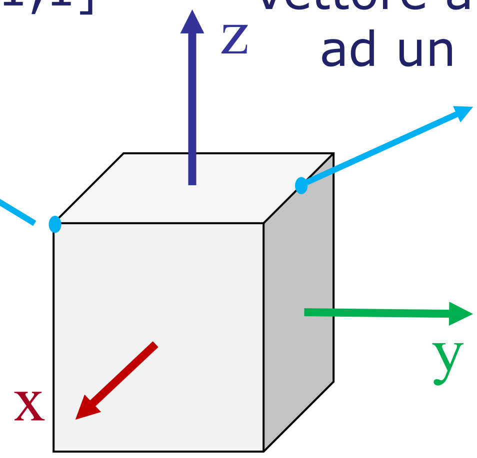
Definizione oggetto 3D

Ogni oggetto mesh 3D si definisce in un sistema di riferimento Cartesiano xyzO destrorso dando la lista dei suoi Vertici (coord. floating point) e la lista delle sue Facce (piane).

```
Coordinate (X,Y,Z) dei Vertices
1>  1.000000 -1.000000  1.000000
2> -1.000000 -1.000000  1.000000
3> -1.000000  1.000000  1.000000
4>  1.000000  1.000000  1.000000
5>  1.000000 -1.000000 -1.000000
6> -1.000000 -1.000000 -1.000000
7> -1.000000  1.000000 -1.000000
8>  1.000000  1.000000 -1.000000
Indici dei Vertices di ogni Face
1> 4 3 2 1
2> 8 7 3 4
3> 7 8 5 6
4> 5 1 2 6
5> 8 4 1 5
6> …
```

Vertice o Punto
di coord. [1,-1,1]

Vettore applicato
ad un punto



Vettore
di coord. [1,0,0]

Geometria e Topologia

- definizione geometrica (dove sono posizionati nello spazio 3D i vertici)
- definizione topologica (come sono connessi i vertici da lati e facce)

Scalari, Punti e Vettori
(un po' di richiami)

Scalare: $\alpha \in R$ — specifica una grandezza

Punto: $p = [x, y, z]^T \in R^3$ — specifica una posizione nello spazio

Vettore: $\underline{v} = [x, y, z]^T \in R^3$ — specifica modulo, direzione e verso

Attenzione: per convenzione i vettori sono colonna; quando faremo un prodotto tra matrice e vettore, per questa convenzione, avremo "matrice" per "vettore colonna".
I vettori li indicheremo in grassetto o sottosegnati.

Lo Spazio Vettoriale R^n

Uno spazio Vettoriale, detto anche spazio lineare è una struttura algebrica composta da:

- un campo i cui elementi sono detti scalari
- un insieme di elementi detti vettori
- due operazioni binarie, dette somma e moltiplicazione per scalare caratterizzate da certe proprietà

Nel seguito siamo interessati allo spazio Vettoriale R^n (insieme dei vettori $\underline{v} \in R^n$) sul campo R ed in particolare per $n=2,3$ e 4.

Lo Spazio Vettoriale R^n

R^n è uno spazio lineare sul campo R quando:

A)esiste un'operazione binaria interna "+" detta addizione e

A1. $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$ per ogni $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in R^n$

A2. $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$ per ogni $\underline{u}, \underline{v} \in R^n$

A3. Esiste $\underline{0} = [0,0,0]^T$ tale che $\underline{u} + \underline{0} = \underline{u}$ per ogni $\underline{u} \in R^n$

A4. Per ogni $\underline{u} \in R^n$ esiste un unico $\underline{v} \in R^n$ tale che $\underline{u} + \underline{v} = \underline{0}$ (indicheremo $\underline{v}$ come $-\underline{u}$)

B)esiste un'operazione binaria esterna "•" detta moltiplicazione per uno scalare $\alpha \in R$ e

B1. $\alpha \bullet (\underline{u} + \underline{v}) = \alpha \bullet \underline{u} + \alpha \bullet \underline{v}$

B2. $(\alpha + \beta) \bullet \underline{u} = \alpha \bullet \underline{u} + \beta \bullet \underline{u}$

B3. $(\alpha\beta) \bullet \underline{u} = \alpha \bullet (\beta \bullet (\underline{u}))$

B4. $1 \bullet \underline{u} = \underline{u}$ cioè 1 è l'unità moltiplicativa

Lo Spazio Vettoriale R^n

Per ogni spazio lineare a dimensione finita n (R^n ha dimensione n) è possibile determinare n vettori linearmente indipendenti $\underline{v}1, \underline{v}2, \ldots \underline{v}n$ (una base) così che ogni vettore di R^n può essere scritto come una combinazione lineare

$$\underline{u} = a_1 \underline{v}_1 + a_2 \underline{v}_2 + \ldots + a_n \underline{v}_n$$

per opportuni coefficienti reali $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

$[a_1, a_2, \ldots, a_n]^T$ sono le "coordiante" di $\underline{u}$ nella base $\underline{v}1, \underline{v}2, \ldots, \underline{v}n$

Prodotto scalare

Dati due vettori $\underline{u}=[u_1,u_2,\dots,u_n]^T$ e $\underline{v}=[v_1,v_2,\dots,v_n]^T$ di R^n, si definisce l'operazione "prodotto scalare", e la si indica con "•", come:

$$\underline{u} \bullet \underline{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

Altri modi di indicarla sono

$$\underline{u} \bullet \underline{v} = < \underline{u} , \underline{v} > = \underline{u}^T \underline{v}$$

Norma Euclidea

Si può definire per ogni $\underline{u}$ in R^n una funzione detta "norma" (norma Euclidea che indicheremo con la notazione $\| \bullet \|_2$) in questo modo

$$\|\underline{v}\|_2 = \sqrt{\underline{v} \bullet \underline{v}} = \sqrt{<\underline{v}, \underline{v}>} = \sqrt{\underline{v}^{\mathrm{T}} \underline{v}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$$

Norma Euclidea

La lunghezza o modulo di un vettore di R^3 è

$$||\underline{v}||_2 = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2 + v_z{}^2}$$

Un vettore di modulo 1 è detto "vettore unitario" o anche ''versore'' o vettore normalizzato.

Si può sempre normalizzare un vettore per renderlo un vettore unitario, dividendolo per la sua norma

$$\underline{v} \,/\, ||\underline{v}||_2$$

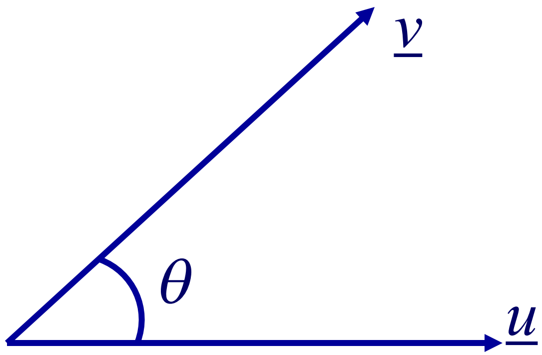
Prodotto scalare

In R^n è noto che il prodotto scalare fra due vettori permette di determinare l'angolo che essi formano:

$$<\underline{u},\underline{v}> = ||\underline{u}||_2 \, ||\underline{v}||_2 \cos(\theta)$$

$$\cos(\theta) = <\underline{u},\underline{v}>/(||\underline{u}||_2 \, ||\underline{v}||_2)$$

$$\theta = arcos(<\underline{u},\underline{v}>/(||\underline{u}||_2 \, ||\underline{v}||_2))$$



Nota: se il prodotto scalare fra due vettori è nullo ($<\underline{u},\underline{v}>=0$) i due vettori sono ortogonali ossia formano un angolo di 90 gradi o $\pi/2$ in radianti

Prodotto vettoriale

Dati due vettori di R^3 $\underline{u}=[u_x, u_y, u_z]^T$ e $\underline{v}=[v_x, v_y, v_z]^T$, si definisce l'operazione "prodotto vettoriale", e la si indica con "x", come:

$$\underline{u} \times \underline{v} = [u_y v_z - u_z v_y,\ u_z v_x - u_x v_z,\ u_x v_y - u_y v_x]$$

$$= \left[\begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_z & u_x \\ v_z & v_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \right]$$

con $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

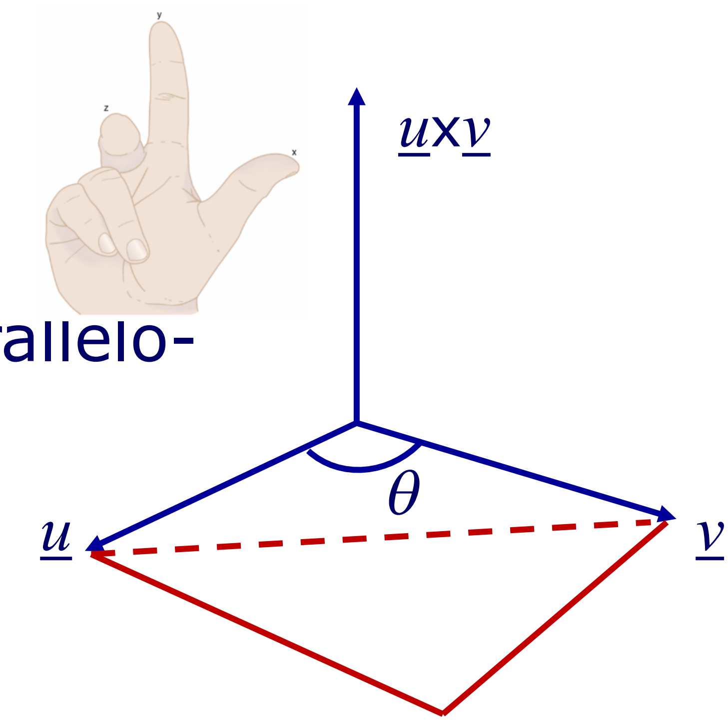
Prodotto vettoriale

$\underline{u}\times\underline{v}$ è un vettore perpendicolare sia ad $\underline{u}$ che a $\underline{v}$ nella direzione e verso definita dalla regola della mano destra

$$||\underline{u}\times\underline{v}||_2 = ||\underline{u}||_2\, ||\underline{v}||_2\, sin(\theta)$$

$||\underline{u}\times\underline{v}||_2 =$ area con segno del parallelogramma costruito su $\underline{u}$ e $\underline{v}$

$||\underline{u}\times\underline{v}||_2 = \underline{0}$ se $\underline{u}$ e $\underline{v}$ sono paralleli

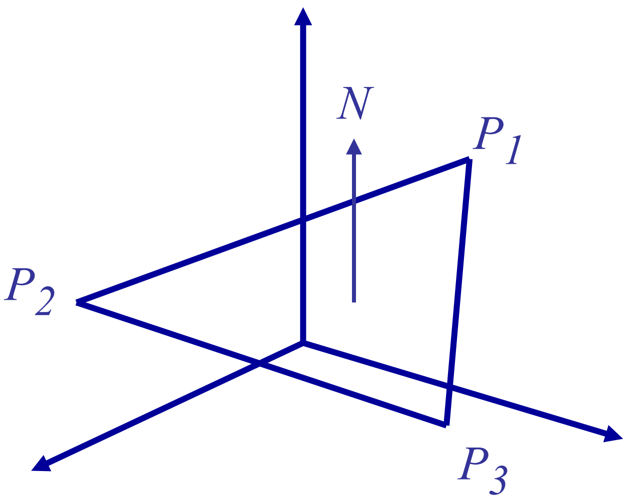


Prodotto vettoriale

Nota: ilprodotto vettoriale è utile per determinare il vettore normale di un triangolo 3D, ma anche l'area di un triangolo 3D

$$Area\ (\Delta P_1 P_2 P_3) = \frac{1}{2} \left\| (P_2 - P_1) \mathrm{x} (P_3 - P_1) \right\|_2$$

Ma $P_2 - P_1$ e $P_3 - P_1$ sono vettori?
Questo da dove viene?

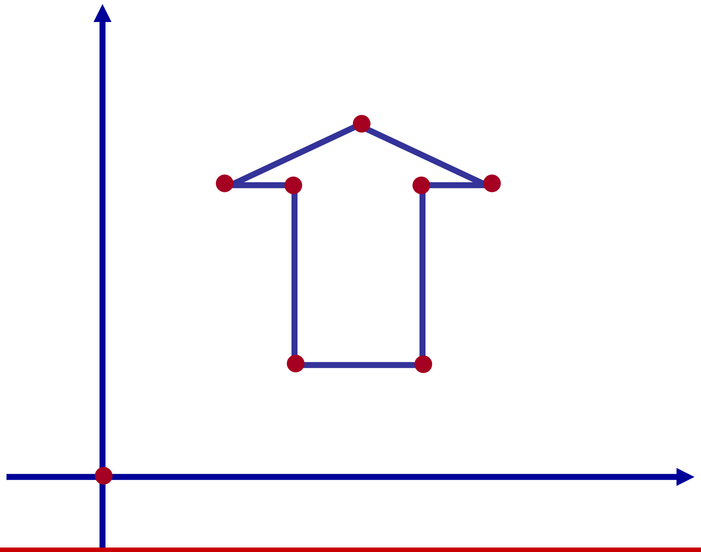


Sulla pagina web del corso, in Download Documenti, potete ritrovare tutti questi concetti e molto di più nel documento "Basic Linear Algebra"

Trasformazioni Geometriche

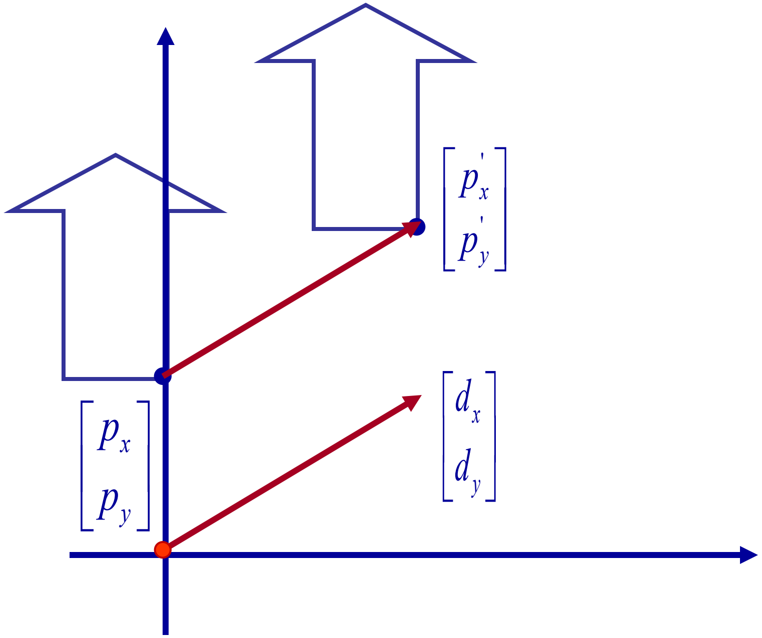
Il nostro obiettivo è, dato un oggetto 3D, poterlo trasformare in uno differente per posizione, orientazione e dimensione; per far questo dovremo trasformare le coordinate dei punti/vertici dell'oggetto 3D.

Modificare la geometria, ma non la topologia



Traslazione 2D

Ogni punto/vertice viene traslato del vettore $\underline{d}=[d_x,d_y]^T$



$$p' = p + \underline{d}$$

$$\begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix}$$

$$[p'_x, p'_y]^T = [p_x, p_y]^T + [d_x, d_y]^T$$

$$\begin{cases} p'_x = p_x + d_x \\ p'_y = p_y + d_y \end{cases}$$

Scala 2D

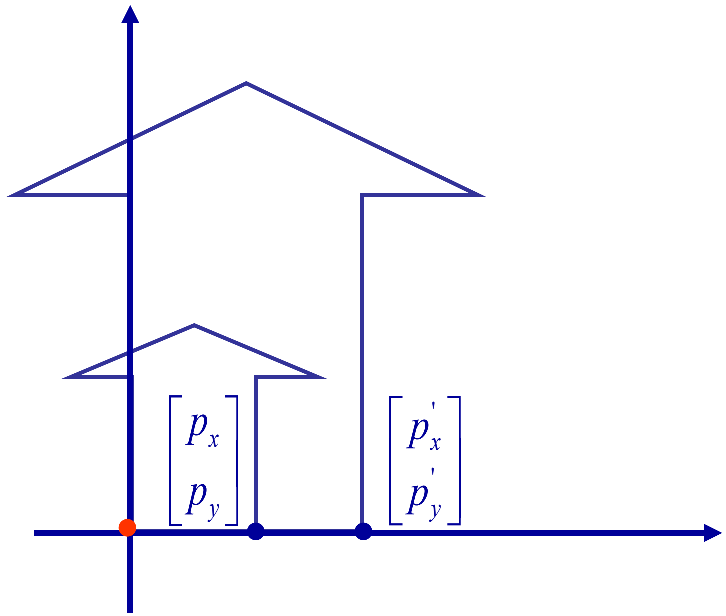
Ogni punto/vertice viene scalato dei fattori s_x *ed* s_y positivi

Nota: l'origine è un punto fisso
$s_x = s_y$ scala uniforme
$s_x \neq s_y$ scala non uniforme

$$\begin{cases} p_x^{'} = s_x p_x \\ p_y^{'} = s_y p_y \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} p_x^{'} \\ p_y^{'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}$$

$$p^{'} = Sp \quad \text{con} \quad S = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix}$$



Esempio: $s_x=2,\ s_y=2$

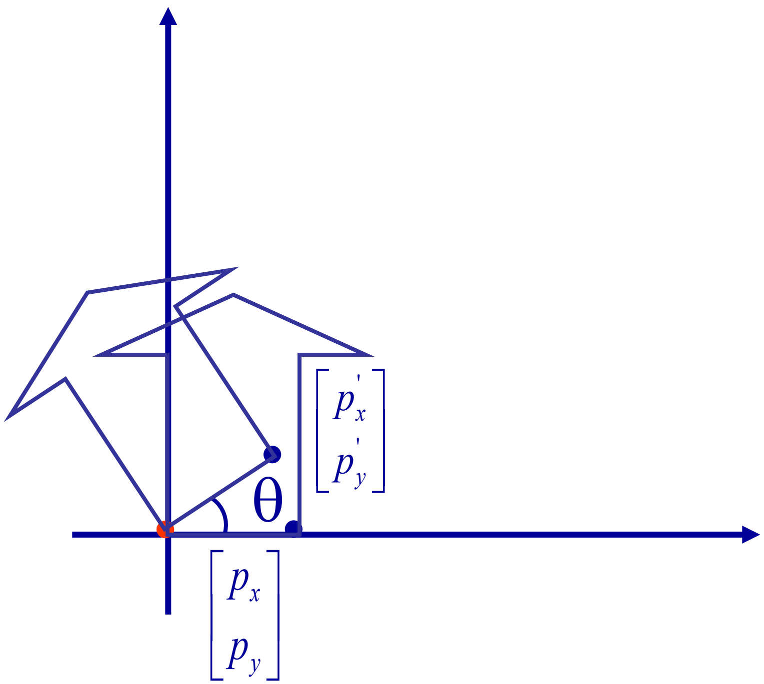
Nota: $s_x, s_y \in [0,1]$ riduce
$s_x, s_y > 1$ amplifica

Rotazione 2D

Ogni punto/vertice viene ruotato intorno all'origine di un angolo θ in senso antiorario

Nota: l'origine è un punto fisso

$$\begin{cases} p'_x = p_x \cos(\theta) - p_y \sin(\theta) \\ p'_y = p_x \sin(\theta) + p_y \cos(\theta) \end{cases}$$



$$\begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}$$

$$p' = R(\theta)p$$

con $R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$

Trasformazione lineare

Una "trasformazione lineare" A di R^3 è un'applicazione che mappa $\underline{u} \in R^3$ in $\underline{u}' \in R^3$ $(\underline{u}'=A(\underline{u}))$ con le proprietà:

1) $A(\underline{u}+\underline{v})=A(\underline{u})+A(\underline{v})$
2) $A(\alpha\, \underline{u})= \alpha\, A(\underline{u})$ con $\alpha \in R$

Una trasformazione lineare può essere rappresentata da una matrice A 3x3 non singolare, infatti

$$\begin{bmatrix} u'_x \\ u'_y \\ u'_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}}_{A} \bullet \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}$$

e valgono le proprietà sopra dette.

Trasformazione affine

Una "trasformazione affine" è la composizione di una trasformazione lineare ed una traslazione; in forma matriciale sarà:

$$\begin{bmatrix} u'_x \\ u'_y \\ u'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{bmatrix}$$

Od anche

$$\underline{u}' = A\,\underline{u} + \underline{d}$$

Spazio Affine

In uno spazio vettoriale non c'è il concetto di punto e quindi di posizione

Uno spazio affine è l'estensione di uno spazio vettoriale che contiene anche i punti

Nuove operazioni:

1) punto + vettore $\Rightarrow$ definisce un punto

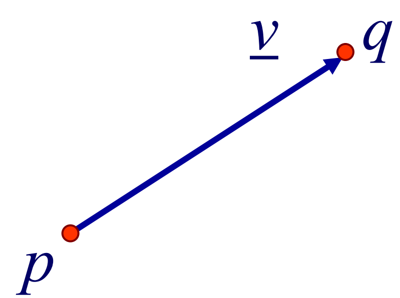
2) punto – punto $\Rightarrow$ definisce un vettore

Nuove operazioni

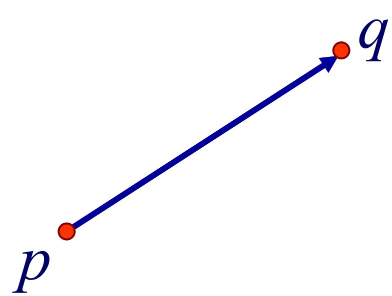
In formule:

1) $q = p + \underline{v}$

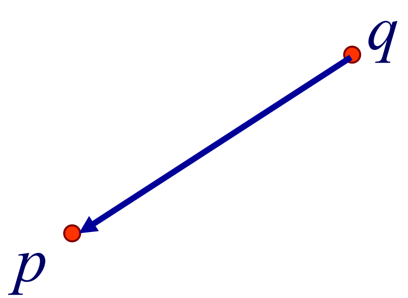
2) $\underline{u} = q - p$ e $\underline{v} = p - q$



$q = p + \underline{v}$



$\underline{u} = q - p$



$\underline{v} = p - q$

Attenzione:

l'operazione punto + punto non è definita !!!

Combinazione affine

Una "combinazione affine" è una combinazione lineare di punti con coefficienti che fanno somma 1

$$p = a_1 p1 + a_2 p2 + \ldots + a_n pn$$
$$con\ a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$$

-osservazione: se $a_i \in [0,1]$ allora una combinazione affine è detta "combinazione convessa"

-esempio: $p = (1-t)\, p1 + t\ \ p2$

-retta passante per $p1$ e $p2$ per $t \in R$;

-segmento di estremi $p1$ e $p2$ per $t \in [0,1]$

Combinazione affine

-esempio: punto medio di un segmento

$$p = (p1 + p2)/2$$

Ma le addizioni fra punti non erano vietate?...

Cerchiamo di dare una spiegazione:

$$\begin{aligned} p &= s\,p1 + t\,p2 \qquad \text{con} \quad s+t=1 \\ &= (1-t)\,p1 + t\,p2 \\ &= p1 + t\,(p2-p1) \\ &= p1 + t\,\underline{v} \end{aligned}$$

cioè punto + vettore che dà un punto.

Combinazione affine

Vediamo un altro esempio:

$$p = \gamma\, p1 + \alpha\, p2 + \beta\, p3 \quad \text{con } \alpha + \beta + \gamma = 1$$

$$= (1-\alpha-\beta)\, p1 + \alpha\, p2 + \beta\, p3$$

$$= p1 + \alpha\,(p2-p1) + \beta\,(p3-p1)$$

$$= p1 + \alpha\,\underline{u} + \beta\,\underline{v}$$

cioè punto + (vettore + vettore) =
punto + vettore =
punto

Combinazione affine

In generale:

$$p = a_1 p1 + a_2 p2 + \ldots + a_n pn$$

con $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$

$$= (1 - a_2 - \ldots - a_n)\, p1 + a_2 p2 + \ldots + a_n pn$$

$$= p1 + a_2 (p2 - p1) + \ldots + a_n (pn - p1)$$

$$= p1 + a_2 \underline{u}2 + \ldots + a_n \underline{u}n$$

cioè punto + (vettore + … + vettore) =
punto + vettore =
punto

Frame (Sistema di Riferimento)

In uno spazio affine definiamo un "sistema di riferimento" mediante una quadrupla data da

$$(\underline{v}1, \underline{v}2, \underline{v}3, O)$$

dove

- O è un punto (origine)
- $(\underline{v}1, \underline{v}2, \underline{v}3)$ è una base di vettori per lo spazio vettoriale associato (non necessariamente vettori ortogonali)

Un punto p dello spazio affine viene allora rappresentato univocamente come

$$p = a_1\underline{v}1 + a_2\underline{v}2 + a_3\underline{v}3 + O$$

Le coordinate di p sono $[a_1,a_2,a_3,1]^T$

Frame (Sistema di Riferimento)

Rappresentare sia vettori che punti 3D usando tre valori scalari risulta ambiguo.

Considereremo un sistema di coordinate che permetta una rappresentazione univoca per punti e vettori

Un vettore è rappresentato come

$$\underline{u} = a_1\underline{v}1 + a_2\underline{v}2 + a_3\underline{v}3$$

Un punto è rappresentato come

$$p = a_1\underline{v}1 + a_2\underline{v}2 + a_3\underline{v}3 + O$$

Coordinate Omogenee

Se assumiamo

$$1\ p=p \qquad \text{e} \qquad 0\ p=0$$

Un vettore è dato da

$$\underline{u} = a_1\underline{v}1 + a_2\underline{v}2 + a_3\underline{v}3 + 0\ O$$

Un punto è dato da

$$p = a_1\underline{v}1 + a_2\underline{v}2 + a_3\underline{v}3 + 1\ O$$

Coordinate Omogenee

Aggiungendo una dimensione, ciascun elemento dello spazio affine avrà un valore extra 0 o 1

Ogni punto e vettore 3D viene definito da 4 coordinate:

$p = a_1\underline{v}1 + a_2\underline{v}2 + a_3\underline{v}3 + O$

le coordinate di p sono $[a_1, a_2, a_3, 1]^T$

Nel contempo un vettore dello spazio affine viene rappresentato univocamente come

$\underline{u} = a_1\underline{v}1 + a_2\underline{v}2 + a_3\underline{v}3$

le coordinate di $\underline{v}$ sono $[a_1, a_2, a_3, 0]^T$

Coordinate Omogenee

Dato un sistema di riferimento ($\underline{v}1, \underline{v}2, \underline{v}3, O$), ogni punto e vettore 3D è localizzato moltiplicando le sue coordinate per la matrice 4x4 che definisce il sistema di riferimento

$$\underline{u} = a_1\underline{v}1 + a_2\underline{v}2 + a_3\underline{v}3 + 0\,O = \begin{bmatrix} v_{1x} & v_{2x} & v_{3x} & 0 \\ v_{1y} & v_{2y} & v_{3y} & 0 \\ v_{1z} & v_{2z} & v_{3z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$p = a_1\underline{v}1 + a_2\underline{v}2 + a_3\underline{v}3 + 1O = \begin{bmatrix} v_{1x} & v_{2x} & v_{3x} & 0 \\ v_{1y} & v_{2y} & v_{3y} & 0 \\ v_{1z} & v_{2z} & v_{3z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Trasformazioni Affini in Spazi Affini (Coordinate Omogenee)

$p' = A\, p + \underline{d}$ diventa $p' = M\, p$

$$\begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \\ 1 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}}_{A} & \underbrace{\begin{matrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{matrix}}_{\underline{d}} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{bmatrix}}^{M} \bullet \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$p'_x = a_{11} p_x + a_{12} p_y + a_{13} p_z + d_x$$
$$p'_y = a_{21} p_x + a_{22} p_y + a_{23} p_z + d_y$$
$$p'_z = a_{31} p_x + a_{32} p_y + a_{33} p_z + d_z$$

Trasformazioni Affini 3D (Coordinate Omogenee)

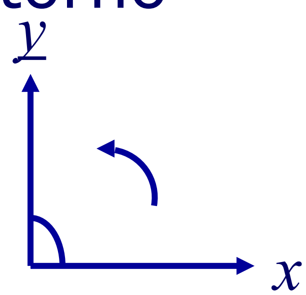
Scala

$$\begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Traslazione

$$\begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotazione intorno all'asse $\underline{z}$

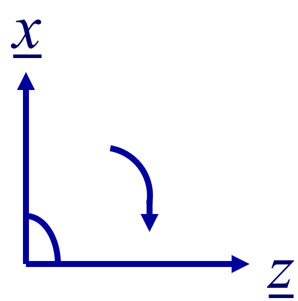


$R_z(\theta)$

$$\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

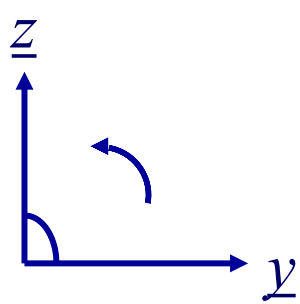
Trasformazioni Affini 3D (Coordinate Omogenee)

Rotazione intorno all’asse $\underline{y}$



$$\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} = \overset{R_y(\theta)}{\begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \bullet \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

Rotazione intorno all’asse $\underline{x}$



$$\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} = \overset{R_x(\theta)}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \bullet \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

Perché Trasformazione Affine?

Perché una tale trasformazione, essendo lineare, gode delle proprietà che garantiscono che punti allineati vengono trasformati in punti allineati e punti che stanno su uno stesso piano in punti che stanno su uno stesso piano! Vediamolo per punti di un segmento:

Sia $p(t)=(1-t)\,p1 + t\,p2$ con $t \in [0,1]$ allora $p'(t)=M\,p(t)$ e

$$
\begin{aligned}
p'(t) = M\,p(t) &= M\,[(1-t)\,p1 + t\,p2] \\
&= M\,(1-t)\,p1 + M\,t\,p2 \\
&= (1-t)\,M\,p1 + t\,M\,p2 \\
&= (1-t)\,p1' + t\,p2'
\end{aligned}
$$

Questa semplice osservazione è alla base del fatto che per trasformare un oggetto definito da Vertici e Facce piane risulta sufficiente applicare le trasformazioni ai vertici e considerare la stessa connettività (topologia).

Trasformazioni Inverse

Se M trasforma p in p', allora M^{-1} trasforma p' in p

$M\,M^{-1} = M^{-1}\,M = I$

$p' = M\,p$ allora $M^{-1}\,p' = p$

Inversa della traslazione: $T^{-1}(\underline{d})=T(-\underline{d})$

Inversa della scala: $S^{-1}(\underline{s})=S(1/s_x,\ 1/s_y,\ 1/s_z)$

Inversa della rotazione: $R^{-1}(\theta) = R^{T}(\theta) = R(-\theta)$

Trasformazioni Composte

Più trasformazioni successive su un oggetto si chiamano trasformazioni composte e si ottengono mediante prodotti di matrici

$$p' = M_n \ldots M_2 M_1 p = M p \qquad \text{con} \qquad M = M_n \ldots M_2 M_1$$

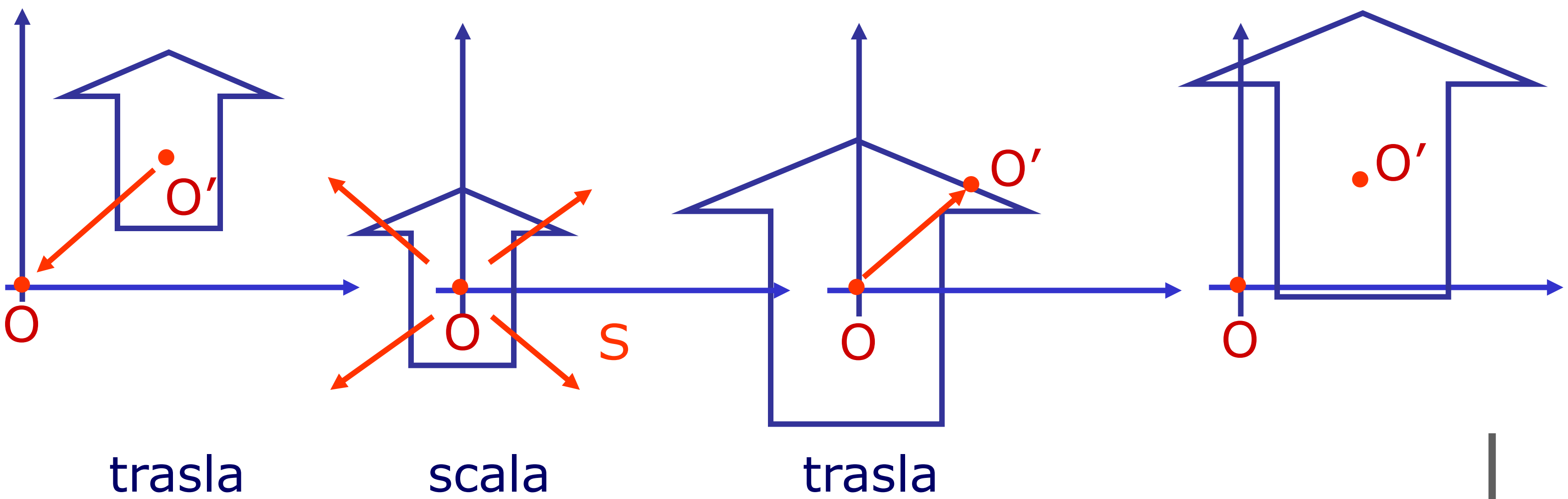
Il prodotto di matrici è associativo, ma non commutativo, per cui l'ordine delle matrici è importante

Nota: se si applicano trasformazioni composte dello stesso tipo, cioè scale con scale, traslazioni con traslazioni, rotazioni con rotazioni rispetto allo stesso asse, allora il prodotto di tali matrici risulta commutativo.

Trasformazioni rispetto ad un punto

Scala di un oggetto 2D rispetto ad un punto (per esempio il suo baricentro)

Procedimento a passi:
1. traslazione di O′ nell'origine O;
2. scala rispetto all'origine con matrice S;
3. traslazione inversa per portare l'origine O in O′.



Comporre Trasformazioni

In forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} p_x' \\ p_y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -d_x \\ 0 & 1 & -d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Comporre più trasformazioni in una singola matrice:

$$\begin{bmatrix} p_x' \\ p_y' \\ 1 \end{bmatrix} = M \bullet \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

con

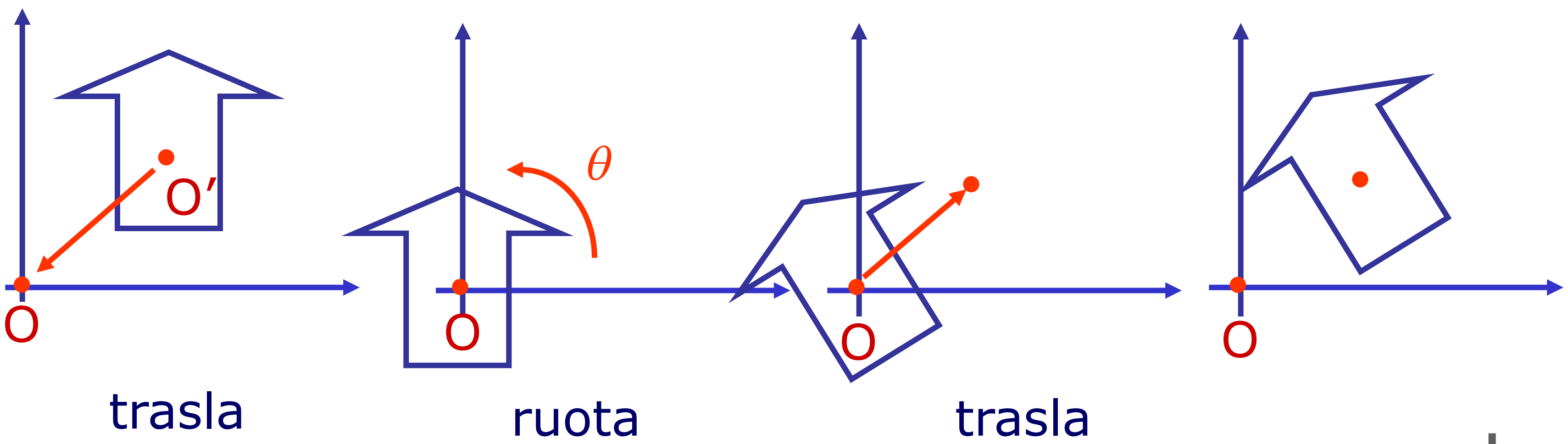
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -d_x \\ 0 & 1 & -d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} s_x & 0 & dx(sx-1) \\ 0 & s_y & dy(sy-1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Trasformazioni rispetto ad un punto

Rotazione di un oggetto 2D rispetto ad un punto (per esempio il suo baricentro):

Procedimento a passi:

1. Traslazione di O′ nell'origine O;
2. Rotazione dell'angolo θ rispetto all'origine;
3. Traslazione inversa per portare l'origine O in O′.



Comporre Trasformazioni

In forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} p_x' \\ p_y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -d_x \\ 0 & 1 & -d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Comporre più trasformazioni in una singola matrice

$$\begin{bmatrix} p_x' \\ p_y' \\ 1 \end{bmatrix} = M \bullet \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

con

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -d_x \\ 0 & 1 & -d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} c & -s & (c-1)dx - sdy \\ s & c & sdx + (c-1)dy \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

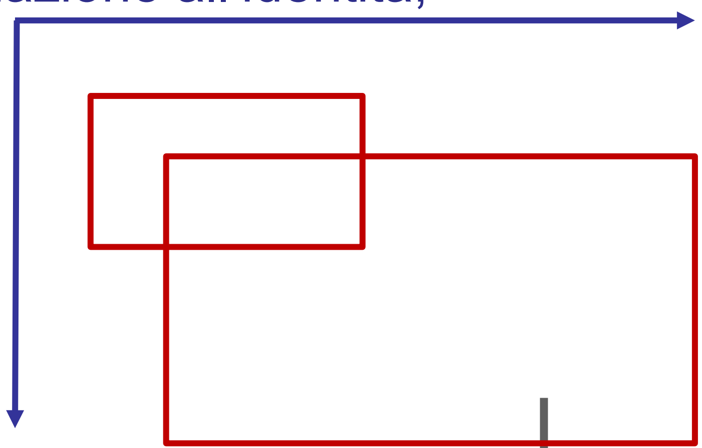
con
$c=cos(\theta)$
$s=sin(\theta)$

Trasformazioni in HTML5+canvas graphic context 2d

I seguenti metodi permettono di effettuare trasformazioni geometriche:

scale( )	scala il successivo disegno
rotate( )	ruota il successivo disegno
translate( )	trasla il successivo disegno
transform( )	moltiplica la matrice di trasformazione corrente con quella definita nella chiamata
setTransform( )	resetta la matrice di trasformazione all'identità, quindi riesegue transform()

```
var mc = document.getElementById("myCanvas");
var ctx = mc.getContext("2d");
ctx.strokeRect(5, 5, 20, 15);
ctx.scale(2, 2);
ctx.strokeRect(5, 5, 20,15);
```



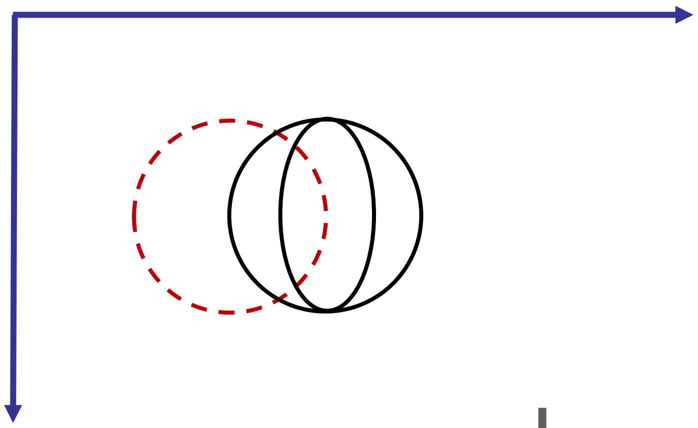
Trasformazioni in HTML5+canvas graphic context 2d

Esempio:

ctx.setTransform(a,b,c,d,e,f);

dove la matrice di trasformazione è data da: $\begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

```
var mc = document.getElementById("myCanvas");
var ctx = mc.getContext("2d");
ctx.beginPath();
ctx.setTransform(1, 0, 0, 1, 10, 0);   // M1
ctx.arc(20, 20, 10, 0, 2 * Math.PI, false);
ctx.stroke();
ctx.beginPath();
ctx.transform(0.5, 0, 0, 1, 10, 0);  // M2
ctx.arc(20, 20, 10, 0, 2 * Math.PI, false);
// M = M1 * M2
ctx.stroke();
```



Esercizio 1 (continua)

Si modifichi il codice realizzato per l'Esercizio 1 in modo che:

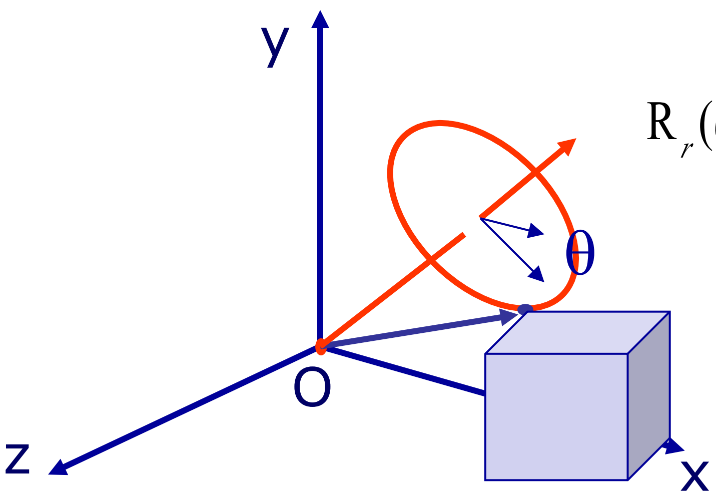
1. sia possibile applicare trasformazioni geometriche elementari alla curva di Bézier;
2. sia possibile effettuare un pan (spostare la curva nell'area rettangolare viewport)
3. sia possibile effettuare un fit della curva alla viewport
4. sia possibile effettuare uno zoom di un particolare

lo si chiami draw_bezier_curve2.html (.js)

Trasformazioni rispetto ad un punto

Scala o rotazione di un oggetto 3D rispetto ad un punto (per esempio il suo baricentro); vengono gestite in modo simile al caso 2D;

Rotazione di un oggetto 3D rispetto ad un asse arbitrario:



$r = [r_x, r_y, r_z]^T$

$$
R_r(\theta) = \begin{pmatrix} r_x r_x(1-c)+c & r_y r_x(1-c)-r_z s & r_z r_x(1-c)+r_y s & 0 \\ r_x r_y(1-c)+r_z s & r_y r_y(1-c)+c & r_z r_y(1-c)-r_x s & 0 \\ r_x r_z(1-c)-r_y s & r_y r_z(1-c)-r_x s & r_z r_z(1-c)+c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} p_x' \\ p_y' \\ 1 \end{bmatrix} = R_r(\theta) \bullet \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ 1 \end{bmatrix}
$$

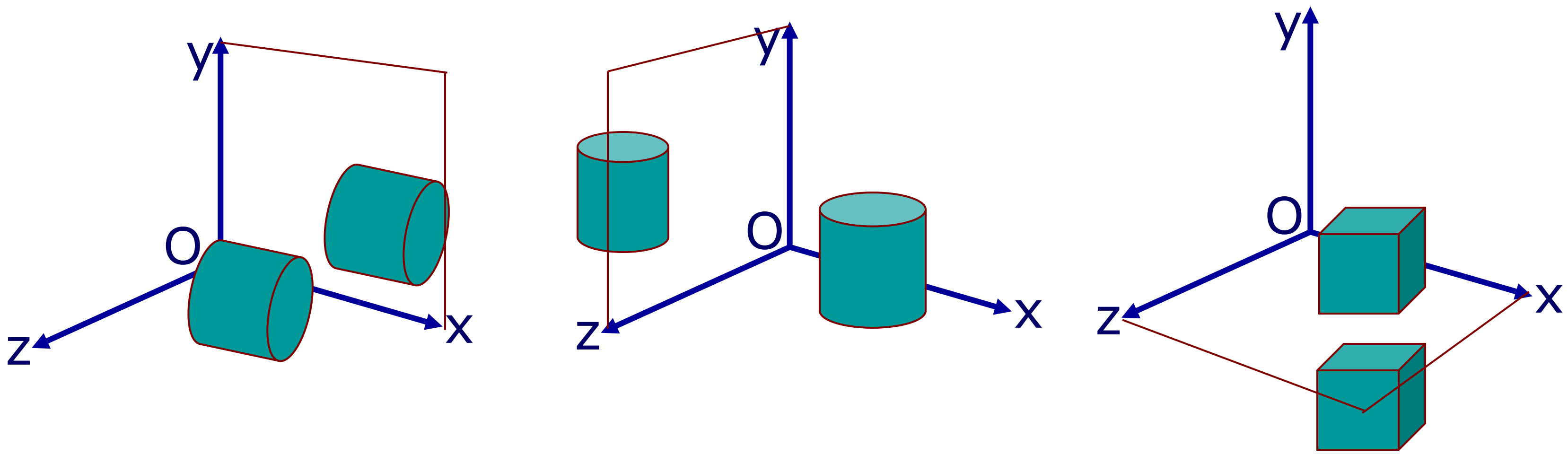
con
$c=cos(\theta)$
$s=sin(\theta)$

Esercizio: verificare la correttezza della matrice R.

Trasformazione di Simmetria

In 3D abbiamo le seguenti simmetrie elementari:

$$S_{xy} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad S_{yz} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad S_{xz} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

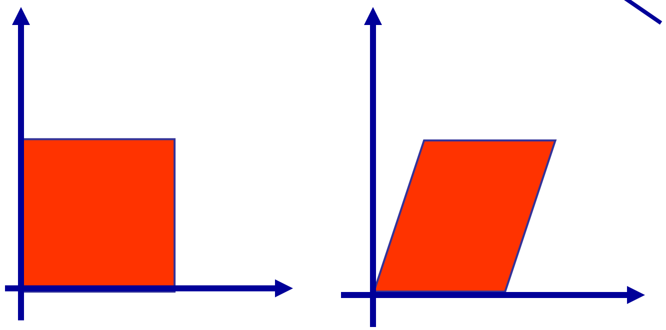


Trasformazione Shear 2D

Permette di modificare 2 o 3 coordinate di un punto di R^3 in modo proporzionale alle altre; vediamo prima in 2D

$$\begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \\ 1 \end{bmatrix} = H(0,b) \bullet \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x + bp_y \\ p_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{H}(a,b) = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Viene modificata solo la coord. x; la y rimane uguale.

In 2D avremo che la deformazione in y è: $\mathrm{H}(a,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Trasformazione Shear 3D

In 3D abbiamo

$$H(z_1,\dots,z_6)=\begin{pmatrix} 1 & z_3 & z_5 & 0 \\ z_1 & 1 & z_6 & 0 \\ z_2 & z_4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per esempio:

$$\begin{bmatrix} p_x' \\ p_y' \\ p_z' \\ 1 \end{bmatrix} = H(a,b,0,0,0,0)\bullet\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ ap_x + p_y \\ bp_x + p_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Diremo che H e una matrice di shear pura quando solo una delle z_k è non nulla.
Per una matrice di shear pura che indichiamo con l'unico parametro non nullo vale: $H^{-1}(z_k) = H(-z_k)$ con $k=1,\dots,6$.

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Giulio Casciola
Dip. di Matematica
giulio.casciola at unibo.it