

# Sincronizzazione e modello di Kuramoto

## Analisi e applicazioni

Samuele Pio Lipani

Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Università di Catania

Elaborato finale, Ottobre 2020

- 1 Condizioni per la sincronizzazione
- 2 Descrizione di Kuramoto
- 3 Limite continuo
- 4 Simulazioni numeriche
- 5 Applicazione del modello di Kuramoto



- 1 Condizioni per la sincronizzazione
- 2 Descrizione di Kuramoto
- 3 Limite continuo
- 4 Simulazioni numeriche
- 5 Applicazione del modello di Kuramoto

# Cosa intendiamo per sincronizzazione?

## Definizione

Sincronizzazione significa adattamento del ritmo di oscillatori periodici per mezzo della loro debole interazione

# Cosa intendiamo per sincronizzazione?

## Definizione

Sincronizzazione significa adattamento del ritmo di oscillatori periodici per mezzo della loro debole interazione

Condizioni affinché un sistema si possa dire sincronizzato

# Cosa intendiamo per sincronizzazione?

## Definizione

Sincronizzazione significa adattamento del ritmo di oscillatori periodici per mezzo della loro debole interazione

Condizioni affinché un sistema si possa dire sincronizzato

- Autosostenuto

# Cosa intendiamo per sincronizzazione?

## Definizione

Sincronizzazione significa adattamento del ritmo di oscillatori periodici per mezzo della loro debole interazione

Condizioni affinché un sistema si possa dire sincronizzato

- Autosostenuto
- Oscillatore non smorzato

# Cosa intendiamo per sincronizzazione?

## Definizione

Sincronizzazione significa adattamento del ritmo di oscillatori periodici per mezzo della loro debole interazione

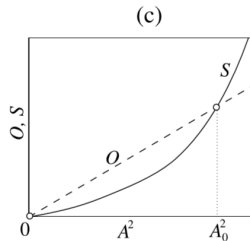
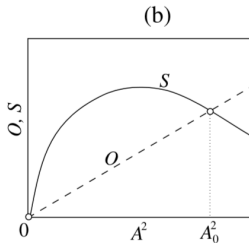
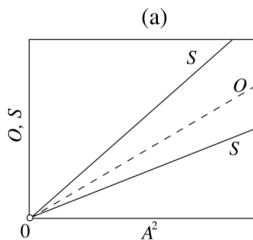
Condizioni affinché un sistema si possa dire sincronizzato

- Autosostenuto
- Oscillatore non smorzato
- Ampiezza e forma indipendenti dalle condizioni iniziali



# Oscillatori autosostenuti

$O$  è la potenza spesa dal sistema,  $S$  la potenza fornita



# Fase delle oscillazioni

Nello spazio degli stati di un sistema dinamico possiamo parametrizzare il moto su una traiettoria tramite la fase  $\phi$ .

Scegliamola in modo che cresca uniformemente nel tempo

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_0$$

La fase è detta **neutra stabile** Una forza perturbativa esterna causa deviazioni della fase e della frequenza.

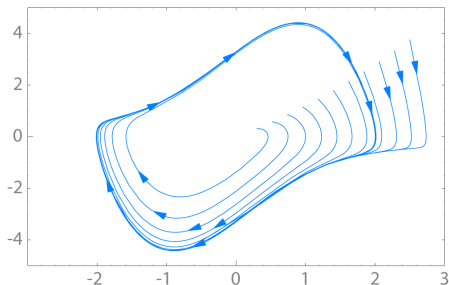
Come cambia l'energia delle oscillazioni con tali sollecitazioni?

# Traiettorie come ciclo limite

Un sistema auto-oscillante si dice **robusto** in quanto non varia l'ampiezza delle oscillazioni, quindi l'energia, al variare delle condizioni iniziali. La traiettoria nello spazio delle fasi è un ciclo limite.

## Esempio

Un ciclo limite può essere un attrattore, una traiettoria a cui tendono le altre ottenute con condizioni iniziali differenti.



- 1 Condizioni per la sincronizzazione
- 2 Descrizione di Kuramoto**
- 3 Limite continuo
- 4 Simulazioni numeriche
- 5 Applicazione del modello di Kuramoto



Sia una popolazione di  $N$  oscillatori. Le loro frequenze sono distribuite secondo una funzione  $g(\omega)$ .

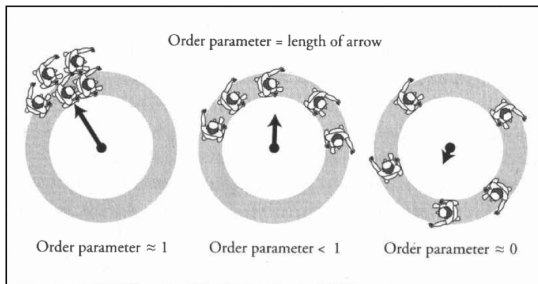
La loro interazione globale è descritta dal sistema di equazioni:

$$\dot{\theta}(t)_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j(t) - \theta_i(t)), \quad i = 1, \dots, N$$

# Parametro d'ordine

Definisco il parametro d'ordine  $r$

$$re^{i\psi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j} \quad 0 \leq r(t) \leq 1$$



Riscrivo la relazione del parametro d'ordine in modo da rendere esplicita la tipologia di interazione degli oscillatori nel sistema

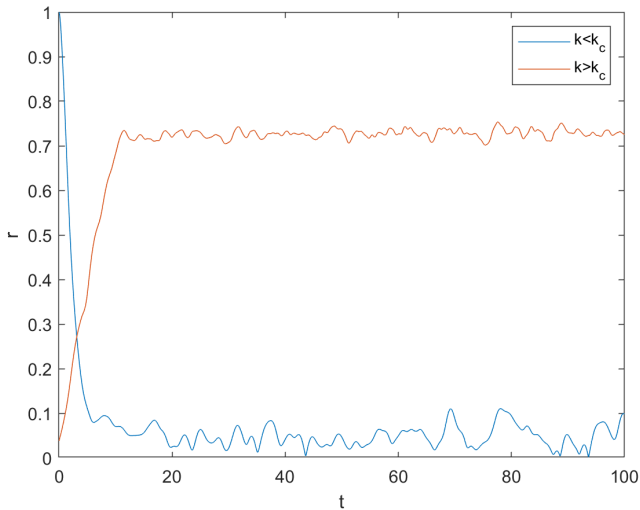
$$re^{i(\psi-\theta_i)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i(\theta_j-\theta_i)}, \quad i = 1, \dots, N$$

Ottenendo

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + Kr \sin(\psi - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N$$

Un sistema di equazioni apparentemente indipendenti l'una dall'altra con fase media  $\psi$ .

# Simulazione numerica della coerenza $r$





- 1 Condizioni per la sincronizzazione
- 2 Descrizione di Kuramoto
- 3 Limite continuo**
- 4 Simulazioni numeriche
- 5 Applicazione del modello di Kuramoto



Al limite per il numero di oscillatori  $N \rightarrow \infty$  introduciamo il concetto di densità numerica di oscillatori:

$$\rho(\theta + 2\pi, \omega, t) = \rho(\theta, \omega, t)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \rho(\theta, \omega, t) d\theta = 1$$

In modo che valga l'equazione di continuità:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial(\rho v)}{\partial \theta}$$



I risultati di Kuramoto individuano due gruppi di oscillatori al variare della costante di accoppiamento  $K$  e del parametro d'ordine  $r$ :

- oscillatori phase-locked in grado di sincronizzarsi per  $|\omega_i| \leq Kr$
- oscillatori che non arriveranno mai a sincronizzarsi con il primo gruppo quando  $|\omega_i| > Kr$

Cercando soluzioni stazionarie si ricava la relazione di autoconsistenza per il parametro d'ordine

$$r = Kr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(\theta) g(Kr \sin(\theta)) d\theta$$

Oltre a  $r = 0$  si trova un limite inferiore per la costante di accoppiamento superato il quale la popolazione inizia a sincronizzarsi.



Considerando il numero minimo di oscillatori sincronizzati quindi  $r \rightarrow 0^+$  approssimo la relazione di autoconsistenza per  $r$

$$1 = K_c \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(\theta) g(0) d\theta \implies 1 = g(0) K_c \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(\theta) d\theta \implies \\ \implies 1 = g(0) K_c \frac{\pi}{2},$$

da cui

$$K_c = \frac{2}{\pi g(0)}$$

Sostituendo  $g(0)$  nell'equazione di autoconsistenza, sviluppando in serie di Taylor la distribuzione  $g(Kr \sin \theta)$  intorno a  $r = 0$  e trascurando i termini di terzo ordine rispetto a  $r$   $\mathcal{O}(r^3)$  ricavo

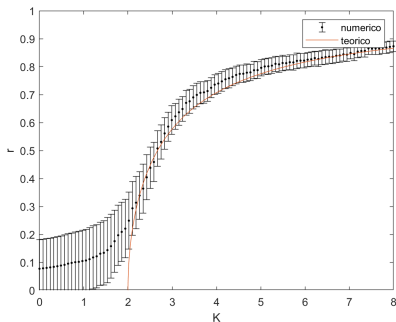
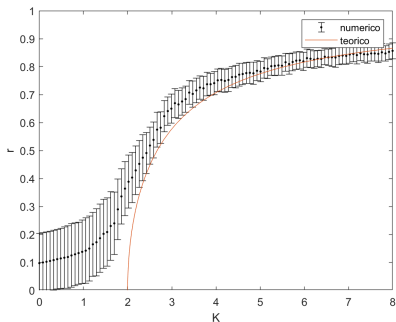
$$r \approx \sqrt{\frac{4(K - K_c)}{\pi K K_c^3 [-g''(0)]}}$$



- 1 Condizioni per la sincronizzazione
- 2 Descrizione di Kuramoto
- 3 Limite continuo
- 4 Simulazioni numeriche
- 5 Applicazione del modello di Kuramoto

# Distribuzione Lorentziana ed $N$ grande

Parametro d'ordine in funzione della costante di accoppiamento

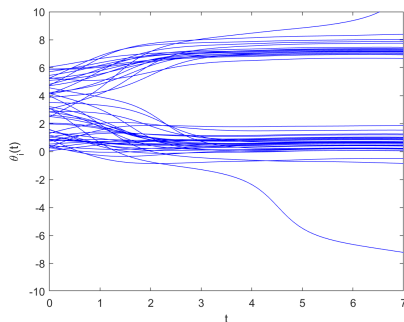
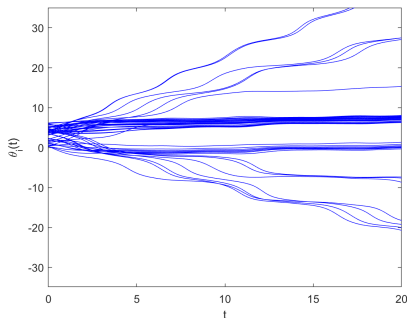


# Evoluzione temporale della fase media e del parametro d'ordine

Scegliendo una costante di accoppiamento maggiore di quella critica si osserva

# Fasi in funzione del tempo

Aumentando il numero degli oscillatori  $N = 50$  si trova

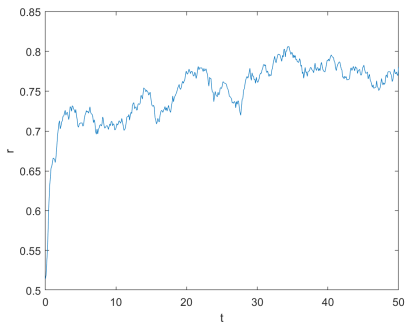
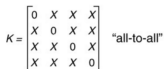
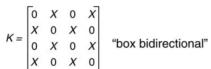
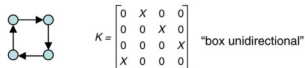
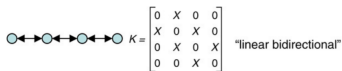




- 1 Condizioni per la sincronizzazione
- 2 Descrizione di Kuramoto
- 3 Limite continuo
- 4 Simulazioni numeriche
- 5 Applicazione del modello di Kuramoto**

# Sincronizzazione dei neuroni nel cervello

Attenzioniamo i possibili collegamenti ad esempio tra quattro neuroni e simuliamo l'evoluzione del parametro d'ordine nel tempo



- Balanov, Alexander et al. *Synchronization From Simple to Complex*. Springer Series in Synergetics. Springer, 2009. ISBN: 978-3-540-72127-7.
- D.Cumin e C.P.Unsworth. «Generalising the Kuramoto model for the study of neuronal synchronisation in the brain». In: *American Journal of Physics* (2006). DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physd.2006.12.004>.
- Fontoura Costa, Luciano da. «What is a Complex Network?» In: (2018). DOI: 10.13140/RG.2.2.10450.04804/1.
- J.M.González-Miranda. *Synchronization and Control of Chaos, an introduction for Scientists and Engineers*. Imperial College Press, 2004. ISBN: 1-86094-488-4.
- Luçon, Eric. *Oscillateurs couplés, désordre et synchronisation. Probabilités*. 2012. URL: <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00709998/document>.

- P.S.Landa. *Nonlinear Oscillations and Waves in Dynamical Systems*. Springer, 1996. ISBN: N 978-90-481-4670-3.
- Peskin, C.S. *Mathematical Aspects of Heart Physiology*. 1973. URL: <https://www.math.nyu.edu/faculty/peskin/heartnotes/index.html>.
- S.H.Strogatz. «From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in population of coupled oscillators». In: *Physics D: Nonlinear Phenomena* 143 (2000). DOI: [https://doi.org/10.1016/S0167-2789\(00\)00094-4](https://doi.org/10.1016/S0167-2789(00)00094-4).
- S.Strogatz. «Nonlinear Dynamics and Chaos». In: *Advanced book program Perseus books Reading* (1994). DOI: <https://doi.org/10.1063/1.4823332>.
- .«Synch». In: *Penguin Books* (2003). DOI: <https://doi.org/10.1063/1.1784276>.

Strogatz, S. H. e I. Stewart. *Coupled oscillators and biological synchronization*. 1993. URL: <http://www.uvm.edu/pdodds/files/papers/others/1993/strogatz1993a.pdf>.