



UNIVERSITÀ
degli STUDI
di CATANIA

Dipartimento
di Fisica
e Astronomia
"Ettore Majorana"



CORSO DI LAUREA IN FISICA

SAMUELE LIPANI

SINCRONIZZAZIONE E MODELLO DI KURAMOTO

ELABORATO FINALE

RELATORE:
PROF. G. PICCITTO

ANNO ACCADEMICO 2019/2020

*A mio padre
uomo di cuore e di scienza*

Sommario

La presente tesi considera il fenomeno della sincronizzazione analizzandone le caratteristiche fisiche tramite i modelli matematici sviluppati nel corso del tempo.

Dopo aver introdotto il significato di sincronizzazione e le proprietà di un sistema fisico siffatto si prendono in esame il modello di Peskin e Winfree. Essi precedono cronologicamente e concettualmente il modello di Kuramoto.

Per la sua semplicità ed efficacia verrà studiato il prodotto delle teorie dello stesso Kuramoto implementando i risultati ottenuti con delle simulazioni numeriche in MATLAB[®].

Il lavoro si conclude mostrando un'interessante applicazione del modello di Kuramoto: la sincronizzazione dei neuroni nel cervello sotto determinate condizioni di connessione reciproca. Da quest'applicazione è ricavata un'ulteriore simulazione numerica atta a verificare quanto previsto dal modello.

Indice

1	Cosa si intende con sincronizzazione?	7
1.1	Cenni storici	7
1.2	Condizioni necessarie per la sincronizzazione	7
1.3	Sistemi autosostenuti	8
1.4	Oscillazioni autosostenute e attrattori	10
1.5	Fase delle oscillazioni e sua dinamica	10
2	Le origini del modello di Kuramoto	11
2.1	Il modello di Peskin	11
2.2	Il modello di Winfree	13
3	Il modello di Kuramoto	14
3.1	Il parametro d'ordine	15
3.2	Limite continuo	18
3.3	L'analisi di Kuramoto	19
4	Simulazioni numeriche	23
5	Problemi del modello	26
6	Applicazioni del modello	27
6.1	Sincronizzazione dei neuroni nel cervello	27
6.2	Grafi di accoppiamento	28
6.3	Come cambia il parametro d'ordine	29
7	Codici MATLAB	30
	Riferimenti bibliografici	34

1 Cosa si intende con sincronizzazione?

In un contesto classico, sincronizzazione significa adattamento del ritmo di oscillatori periodici (autosostenuti) per mezzo della loro debole interazione; questa regolazione può essere descritta in termini di fase (locking) e frequenza (entrainment). I fenomeni di sincronizzazione in grandi insiemi di sistemi accoppiati spesso si manifestano come regimi collettivi coerenti attraverso transizioni di fase di non equilibrio. Prima di enucleare la definizione di sincronizzazione ripercorriamo la storia della scoperta del fenomeno.

1.1 Cenni storici

Colui che per primo scoprì il fenomeno della sincronizzazione fu Huygens; in S.Strogatz 2003 leggiamo parte di una lettera che Huygens scrisse al padre in cui illustra questo evento:

"Vale la pena notare che quando abbiamo sospeso due orologi costruiti in modo da avere due ganci inseriti nella stessa trave di legno, i movimenti di ciascun pendolo in oscillazioni opposte erano così concordi che non si sono mai allontanati l'uno dall'altro e il suono di ciascuno è stato sempre ascoltato contemporaneamente l'uno rispetto all'altro. Inoltre, se questo accordo è stato disturbato da qualche interferenza, si è ristabilito in breve tempo. Per molto tempo sono rimasto sbalordito da questo risultato inaspettato, ma dopo un attento esame ho finalmente scoperto che la causa di ciò è dovuta al movimento della trave anche se questo è appena percettibile. "

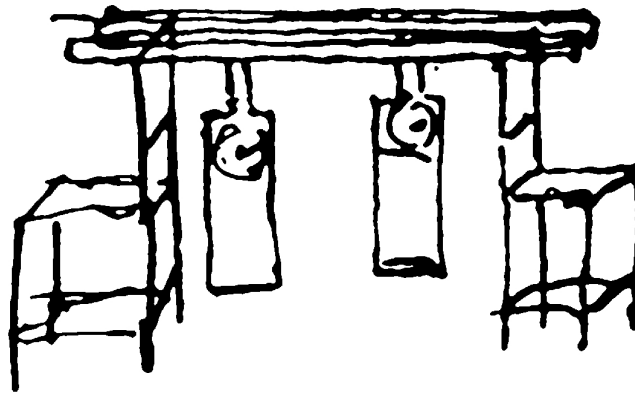


Figura 1: S.Strogatz 2003, un disegno originale di Huygens che illustra i suoi esperimenti con gli orologi a pendolo

I due orologi pertanto interagiscono tra loro e dopo un certo tempo raggiungono la stessa frequenza di oscillazione. In cosa differisce questo fenomeno da quello della risonanza?

1.2 Condizioni necessarie per la sincronizzazione

La prima condizione necessaria per osservare sincronizzazione è individuare la famiglia di oscillatori che siano in grado di manifestare il fenomeno. Un oscillatore siffatto deve soddisfare i seguenti requisiti:

- non è smorzato, cioè, il suo moto periodico non si arresta nel corso del tempo;
- oscilla in maniera "autosostenuta" cioè non ha bisogno di un contributo esterno per mantenere l'oscillazione;
- la forma, l'ampiezza e la scala temporale di queste oscillazioni sono imposte dal sistema stesso e non possono essere variate cambiando le condizioni iniziali o tramite forze impulsive esterne.

1.3 Sistemi autosostenuti

Attenzioniamo la proprietà di un oscillatore di essere "self-sustained". Affinchè si possa parlare di sistemi autosostenuti è necessario che essi siano non lineari, che vi sia dissipazione e una fonte di energia che compensi lo smorzamento. Per comprendere meglio quale sia il gioco tra potenza dissipata e fornita analizziamo i seguenti casi.

Supponiamo che il sistema sia in quiete, l'ampiezza A delle oscillazioni è zero. In questo stato esso non spende potenza, e non ha bisogno di una potenza esterna che compensi quella dissipata. Pertanto la potenza S fornita dalla sorgente per unità di tempo dovrebbe essere zero. Si dice che il sistema è in equilibrio.

Consideriamo adesso delle condizioni iniziali tali che l'ampiezza delle oscillazioni sia finita $A > 0$. Dunque il sistema così descritto non è all'equilibrio e deve prendere una certa potenza dall'esterno per continuare ad oscillare ed eventualmente raggiungere uno stato stazionario. Con stato stazionario intendiamo il punto in cui le curve di potenza dissipata e fornita si intersecano (punto fisso). Scegliamo di esprimere le potenze O come funzioni di A^2 piuttosto che di A .

Consideriamo il caso specifico di $O = kA^2$. La potenza S fornita al sistema può essere una funzione lineare o non di A^2 . Al fine di mantenere le oscillazioni con una certa ampiezza A_0 , la potenza provvista dall'esterno S deve compensare quella dissipata O .

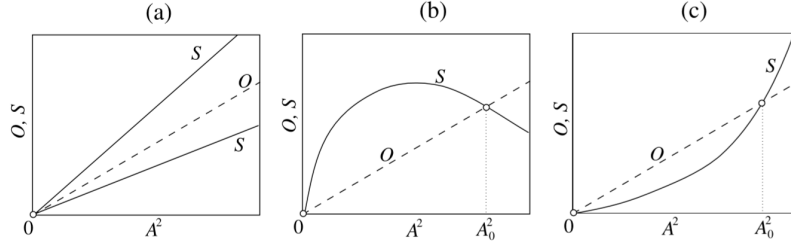


Figura 2: Balanov et al. 2009. Sono rappresentate la potenza fornita e spesa come funzione del quadrato dell'ampiezza delle oscillazioni A^2 . *Linea tratteggiata*: potenza O spesa nelle oscillazioni; *linea intera*: potenza S fornita al sistema. Si utilizza l'approssimazione di $O = kA^2$.

a S è una funzione lineare di A^2 , non si possono osservare oscillazioni non smorzate/forzate;

b S è una funzione non lineare in A^2 e le oscillazioni con A_0 sono stabili poiché la concavità della curva S è verso il basso S ;

c S è una funzione non lineare in A^2 e le oscillazioni con A_0 sono instabili poiché la concavità di S è verso l'alto

Se S è una funzione lineare come si osserva in (a), allora S ed O si intersecano soltanto nell'origine quindi significa che non sono previste oscillazioni. Se la potenza S supera O allora ogni "periodo" l'ampiezza continua a crescere e non si raggiunge un punto fisso di equilibrio. Se S è minore di O il sistema è smorzato fino ad arrestarsi.

Se S è una funzione non lineare, come invece si vede in (b), allora si osservano due intersezioni delle quali ci interessa quella in A_0^2 . Quando l'ampiezza delle oscillazioni raggiunge il punto fisso allora per $A > A_0$ la potenza fornita è minore di quella dissipata quindi autonomamente A diminuisce tornando in A_0 . Quando invece $A < A_0$ allora $S > O$ quindi l'ampiezza ricresce arrivando nuovamente in A_0 .

Questo significa che un apparato come quello nella figura (b) prevede oscillazioni autosostenute. Naturalmente questa descrizione esclude i casi, più generali, in cui sia le ampiezze che la potenza O dissipata varino in maniera non lineare. Le condizioni finora discusse prevedono che un oscillatore autosostenuto sia autonomo nel senso che la potenza disponibile dalla sorgente debba essere costante e non dipendere esplicitamente dal tempo. Questa definizione è stata rivista da Landa in P.S.Landa 1996. Eliminando la parola "autonomo" ha così permesso alla fonte di energia di variare nel tempo. Questa aggiunta fatta da sola includerebbe immediatamente quelle oscillazioni che esistono solo perché provocate da una forzatura esterna periodica, cioè oscillazioni forzate che non sono autosostenute. Tuttavia, le oscillazioni forzate avrebbero scale temporali uguali o simili alla forzatura stessa. Quindi, per escludere oscillazioni forzate, Landa aggiunge un ulteriore requisito: "l'indipendenza totale o parziale dello spettro di frequenza delle oscillazioni dallo spettro della sorgente di energia (potenza)". Ciò significa che almeno una parte dello spettro in frequenza delle oscillazioni non deriva dalla trasformazione dello spettro della sorgente di potenza, cioè i contributi delle frequenze non sono armoniche o subarmoniche di quelle dello spettro della sorgente. Almeno una parte dello spettro delle oscillazioni deve

essere definita dalle proprietà intrinseche del sistema stesso. Questa nuova condizione ha una conseguenza importante: permette di inserire nella famiglia degli oscillatori autosostenuti quelli le cui oscillazioni sono indotte semplicemente da perturbazioni casuali.

1.4 Oscillazioni autosostenute e attrattori

Una caratteristica distintiva dei sistemi auto-oscillanti è la loro capacità di auto-organizzarsi. quando avviamo un processo in un tale sistema, ad esempio accendendolo, le condizioni iniziali possono essere scelte casualmente in un'ampia range. In generale, il decorso temporale di un processo così avviato può dipendere dalle circostanze iniziali in modo abbastanza sostanziale. Tuttavia, un auto-oscillatore si dice è "robusto", nel senso che non si fa influenzare dalle diverse condizioni iniziali che possiamo imporre. In termini matematici, tali regimi sono caratterizzati dagli attrattori nello spazio delle fasi. Un attrattore in questo caso consiste in una curva nello spazio delle fasi verso la quale il sistema evolve naturalmente dopo un certo transitorio. Nonostante i tentativi esterni di perturbare tale traiettoria un oscillatore autosostenuto, si dice, è "robusto" ovvero tende a tornare sull'attrattore.

1.5 Fase delle oscillazioni e sua dinamica

Le proprietà di sincronizzazione degli oscillatori periodici autosostenuti si basano sull'esistenza di una variabile speciale, fase ϕ . Matematicamente, le oscillazioni autosostenute corrispondono a un ciclo limite ¹ stabile nello spazio degli stati di un sistema dinamico autonomo. La fase ϕ può essere introdotta come variabile che parametrizza il moto lungo questo ciclo. Si può sempre scegliere la fase in modo che cresca uniformemente nel tempo

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_0$$

dove ω_0 è la frequenza naturale delle oscillazioni. La fase è neutra stabile: le sue perturbazioni non crescono né decadono, ciò corrisponde all'invarianza delle soluzioni dei sistemi dinamici autonomi rispetto alle traslazioni temporali. Contrariamente a ciò, l'ampiezza delle oscillazioni ha un valore definito stabile (per sistemi descrivibili in termini di energia, questo valore è determinato dall'equilibrio tra afflusso di energia e dissipazione come abbiamo detto nei paragrafi precedenti). A causa della stabilità neutra della fase, già una piccola perturbazione (ad esempio una forzatura periodica esterna o accoppiamento ad un altro sistema) può causare grandi deviazioni della fase, contrariamente all'ampiezza, che è solo leggermente perturbata a causa della stabilità del ciclo limite. Quindi, con una forzatura relativamente piccola si può regolare la fase e la frequenza delle oscillazioni senza influenzare l'ampiezza, questa regolazione è l'essenza del fenomeno di sincronizzazione.

¹Oscillatori a ciclo limite è un termine utilizzato spesso in dinamica non lineare. Da S.Strogatz 1994 un ciclo limite altro non è che una traiettoria nello spazio delle fasi isolata poiché al limite per $t \rightarrow \infty$ tutte le altre tendono a questa come per una situazione di equilibrio

2 Le origini del modello di Kuramoto

Consideriamo un sistema nel quale N oscillatori sono accoppiati tra loro. Ogni elemento interagisce con gli altri $N - 1$ in modo non lineare. La descrizione matematica del sistema varia in base a diversi fattori: il numero di oscillatori, che sono indistinguibili, la distribuzione delle loro frequenze e fasi, l'intensità e il tipo di interazione se globale o locale. Le equazioni che generalmente si ottengono sono un set di ODE nelle quali l'accoppiamento è non lineare. Le applicazioni di un sistema così costruito sono innumerevoli, si possono pensare come oscillatori autosostenuti ad esempio:

- il miocardio, muscolo cardiaco, che comunicando con il resto dell'organismo aumenta o diminuisce il battito del cuore. In questo caso sono le cellule muscolari che arrivano ad oscillare con la stessa frequenza;
- Le onde alpha del cervello e gli impulsi elettrici che provengono dalla comunicazione reciproca dei neuroni;
- fenomeni biologici che descrivono l'evolversi naturale di una specie o di sue determinate abitudini come ad esempio l'accendersi e spegnersi di lucciole in modo sincrono.

Un modello semplice ma molto utilizzato per effettuare simulazioni numeriche è il modello di Kuramoto. Egli prende spunto da altri due modelli che è necessario citare, quello di Peskin e quello di Winfree, apportando alcune modifiche e limandone le imperfezioni intrinseche nell'impalcatura logico-matematica.

2.1 Il modello di Peskin

In Peskin 1973 si considera un modello matematico che possa descrivere il funzionamento del cuore umano. Il battito cardiaco è interpretato come un fenomeno di sincronizzazione tra un numero molto elevato di oscillatori, in questo caso sono le cellule del nodo senoatriale che si contraggono ad una certa frequenza. Ognuna delle cellule è schematizzata come un circuito RC collegato in parallelo agli altri. Resistenza e capacità dipendono dalle caratteristiche intrinseche di ogni cellula. Supponiamo che i "circuiti" siano sottoposti ad una corrente costante. I condensatori si caricano, aumenta la differenza di potenziale ai loro capi. Al raggiungimento di una $d.d.p.$ di soglia i circuiti si aprono e i condensatori diventano i generatori per i circuiti. Diminuisce così la $d.d.p.$ agli estremi dei condensatori. Quello che intuì Peskin riguarda la tipologia dell'interazione delle cellule del muscolo cardiaco.

Per giustificare come tali cellule arrivassero a battere all'unisono si pensava che tra di loro ce ne fosse una con una frequenza maggiore. In tal senso ad un certo istante di tempo tutte le cellule sono influenzate da quella con frequenza maggiore imitandone così l'oscillazione. In questa idea è insita un tipo di interazione globale in quanto una sola cellula sarebbe in grado di influenzare tutte le altre. Questa supposizione si rivela falsa poiché così facendo:

- un danno ad una sola cellula porterebbe un'alterazione al funzionamento regolare del cuore;

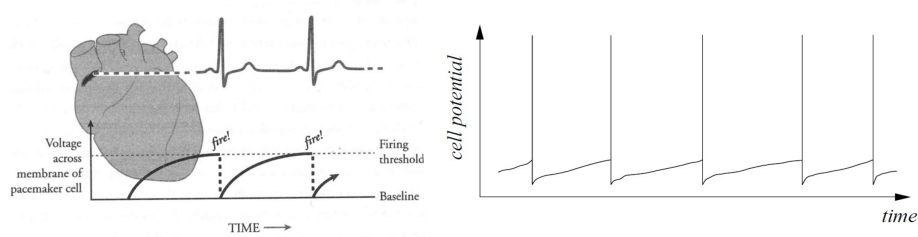
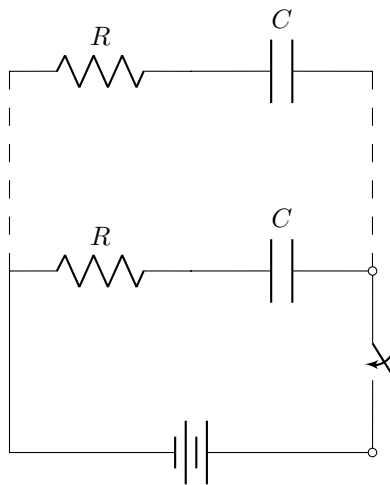


Figura 3: Peskin pensa a dei pacemaker, si osserva la differenza di potenziale ai capi di ognuno al variare del tempo. Raggiunta la *d.d.p.* di soglia uno diventa il generatore e diminuisce la sua *d.d.p.*. Gli altri invece subiscono un surplus di *d.d.p.* dovuta al generatore da cui l'accoppiamento.

- si crede in questo modo di riuscire ad identificare una cellula rispetto ad un'altra quando in realtà sono praticamente indistinguibili visto il loro numero.

Una giustificazione più plausibile si trova pensando che la sincronizzazione delle cellule derivi da un loro debole accoppiamento. La frequenza che raggiungono comunemente non è quella di una sola cellula ma dipende dalla loro mutua interazione.



Il modello dei circuiti sembra essere esattamente coerente con quanto detto sopra poiché appena si raggiunge una certa *d.d.p.* di soglia si azzerà quella ai capi di un circuito mentre aumenta con discontinuità di una quantità uguale per tutti quella degli altri oscillatori.

Quando le cellule si scaricano tutte allo stesso tempo allora avviene un battito. Il periodo caratteristico degli oscillatori è il tempo di carica dei condensatori e l'accoppiamento è globale in quanto l'azione di una cellula determina un effetto in tutte le altre. Quando uno degli oscillatori aumenta la propria *d.d.p.* in modo discontinuo a causa della scarica di un altro raggiunta la soglia esso provoca

effetti diversi a causa dello stato di carica delle cellule: se queste sono abbastanza cariche allora l'aumento di potenziale determina il raggiungimento/superamento della soglia. Questo significa che tali oscillatori entreranno in sincrono con il primo che si è scaricato poiché appariranno caricarsi e scaricarsi, da questo momento in poi, con la stessa fase e periodo. Al contrario può capitare che l'aumento di potenziale generi una variazione nella fase del processo di carica senza causare il raggiungimento della soglia. E' necessario perciò un altro intervallo di tempo affinché tali oscillatori possano arrivare alla soglia e sincronizzarsi in questo modo con il resto. I processi di ogni oscillatore hanno un effetto sincronizzante o desincronizzante su tutti gli altri.

Un risultato molto importante di questo studio riguarda la scoperta di un valore critico di potenziale per l'oscillatore che riceve la perturbazione dalla scarica del primo. Quando il potenziale del secondo oscillatore è minore del valore critico esso decresce e non riesce a sincronizzarsi con il primo, al contrario se $V_2 > V_c$ esso cresce fino alla soglia diventando coerente con il primo.

2.2 Il modello di Winfree

L'approccio utilizzato da Winfree rispetto a quello di Peskin presenta delle differenze, alcune delle quali peculiari verranno sfruttate da Kuramoto per il suo modello. Egli ha formulato il problema in termini di un'enorme popolazione di oscillatori a ciclo limite interagenti. Winfree riconobbe intuitivamente che si sarebbero verificate delle semplificazioni se l'accoppiamento fosse stato debole e gli oscillatori quasi identici. Distinguiamo due scale temporali: quando è breve, gli oscillatori tendono ai loro cicli limite, e quindi possono essere caratterizzati esclusivamente dalle loro fasi; su una lunga scala temporale, queste fasi si evolvono a causa dell'interazione di accoppiamento debole e leggere differenze di frequenza tra gli oscillatori. In un'ulteriore semplificazione, Winfree suppone che ciascun oscillatore fosse accoppiato ad una frequenza media generata da tutta la popolazione, analogo a un'approssimazione di campo medio in fisica. Il suo modello è il seguente:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \left(\sum_{j=1}^N X(\theta_j) \right) Z(\theta_i), \quad i = 1, \dots, N \quad (2.1)$$

Dove θ_i denota la fase dell'oscillatore i e ω_i la corrispondente frequenza. Ogni oscillatore j esercita un'influenza $X(\theta_j)$ dipendente dalla fase su tutti gli altri; la conseguente risposta degli oscillatori dipende anch'essa da ciascuna fase θ_i , attraverso la cosiddetta funzione di sensibilità $Z(\theta_i)$. Usando simulazioni numeriche e approssimazioni analitiche, Winfree ha scoperto che tali popolazioni di oscillatori potevano esibire l'analogo temporale di una transizione di fase.

Una soluzione banale si osserva quando le funzioni $X(\theta_i)$ e $Z(\theta_i)$ sono uguali a zero. In questo caso gli N oscillatori sono tra loro indipendenti e si dicono incoerenti poiché si evolvono come se gli altri non esistessero in quanto non subiscono nessuna influenza.

Quando lo scarto quadratico medio nella distribuzione delle frequenze naturali è grande rispetto alle differenze di fase, il sistema si comporta in modo incoerente, con ciascun oscillatore che evolve con la sua frequenza naturale. Man mano che la distribuzione si fa più piccata, l'incoerenza persiste fino al superamento di una

certa soglia, quindi un piccolo gruppo di oscillatori raggiunge improvvisamente uno stato di sincronia.

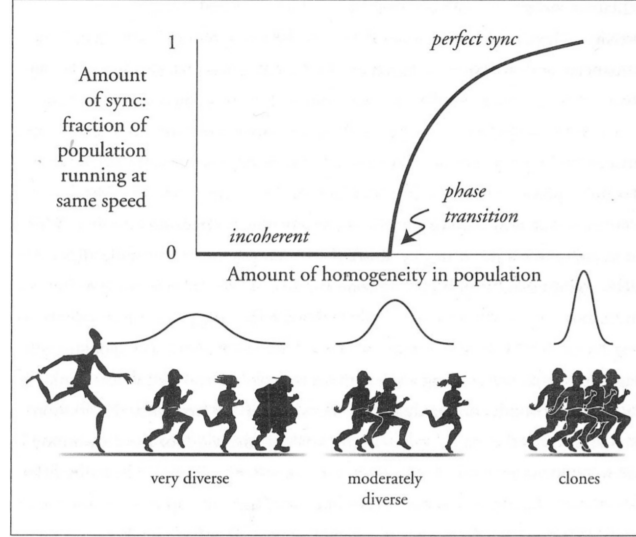


Figura 4: In **sync** Strogatz mette in luce il fatto che soltanto quando si raggiunge una determinata soglia allora gli oscillatori iniziano a sincronizzarsi

3 Il modello di Kuramoto

Consideriamo una popolazione di N oscillatori rappresentati da punti su una circonferenza di raggio unitario $\mathbb{S} := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Senza nessuna interazione gli oscillatori ruotano sulla circonferenza indipendentemente l'uno dall'altro con le frequenze naturali:

$$\dot{\theta}(t)_i = \omega_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.1)$$

Le frequenze ω_i sono distribuite secondo una funzione di densità di probabilità $\omega \rightarrow g(\omega)$.

Kuramoto sfruttò l'intuizione di Winfree a proposito dell'interazione di un oscillatore con una fase media di tutti gli altri, una sorta di approssimazione di "campo medio".

Egli pertanto propose questo tipo di relazione con un'interazione sinusoidale funzione della differenza di fase a coppie degli oscillatori:

$$\dot{\theta}(t)_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j(t) - \theta_i(t)), \quad i = 1, \dots, N \quad (3.2)$$

Dove $K \geq 0$ è la costante di accoppiamento e il fattore $1/N$ sarà chiaro quando passeremo al limite continuo per $N \rightarrow \infty$.

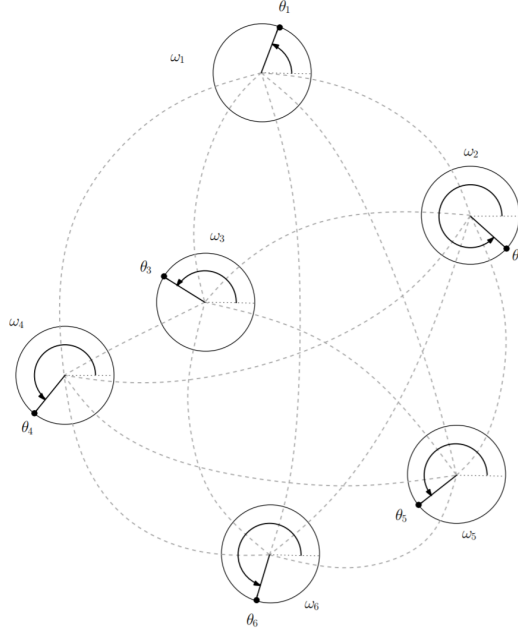


Figura 5: Accoppiamento delle fasi per $N = 6$ oscillatori tratta da Luçon 2012

Lo scopo della funzione $\frac{K}{N} \sin(\Delta\theta_i, j)$, fissando per ognuna delle equazioni differenziali la fase i -esima, è quella di ottenere una somma su ciascuno degli accoppiamenti tramite le differenze di fase mediando infine sul numero di oscillatori. Così facendo l'interazione corrisponde ad una perturbazione periodica dipendente dal tempo dovuta alle reciproche differenze di fase dell'elemento i -esimo rispetto a tutti i restanti. Senza perdita di generalità possiamo, anche se ancora non siamo passati al limite del continuo, calcolare il valor medio delle frequenze naturali degli oscillatori. In un sistema di riferimento in quiete rispetto alla rotazione sulla circonferenza unitaria tale valore sarà diverso da zero, tuttavia scegliamo un sistema di riferimento co-rotante tale che:

$$\Omega := \int_{-\infty}^{+\infty} \omega g(\omega) d\omega = 0 \quad (3.3)$$

Tale scelta corrisponde a ridefinire $\theta_i(t) \rightarrow \theta_i(t) + \Omega t$. Questo cambio di variabili lascia invariata l'equazione (3.2) con frequenze naturali traslate del fattore Ω . Siamo cioè nel sistema che ruota con frequenza Ω . La densità di probabilità delle frequenze rimane unimodale ma strettamente crescente nell'intervallo $]-\infty, 0]$ e strettamente decrescente in $[0, +\infty[$ spostando perciò il valor medio nell'origine del nostro sistema di riferimento.

3.1 Il parametro d'ordine

Introduciamo per comprendere meglio il carattere globale dell'interazione tra gli oscillatori un parametro d'ordine complesso:

$$re^{i\psi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j} \quad (3.4)$$

Tale numero complesso è caratterizzato da un modulo e da una fase, vediamo il significato fisico.

Il parametro d'ordine descrive il moto collettivo della popolazione. Dalla relazione (3.4) $r(t)$, con $0 \leq r(t) \leq 1$, misura la coerenza di fase degli oscillatori e $\psi(t)$ restituisce per l'appunto una fase media di tutto il sistema. In **sync** Strogatz mostra con un esempio intuitivo il significato del parametro d'ordine e della fase ad esso associata:

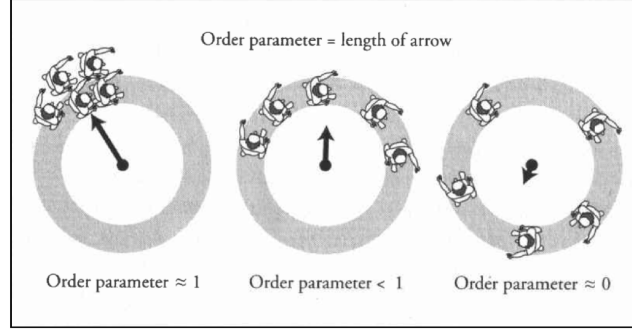


Figura 6: Corridori su una circonferenza

Nella figura 6 gli oscillatori sono simulati da dei corridori che si muovono in un percorso circolare.

- Nel primo caso si osservano dei corridori molto vicini tra loro, possiamo pensare che muovendosi uno accanto all'altro riescano a comunicare, così facendo mantengono grazie alla loro interazione la stessa velocità rimanendo in gruppo;
- Nel secondo caso invece si nota un gruppo principale caratterizzato da una frequenza naturale e altri corridori che invece si distanziano dai primi trovandosi alle code della loro distribuzione. Gli ultimi non potranno comunicare ottimamente con i primi del gruppo pertanto si muoveranno con una frequenza leggermente diversa rispetto al resto;
- L'ultimo caso invece mostra perfettamente la situazione di oscillatori tra loro incoerenti, ognuno è indipendente dall'altro perché si trovano sparsi sulla circonferenza che percorrono. Non comunicano dunque non interagiscono e mantengono la loro frequenza di partenza restando disaccoppiati.

Naturalmente questo pittoresco esempio non ha lo scopo di spiegare la natura dell'interazione ma il suo funzionamento al variare delle differenze di fase reciproche degli oscillatori. Il parametro d'ordine è maggiore quando gli oscillatori procedono in un gruppo compatto. Riscriviamo la (3.2) in un modo più conveniente facendo emergere il significato fisico del parametro d'ordine; moltiplichiamo ambo i membri della (3.4) per $e^{-i\theta_i}$ ($i = 1, \dots, N$):

$$r e^{i(\psi - \theta_i)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i(\theta_j - \theta_i)}, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.5)$$

Prendendo la parte immaginaria della (3.5) otteniamo:

$$r \sin(\psi - \theta_i) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N \quad (3.6)$$

Che sostituita nella (3.2):

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + Kr \sin(\psi - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N \quad (3.7)$$

La relazione appena trovata mostra esplicitamente la natura del campo medio del modello. In effetti, abbiamo scoperto che gli oscillatori sono accoppiati semplicemente tramite il parametro d'ordine. Il termine di interazione in (3.7) tende a trascinare le fasi θ_i verso la fase media ψ con una forza proporzionale alla coerenza di fase r . È questa proporzionalità che spiega il meccanismo alla base della sincronizzazione spontanea nel modello. Vale a dire, supponiamo che gli oscillatori diventino più coerenti, determinando un aumento di r . Ovviamente, questo porta ad un aumento della forza di accoppiamento Kr , che a sua volta tende a rendere la popolazione ancora più coerente. Vediamo adesso nello specifico come questo processo di sincronizzazione è rivelato tramite la coerenza r .

Per fare ciò utilizziamo le ipotesi di Kuramoto, ovvero, supponiamo che la distribuzione delle frequenze ω_i che compaiono nella (3.2) sia unimodale (cioè con un valore particolarmente piccato ad esempio nell'origine) e simmetrica rispetto alla frequenza nulla. Come già accennato, dunque, la distribuzione g sarà strettamente crescente nell'intervallo $]-\infty, 0]$ e strettamente decrescente in $[0, +\infty[$. In questo caso, abbiamo effettuato delle simulazioni numeriche per risolvere il sistema (3.2); esse mostrano che $r(t)$ ha un'evoluzione tipica, esemplificata dagli andamenti nella Figura 7.

Per K inferiore a un certo valore critico K_c , gli oscillatori non sembrano percepire le interazioni reciproche e ruotano semplicemente intorno alla circonferenza unitaria vicino alle loro frequenze naturali. Per ciascuna distribuzione iniziale delle fasi, quindi, gli oscillatori si dispongono uniformemente sulla curva con conseguente riduzione di $r(t)$ a zero. D'altra parte, per K maggiore di K_c gli oscillatori vengono divisi in due gruppi. Quelli con frequenze naturali sufficientemente lontane dal centro di g ruotano ancora vicino alle proprie frequenze, ma quelli vicini al centro si bloccano e ruotano insieme alla fase media $\psi(t)$ alla frequenza media Ω (che è zero nel riferimento co-rotante). Di conseguenza, $r(t)$ si assesta su un valore maggiore di zero, essendo indipendente dalla distribuzione iniziale delle fasi. Questo valore diventa maggiore all'aumentare di K e tende a uno quando $K \rightarrow +\infty$. Le fluttuazioni di $r(t)$ sia nello stato incoerente che in quello parzialmente sincronizzato sembrano variare come $N^{-1/2}$; abbiamo confrontato qualitativamente, infatti, quanto ricavato dalle simulazioni numeriche con i grafici osservati in S.H.Strogatz 2000

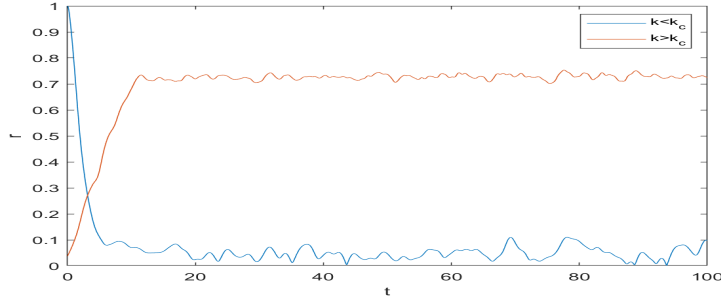


Figura 7: Evoluzione tipica di $r(t)$ per il modello (3.2) con $K < K_c$ e $K > K_c$. Questi risultati della simulazione sono ottenuti con $N = 1000$ oscillatori e g che è la densità di probabilità gaussiana standard (quindi in questo caso $K_c \approx 1,6$ secondo la (3.22)), dove il diagramma blu e arancione corrispondono rispettivamente a $K = 1$ e $K = 2$. Nel caso $K < K_c$ ho imposto come condizioni iniziali per le fasi degli oscillatori $\theta_i(0) = 0$. In tal senso risulta più chiaro come, non essendo stato raggiunto il valore dell'accoppiamento critico, al variare del tempo il parametro d'ordine decresca dal valore massimo (poiché gli oscillatori partono dallo stesso punto e dunque hanno la stessa fase iniziale) fino al minimo tramite fluttuazioni.

3.2 Limite continuo

Nel caso limite di infiniti oscillatori conviene formulare la teoria in termini di densità numerica di oscillatori sulla circonferenza. Per questo motivo definiamo la quantità $\rho(\theta, \omega, t)d\theta$ la frazione di oscillatori con frequenza naturale ω e fasi comprese in $[\theta, \theta + d\theta]$ al tempo t . Pertanto per ciascuna frequenza e istante di tempo t , definiamo una condizione periodica per la funzione densità $\rho(\theta, \omega, t)$.

$$\rho(\theta + 2\pi, \omega, t) = \rho(\theta, \omega, t)$$

e la normalizzazione

$$\int_{-\pi}^{\pi} \rho(\theta, \omega, t) d\theta = 1$$

Ci aspettiamo che nel tempo gli oscillatori coprano completamente (al limite per $N \rightarrow \infty$) le frequenze determinate dalla distribuzione $g(\omega)$ (nella realtà è certamente al contrario ovvero è la distribuzione che a posteriori come un istogramma descrive il numero di oscillatori in un certo bin di frequenze).

Introduciamo per tale motivo un'equazione di continuità. In questo caso la densità è funzione della fase pertanto la divergenza altro non è che una derivata parziale rispetto a θ .

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho v)}{\partial \theta} \quad (3.8)$$

L'aumento della densità su una certa regione della circonferenza implica un flusso di oscillatori verso un'altra zona (possiamo vederlo in modo più concreto integrando sul cerchio delimitato dalla curva entrambi i membri e applicando il teorema della divergenza a destra trovando il flusso unidimensionale della densità attraverso l'elemento di circonferenza sotteso da $d\theta$). L'equazione (3.8) rappresenta dunque la conservazione del numero di oscillatori con una certa fase

e frequenza sulla circonferenza unitaria.

Qui $v(\theta, \omega, t)$ rappresenta la velocità angolare di un oscillatore con fase θ e frequenza ω :

$$v(\theta, \omega, t) = \omega + Kr(t) \sin(\psi(t) - \theta)$$

Il parametro d'ordine quindi si potrà riscrivere dalla (3.4):

$$r(t)e^{i\psi(t)} = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\theta} \rho(\theta, \omega, t) g(\omega) d\omega d\theta \quad (3.9)$$

Attenzione che sebbene l'apparato matematico, costruito fin qui passando al continuo, sia sostenuto dall'intuizione fisica non abbiamo tuttavia dimostrato che tale limite sia giustificato analiticamente in qualche modo. Ovvero non sappiamo se la funzione distribuzione di probabilità converga all'infinito e ancora oggi in letteratura si dibatte su tale possibilità. Senza alcuna simulazione numerica Kuramoto provò a trarre qualche conclusione di carattere generale dal set di equazioni differenziali e dal limite continuo del suo modello. Quello che poté fare riguarda le soluzioni stazionarie che ricalcano un'importante ruolo perché ammettono un'evoluzione temporale precisa al variare della coerenza della popolazione (quindi della costante di accoppiamento K e del parametro d'ordine di conseguenza). La prima soluzione stazionaria a cui pensiamo è quella costante quando

$$\rho(\theta, \omega) = \frac{1}{2\pi}, \quad r = 0,$$

indipendentemente dalla scelta che facciamo di K e g . Per trovare le altre soluzioni stazionarie che corrispondono agli stati parzialmente sincronizzati è illuminante usare le intuizioni di Kuramoto originali definendo l'accoppiamento critico K_c .

3.3 L'analisi di Kuramoto

Come discusso per il caso discreto nella sezione 3.1, gli oscillatori parzialmente sincronizzati si dividono in due gruppi: un gruppo sincronizzato di oscillatori con fase "locked" che ruotano descritti dalla fase media $\psi(t)$ e dalla frequenza media ω e un gruppo di oscillatori "sparpagliati" rispetto a questo gruppo. Supponendo che r sia costante, Kuramoto ha scoperto che il primo gruppo è costituito da quegli oscillatori con frequenze naturali $|\omega_i| \leq Kr$ e il secondo gruppo con quelli che hanno frequenze $|\omega_i| \geq Kr$. Per capire perché, ci mettiamo nel riferimento che ruota alla frequenza Ω . Senza perdita di generalità possiamo prendere ψ uguale a zero, in modo che la (3.7) si riduca a:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i - Kr \sin(\theta_i), \quad i = 1, \dots, N \quad (3.10)$$

Quegli oscillatori che sono parzialmente sincronizzati giungeranno a muoversi con la stessa frequenza media Ω e pertanto soddisfano la condizione $\dot{\theta}_i = 0$ nel sistema rotante quindi:

$$\omega_i = Kr \sin(\theta_i) \quad (3.11)$$

Nasce la condizione sulle frequenze $|\omega_i| \leq Kr$. Tali oscillatori saranno contraddistinti da frequenze iniziali non troppo distanti dal centro della distribuzione. Dall'altro lato gli oscillatori con frequenze $|\omega_i| > Kr$ non riescono ad entrare nel gruppo di quelli che si sincronizzano e continuano a muoversi sulla circonferenza

indipendentemente.

Ciò è dovuto al fatto che questi ultimi non appartenenti al nucleo sincronizzato sono contraddistinti da frequenze iniziali molto lontane rispetto al valor medio Ω della distribuzione $g(\omega)$. Allora statisticamente ci aspettiamo che per tale motivo $r(t) \neq 0$; questo altererebbe il contributo che era fornito unicamente dal nucleo degli oscillatori sincronizzati al parametro d'ordine introducendo una dipendenza temporale di quest ultimo (in contraddizione al risultato di soluzione stazionaria che ci eravamo proposti di analizzare).

Kuramoto allora suppone, per evitare tale problema, che le fasi degli oscillatori non sincronizzati siano distribuite uniformemente sulla circonferenza portando ad un contributo istante per istante nullo o trascurabile per la coerenza r e a ψ . Ecco anche il motivo per il quale passando al continuo è stato scelto come intervallo di definizione delle fasi $[-\pi, \pi]$ affinché la densità di stati fosse simmetrica rispetto ad un intervallo simmetrico. Dall'equazione di continuità (3.8) dunque, seguendo le considerazioni di Kuramoto, deduciamo la seguente condizione:

$$\rho(\theta, \omega)v(\theta, \omega) = C(\omega) \quad (3.12)$$

quando $|\omega_i| > Kr$. Affinchè il prodotto di cui sopra non dipenda dal tempo $C(\omega)$ deve essere unicamente funzione della frequenza. Siamo sicuramente di fronte ad una funzione probabilità definita per casi:

$$\rho(\theta, \omega) = \begin{cases} \delta\left(\theta - \arcsin\left(\frac{\omega}{Kr}\right)\right) & |\omega| \leq Kr \\ \frac{C(\omega)}{|\omega - Kr \sin(\theta)|} & |\omega| > Kr \end{cases} \quad (3.13)$$

Il primo termine si ottiene in quanto per costruzione il nucleo degli oscillatori si muove con fase $\theta = \arcsin\left(\frac{\omega}{Kr}\right)$ dunque integrando qualsiasi altra funzione insieme a ρ nell'intervallo di normalizzazione (overlap) la densità è diversa da zero solo quando $(\theta - \theta_0) = 0$. Il secondo termine invece deriva dall'equazione (3.12), risolvendo per la densità infatti:

$$\rho(\theta, \omega) = \frac{C(\omega)}{|\omega - Kr \sin(\theta)|}$$

Infine la costante $C(\omega)$ si ottiene dalla normalizzazione rispetto a θ della (3.13) nel caso $|\omega| > Kr$:

$$C(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\omega^2 - (Kr)^2} \quad (3.14)$$

A questo punto è possibile valutare il parametro d'ordine inserendo $C(\omega)$ nella (3.9). Quella che otteniamo è un'equazione integrale in r . In letteratura tale relazione è detta di auto-consistenza per il parametro d'ordine in quanto r dipende da un integrale in r stesso, pertanto condurrà a soluzioni coerenti con i valori che r può assumere.

Per risolvere tale problema Risulta inoltre molto comodo considerare separatamente i due contributi del nucleo sincronizzato e non:

$$r e^{i\psi} = \langle e^{i\theta} \rangle = \langle e^{i\theta} \rangle_s + \langle e^{i\theta} \rangle_{ds}$$

Con “s” e “ds” intendiamo sincronizzato e desincronizzato.

Ricordiamoci che nel riferimento co-rotante $\Omega = 0$ quindi la relazione si semplifica nella forma

$$r = \langle e^{i\theta} \rangle = \langle e^{i\theta} \rangle_s + \langle e^{i\theta} \rangle_{ds}$$

Abbiamo sfruttato esplicitamente la linearità dell'integrale nell'intervallo in ω infatti la notazione sintetica di cui sopra si traduce in:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-Kr}^{+Kr} e^{i\theta} \rho(\theta, \omega) g(\omega) d\omega d\theta + \int_{-\pi}^{\pi} \int_{|\omega| > Kr} e^{i\theta} \rho(\theta, \omega) g(\omega) d\omega d\theta \quad (3.15)$$

Prendiamo in esame innanzitutto il primo termine

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-Kr}^{+Kr} e^{i\theta} \rho(\theta, \omega) g(\omega) d\omega d\theta = \\ & \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-Kr}^{+Kr} \cos(\theta) \rho(\theta, \omega) g(\omega) d\omega d\theta + i \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-Kr}^{+Kr} \sin(\theta) \rho(\theta, \omega) g(\omega) d\omega d\theta \end{aligned} \quad (3.16)$$

Come abbiamo visto nella prima equazione del sistema (3.13) la densità ha la forma di una $\delta(\theta - \theta_0)$ e sotto integrale seleziona la funzione integranda quando assume per l'argomento il valore $\theta = \arcsin\left(\frac{\omega}{Kr}\right)$.

Osserviamo inoltre che nella (3.16) il termine in seno si annulla perché l'integranda è dispari e in un intervallo simmetrico l'integrale è zero. Il contributo del nucleo sincronizzato si riduce unicamente a

$$\langle e^{i\theta} \rangle_s = \int_{-Kr}^{+Kr} \cos\left(\arcsin\left(\frac{\omega}{Kr}\right)\right) g(\omega) d\omega \quad (3.17)$$

Adesso il contributo degli oscillatori non sincronizzati è dato da

$$\langle e^{i\theta} \rangle_{ds} = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{|\omega| > Kr} e^{i\theta} \rho(\theta, \omega) g(\omega) d\omega d\theta \quad (3.18)$$

Come ci aspettavamo dalla costruzione del termine degli oscillatori non sincronizzati il loro contributo alla forma del parametro d'ordine deve essere nullo; valutiamo l'integrale per le proprietà di simmetria della funzione $g(\omega) = g(-\omega)$ nei due intervalli $]-\infty, -Kr]$ e $[Kr, +\infty[$ mentre la densità $\rho(\theta, \omega)$ quando $|\omega| > Kr$ gode della proprietà $\rho(\theta, \omega) = \rho(\theta + \pi, -\omega)$ nel periodo simmetrico $[-\pi, \pi]$.

L'integrale nella (3.18) risulta pertanto essere zero.

L'espressione del parametro d'ordine infine sarà

$$r = \int_{-Kr}^{+Kr} \cos\left(\arcsin\left(\frac{\omega}{Kr}\right)\right) g(\omega) d\omega, \quad (3.19)$$

E poiché stiamo considerando il nucleo di oscillatori sincronizzati vale $\omega = Kr \sin(\theta)$

$$r = Kr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(\theta) g(Kr \sin(\theta)) d\theta \quad (3.20)$$

Abbiamo trovato la relazione di auto-consistenza per il parametro r .

Essa presenta sempre la soluzione banale $r = 0$ per qualsiasi valore di K .

Essa indica lo stato di incoerenza totale della popolazione di oscillatori per il quale il valor medio delle loro fasi sulla circonferenza è nullo; la densità è dunque costante come si ottiene anche dal sistema (3.13) ponendo $r = 0$ nel caso $|\omega| > Kr$

$$\rho(\theta, \omega) = \frac{1}{2\pi}$$

Gli oscillatori in sostanza si muovono in modo casuale ognuno indipendentemente dall'altro distribuiti uniformemente sulla circonferenza.

Un altro set di soluzioni si ottiene quando $r \neq 0$ e l'espressione (3.20) diventa

$$1 = K \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(\theta) g(Kr \sin(\theta)) d\theta \quad (3.21)$$

Questa equazione impone un limite inferiore alla costante di accoppiamento superato il quale la popolazione inizia a sincronizzarsi fino eventualmente alla saturazione del sistema.

Passando al limite per $r \rightarrow 0^+$ in (3.21) stiamo considerando il minimo del parametro d'ordine quindi il numero minimo di oscillatori che si sono sincronizzati:

$$\begin{aligned} 1 = K_c \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(\theta) g(0) d\theta &\implies 1 = g(0) K_c \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(\theta) d\theta \implies \\ &\implies 1 = g(0) K_c \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

da cui

$$K_c = \frac{2}{\pi g(0)} \quad (3.22)$$

Osserviamo che quando $K < K_c$ il sistema indipendentemente dalle condizioni imposte sulle fasi e sulle frequenze degli oscillatori non riesce a sincronizzarsi, neanche parzialmente, ed è incoerente. Appena K assume invece il valore critico assistiamo ad una biforcazione delle soluzioni del sistema in quanto un gruppo di oscillatori si sincronizza con frequenza costante e tale numero aumenta all'aumentare di K fino a quando il massimo numero di oscillatori, non per forza tutti, si unisce al nucleo.

La restante parte invece degli oscillatori non si sincronizza perché il termine di accoppiamento Kr non permette loro di unirsi al nucleo in quanto la loro frequenza iniziale era distribuita nelle code di $g(\omega)$. Così facendo il coefficiente di accoppiamento non è abbastanza elevato da far avvicinare le frequenze a quella media del nucleo sincronizzato.

L'insieme di questi oscillatori non contribuisce al parametro d'ordine poiché dopo un certo tempo essi si distribuiscono uniformemente sulla circonferenza.

Possiamo inoltre ricavare un'espressione approssimata per il parametro d'ordine espandendo in serie di Taylor la funzione distribuzione delle frequenze nell'equazione (3.21) intorno a $r = 0$

$$g(Kr \sin(\theta)) = g(0) + K_c \sin(\theta) g'(0) + \frac{1}{2} K_c^2 g''(0) + \mathcal{O}(r^3) \quad (3.23)$$

Inserendola in (3.21) trascurando i termini di terzo ordine rispetto a r avremo

$$1 = K \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(\theta) (g(0) + K_c \sin(\theta) g'(0) + \frac{1}{2} K_c^2 g''(0)) d\theta$$

da cui

$$1 = \frac{1}{2} K \pi g(0) + \frac{1}{16} K^3 \pi r^2 g''(0)$$

risolvendo per r e utilizzando la (3.22)

$$r \approx \sqrt{\frac{16(K - K_c)}{\pi K_c^4 [-g''(0)]}} \quad (3.24)$$

In particolare per g unimodale sufficientemente “smooth” per $\omega = 0$ (dunque con $g''(0) < 0$) vediamo, come detto sopra, che gli stati parzialmente sincronizzati si biforcano dallo stato incoerente.

Per $K > K_c$ osserviamo un andamento del parametro d'ordine come quello di una transizione di fase del secondo ordine. Kuramoto continuò la propria analisi supponendo ad esempio una distribuzione delle frequenze unimodale $g(\omega)$ Lorentziana:

$$g(\omega) = \frac{\Delta}{\pi(\Delta^2 + \omega^2)} \quad (3.25)$$

Dove $\Delta > 0$ è l'ampiezza della curva. In tal modo si può risolvere analiticamente l'integrale in (3.21)

$$r = \sqrt{1 - \frac{K_c}{K}} \quad (3.26)$$

Con $K > K_c$ vediamo che la costante di accoppiamento critico vale per la (3.22) $K_c = 2\Delta$.

La simulazione eseguita rappresenta abbastanza fedelmente, nonostante il numero di oscillatori sia finito, il limite continuo del modello di Kuramoto con il raggiungimento a saturazione della sincronizzazione della popolazione.

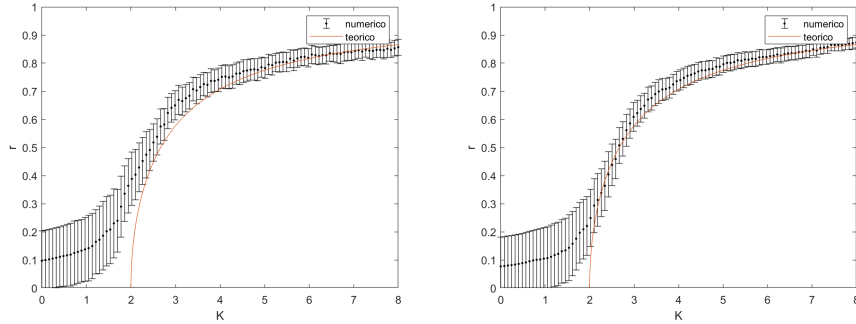


Figura 8: Diagramma di fase ottenuto tramite l'integrazione numerica del modello di Kuramoto. La distribuzione utilizzata è quella Lorentziana con $\Delta = 1$. Le due figure rappresentano rispettivamente le simulazioni per $N = 100$ ed $N = 200$ che abbiano le stesse frequenze naturali per ciascun K . In entrambe le figure la curva in arancione è la (3.26).

Per ogni K investigata, la r corrispondente è il risultato della media per un periodo di tempo dopo che il sistema si è stabilizzato in uno stato stazionario, con barre di errore che rappresentano le deviazioni standard.

4 Simulazioni numeriche

Possiamo provare a simulare il sistema di N oscillatori risolvendo numericamente il sistema di equazioni differenziali accoppiate (3.2) per le fasi θ_i . In questo

calcolo è possibile variare tutti i parametri rispetto ai quali abbiamo analizzato il comportamento del sistema nelle sezioni precedenti.

Utilizziamo una circonferenza unitaria sulla quale si disporranno gli oscillatori al variare del tempo. I fattori che influenzano l'evoluzione del nucleo di oscillatori sincronizzati e non solo:

- il coefficiente di accoppiamento K ;
- il numero di oscillatori N ;
- le condizioni iniziali per le fasi degli oscillatori;
- la funzione distribuzione delle frequenze la quale è pensata opportunamente per descrivere le frequenze istante per istante degli oscillatori in termini della distanza di ognuna di queste dal valor medio Ω del nucleo. Essa definisce anche l'accoppiamento critico dalla (3.22).

Apparentemente anche il parametro che descrive la coerenza del sistema dovrebbe essere inserito nell'elenco di cui sopra tuttavia esso evolve nel tempo e come abbiamo già discusso raggiunge il suo valore massimo superato il coefficiente K_c di accoppiamento critico. Nella figura mostriamo anche il valore del parametro d'ordine sulla stessa circonferenza unitaria in modo che: il modulo indichi, con $0 \leq r \leq 1$, il grado di coerenza del sistema; la fase, pertanto la direzione del vettore nel piano complesso, mostri quale sia il gruppo degli oscillatori sincronizzato puntandolo al variare del tempo. In questa situazione il piano complesso sul quale giace il vettore d'ordine coincide con il piano dove si muovono gli oscillatori. Essi infatti sono punti su una circonferenza per come li abbiamo costruiti e percorrono delle traiettorie cicliche.

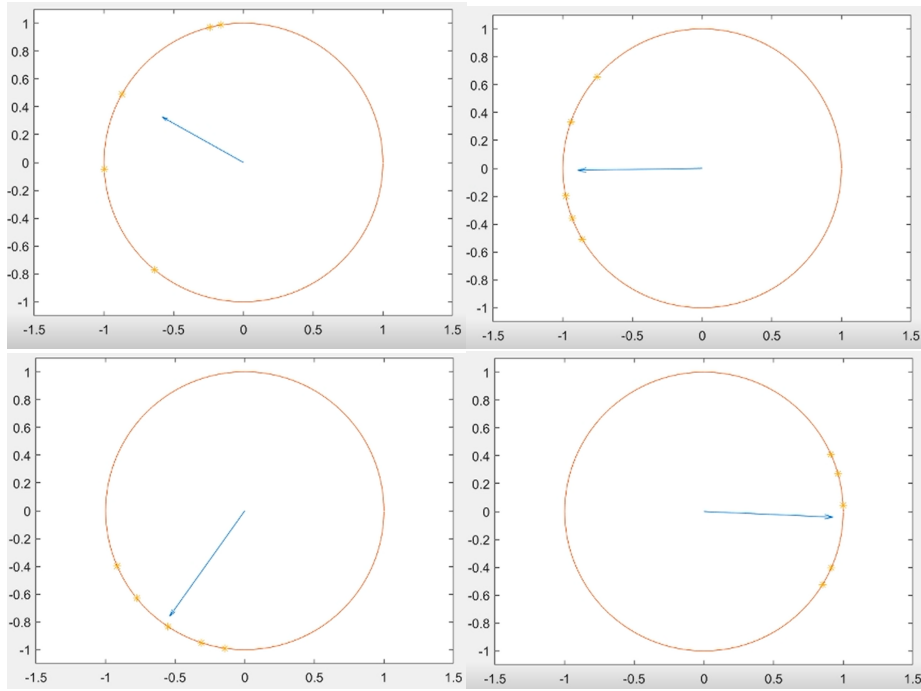


Figura 9: Da sinistra verso destra e dall'alto in basso osserviamo che: nella prima immagine gli oscillatori sono distribuiti casualmente sulla circonferenza dunque il parametro d'ordine non ha un modulo vicino a uno, stato di incoerenza.

La seconda immagine descrive il risultato dell'interazione reciproca degli oscillatori, la costante di accoppiamento e pertanto l'aumentare del parametro d'ordine sposta ogni oscillatore verso la frequenza media avvicinandoli anche l'uno all'altro, grado di parziale sincronizzazione.

Visto il numero esiguo di oscillatori già dalla terza immagine la popolazione è totalmente sincronizzata esibendo un moto collettivo del nucleo.

Abbiamo $N = 5$ oscillatori; la distribuzione delle fasi iniziali è uniforme sulla circonferenza come suggerito da Kuramoto per avere nel parametro r contributo quasi soltanto dal nucleo sincronizzato (qui gli oscillatori sono finiti ed è naturale non raggiungere risultati come quelli del limite continuo);

la distribuzione delle frequenze invece in questo caso è gaussiana normalizzata, così facendo, senza perdere di generalità, abbiamo posto il centro $\Omega = 0$. Inoltre, a differenza della semplice espressione dell'accoppiamento critico per una distribuzione Lorentziana ($K_c = 2\Delta$), per una gaussiana abbiamo:

$$K_c = \frac{2}{\pi g(0)} \implies K_c = \frac{2}{\pi (1/\sqrt{2\pi})} \implies K_c = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \approx 1.6$$

Nella simulazione è stato posto $K = 2$ dunque maggiore del valore critico. Come ci saremmo aspettati al limite continuo anche per pochi oscillatori dopo un certo tempo la popolazione risulta sincronizzarsi muovendosi con la medesima frequenza.

In figura cerchiamo di interpretare il comportamento del sistema quando gli oscillatori aumentano.

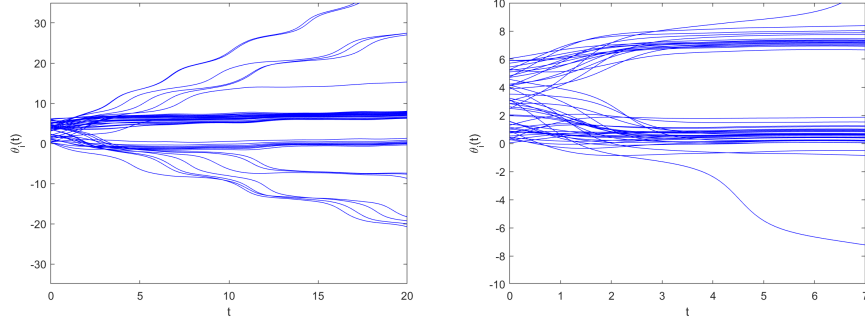


Figura 10: i due grafici sono ottenuti dalla stessa simulazione ma in quello di destra limitando l'intervallo degli assi si è voluto attenzionare il comportamento iniziale del sistema

In totale si osservano $N = 50$ oscillatori. Si nota subito che gran parte hanno un andamento sovrapponibile rappresentato dai due tratti in blu più spessi. Compaiono due tratti e non uno soltanto perché i percorsi sono costantemente separati da una distanza circa uguale a 2π la quale ai fini di r e ψ non comporta alcuna differenza sostanziale essendo su una circonferenza e le fasi periodiche proprio di 2π .

Gli oscillatori che non si sincronizzano si riconoscono in quanto la loro traiettoria si allontana da quella del nucleo sincronizzato. Sono già scorrelati fin dall'inizio come si vede nella figura a destra. Si nota inoltre come i vari andamenti siano sovrapponibili a meno di un fattore additivo costante che provoca una traslazione sulle ordinate nel grafico.

5 Problemi del modello

Mentre l'approccio di Kuramoto si basava sul presupposto che r fosse rigorosamente costante non c'è nessuna evidenza che per N finiti esso si comporti così. Si pensi al caso semplice $K = 0$.

Quindi $\dot{\theta} = \omega$ e alla fine $r(t)$ passa attraverso ogni possibile valore compreso tra 0 e 1, a differenza del valore costante $r \equiv 0$ che seguirebbe dalle considerazioni di Kuramoto. In realtà $r(t)$ passerebbe quasi tutto il suo tempo molto vicino allo zero, a $r = \mathcal{O}(N^{-1/2}) \ll 1$, e aumenterà solo raramente. In questo senso $r \equiv 0$ è praticamente corretto. Quando $K \neq 0$, la situazione diventerebbe ancora più difficile, perché ci sarebbero tre sottopopolazioni di oscillatori: bloccati e alla deriva come nell'analisi di Kuramoto, ma anche alcuni oscillatori "fuzzy" che entrano ed escono dal nucleo sincronizzato, determinati dalle fluttuazioni dell'ordine di $\omega_i \approx Kr(t)$. Infine un altro problema riscontrato da Kuramoto riguarda la stabilità delle soluzioni stazionarie.

Egli non riuscì a dimostrare in modo rigoroso, ma unicamente affidandosi all'intuizione fisica, che per accoppiamenti deboli le soluzioni restassero stabili mentre per K elevati tendevano a destabilizzarsi. La difficoltà qui deriva dal fatto che

un numero infinitamente grande di configurazioni di fase θ_i $i = 1, \dots, N$ appartiene a un identico stato “macroscopico” specificato da un dato valore di r .

6 Applicazioni del modello

Tra le innumerevoli applicazioni del modello di Kuramoto, di cui abbiamo fatto cenno nella sezione (2) un discorso di ampio respiro può essere aperto a proposito delle reti neurali. Spiegare come, al variare di determinati parametri, i neuroni possano interagire tramite impulsi elettrici tra di loro è possibile tramite una generalizzazione del modello (3.2).

6.1 Sincronizzazione dei neuroni nel cervello

Nel cervello, gli assoni, o output dei segnali elettrici, dei neuroni si connettono tramite le sinapsi ai dendriti, o input, degli altri neuroni. Le sinapsi secernono neurotrasmettitori ai dendriti i quali possono avere influenza in senso inibitorio o eccitante sull’emissione dei neuroni ai quali sono collegati.

Già da questo semplice accenno al funzionamento biologico dei neuroni possiamo intravedere somiglianze e differenze con quanto descritto dal modello di Kuramoto. Ogni oscillatore ha la sua frequenza naturale ω_i la quale potrebbe essere vista in corrispondenza alla naturale frequenza di emissione di un impulso di un neurone. Per rendere più realistico il modello osserviamo che la soglia di accoppiamento che è tipica di ogni neurone può variare nel tempo cambiando così anche la naturale frequenza di emissione degli impulsi. Proviamo a generalizzare pertanto la (3.2) introducendo una dipendenza dal tempo sia dell’accoppiamento K che delle frequenze ω_i . Il modello inoltre descrive il grado con cui ogni oscillatore è influenzato dagli altri tramite il parametro K . Nel cervello questo coefficiente potrebbe corrispondere al grado di eccitazione/inibizione che subiscono i neuroni attraverso i dendriti di quelli adiacenti per stimolare l’emissione. Nella descrizione di Kuramoto K è definito per essere lo stesso per tutte le connessioni degli oscillatori essendo così indipendente dal tempo. Nel cervello invece l’accoppiamento può variare da neurone a neurone a causa della tipologia di collegamenti che intercorrono, dell’utilizzo dei dendriti e del flusso dei neurotrasmettitori nel tempo. Tale accoppiamento variabile è introdotto attraverso non più una costante ma una matrice K_{ij} la quale ha elementi non nulli, ed eventualmente pesati in un certo modo, solo quando l’interazione tra il neurone i -esimo e il j -esimo sia diversa da zero. L’ultima differenza tra il modello precedente e quello che vogliamo costruire riguarda il numero di connessioni tra gli oscillatori.

Dalla relazione (3.2) osserviamo che l’accoppiamento è locale, ovvero a coppie gli oscillatori sono tutti collegati. Sempre nel modello di Kuramoto tramite l’introduzione del parametro d’ordine osserviamo un accoppiamento di tipo globale infatti nella (3.7) l’interazione subita dall’ i -esimo oscillatore dipende da una fase media che coinvolge l’intera popolazione N .

Nel cervello i neuroni possono essere connessi in molti più modi di quelli descritti finora.

Analogamente a come è stato descritto nell’articolo (D.Cumin e C.P.Unsworth 2006) analizzeremo l’effetto di diverse distribuzioni per 4 oscillatori accoppiati.

Possiamo dunque scrivere le equazioni del moto:

$$\dot{\theta}_i(t) = \omega_i(t) + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N K_{ij}(t) \sin(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N \quad (6.1)$$

il set di equazioni (6.1) ci permette di introdurre la dipendenza temporale alle frequenze naturali ω_i e al termine di accoppiamento $K_{ij}(t)$. Da quanto scritto sopra se il coefficiente $K_{ij} = \text{cost.}$ e le ω_i sono fissate l'equazione (6.1) si riduce alla (3.2).

6.2 Grafi di accoppiamento

Osserviamo, dalla teoria dei “complex networks” introdotta in Fontoura Costa 2018, che a partire da 4 oscillatori è possibile realizzare cinque configurazioni diverse.

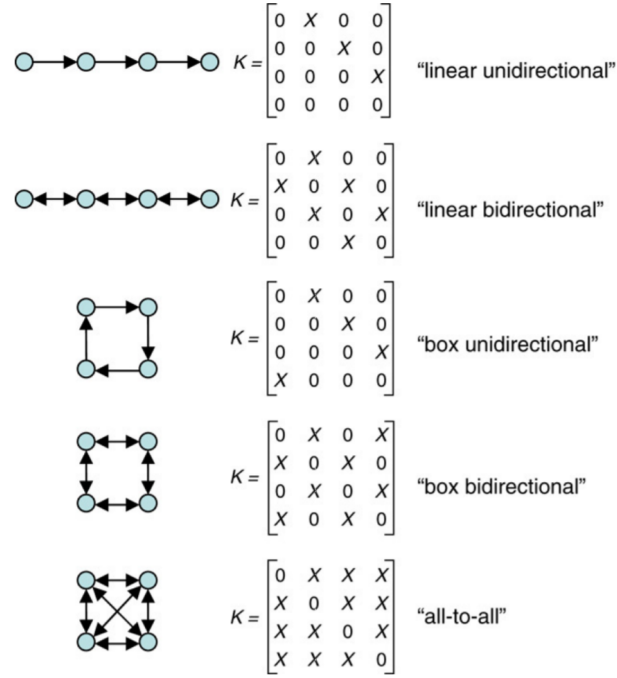


Figura 11: Dall’alto verso il basso le cinque configurazioni descrivono le seguenti tipologie di interazione: la prima permette un collegamento lineare e una comunicazione unidirezionale tra un neurone e il successivo adiacente; la seconda invece estende, sempre con un’interazione lineare, ad entrambe i versi la comunicazione tra un neurone il successivo e il precedente; la terza e la quarta generalizzano la prima e la seconda però chiudendo la comunicazione facendo interagire il primo anche con l’ultimo; l’ultima invece descrive tutte le possibili interazioni tra i quattro neuroni

6.3 Come cambia il parametro d'ordine

In ogni matrice delle cinque configurazioni, come richiesto inizialmente, gli elementi K_{ij} diversi da zero sono quelli per i quali la corrispondente interazione è non nulla. Durante l'articolo si analizzano tutti i possibili casi che potrebbero portare a variazioni nell'andamento temporale del parametro d'ordine. Si introducono pertanto le funzioni dipendenti dal tempo $K_{ij}(t)$ e $\omega_i(t)$ e si osserva come si comporta il sistema quando:

- ω sono distribuite secondo la $g(\omega)$ e le K sono distribuite secondo una funzione densità di probabilità;
- ω sono distribuite secondo la $g(\omega)$ e le K invece hanno una dipendenza temporale tipo

$$K_{ij}(t) = \gamma + \mu \sin(2\pi g_{ij}t + \psi_{ij}) \quad i = 1, \dots, N \quad (6.2)$$

dove ψ varia in $[0, 2\pi]$, g_{ij} sono frequenze normalizzate che assumono valori in $[0, 1]$ infine γ e μ sono scelte in modo opportuno per avere un range di valori di K confrontabili con il modello di Kuramoto statico;

- ω assumono una dipendenza temporale simile a quella sinusoidale per il coefficiente di accoppiamento affinché in un intervallo di tempo vengano raggiunti tutti i valori possibili delle frequenze naturali inizialmente distribuite secondo la $g(\omega)$

$$\omega_i(t) = \alpha_i + \beta_i \sin(2\pi f_i t + \phi_i) \quad (6.3)$$

esattamente come nel caso precedente vengono prese le scelte per i parametri $\alpha_i, \beta_i, f_i, \phi_i$. All'interno di questo caso i K invece vengono posti prima costanti poi distribuiti secondo una densità di probabilità nota;

- per l'ultima possibilità di combinazione della variabilità delle frequenze e dell'accoppiamento, i quali indicano il modo in cui varia la frequenza naturale di emissione di un impulso di un neurone e il modo in cui i neurotrasmettitori comunicano con i dendriti, si utilizza la dipendenza temporale sia per $\omega_i(t)$ che per $K_{ij}(t)$.

Le simulazioni elencate sopra sono state eseguite nell'ultima configurazione di "connettività" dei quattro neuroni quella in cui erano tutti collegati tra loro. Da tutte queste combinazioni, senza entrare nel dettaglio delle casistiche di cui sopra, il risultato è stato quello di osservare una quasi-sincronia.

A causa soprattutto della variazione nel tempo delle frequenze naturali degli oscillatori si osservano delle fluttuazioni nel parametro d'ordine il quale nonostante sia passato un certo tempo non riesce a mantenersi costante in $r = 1$. Tali fluttuazioni non sono come quelle del modello statico dell'ordine di $\mathcal{O}(N^{-1/2})$ ma coinvolgono tutto il range $r \in [0, 1]$. Questo significa che se le frequenze naturali, e anche in parte minore un contributo da $K_{ij}(t)$, variano velocemente nel tempo il sistema cerca di mantenere costante r ma esso subisce dei crolli periodici definendo così una quasi-sincronia.

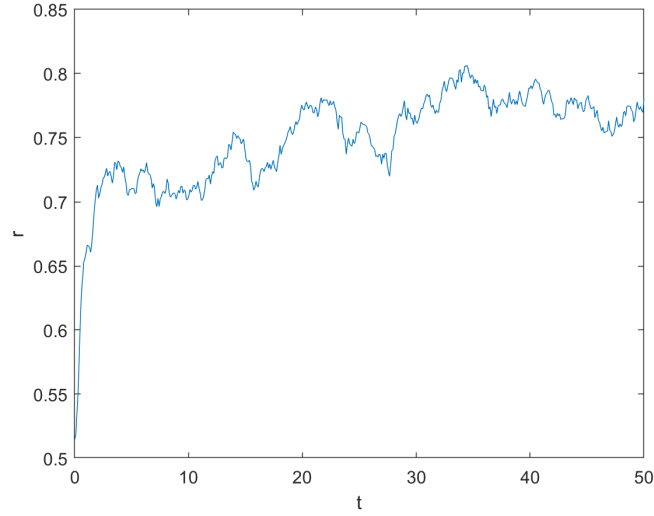


Figura 12: La simulazione è stata effettuata con parametri $\gamma, \alpha_i, \psi_{ij}, \phi_i = 0$ e $\mu, \beta_i = 1$.

7 Codici MATLAB

In ordine di apparizione delle figure sono presentati i codici MATLAB con i quali sono state ricavate le simulazioni

```

1 clear
2 clf
3 N=1000;
4 K=[1,2];
5 tspan=[0,100];
6 delta_t=linspace(tspan(1),tspan(2),1500);
7 theta_sol=[];
8 for i=1:length(K)
9     kuraN = @(t,theta) (kura(t,theta,omega,K(i),N))';
10    soluzione(i)=ode45(kuraN,tspan,iniz(:,i));
11    theta_sol=[theta_sol; deval(delta_t,soluzione(i))];
12 end
13 r=[];
14 for i=1:length(delta_t)
15     rer1=(1/N)*sum(cos(theta_sol((1:N),i)));
16     imr1=(1/N)*sum(sin(theta_sol((1:N),i)));
17     rer2=(1/N)*sum(cos(theta_sol((N+1:2*N),i)));
18     imr2=(1/N)*sum(sin(theta_sol((N+1:2*N),i)));
19     r(1,i)=sqrt(rer1^2+imr1^2);
20     r(2,i)=sqrt(rer2^2+imr2^2);
21 end
22
23 plot(delta_t,r(1,:));

```

```

24 hold on;
25 plot(delta_t,r(2,:));
26 axis([0,tspan(2),0,1])
27 xlabel('t')
28 ylabel('r')
29 legend('k<k_c','k>k_c')
30
31 function f=kura(t,theta,omega,beta,n)
32     for i=1:n
33         somma=0;
34         for j=1:n
35             somma=somma+sin(theta(j)-theta(i));
36         end
37         f(i)=omega(i)+(beta/n)*somma;
38     end
39 end

1 clear
2 clf
3
4 N=200;
5 K=linspace(0,8);
6
7 r=[];
8 for i=1:length(K)
9     kuraN=@(t,theta)(kura(t,theta,omega,K(i),N));
10    soluzione(i)=ode45(kuraN,tspan,iniz);
11    theta_sol=deval(delta_t,soluzione(i));
12
13    for j=1:length(delta_t)
14        rer=(1/N)*sum(cos(theta_sol(:,j)));
15        imr=(1/N)*sum(sin(theta_sol(:,j)));
16
17        r(i,j)=sqrt(rer^2+imr^2);
18    end
19 end
20
21 errorbar(K,mean(r'),std(r'),'k');
22 hold on;
23 km=@(x) sqrt(1-2/x);
24 fplot(km,[2,8])
25 axis([0,8,0,1])
26 xlabel('K')
27 ylabel('r')
28 legend('numerico','teorico')
29
30 function f=kura(t,theta,omega,beta,n)
31     for i=1:n
32         somma=0;
33         for j=1:n

```

```

34         somma=somma+sin(theta(j)-theta(i));
35     end
36     f(i)=omega(i)+(beta/n)*somma;
37 end
38 end

1  clear all
2  N=5;
3  K=2;
4
5  omega=randn(N,1);
6  iniz=rand(N,1)*2*pi;
7
8  kuraN = @(t,theta) (kura(t,theta,omega,K,N))';
9  tspan=[0,10];
10
11  soluzione=ode45(kuraN, tspan, iniz);
12  delta_t=linspace(tspan(1),tspan(2),200);
13  theta_sol=deval(delta_t,soluzione);
14
15  for i=1:N
16      plot(delta_t,theta_sol(i,:));
17      hold on;
18  end
19
20  theta = 0:0.01:2*pi;
21
22
23  for k=1:length(delta_t)
24      p1=[0,0];
25      p2=[(1/N)*sum(cos(theta_sol(:,k))), (1/N)*sum(sin(theta_sol(:,k)))];
26      df=p2-p1;
27      quiver(p1(1),p1(2),df(1),df(2),0)
28      hold on;
29      plot(cos(theta),sin(theta),cos(theta_sol(:,k)),sin(theta_sol(:,k)),'*');
30      axis equal
31      axis([-1.5 1.5 -1.1 1.1])
32      pause(0.1);
33      drawnow limitrate;
34      hold off;
35      hold off;
36  end
37
38  function f=kura(t,theta,omega,beta,n)
39      for i=1:n
40          somma=0;
41          for j=1:n
42              somma=somma+sin(theta(j)-theta(i));

```



```

43         end
44         f(i)=omega(i)+(beta/n)*somma;
45     end
46 end

1  clear all
2  N=4;
3  K=@(t) sin(2*pi*rand(N,N)*t);
4  omega=@(t) sin(2*pi*rand(N,1)*t);
5  kuraN2 = @(t,theta) (kura2(t,theta,omega(t),K(t),N))';
6  tspan=[0,50];
7  cond_in=randn(N,1)*2*pi;
8  soluzione=ode45(kuraN2, tspan, cond_in);
9  delta_t=linspace(tspan(1),tspan(2),500);
10 theta_sol=deval(delta_t,soluzione);
11
12 for i=1:length(delta_t)
13     rer=(1/N)*sum(cos(theta_sol(:,i)));
14     imr=(1/N)*sum(sin(theta_sol(:,i)));
15     r(i)=sqrt(rer^2+imr^2);
16 end
17 plot(delta_t,r);
18 xlabel('t');
19 ylabel('r');
20
21 function f=kura2(t,theta,omega,beta,n)
22     for i=1:n
23         somma=0;
24         for j=1:n
25             somma=somma+beta(i,j)*sin(theta(j)-theta(i));
26         end
27         f(i)=omega(i)+somma/n;
28     end
29 end

```

Riferimenti bibliografici

- Balanov, Alexander et al. (2009). *Synchronization From Simple to Complex*. Springer Series in Synergetics. Springer. ISBN: 978-3-540-72127-7.
- D.Cumin e C.P.Unsworth (2006). «Generalising the Kuramoto model for the study of neuronal synchronisation in the brain». In: *American Journal of Physics*. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physd.2006.12.004>.
- Fontoura Costa, Luciano da (2018). «What is a Complex Network?» In: DOI: 10.13140/RG.2.2.10450.04804/1.
- Luçon, Eric (2012). *Oscillateurs couplés, désordre et synchronisation. Probabilités*. URL: <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00709998/document>.
- P.S.Landa (1996). *Nonlinear Oscillations and Waves in Dynamical Systems*. Springer. ISBN: N 978-90-481-4670-3.
- Peskin, C.S. (1973). *Mathematical Aspects of Heart Physiology*. URL: <https://www.math.nyu.edu/faculty/peskin/heartnotes/index.html>.
- S.H.Strogatz (2000). «From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in population of coupled oscillators». In: *Physics D: Nonlinear Phenomena* 143. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0167-2789\(00\)00094-4](https://doi.org/10.1016/S0167-2789(00)00094-4).
- S.Strogatz (1994). «Nonlinear Dynamics and Chaos». In: *Advanced book program Perseus books Reading*. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.4823332>.
- (2003). «Synch». In: *Penguin Books*. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.1784276>.