

1 Survival probabilities

1.1 Introduzione

Il modello proposto si basa sull'utilizzo di un *Cox process* al fine di modellare il default delle società analizzate (nel nostro caso istituzioni finanziarie). Per prima cosa, introduciamo le dinamiche del modello:

$$r_t = \varphi_t + (1 - \hat{\gamma}) x_t \quad \lambda_t = \psi_t + \hat{\gamma} x_t \quad (1)$$

dove φ_t e ψ_t sono funzioni deterministiche (ignote, ma pur sempre deterministiche), x_t è un processo di Ornstein-Uhlenbeck con media zero e valore iniziale nullo

$$\begin{cases} dx_t = -\hat{a} x_t dt + \hat{\sigma} dW_t \\ x_{t_0} = x_0 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

e infine \hat{a} , $\hat{\sigma}$, $\hat{\gamma}$ sono i parametri del modello calibrato sulle *ATM CS receiver swaptions*. Come noto, un *Cox process* è un processo di Poisson inhomogeneo avente intensità stocastica, modellata nel nostro caso secondo le dinamiche in (1). Più precisamente, si può dire che un *Cox process* condizionato ad una realizzazione $(\lambda_t)_{(t \geq 0)}$ è un *inhomogeneous Poisson process*. Quest'ultima definizione si rivelerà di più immediato utilizzo.

1.2 Sui processi di Cox

È possibile dimostrare che un generico *Poisson process* N_t^P è un processo stocastico senza memoria e che la "probabilità locale" (considerando cioè un Δt molto piccolo) di avere un salto nell'intervallo $(t, t + \Delta t]$ è data da

$$\mathbb{P}(N^P(t + \Delta t) - N^P(t) = 1) = \lambda(t) \Delta t \quad (3)$$

L'apice P accompagnerà ogni riferimento ad un processo di Poisson e si riferirà perciò sempre a grandezze che, per quanto utili nel discorso generale, non entreranno mai effettivamente a fare parte del nostro modello.

Immaginando una discretizzazione $\{t_k\}_{k=0}^n$ per $[t_0, T]$ con $\delta_k := t_k - t_{k-1}$ si può dedurre la *survival probability*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^P(t_0, T) &\stackrel{\text{def}}{=} \prod_{k=1}^n (1 - \lambda(t_{k-1}) \delta_k) \simeq \prod_{k=1}^n e^{-\lambda(t_{k-1}) \delta_k} = \exp \left\{ - \sum_{k=1}^n \lambda(t_{k-1}) \delta_k \right\} \\ &\Rightarrow \mathcal{P}^P(t_0, T) \rightarrow \exp \left\{ - \int_{t_0}^T \lambda_s ds \right\} \quad \text{per } \max_{k=1:n} \delta_k \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Moralmente l'idea è che un processo inhomogeneo può essere ottenuto come limite di *piecewise-homogeneous Poisson processes*. Il risultato in (4) può poi essere esteso ai processi di Cox, utilizzando la legge delle aspettative iterate.

Prima di ciò è però necessario costruire un framework appropriato: sia N_t un processo di Cox avente intensità stocastica λ_t come in (1), definiamo \mathcal{G}_t la filtrazione generata dal driver browniano unidimensionale W_t (tale filtrazione permetterà pertanto di conoscere le realizzazioni di λ_t e r_t , ma non conterrà ovviamente informazioni sugli eventuali salti del *Cox process*) e definiamo invece \mathcal{F}_t^N la filtrazione del *Cox process* N_t (che conterrà pertanto solamente informazioni relative al fatto che vi siano stati o meno dei salti negli istanti di tempo precedenti a t , ma non ovviamente sulla realizzazione dell'intensità λ_t). Infine definiamo una filtrazione complessiva (*augmented filtration*)

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^N \vee \mathcal{G}_t$$

che permetta di "osservare" entrambi i processi: sia N_t , sia λ_t (e pertanto, incidentalmente, anche x_t).

Per ora, abbiamo ricavato in (4) la formula per la probabilità di sopravvivenza $\mathcal{P}^P(t_0, T)$ in un processo di Poisson. Possiamo a priori immaginare (senza perdita di generalità) che $N_{t_0}^P = 0$. Ne deriva che

$$\mathcal{P}^P(t_0, T) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{N^P(T)=0\}} | N^P(t_0) = 0] = \exp \left\{ - \int_{t_0}^T \lambda_s ds \right\} \quad (5)$$

Il valore atteso in (5) è di fatto condizionato all'informazione 'conosco il valore iniziale del processo' \wedge 'conosco il valore di λ_s fino al tempo T ', poichè in un processo di Poisson l'intensità è deterministica.

È ora facile adattare il risultato alla *survival probability* del *Cox process*

$$\mathcal{P}(t_0, T) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{N(T)=0\}} | \mathcal{F}_{t_0}] = \mathbb{E} \left[\underbrace{\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{N(T)=0\}} | \mathcal{G}_T]}_{\mathcal{P}^P(t_0, T)} | \mathcal{F}_{t_0} \right] \quad (6)$$

e così si giunge al risultato generale

$$\mathcal{P}(t_0, T) = \mathbb{E}_{t_0} \left[\exp \left\{ - \int_{t_0}^T \lambda_s ds \right\} \right] \quad (7)$$

che risulta essere valido per tutti i *Cox processes*.

1.3 Calibration vs Computation

Nel caso pratico (1), in prima battuta il nostro interesse ricade sulle funzioni φ_t e ψ_t : tipicamente, in un modello Hull-White per-così-dire standard, la funzione deterministica interviene nella dinamica dell'*instantaneous rate* r_t , senza però comparire nell'espressione del corrispondente modello HJM (cfr. **Lemmi 1-2**). Da ciò la grande potenza del modello HW: in condizioni standard non è infatti facile (o talvolta possibile) calibrare tale funzione almeno per una coppia di motivi,

- ▷ in primis, per via dell'infinito-dimensionalità del problema si può rendere necessario ipotizzare una forma a priori per tale funzione (eg. costante a tratti), che sia compatibile con la quantità di dati in possesso (cosa piuttosto complicata nel nostro caso, data l'ipotesi di illiquidità e scarsa reperibilità/affidabilità dei dati \rightarrow parsimonious model)
- ▷ come vedremo fra poco, esiste una relazione integro-differenziale tra *zero-rates* e φ_t e, parallelamente, tra *hazard rates* e ψ_t : ad esempio, se si volesse conoscere puntualmente φ_t , si renderebbe necessario derivare la curva degli zero-rates, cosa chiaramente non consistente con le classiche tecniche di *bootstrapping* e interpolazione *linear-on-zero-rates* dei fattori di sconto.

Ciò detto, è tuttavia possibile ricavare delle espressioni esplicite per gli integrali di tali funzioni, utilizzando il calcolo stocastico. Per prima cosa, ricordiamo che è possibile calcolare una soluzione in forma chiusa per la SDE del processo Ornstein-Uhlenbeck in (2). Sia

$$\tilde{x}_t = e^{\hat{a}t} x_t.$$

Applicando la formula di Itô si ottiene immediatamente che

$$d\tilde{x}_t = \hat{a} e^{\hat{a}t} x_t - e^{\hat{a}t} (\hat{a} x_t dt + \hat{\sigma} dW_t) = e^{\hat{a}t} \hat{\sigma} dW_t$$

e integrando (per noi gli estremi saranno sempre t_0 e τ , il *time-to-liquidate*)

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} \int_{t_0}^{\tau} e^{\hat{a}t} dW_t &= \int_{t_0}^{\tau} d\tilde{x}_t = \tilde{x}_{\tau} - \tilde{x}_{t_0} = e^{\hat{a}\tau} x_{\tau} - e^{\hat{a}t_0} x_{t_0} = e^{\hat{a}\tau} x_{\tau} \\ \Rightarrow x_{\tau} &= \hat{\sigma} \int_{t_0}^{\tau} e^{-\hat{a}(\tau-t)} dW_t \end{aligned} \tag{8}$$

per via della condizione iniziale nulla dell'*OU process*.

Pertanto, per qualsiasi valore di τ (fissato), la parte stocastica del nostro

modello HW è costituita da [equivalente in legge a] una variabile aleatoria con distribuzione normale a media nulla e varianza pari all'integrale del quadrato di $e^{-\hat{a}(\tau-t)}$. A questo punto è naturale passare al calcolo dell'integrale di λ_s utilizzando il risultato precedente (8):

$$\int_{t_0}^{\tau} \lambda_s ds = \int_{t_0}^{\tau} \psi_s ds + \hat{\gamma} \int_{t_0}^{\tau} x_s ds = \int_{t_0}^{\tau} \psi_s ds + \hat{\gamma} \hat{\sigma} \int_{t_0}^{\tau} ds \int_{t_0}^s dW_t e^{-\hat{a}(s-t)}$$

Considerando la misurabilità e l'integrabilità della funzione integranda (funzione limitata su un intervallo -per definizione- limitato), possiamo avvalerci del teorema di Fubini-Tonelli per scambiare l'ordine di integrazione

$$\hat{\gamma} \hat{\sigma} \int_{t_0}^{\tau} dW_t \int_t^{\tau} ds e^{-\hat{a}(s-t)} = \frac{\hat{\gamma} \hat{\sigma}}{\hat{a}} \int_{t_0}^{\tau} dW_t (1 - e^{-\hat{a}(\tau-t)})$$

Da ultimo, possiamo passare al valore atteso sotto la filtrazione \mathcal{F}_{t_0} (a rigore d'ora in poi sarà sufficiente condizionare alla sub σ -algebra \mathcal{G}_{t_0}) e ottenere da (7) una formula esplicita per la probabilità di sopravvivenza $\mathcal{P}(t_0, \tau)$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{t_0} \left[\exp \left\{ - \int_{t_0}^{\tau} \lambda_s ds \right\} \right] &= \mathbb{E}_{t_0} \left[\exp \left\{ - \int_{t_0}^{\tau} \psi_s ds - \frac{\hat{\gamma} \hat{\sigma}}{\hat{a}} \int_{t_0}^{\tau} dW_s (1 - e^{-\hat{a}(\tau-s)}) \right\} \right] = \\ &=: \exp \left\{ - \int_{t_0}^{\tau} \psi_s ds \right\} \mathbb{E} \left[\exp \left\{ - \hat{\gamma} \int_{t_0}^{\tau} dW_s \sigma(s, \tau) \right\} \mid \mathcal{G}_{t_0} \right] \end{aligned} \quad (9)$$

dove si è usata la misurabilità della funzione deterministica ψ_s e si è definita la quantità $\sigma(s, \tau)$, che permette una diretta identificazione del modello HW come modello HJM (\rightarrow *HJM volatility*). Come prima, l'argomento del valore atteso in (9) è una variabile gaussiana, avente media nulla e varianza pari all'integrale del quadrato di $\hat{\gamma} \sigma(t, \tau)$. Pertanto, vale l'equivalenza in legge

$$\exp \left\{ - \hat{\gamma} \int_{t_0}^{\tau} dW_s \sigma(s, \tau) \right\} \stackrel{law}{=} \exp \left\{ - \hat{\gamma} \left[\int_{t_0}^{\tau} ds \sigma(s, \tau)^2 \right]^{\frac{1}{2}} g \right\}$$

con $g \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Tramite un semplice completamento dei quadrati (per via del valore atteso) si giunge al risultato finale

$$\mathcal{P}(t_0, \tau) = \exp \left\{ - \int_{t_0}^{\tau} \psi_s ds + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\tau} \hat{\gamma}^2 \sigma(s, \tau)^2 ds \right\} \quad (10)$$

È immediato a questo punto adattare la medesima formula dapprima al *risk-free discount factor*

$$\begin{aligned} B(t_0, \tau) &= \mathbb{E}[D(t_0, \tau) | \mathcal{G}_{t_0}] = \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\int_{t_0}^{\tau} r_s ds\right\} \mid \mathcal{G}_{t_0}\right] = \\ &= \exp\left\{-\int_{t_0}^{\tau} \varphi_s ds + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\tau} (1 - \hat{\gamma})^2 \sigma(s, \tau)^2 ds\right\} \end{aligned} \quad (11)$$

e in seconda battuta al *risky ZC bond with zero recovery*, avendo definito con τ^* il tempo di default

$$\begin{aligned} \bar{B}(t_0, \tau) &= \mathbb{E}[D(t_0, \tau) \mathbb{1}_{\tau^* > \tau} | \mathcal{F}_{t_0}] = \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\int_{t_0}^{\tau} (r_s + \lambda_s) ds\right\} \mid \mathcal{G}_{t_0}\right] = \\ &= \exp\left\{-\int_{t_0}^{\tau} \varphi_s ds - \int_{t_0}^{\tau} \psi_s ds + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\tau} \sigma(s, \tau)^2 ds\right\} \end{aligned} \quad (12)$$

Facendo il rapporto tra le equazioni (12) e (11), si ottiene che

$$\frac{\bar{B}(t_0, \tau)}{B(t_0, \tau)} = \exp\left\{-\int_{t_0}^{\tau} \psi_s ds + \left(\hat{\gamma} - \frac{1}{2}\hat{\gamma}^2\right) \int_{t_0}^{\tau} \sigma(s, \tau)^2 ds\right\} \quad (13)$$

e infine, inserendo in (10) il risultato in (13), si ha che

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(t_0, \tau) &= \frac{\bar{B}(t_0, \tau)}{B(t_0, \tau)} \exp\left\{(\hat{\gamma}^2 - \hat{\gamma}) \int_{t_0}^{\tau} \sigma(s, \tau)^2 ds\right\} = \\ &= \exp\left\{-Z(\tau)(\tau - t_0) + (\hat{\gamma}^2 - \hat{\gamma}) \int_{t_0}^{\tau} \sigma(s, \tau)^2 ds\right\} \end{aligned} \quad (14)$$

1.4 Commenti e conclusione

Ora, dal punto di vista pratico, possiamo anche calcolare analiticamente l'integrale in (14) [si ricorda, a tal proposito, che i parametri provenienti dalla calibrazione sono $\hat{a}=0.1294$, $\hat{\sigma}=0.0126$ e $\hat{\gamma}=4e-4$]

$$\int_{t_0}^{\tau} \sigma(s, \tau)^2 ds = \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{a}^2} \left(\Delta t - 2 \frac{1 - e^{-\hat{a}\Delta t}}{\hat{a}} + \frac{1 - e^{-2\hat{a}\Delta t}}{2\hat{a}} \right) \quad (15)$$

dove Δt rappresenta la *year fraction* $\delta(t_0, \tau)$, convenzionalmente scritta in Act/365. Tuttavia, è facile notare come l'impatto di tale integrale sia generalmente trascurabile per Δt piccoli (nel nostro caso, abbiamo utilizzato dei valori prossimi a $14/365=0.0384$ e $60/365=0.1644$, a meno di aggiustamenti di calendario). Infatti, possiamo avvalerci di uno sviluppo di Taylor del termine tra parentesi di (15), ottenendo

$$\begin{aligned} \Delta t - \frac{2}{\hat{a}}[\hat{a}\Delta t - \frac{1}{2}\hat{a}^2\Delta t^2 + \frac{1}{6}\hat{a}^3\Delta t^3] + \frac{1}{2\hat{a}}[2\hat{a}\Delta t - 2\hat{a}^2\Delta t^2 + \frac{4}{3}\hat{a}^3\Delta t^3] + \mathcal{O}(\hat{a}^3\Delta t^4) = \\ = \Delta t - 2\Delta t + \Delta t + \hat{a}\Delta t^2 - \hat{a}\Delta t^2 - \frac{1}{3}\hat{a}^2\Delta t^3 + \frac{2}{3}\hat{a}^2\Delta t^3 + \mathcal{O}(\hat{a}^3\Delta t^4) = \\ = \frac{1}{3}\hat{a}^2\Delta t^3 + \mathcal{O}(\hat{a}^3\Delta t^4) \end{aligned}$$

Ne risulta un andamento asintotico che porta alla seguente approssimazione:

$$\frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{a}^2} \int_{t_0}^{\tau} \sigma(s, \tau)^2 ds \simeq \frac{\hat{\sigma}^2 \Delta t^3}{3} \quad (16)$$

Per Δt "piccoli" (ad esempio i nostri *times to liquidate*), il valore di tale integrale dipende in massima parte proprio dal valore di Δt e dal valore di volatilità del processo OU. Non potremo perciò aspettarci valori di ordini di grandezza molto diversi da quelli in Tabella 1, indipendentemente dalla calibrazione.

settle	ttl	Δt	exact_int	approx_int
14-sep-15	28-sep-15	0.03836	2.975e-09	2.986e-09
14-sep-15	16-nov-15	0.17260	2.676e-07	2.721e-07

Tabella 1: Valori del termine integrale per BNPP

Di contro, (sempre per BNPP) lo Z-spread di interesse è $Z(\tau) = 0.00456$, che porta ad avere $Z(\tau)\Delta t|_{2w}=1.749\text{e-}04$ e $Z(\tau)\Delta t|_{2m}=7.870\text{e-}04$: ci accorgiamo che in (14) l'impatto del solo integrale sarebbe già di per sè minimo, per di più quest'ultimo deve essere moltiplicato per la costante $(\hat{\gamma}^2 - \hat{\gamma})$ che, stando alla nostra calibrazione del modello, assume valori dell'ordine $1\text{e-}4$.

Pertanto, possiamo affermare che nel caso analizzato - sebbene in via teorica sia evidentemente presente una rilevante correlazione tra le dinamiche dei tassi di interesse e l'intensità del Cox process - possiamo considerare indipendenti i due aspetti e utilizzare con una ragionevole precisione la "classica" formula

$$\mathcal{P}(t_0, \tau) = \frac{\bar{B}(t_0, \tau)}{B(t_0, \tau)} = \exp\{-Z(\tau)(\tau - t_0)\} \quad (17)$$

dove si è usata la formulazione tramite lo Z_spread, esattamente come in (14).

È altresì evidente che tale assunzione non discenda da una qualche proprietà "intrinseca" del modello utilizzato, ma sia invece una diretta conseguenza dei parametri a, σ, γ ottenuti dalla calibrazione sulle *ATM diagonal swaptions* eseguita al punto 2 del progetto.

Ciò mostra inoltre quanto sia rilevante la scelta di interpolazione nel bootstrap dello Z_spread: la nostra assunzione è stata quella di utilizzare uno schema di interpolazione lineare sugli Z_spread, che ha portato al risultato rappresentato in calce. Tuttavia è chiaro che - sotto l'ipotesi (17) - le probabilità di sopravvivenza dipendano direttamente ed unicamente dagli Z_spread: pertanto una differente scelta di interpolazione su questi ultimi può alterare sensibilmente la curva delle survival probabilities.

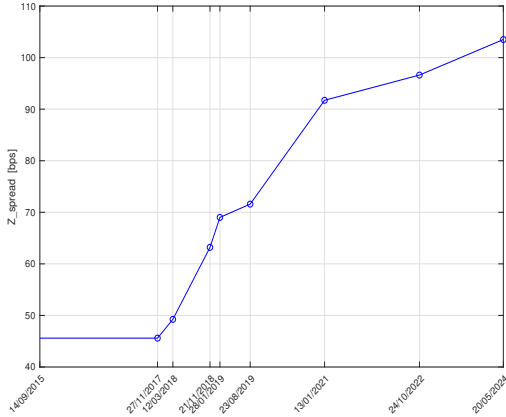


Figura 1: Z_spread curve per BNPP

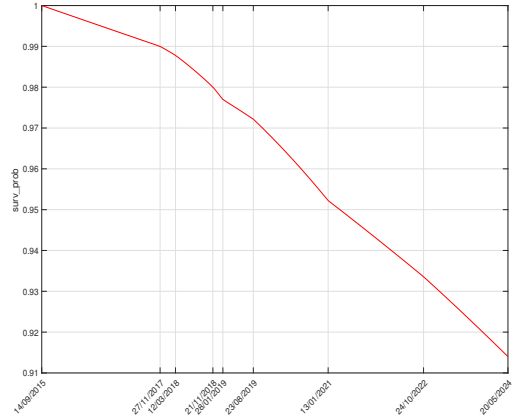


Figura 2: Surv_probs per BNPP