[1]

Travaux Dirigés 1 Mathématiques pour Informatique-IG1-ENEAM

Exercice 1

Nier chacune des propositions:

1. Tous les étudiants de IG de ENEAM ont le Bac C.
2. Dans toutes les prisons tous les détenus détestent tous les gardiens.
3. Dans toutes les prisons, il y a au moins un détenu qui déteste tous les gardiens.
4. Dans toutes les universités du Bénin, tous les étudiants sont laborieux.
5. Dans toutes les universités du Bénin, il y a au moins un étudiant laborieux.
6. Il y a au moins une université du Bénin dans laquelle tous les étudiants sont laborieux.
7. Il y a au moins une université du Bénin dans laquelle il y a au moins un étudiant non laborieux.
8. Toutes les voitures rapides sont rouges.
9. Si le chien aboit, alors la carabane ne passe pas.

Exercice 2

Supposons que les chiens aboient et que la caravane passe. Traduisez les propositions suivantes en langage propositionnel. On note p : les chiens aboient et q : la caravane passe.

(a) Si la caravane passe, alors les chiens aboient.

(b) Les chiens n'aboient pas.

(c) La caravane ne passe pas ou les chiens aboient.

[1] TD1 Mathématiques pour Informatique-IG1-ENEAM-février 2022

(d) La caravane ne passe pas ou bien les chiens aboient.

(e) Les chiens n'aboient pas et la caravane ne passe pas.

Exercice 3

1. (a) On considère trois propositions p, q et r. Laquelle (lesquelles) des expressions boolénnes ci-dessous est (sont) valide(s)?
   $E_1 : [(\neg p \vee \neg q) \Longrightarrow r] \wedge p \wedge q \Longrightarrow \neg r;$
   $E_2 : p \wedge q \wedge r \Longrightarrow (p \vee \neg q \Longrightarrow \neg r);$
   $E_3 : [(p \wedge \neg q) \Longrightarrow r] \wedge \neg r \Longrightarrow (\neg p \vee q).$

   (b) L'argument suivant est-il valide?
   Si l'on est bien portant et qu'on ne travaille pas, alors l'on sera surpris par la pauvreté. Or l'on n'est pas surpris par la pauvreté. C'est donc que l'on est malade ou que l'on travaille.

   (b) Qu'en est-il de l'argument suivant?
   Si Pythagore n'est pas un mathématicien ou n'est pas un philosophe, alors il est un Béninois. Mais Pythagore est un mathématicien et philosophe. Il n'est donc pas un Béninois.

2. Soit φ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

   (a) Traduire à l'aide des quantificateurs les propositions suivantes.
      (i) φ est injective;
      (ii) φ n'est pas surjective;
      (iii) φ est bornée.

   (b) Nier chacune de ces propositions (avec des quantificateurs).

Exercice 4(Une énigme... logique)

Deux amis, Serge et Émile, se rencontrent alors qu'ils ne se sont pas vus depuis l'école secondaire. Ils échangent de vieux souvenirs et Émile demande tout à coup à Serge combien d'enfants il a.

"J'ai trois enfants", de lui répondre Serge. Connaissant le goût d'Émile pour les énigmes, il ajoute : "Je ne te dirai pas leurs âges, mais je vais te donner un indice: le produit des âges de mes enfants est égal à 36."

Émile réfléchit, se saisit d'un bout de papier et y gribouille quelques instants. "Je n'ai pas assez de renseignements pour te donner l'âge de tes enfants. Donne-moi un autre indice."

"Regarde l'édifice en face et compte le nombre de fenêtres. Ce nombre de fenêtres est égal à la somme des âges de mes enfants", de lui répondre aussitôt Serge.

Émile compte les fenêtres et réfléchit quelques instants en consultant son papier. "Écoute Serge, je ne peux pas encore trouver l'âge de tes trois enfants mais donne-moi un dernier indice."

"Le plus vieux de mes enfants a les yeux bleus!", d'ajouter aussitôt Serge.

"Ah! Très bien!", de s'exclamer illico Émile.

Et il donna à Serge l'âge de ses trois enfants.

Quel âge ont les enfants de Serge?

Exercice 5

1. Donner la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes, avec justification à l'appui.

   (a) $\exists \alpha \in \mathbb{R},\ \forall \beta \in \mathbb{R},\ \alpha + 2\beta \geq 12.$

   (b) $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall \beta \in \mathbb{R},\ \alpha + 2\beta \geq 12.$

   (c) $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \exists \beta \in \mathbb{R},\ \alpha + 2\beta \geq 12.$

   (d) $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \exists \beta \in \mathbb{R},\ \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \alpha + 2\beta + \lambda \geq 12.$

   (e) $\exists \alpha \in \mathbb{R},\ \exists \beta \in \mathbb{R},\ \exists \lambda \in \mathbb{R},\ |\alpha - 2\beta + \lambda| < 7.$

   (f) $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \exists \beta \in \mathbb{R},\ \exists \lambda \in \mathbb{R},\ |\alpha - 2\beta + \lambda| < 7.$

   (g) $\exists \alpha \in \mathbb{R},\ \forall \beta \in \mathbb{R},\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ |\alpha - 2\beta + \lambda| < 7.$

   (h) $\exists \alpha \in \mathbb{R},\ \forall \beta \in \mathbb{R},\ \exists \lambda \in \mathbb{R},\ |\alpha - 2\beta + \lambda| < 7.$

   (i) $\exists \alpha \in \mathbb{R},\ \exists \beta \in \mathbb{R},\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ |\alpha - 2\beta + \lambda| < 7.$

2. Donne la négation des chacune de ces propositions.

Exercice 6

1. Donner la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes, avec justification à l'appui.

   (a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \exists z \in \mathbb{R},\ x + y \leq z.$

   (b) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x \leq y \Longrightarrow x^2 \leq y^2.$

   (c) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x < y \Longrightarrow \ln(y - x) > 1.$

   (d) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \forall z \in \mathbb{R},\ x + y \leq z \Longrightarrow \ln(z - x - y + 1) > 0.$

   (e) $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ \exists z \in \mathbb{R},\ \ln(z - x - y + 1) > 0.$

2. Donne la négation des chacune de ces propositions.

Exercice 7

1. (a) Démontrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ et $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.
   (b) Justifier que $2+\sqrt{3}$ et $3+\sqrt{2}$ sont des nombres irrationnels.

2. Démontrer plus généralement que pour tout entier naturel premier p, $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 8

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 5$, on a $2^n > 5(n+1)$.

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, on a:

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$,

   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

3. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, on a:

      (i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$,

      (ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

      (ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$,

   (b) Retrouver les sommes $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$, pour tout entier naturel non nul n.

4. **Application**

(a) Un homme rencontre un mendiant à qui il donne une pièce d'argent, il rencontre un deuxième à qui il donne deux pièces, il rencontre un troisième à qui il donne trois pièces, ..., ainsi de suite jusqu'à ce qu'il n'ait plus rien en poche. Il réfléchit alors et se dit: Si j'avais donné autant de pièces à chacun d'eux, cela aurait été plus équitable et chaque mendiant aurait reçu vingt-cinq pièces.

Combien a-t-il rencontré de mendiants et quel est le nombre total de pièces distribuées?

(b) Calculer le nombre de carrés que l'on peut dessiner sur un échiquier 10×10, les supports des côtés étant parallèles aux supports des bords de l'échiquier et les sommets sont des sommets des cases de l'échiquier.

Généraliser avec un échiquier $n \times n$.

Exercice 9

Démontrer que n droites du plan déterminent au maximum $\frac{n(n+1)}{2}+1$ régions, pour tout entier naturel non nul n.

Exercice 10

1. Démontrer que: $\forall x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right],\ 1 \leq \frac{1}{\sin x} \leq \sqrt{2}$.
2. En déduire que:

$$\frac{\pi}{4} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} \leq \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$