

Exercício Avançado: Expansão do Universo com FRW

Samuel Keullen Sales

October 11, 2025

Objetivo

Calcular o fator de escala $a(t)$ e a expansão do universo usando as equações de Friedmann, derivadas da equação de campo de Einstein.

Dados

- Densidade do universo: $\rho = 1 \times 10^{-26} \text{ kg/m}^3$
- Pressão: $p = 0$ (universo dominado por matéria)
- Curvatura espacial: $k = 0$ (plano)
- Constante cosmológica: $\Lambda = 0$
- Constante gravitacional: $G = 6.674 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg/s}^2$
- Velocidade da luz: $c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$

Equações de Friedmann

1. Primeira equação

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

Como $k = 0$ e $\Lambda = 0$:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho$$

Cálculo numérico

$$\begin{aligned}8\pi G\rho &= 8 \cdot 3.1416 \cdot 6.674 \times 10^{-11} \cdot 1 \times 10^{-26} \\ &\approx 1.6755 \times 10^{-35}\end{aligned}$$

$$\frac{8\pi G\rho}{3} \approx 5.585 \times 10^{-36}$$

$$\dot{a}/a = H = \sqrt{5.585 \times 10^{-36}} \approx 7.47 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1}$$

2. Segunda equação (aceleração)

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

Com $p = 0$ e $\Lambda = 0$:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho$$

$$4\pi G\rho = 4 \cdot 3.1416 \cdot 6.674 \times 10^{-11} \cdot 1 \times 10^{-26} \approx 8.377 \times 10^{-36}$$

$$\frac{4\pi G\rho}{3} \approx 2.792 \times 10^{-36}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -2.792 \times 10^{-36} \text{ s}^{-2}$$

3. Fator de escala em função do tempo

Para um universo plano dominado por matéria:

$$a(t) \propto t^{2/3}$$

Exemplo: considerando idade do universo $t_0 = 13.8 \text{ Gyr} \approx 4.35 \times 10^{17} \text{ s}$

$$a(t = 0.5t_0) = (0.5)^{2/3} \approx 0.63$$

Interpretação física

- $H = 7.47 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1}$ indica a taxa de expansão do universo hoje.
- $\ddot{a} < 0$ mostra que a expansão está desacelerada (universo dominado por matéria, sem energia escura).
- O fator de escala menor no passado ($a = 0.63$) significa que galáxias estavam mais próximas.