Exemplo Prático: Pêndulo Simples, Euler-Lagrange e Noether

Samuel Keullen Sales

October 6, 2025

1. Sistema: Pêndulo Simples

Um pêndulo simples consiste em uma massa m suspensa por um fio de comprimento l, oscilando sob a gravidade g. A coordenada generalizada é o ângulo $\theta(t)$ que a corda forma com a vertical.

1.1 Energia Cinética

$$T = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

1.2 Energia Potencial

Tomando o ponto mais baixo como zero de energia potencial:

$$V = mgl(1 - \cos\theta)$$

1.3 Lagrangiana

$$L = T - V = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos\theta)$$

—

2. Ação e discretização

A ação ao longo do intervalo $[t_1, t_2]$:

$$S[\theta(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(\theta, \dot{\theta})\, dt$$

Discretizando para cálculos aproximados com n passos de duração Δt:

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} L_i \Delta t$$

Intuição: cada L_i representa o "momento instantâneo do sistema" naquele passo de tempo, multiplicado pelo intervalo Δt.

—

3. Equação de Euler-Lagrange

Condição de ação estacionária:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

3.1 Derivadas simbólicas

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta$$

3.2 Equação de movimento

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

—

4. Aplicação de Noether (identificando simetria)

4.1 Transformações infinitesimais

Para descobrir se alguma quantidade física se conserva:

1. Testamos uma pequena mudança na coordenada ou no tempo:

$$\theta(t) \to \theta(t) + \epsilon, \quad t \to t + \delta t$$

2. Calculamos a Lagrangiana perturbada:

$$L_{\text{perturbada}} = L(\theta + \epsilon, \dot{\theta} + \dot{\epsilon}, t + \delta t)$$

3. Calculamos a variação da Lagrangiana:

$$\delta L = L_{\text{perturbada}} - L$$

4. Se $\delta L = 0$ (ou não depende explicitamente do tempo), há simetria e, pelo Teorema de Noether, existe uma quantidade conservada:

$$Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\delta\theta$$

4.2 Passo simbólico

Para uma pequena mudança δt:

$$\theta(t) \to \theta(t+\delta t) \approx \theta(t) + \dot{\theta}\,\delta t$$

$$L(\theta, \dot{\theta}, t) \to L(\theta + \dot{\theta}\delta t, \dot{\theta} + \ddot{\theta}\delta t, t + \delta t)$$

Expandindo em série de Taylor e descartando ordens superiores:

$$\delta L \approx \frac{\partial L}{\partial \theta}\dot{\theta}\delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\ddot{\theta}\delta t + \frac{\partial L}{\partial t}\delta t = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial L}{\partial t}\right)\delta t$$

Como $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ pela Euler-Lagrange, então:

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial t}\delta t$$

Conclusão simbólica: se L não depende explicitamente do tempo, $\delta L = 0$ e a energia é conservada.

—

5. Cálculos numéricos

Valores usados:

$$m = 1 \text{ kg}, \quad l = 1 \text{ m}, \quad g = 9.8 \text{ m/s}^2, \quad \theta = 30^\circ = \pi/6, \quad \dot{\theta} = 1 \text{ rad/s}$$

5.1 Energia Cinética

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 = 0.5 \text{ J}$$

5.2 Energia Potencial

$$V = mgl(1 - \cos\theta) = 1 \cdot 9.8 \cdot 1 \cdot (1 - \cos(\pi/6)) \approx 1 \cdot 9.8 \cdot (1 - 0.866) \approx 1.31 \text{ J}$$

5.3 Lagrangiana e energia total

$$L = T - V = 0.5 - 1.31 = -0.81 \text{ J}, \quad E = T + V = 0.5 + 1.31 = 1.81 \text{ J}$$

5.4 Diferença

$$E - L = 1.81 - (-0.81) = 2.62 \approx 2V$$

Intuição numérica: mostramos que a energia total é maior que a Lagrangiana pela quantidade $2V$, confirmando a relação simbólica $E - L = 2V$.

—

6. Passo a passo para identificar simetria

1. Perturbamos a coordenada $\theta \to \theta + \epsilon$ ou o tempo $t \to t + \delta t$.
2. Calculamos δL de forma simbólica ou numérica.
3. Se $\delta L = 0$ ou não depende de t, temos simetria.
4. Pelo Teorema de Noether, existe uma quantidade conservada $Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \delta\theta$.
5. Para o pêndulo simples, δL não depende explicitamente do tempo, logo a energia total E se conserva.

—

7. Resumo do exemplo destrinchado

- Sistema: pêndulo simples, coordenada $\theta(t)$
- Lagrangiana: $L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos\theta)$
- Equação de Euler-Lagrange: $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0$
- Teste de simetria: perturbar θ ou t, calcular δL
- Quantidade conservada: $Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \delta\theta$ ou energia E para simetria temporal
- Valores numéricos: $T = 0.5$ J, $V \approx 1.31$ J, $L = -0.81$ J, $E = 1.81$ J, $E - L \approx 2V \approx 2.62$ J