# EXERCÍCIO DE MECÂNICA QUÂNTICA
# Spin e Partículas Relativísticas

Samuel Keullen Sales

October 12, 2025

## 1. História e descobridores

**Spin:** - Conceito introduzido para explicar o momento magnético intrínseco dos elétrons. - Descoberto empiricamente por Stern e Gerlach (1922). - Formalizado teoricamente por Pauli (1927) através das matrizes de Pauli.

**Equação de Klein–Gordon:** - Desenvolvida por Oskar Klein e Walter Gordon (1926–1927). - Primeira equação relativística para partículas de spin 0 (bósons).

**Equação de Dirac:** - Desenvolvida por Paul Dirac (1928). - Descreve partículas de spin 1/2 e prevê a existência da antimatéria (pósitron).

## 2. Conceito de Spin

- Spin é um momento angular intrínseco, com magnitude:

$$S^2 = s(s+1)\hbar^2, \qquad S_z = m_s\hbar, \quad m_s = -s, \ldots, s.$$

- Férmions: spin semi-inteiro (estatística de Fermi–Dirac). - Bósons: spin inteiro (estatística de Bose–Einstein).

## 3. Equações relativísticas (forma formal e destrinchada)

### 3.1 Equação de Klein–Gordon (spin 0)

**Forma covariante:**

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\phi(\mathbf{r}, t) = 0.$$

**Derivação (passo-a-passo):**

$$\begin{aligned}
E^2 &= p^2c^2 + m^2c^4, \\
E &\to i\hbar\partial_t, \qquad \mathbf{p} \to -i\hbar\nabla, \\
(i\hbar\partial_t)^2\phi &= (-i\hbar c\nabla)^2\phi + m^2c^4\phi, \\
-\hbar^2\partial_t^2\phi &= -\hbar^2c^2\nabla^2\phi + m^2c^4\phi, \\
\Rightarrow \left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \nabla^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\phi &= 0.
\end{aligned}$$

### 3.2 Equação de Dirac (spin 1/2)

**Forma covariante:**

$$\big(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc\big)\psi = 0,$$

onde $\psi$ é um espinor de 4 componentes e as $\gamma^\mu$ satisfazem $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$.

**Construção (intuição resumida):**

- Procuramos uma equação linear em $E$ e $\mathbf{p}$.
- Propomos $E = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}c + \beta mc^2$ com $\alpha_i, \beta$ matrizes que anticomutam; isso leva às matrizes $\gamma^\mu$.
- Soluções de ondas planas fornecem espinores $u(\mathbf{p})$ (partículas) e $v(\mathbf{p})$ (antipartículas).

# 4. Matrizes de Pauli e operadores de spin

Matrizes de Pauli:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Operador de spin (para spin 1/2):

$$\hat{S}_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i.$$

# 5. Aplicações (resumo)

- Spin: MRI, ressonância eletrônica, qubits (computação quântica), espectroscopia.
- Klein–Gordon: campos escalares em teoria quântica de campos, cosmologia primitiva.
- Dirac: elétrons, antipartículas, física de partículas, grafeno (análogos relativísticos).

# 6. Exemplos numéricos resolvidos (após a base teórica)

## 1. Equação de Dirac (exemplos numéricos)

**Exemplo 1.A — Energia de repouso do elétron $mc^2$**

Constantes usadas:

$$m_e = 9.10938356 \times 10^{-31}\ \text{kg}, \qquad c = 2.99792458 \times 10^{8}\ \text{m/s},$$

e

$$1\ \text{eV} = 1.602176634 \times 10^{-19}\ \text{J}.$$

Cálculo (passo a passo, dígito a dígito):

$$\begin{aligned} c^2 &= (2.99792458 \times 10^{8}\ \text{m/s})^2 = 8.9875517873681764 \times 10^{16}\ \text{m}^2/\text{s}^2, \\ mc^2 &= m_e c^2 = (9.10938356 \times 10^{-31}\ \text{kg}) \times (8.9875517873681764 \times 10^{16}\ \text{m}^2/\text{s}^2) \\ &= 8.187105649650028 \times 10^{-14}\ \text{J}. \end{aligned}$$

Converter para elétron-volts:

$$mc^2 = \frac{8.187105649650028 \times 10^{-14}\ \text{J}}{1.602176634 \times 10^{-19}\ \text{J/eV}} = 510\,998.9420585963\ \text{eV} \approx 0.510999\ \text{MeV}.$$

*Conclusão:* energia de repouso do elétron $mc^2 \approx 8.1871 \times 10^{-14}\ \text{J} \approx 0.511\ \text{MeV}$.

**Exemplo 1.B — Energia relativística para um momento dado (elétron)**

Relação usada:

$$E = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}.$$

Considere

$$p = 1.0 \times 10^{-22}\ \text{kg} \cdot \text{m/s}.$$

Calcule $pc$ (passo a passo):

$$\begin{aligned} pc &= p\,c = (1.0 \times 10^{-22}\ \text{kg}\,\text{m/s}) \times (2.99792458 \times 10^{8}\ \text{m/s}) \\ &= 2.99792458 \times 10^{-14}\ \text{J}. \end{aligned}$$

Observação: a unidade é consistente, pois $\text{kg}\,\text{m/s} \times \text{m/s} = \text{kg}\,\text{m}^2/\text{s}^2 = \text{J}$.
Agora calcule os quadrados:

$$(pc)^2 = (2.99792458 \times 10^{-14})^2 = 8.987551787 \times 10^{-28}\ \text{J}^2,$$

e recordando $mc^2 = 8.187105649650028 \times 10^{-14}\ \text{J}$,

$$(mc^2)^2 = (8.187105649650028 \times 10^{-14})^2 = 6.703065000 \times 10^{-27}\ \text{J}^2.$$

Some os termos:

$$(pc)^2 + (mc^2)^2 \approx 8.987551787 \times 10^{-28} + 6.703065000 \times 10^{-27} = 7.6018201787 \times 10^{-27}\ \text{J}^2.$$

Tome a raiz:

$$E = \sqrt{7.6018201787 \times 10^{-27}}\ \mathrm{J} = 8.718729879168156 \times 10^{-14}\ \mathrm{J}.$$

Converter para eV:

$$E = \frac{8.718729879168156 \times 10^{-14}\ \mathrm{J}}{1.602176634 \times 10^{-19}\ \mathrm{J/eV}} \approx 544\,180.3165860024\ \mathrm{eV} \approx 0.54418\ \mathrm{MeV}.$$

Energia cinética relativística $K = E - mc^2$:

$$\begin{aligned} K &= 8.718729879168156 \times 10^{-14}\ \mathrm{J} - 8.187105649650028 \times 10^{-14}\ \mathrm{J} \\ &= 5.316242295181279 \times 10^{-15}\ \mathrm{J} \\ &\approx \frac{5.316242295181279 \times 10^{-15}\ \mathrm{J}}{1.602176634 \times 10^{-19}\ \mathrm{J/eV}} \approx 33\,181.374527406064\ \mathrm{eV} \\ &\approx 33.18\ \mathrm{keV}. \end{aligned}$$

*Conclusão:* Para $p = 1 \times 10^{-22}$ kg m/s o elétron tem energia total $E \approx 0.54418$ MeV e energia cinética $K \approx 33.18$ keV.

## 2. Equação de Klein–Gordon (exemplos numéricos)

**Exemplo 2.A — Solução de onda plana e relação de dispersão (formal)**

Procuramos soluções do tipo onda plana:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}.$$

Substituindo na equação de Klein–Gordon obtém-se a relação de dispersão:

$$\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \quad \Longrightarrow \quad \omega(k) = \sqrt{(ck)^2 + \left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2}.$$

Energia associada à onda (por quantum): $E = \hbar\omega$, que leva à relação usual

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2, \quad \text{com } p = \hbar k.$$

**Exemplo 2.B — Exemplo numérico aplicado (píon e modo com $k = 10^{12}\ \mathrm{m}^{-1}$)**

Aqui usamos um bóson escalar de massa semelhante ao píon (exemplo típico em física de partículas). Dados e constantes:

$$\hbar = 1.054571817 \times 10^{-34}\ \mathrm{J\,s}, \qquad c = 2.99792458 \times 10^{8}\ \mathrm{m/s},$$

e massa do píon (convertida a partir de 139.57 MeV/$c^2$):

$$m_\pi = \frac{139.57 \times 10^{6}\ \mathrm{eV} \times 1.602176634 \times 10^{-19}\ \mathrm{J/eV}}{c^2} \approx 2.488061244016057 \times 10^{-28}\ \mathrm{kg}.$$

Escolhemos um modo com número de onda

$$k = 1.0 \times 10^{12}\ \mathrm{m}^{-1}.$$

Cálculo de $\omega$ usando a relação de dispersão:

$$\omega = \sqrt{(ck)^2 + \left(\frac{m_\pi c^2}{\hbar}\right)^2}.$$

Calcule os termos (passo a passo):

$$ck = (2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s}) \times (1.0 \times 10^{12} \text{ m}^{-1}) = 2.99792458 \times 10^{20} \text{ s}^{-1},$$

$$\begin{aligned}
\frac{m_\pi c^2}{\hbar} &= \frac{(2.488061244016057 \times 10^{-28} \text{ kg}) \times (2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s})^2}{1.054571817 \times 10^{-34} \text{ J s}} \\
&= \frac{(2.488061244016057 \times 10^{-28}) \times 8.9875517873681764 \times 10^{16} \text{ J}}{1.054571817 \times 10^{-34} \text{ J s}} \\
&= \frac{2.2361601629889656 \times 10^{-11} \text{ J}}{1.054571817 \times 10^{-34} \text{ J s}} = 2.12044369756656 \times 10^{23} \text{ s}^{-1}.
\end{aligned}$$

Agora:

$$(ck)^2 = (2.99792458 \times 10^{20})^2 = 8.987551787 \times 10^{40} \text{ s}^{-2},$$

$$\left(\frac{m_\pi c^2}{\hbar}\right)^2 = (2.12044369756656 \times 10^{23})^2 = 4.495282 \times 10^{46} \text{ s}^{-2}.$$

Somando (o termo de massa domina aqui):

$$\omega^2 = 8.987551787 \times 10^{40} + 4.495282 \times 10^{46} \approx 4.495282 \times 10^{46} \text{ s}^{-2}.$$

Portanto:

$$\omega = \sqrt{4.495282 \times 10^{46}} \text{ s}^{-1} \approx 2.12044369756656 \times 10^{23} \text{ s}^{-1}.$$

Energia associada $E = \hbar\omega$:

$$E = (1.054571817 \times 10^{-34} \text{ J s}) \times (2.12044369756656 \times 10^{23} \text{ s}^{-1}) = 2.2361601629889656 \times 10^{-11} \text{ J}.$$

Converter $E$ para eV:

$$E = \frac{2.2361601629889656 \times 10^{-11} \text{ J}}{1.602176634 \times 10^{-19} \text{ J/eV}} \approx 139\,570\,139.49243286 \text{ eV} \approx 139.57 \text{ MeV}.$$

*Conclusão (KG):* para $k = 10^{12}$ m$^{-1}$ o modo corresponde a uma energia $E$ muito próxima do repouso do píon ($\sim 139.57$ MeV), porque o termo de massa ($mc^2/\hbar$) domina sobre $ck$ nesta escolha de $k$. Assim o comportamento é de partícula massiva com pequena correção de dispersão.

# 7. Exercícios sugeridos (para fixação)

1. Mostrar que a solução de onda plana $\phi(\mathbf{r}, t) = \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$ satisfaz a equação de Klein–Gordon e obter a relação de dispersão $\omega(k)$.

2. Calcular a energia $E$ (em eV) para um elétron com momento $p = 1 \times 10^{-23}$ kg m/s, seguindo o mesmo procedimento do Exemplo 1.B.

3. Para um espinor de Dirac livre com momento $\mathbf{p}$ ao longo do eixo $z$, construir explicitamente os espinores de energia positiva $u(\mathbf{p})$ para spin up e spin down e verificar sua normalização.

4. Repetir o Exemplo 2.B com $k = 10^{14}$ m$^{-1}$ e comparar quão importante se torna o termo $ck$ em relação a $mc^2/\hbar$.