Transformações de Lorentz

Samuel Keullen Sales

7 de outubro de 2025

1 Transformações de Lorentz e Dilatação do Tempo

1.1 Notação e conceitos básicos

- c: velocidade da luz
- Δt: tempo medido pelo observador externo
- $\Delta \tau$: tempo próprio (no referencial do objeto)
- $\Delta x, \Delta y, \Delta z$: coordenadas espaciais
- Δs: intervalo espaço-temporal

As transformações de Lorentz substituem as transformações de Galileu porque, na relatividade, a velocidade da luz c é a mesma para todos os observadores, independentemente do movimento relativo.

Como consequência, o intervalo espaço-temporal entre dois eventos,

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2, \tag{1}$$

é **invariante**, ou seja, todos os observadores medem o mesmo valor, mesmo que seus tempos e posições individuais sejam diferentes.

No referencial próprio de uma partícula ou objeto (onde ele está *parado* espacialmente), o intervalo reduz-se a

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta \tau^2. \tag{2}$$

Cada partícula ou objeto "viaja" no espaço-tempo com uma *velocidade total* igual a c. O que muda entre observadores é como essa velocidade se distribui entre deslocamento espacial e avanço no tempo, gerando os efeitos de dilatação do tempo e contração do espaço.

Essa interdependência entre espaço e tempo é a razão pela qual falamos em *espaço-tempo*, em vez de tratá-los separadamente como na física clássica.

Resumo intuitivo

- Luz constante $\rightarrow$ intervalo fixo $\rightarrow$ mistura de espaço e tempo $\rightarrow$ espaço-tempo.
- Movendo-se rápido: parte da "velocidade do espaço-tempo" vai para o espaço, sobra menos para o tempo $\rightarrow$ relógios em movimento parecem andar devagar.

1.2 O Relógio de Luz: dilatação do tempo

Considere dois espelhos, um em cima e outro embaixo, separados por uma distância L.

Tempo próprio do relógio (no referencial do próprio relógio)

$$\Delta\tau = \frac{2L}{c}. \tag{3}$$

Exemplo numérico: $L = 2$ m

$$\Delta\tau = \frac{2 \cdot 2}{3 \times 10^8} \approx 1.33 \times 10^{-8} \text{ s}. \tag{4}$$

Tempo medido por um observador externo O relógio se desloca horizontalmente junto com o trem. A luz percorre uma trajetória diagonal, maior que o caminho vertical. Como a velocidade da luz c é constante, o tempo medido pelo observador externo aumenta. Esta diferença está ligada à invariância do intervalo Δs:

$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = c^2\Delta\tau^2. \tag{5}$$

Medindo a trajetória diagonal

Distâncias envolvidas:

- Vertical: L
- Horizontal: deslocamento do trem durante metade do ciclo (subida): $x = v\Delta t/2$
- Hipotenusa (trajetória da luz): $d = \sqrt{L^2 + x^2} = \sqrt{L^2 + (v\Delta t/2)^2}$

A luz percorre essa diagonal à velocidade c:

$$c\frac{\Delta t}{2} = \sqrt{L^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2}. \tag{6}$$

Isolando Δt:

$$c^2\frac{(\Delta t)^2}{4} = L^2 + v^2\frac{(\Delta t)^2}{4} \tag{7}$$

$$(c^2 - v^2)\frac{(\Delta t)^2}{4} = L^2 \tag{8}$$

$$\Delta t = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{9}$$

Exemplo numérico

Velocidade do trem: $v = 0.8c$ Tempo próprio: $\Delta\tau \approx 1.33 \times 10^{-8}$ s Tempo medido pelo observador externo:

$$\Delta t = \frac{1.33 \times 10^{-8}}{\sqrt{1 - 0.8^2}} \approx 2.22 \times 10^{-8} \text{ s}. \tag{10}$$

Resultado: O tempo medido pelo observador externo é maior que o tempo próprio do relógio, confirmando a dilatação do tempo.

Fórmulas gerais

Forma completa:

$$\Delta\tau = \frac{2L}{c}$$
$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Forma adimensional simplificada:

$$\beta = \frac{v}{c}$$
$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Aplicação com exemplo

- $L = 2$ m
- $v = 0.8c$

Cálculos completos:

$$\begin{aligned}
2L &= 4 \\
c^2 &= 9 \times 10^{16} \\
v^2 &= 5.76 \times 10^{16} \\
c^2 - v^2 &= 3.24 \times 10^{16} \\
\sqrt{c^2 - v^2} &= 1.8 \times 10^8 \\
\Delta\tau &= \frac{4}{3 \times 10^8} \approx 1.33 \times 10^{-8} \\
\Delta t &= \frac{1.33 \times 10^{-8}}{0.6} \approx 2.22 \times 10^{-8}
\end{aligned}$$

Forma adimensional:

$$\begin{aligned}
\beta &= 0.8 \\
\Delta t &= \frac{1.33 \times 10^{-8}}{\sqrt{1 - 0.8^2}} \approx 2.22 \times 10^{-8}
\end{aligned}$$

Conclusão: O relógio em movimento anda mais devagar em relação ao observador externo.

2 Simultaneidade Relativa

2.1 Conceito

Na física clássica, o tempo é considerado absoluto: todos os observadores concordam sobre a simultaneidade de eventos.

Na relatividade restrita, isso não é mais verdade: dois eventos que são simultâneos em um referencial S podem **não ser simultâneos** em outro referencial S' que se move com velocidade v em relação ao primeiro.

Em outras palavras, a simultaneidade relativa explica que, mesmo que eventos sejam simultâneos em um referencial específico, eles podem ocorrer em momentos diferentes em outro referencial com velocidade relativa distinta.

2.2 Consequências práticas

- Não existe um tempo universal, como descrito por Galileu. O tempo depende das coordenadas e do tempo próprio de cada referencial, considerando a velocidade da luz como limite.
- Eventos simultâneos em um referencial podem ocorrer em ordens diferentes em outro, mas apenas para eventos separados por distâncias espaciais maiores que a luz pode percorrer.
- Essa relatividade da simultaneidade explica paradoxos aparentes, como o *paradoxo dos gêmeos*, sem violar a causalidade: eventos dentro do cone de luz mantêm a ordem causal.

2.3 Exemplo prático: o trem e os relâmpagos

Considere a clássica situação:

- Um trem se move rapidamente sobre os trilhos.
- Dois relâmpagos atingem simultaneamente as extremidades do trem (frente e traseira).
- Um observador na plataforma vê os dois relâmpagos ao mesmo tempo.
- Um observador dentro do trem, que se move na direção da frente do trem, verá primeiro o relâmpago da frente e depois o da traseira.

Explicação: A luz do relâmpago da frente percorre menos distância até o observador dentro do trem. Ou seja, para ele, os eventos não são simultâneos, mesmo que para a pessoa na plataforma parecessem.

Conclusão: A simultaneidade depende do referencial do observador.

2.4 Ligação com as fórmulas de Lorentz

Considere dois eventos em S:

$$t_1 = t_2 \quad \text{e} \quad x_1 \neq x_2$$

No referencial S', em movimento relativo, a transformação de Lorentz altera os tempos dos eventos:

$$t'_1 \neq t'_2$$

Portanto, segundo a simultaneidade relativa, eventos simultâneos em S não são simultâneos em S', especialmente se estão separados por distâncias grandes o suficiente para a luz não alcançá-los instantaneamente.

Resumo: A noção de "ao mesmo tempo"depende do referencial do observador e está diretamente relacionada às transformações de Lorentz.

3 Derivação Conceitual das Transformações de Lorentz

3.1 Premissas Básicas

3.1.1 1. Linearidade

Começamos assumindo a forma mais geral possível, linear, para a transformação entre dois referenciais inerciais S e S':

$$x' = Ax + Bt, \quad t' = Dx + Et$$

Onde os coeficientes possuem interpretações físicas:

- A: fator de escala espacial, indica como as distâncias se transformam entre referenciais.
- B: mistura tempo-espaço, mostra quanto o tempo em S afeta a posição em S'.
- D: mistura espaço-tempo, mostra quanto a posição em S afeta o tempo em S'.
- E: fator de escala temporal, indica como o tempo se dilata ou contrai entre os referenciais.

Esses coeficientes ainda são desconhecidos, mas serão determinados pelas condições físicas a seguir.

3.1.2 2. Coincidência das Origens

Quando os dois referenciais coincidem no instante inicial:

$$S : x = 0,\ t = 0 \quad \Rightarrow \quad S' : x' = 0,\ t' = 0$$

Essa condição garante que não há deslocamento espacial nem atraso temporal inicial entre as origens.

3.1.3 3. Constância da Velocidade da Luz

A luz deve se propagar com a mesma velocidade c em qualquer referencial inercial:

$$x = ct \quad \Rightarrow \quad x' = ct'$$

Essa exigência força espaço e tempo a se misturarem nas transformações, pois x e t não podem mais ser tratados como independentes.

3.2 Aplicação da Condição da Luz

Considerando a luz se movendo nos sentidos positivo e negativo:

$$\text{Sentido positivo: } x = ct, \quad x' = ct'$$
$$\text{Sentido negativo: } x = -ct, \quad x' = -ct'$$

Substituindo nas equações gerais $x' = Ax + Bt$ e $t' = Dx + Et$, obtemos:

$$A = E, \quad B = c^2 D$$

- $A = E$: espaço e tempo se escalam pelo mesmo fator, refletindo a simetria entre medidas espaciais e temporais.
- $B = c^2 D$: a mistura entre tempo e espaço depende de c^2, conectando as unidades de tempo e distância.

3.3 Introduzindo a Velocidade Relativa v

A origem de S' se move com velocidade v vista de S, ou seja, $x = vt \implies x' = 0$.

Substituindo em $x' = Ax + Bt$:

$$0 = A(vt) + Bt \quad \Rightarrow \quad B = -Av$$

Portanto, o coeficiente B depende da velocidade relativa entre os referenciais, mostrando explicitamente como a transformação muda com v.

4 Montando as Equações Reduzidas

4.1 Transformações em termos de A e v

Com as relações determinadas anteriormente:

$$B = -Av, \quad E = A, \quad D = \frac{B}{c^2} = -\frac{Av}{c^2},$$

as transformações de Lorentz para uma dimensão ficam:

$$x' = A(x - vt), \quad t' = A\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

- $x' = A(x - vt)$: transforma posições, descontando o deslocamento relativo vt.
- $t' = A\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$: transforma tempos, mostrando que o tempo depende da posição x, introduzindo a simultaneidade relativa.
- O termo $\frac{v}{c^2}x$ é o fator de mistura espaço-tempo, que faz o tempo "inclinar"com o espaço.

4.2 Determinando o fator $A = \gamma$

Usamos a invariância do intervalo espaço-temporal:

$$x'^2 - c^2 t'^2 = x^2 - c^2 t^2$$

Substituindo x' e t' e simplificando:

$$A^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma$$

O fator γ, conhecido como **fator de Lorentz**, controla efeitos relativísticos:

- Quanto maior v, maior γ; quando $v \to c$, $\gamma \to \infty$.
- Para $v \ll c$, $\gamma \approx 1$, recuperando as transformações de Galileu.

4.3 Fórmulas finais (1D)

$$x' = \gamma(x - vt), \quad t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)$$

- x', t': coordenadas e tempo medidos no referencial em movimento S'.
- x, t: coordenadas e tempo no referencial estacionário S.
- A simetria entre as formas direta e inversa mostra que o movimento relativo é recíproco.

4.4 Interpretação geométrica e física

- As equações representam uma rotação no espaço-tempo de Minkowski, onde o tempo e o espaço se "misturam".
- As linhas de simultaneidade de S' não são horizontais em S, ilustrando a simultaneidade relativa.
- O intervalo
$$s^2 = c^2 t^2 - x^2$$
permanece invariante, garantindo a preservação da causalidade.

4.5 Resumo

Ao exigir linearidade, coincidência das origens e constância da velocidade da luz, o espaço e o tempo devem se misturar. Essa mistura leva naturalmente às transformações de Lorentz e explica:

- Dilatação do tempo
- Contração do comprimento
- Simultaneidade relativa

Tudo controlado pelo fator γ.

5 Conceito do Fator de Lorentz e Transformações de Lorentz

5.1 Determinando o fator γ

Usando a invariância do intervalo espaço-temporal:

$$x'^2 - c^2t'^2 = x^2 - c^2t^2$$

Substituindo as expressões lineares e simplificando:

$$A^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma$$

- γ é o **fator de Lorentz**, responsável pela dilatação do tempo e contração do comprimento.
- Quanto maior v, maior γ.
- Quando $v \to c$, $\gamma \to \infty$.
- Para $v \ll c$, $\gamma \approx 1$, recuperando as transformações de Galileu.

5.2 Fórmulas finais (1D)

Diretas:

$$x' = \gamma(x - vt), \quad t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

Inversas:

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)$$

Legenda:

- x': coordenada de um evento no referencial em movimento S'
- t': tempo medido por relógio no referencial em movimento S'
- x, t: medidas no referencial estacionário S
- A simetria direta/inversa mostra que o movimento relativo é recíproco

5.3 Exemplo prático – cálculo passo a passo

Evento no referencial S:

$$x = 6.0 \times 10^8 \text{ m}, \quad t = 3.0 \text{ s}$$

Referencial S' movendo com $v = 0.8\,c$.
Calcular γ:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0.8^2}} = \frac{1}{\sqrt{0.36}} \approx 1.6667$$

Aplicar fórmulas:

$$x' = \gamma(x - vt), \quad v = 0.8\,c = 2.4 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$x' = 1.6667\,(6.0 \times 10^8 - 2.4 \times 10^8 \cdot 3) = 1.6667\,(-1.2 \times 10^8) \approx -2.0 \times 10^8 \text{ m}$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) = 1.6667\left(3 - \frac{2.4 \times 10^8 \cdot 6.0 \times 10^8}{(3.0 \times 10^8)^2}\right)$$

$$t' = 1.6667(3 - 1.6) = 1.6667 \cdot 1.4 \approx 2.33 \text{ s}$$

Resultado final:

Referencial	x (m)	t (s)
S	6.0×10^8	3.0
S'	-2.0×10^8	2.33

$\rightarrow$ O evento ocorre antes e atrás no sistema em movimento — mistura espaço-tempo confirmada.

5.4 Resumo e interpretação

- As transformações de Lorentz preservam a velocidade da luz e o intervalo espaço-temporal.
- Espaço e tempo se misturam: x influencia t' e t influencia x'.
- O fator γ determina dilatação do tempo e contração do comprimento.
- Para velocidades baixas ($v \ll c$), $\gamma \approx 1$, recuperando a física clássica.