Exercício Resolvido: 3 Férmions em 1D com Interação

Samuel Keullen Sales

October 12, 2025

1. Dados do Exercício

- Número de partículas: $N = 3$ férmions
- Comprimento da caixa: $L = 1\,\mathrm{m}$
- Massa de cada partícula: $m = 1\,\mathrm{kg}$
- Constante de Planck: $h = 1\,\mathrm{Js}$
- Constante da interação: $k = 1\,\mathrm{Js}$
- Posições: $x_1 = 0.15$, $x_2 = 0.30$, $x_3 = 0.50$
- Interação: $V(x_i - x_j) = k(x_i - x_j)^2$

2. Funções de Onda Individuais

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{\pi x}{L}, \quad \psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{2\pi x}{L}, \quad \psi_3(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{3\pi x}{L}$$

$$\sqrt{\frac{2}{L}} = \sqrt{2} \approx 1.4142$$

3. Função de Onda Total (Determinante)

O fator de normalização do determinante:

$$\frac{1}{\sqrt{3!}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \approx 0.4082$$

$$\Psi_F(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{vmatrix} 1.4142 \sin(\pi x_1) & 1.4142 \sin(2\pi x_1) & 1.4142 \sin(3\pi x_1) \\ 1.4142 \sin(\pi x_2) & 1.4142 \sin(2\pi x_2) & 1.4142 \sin(3\pi x_2) \\ 1.4142 \sin(\pi x_3) & 1.4142 \sin(2\pi x_3) & 1.4142 \sin(3\pi x_3) \end{vmatrix}$$

4. Energia Cinética

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

$$\begin{aligned}
E_1 &= \frac{1^2\pi^2 \cdot 1^2}{2 \cdot 1 \cdot 1^2} = 4.9348\,\mathrm{J} \\
E_2 &= \frac{2^2\pi^2 \cdot 1^2}{2 \cdot 1 \cdot 1^2} = 19.7392\,\mathrm{J} \\
E_3 &= \frac{3^2\pi^2 \cdot 1^2}{2 \cdot 1 \cdot 1^2} = 44.4132\,\mathrm{J} \\
E_{\text{cin}} &= E_1 + E_2 + E_3 = 69.0872\,\mathrm{J}
\end{aligned}$$

5. Energia de Interação

Somando todos os pares:

$$\begin{aligned}
V_{12} &= k(x_1 - x_2)^2 = (0.15 - 0.30)^2 = 0.0225\,\mathrm{J} \\
V_{13} &= k(x_1 - x_3)^2 = (0.15 - 0.50)^2 = 0.1225\,\mathrm{J} \\
V_{23} &= k(x_2 - x_3)^2 = (0.30 - 0.50)^2 = 0.04\,\mathrm{J} \\
V_{\text{total}} &= V_{12} + V_{13} + V_{23} = 0.185\,\mathrm{J}
\end{aligned}$$

Energia total aproximada:

$$E_{\text{total}} = E_{\text{cin}} + V_{\text{total}} = 69.0872 + 0.185 \approx 69.2722\,\mathrm{J}$$

6. Densidade no ponto

Substituindo as posições na função de onda total:

Termo 1: $\psi_1(x_1)\psi_2(x_2)\psi_3(x_3) = 1.4142\sin(\pi \cdot 0.15) \cdot 1.4142\sin(2\pi \cdot 0.30) \cdot 1.4142\sin(3\pi \cdot 0.50) \approx -0.4317$
Termo 2: $\psi_3(x_1)\psi_2(x_2)\psi_1(x_3) = 1.4142\sin(3\pi \cdot 0.15) \cdot 1.4142\sin(2\pi \cdot 0.30) \cdot 1.4142\sin(\pi \cdot 0.50) \approx 0.9393$

$$\Psi_F(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{6}}(-0.4317 - 0.9393) \approx -0.5595$$

Densidade:

$$|\Psi_F|^2 \approx 0.5595^2 \approx 0.313$$

7. Conclusão

- Este exercício mostrou a aplicação do formalismo de sistemas de muitos corpos para 3 férmions em uma caixa unidimensional.

- A função de onda total, construída como determinante, reflete a antissimetria exigida pelo princípio de exclusão de Pauli.

- As energias cinéticas dos estados individuais seguem a quantização característica de partículas em uma caixa.

- A energia de interação adiciona uma contribuição pequena, mas significativa, à energia total do sistema, mostrando como pares de partículas próximas aumentam a energia do conjunto.

- A densidade no ponto escolhido evidencia o efeito de interferência entre os termos do determinante, resultando em valores que representam a probabilidade de presença das partículas nas posições selecionadas.

- Os valores obtidos refletem tanto as restrições quânticas da estatística de Fermi quanto a influência da interação par-a-par no sistema de muitos corpos.