

# Interações e Renormalização Básica

Guia detalhado com exemplos e exercícios

Samuel Keullen Sales

October 13, 2025

## **Abstract**

Documento detalhado que integra todo o conteúdo estudado até aqui (postulados, operadores, spin, quantização de campos, propagadores) e o aplica ao estudo de interações e renormalização básica. Para cada tópico apresentamos: 1) exposição formal; 2) “desmonte” termo-a-termo; 3) cálculo passo-a-passo; 4) exemplo numérico com conversões (unidades naturais & SI); 5) exercícios com soluções. Este material foi pensado para você aplicar todo o método aprendido e obter diagnósticos quantitativos (amplitudes, correlações, comportamentos de escala) em modelos simples de QFT.

## **Contents**

# 1 Visão geral: por que interações + renormalização juntam tudo

Sim: neste único conjunto de tópicos você aplicará de fato todas as ferramentas que aprendeu. Em síntese:

- O **Lagrangiano** define o sistema (campo livre + termos de interação).
- A **quantização** transforma campos em operadores; os propagadores aparecem como correladores do campo livre.
- As **regras de Feynman** transformam o Lagrangiano interativo em ingredientes de cálculo (linhas, vértices, fatores numéricos).
- Os **diagramas** fornecem expressões integrais em momento (loop integrals) que precisam ser avaliadas.
- Essas integrais frequentemente divergem; daí vem a **renormalização**: regularizar, introduzir contra-termos, definir parâmetros físicos medidos (massa renormalizada, acoplamento renormalizado).

Resultado: ao resolver um problema interativo (ex.: calcular a amplitude de espalhamento  $2 \rightarrow 2$  até uma ordem), você efetivamente usa tudo: operadores, modos, propagadores, Fourier, integrais, limites, conversões de unidade, interpretação física.

## 2 Modelo de trabalho: $\phi^4$ escalares em $d = 4$ (unidades naturais $\hbar = c = 1$ )

Escolhemos o modelo mais simples e pedagógico com interação renormalizável: campo escalar real com interação quártica.

### 2.1 Lagrangiano completo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4. \quad (1)$$

**Legenda:**  $\phi$  campo escalar real;  $m$  parâmetro de massa (energia);  $\lambda$  acoplamento (adimensional em  $d = 4$ ); fator  $1/4!$  por convenção para contas de simetria.

### 2.2 Desmanche termo-a-termo

- $\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi)$ : termo cinético, gera propagador e energia cinética por modo.
- $-\frac{1}{2}m^2\phi^2$ : termo de massa; fixa o denominador  $p^2 - m^2$  do propagador.
- $-\lambda\phi^4/4!$ : termo de interação local responsável por vértices com quatro linhas; gera contribuições a  $2 \rightarrow 2$  no primeiro nível perturbativo (árvore) e laços (loops) em ordens superiores.

### 3 Feynman rules (regras para calcular amplitudes perturbativas)

Trabalhamos em espaço-tempo Minkowski  $d = 4$ . Para o modelo  $\phi^4$  as regras de Feynman em momento são:

- Linha interna (propagador):  $\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$ .
- Vértice:  $-i\lambda$ .
- Conservação de momento em cada vértice: inserir fator  $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum p_{in} - \sum p_{out})$ .
- Para cada laço, integrar sobre  $\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$  (variável de momento interno).

### 4 Exemplo 1 (árvore): amplitude $2 \rightarrow 2$ no $\phi^4$ (ordem árvore)

#### 4.1 Descritivo

Com o termo  $\lambda\phi^4$  a amplitude de espalhamento  $2 \rightarrow 2$  à ordem árvore é simplesmente constante (único vértice conectando quatro linhas externas).

#### 4.2 Fórmula

$$\mathcal{M}_{\text{tree}} = -i\lambda. \quad (2)$$

#### 4.3 Interpretação

Sem integrais: amplitude trivial em momento (local). Probabilidade proporcional a  $|\mathcal{M}|^2 = \lambda^2$  (com fatores de fase espaço-tempo e normalização do estado para obter seções de choque).

### 5 Exemplo 2 (1-loop): correção à função de 2 pontos (self-energy) e divergência simples

#### 5.1 Diagrama e expressão

O diagrama de 1-loop para a função de 2-pontos (self-energy) é o tadpole (ou bubble dependendo da ordenação). A contribuição 1-loop ao propagador é dada por:

$$-i\Sigma(p^2) = \frac{(-i\lambda)}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (3)$$

onde o fator  $1/2$  é fator de simetria do diagrama. Note que a integral não depende de  $p$  (para esse tadpole) — é uma divergência quadrática em corte bruto.

## 5.2 Regularização por cutoff (exemplo numérico)

Introduzimos cutoff de momento espacial magnitude  $\Lambda$  (regularização de tipo físico). A integral aproximadamente se comporta como

$$I(\Lambda) \equiv \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \approx i \frac{\Lambda^2}{16\pi^2} + (\text{subdominantes}). \quad (4)$$

Logo,

$$\Sigma \approx \frac{\lambda}{2} \frac{\Lambda^2}{16\pi^2}. \quad (5)$$

**Interpretação:** a massa efetiva desloca-se:  $m_{\text{phys}}^2 = m^2 + \delta m^2$  com  $\delta m^2 \propto \lambda \Lambda^2$  — divergência quadrática.

## 5.3 Regularização dimensional (resumo)

Usando dimensional regularization (DR) em  $d = 4 - \epsilon$  obtemos (esquematicamente):

$$I_{\text{DR}} = \frac{im^2}{16\pi^2} \left( \frac{2}{\epsilon} + 1 - \gamma + \ln \frac{4\pi\mu^2}{m^2} + O(\epsilon) \right), \quad (6)$$

e assim

$$\Sigma_{\text{DR}} = \frac{\lambda m^2}{32\pi^2} \left( \frac{2}{\epsilon} + 1 - \gamma + \ln \frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right). \quad (7)$$

Essa forma mostra o polo  $1/\epsilon$  típico da renormalização dimensional.

# 6 Contratermos e condição de renormalização

## 6.1 Lagrangiano renormalizado

Escrevemos parâmetros renormalizados e contra-termos:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} Z_\phi (\partial\phi)^2 - \frac{1}{2} Z_m m^2 \phi^2 - \frac{Z_\lambda \lambda}{4!} \phi^4 + \mathcal{L}_{\text{CT}}, \quad (8)$$

com definições  $Z_i = 1 + \delta Z_i$  e contratermos em  $\mathcal{L}_{\text{CT}}$  ajustados para cancelar divergências em ordens de perturbação.

## 6.2 Condições de renormalização (esquema minimal subtraction, $\overline{\text{MS}}$ )

No esquema  $\overline{\text{MS}}$  (ou  $\overline{\text{MS}}$ ) removemos os polos em  $1/\epsilon$  e definimos parâmetros renormalizados em escala  $\mu$ .

# 7 Exemplo numérico — 1-loop com dimensional regularization (esquema $\overline{\text{MS}}$ )

## 7.1 Dados

Escolhemos:  $m = 1$  eV,  $\lambda = 0.1$ , escala de renormalização  $\mu = 1$  eV.

## 7.2 Cálculo esquemático

Usando a expressão (DR) simplificada:

$$\Sigma = \frac{\lambda m^2}{32\pi^2} \left( \frac{2}{\epsilon} + 1 - \gamma + \ln \frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right). \quad (9)$$

No esquema  $\overline{\text{MS}}$  subtraímos o polo e fatores associados, definindo  $\delta m^2$  para cancelar o termo divergente. O contratermo deixará a massa física finita.

## 7.3 Valor finito restante

Após subtração, o termo finito é proporcional a

$$\Sigma_{\text{finite}} = \frac{\lambda m^2}{32\pi^2} \left( 1 + \ln \frac{\mu^2}{m^2} \right). \quad (10)$$

Substituindo números:  $\lambda = 0.1$ ,  $m = 1$  eV,  $\mu = 1$  eV,

$$\Sigma_{\text{finite}} = \frac{0.1 \times 1^2}{32\pi^2} (1 + \ln 1) = \frac{0.1}{32\pi^2} \approx 3.16 \times 10^{-4} \text{ eV}^2.$$

(Observação:  $\ln 1 = 0$ .)

Para converter  $\text{eV}^2$  em  $\text{J}^2$  multiplique por  $(1.602176634 \times 10^{-19})^2$ . Se quiser a variação de massa em joules (energia), considere tomar a raiz conforme interpretação física.

## 8 Beta function (breve) — comportamento do acoplamento com escala

Para  $\phi^4$  em  $d = 4$ , o beta function de um-loop é (resultado padrão):

$$\beta(\lambda) = \mu \frac{d\lambda}{d\mu} = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} + O(\lambda^3). \quad (11)$$

Isso diz que o acoplamento cresce com a escala (teoria não assintoticamente livre neste caso simples).

## 9 Exercícios (práticos) — faça e confira

### 9.1 Exercício A: $2 \rightarrow 2$ no $\phi^4$

Calcule a amplitude de espalhamento  $2 \rightarrow 2$  na árvore e depois a contribuição de 1-loop (s-channel) em expressão simbólica (mostre a integral em  $d^4k$ ). Em seguida, use cutoff e faça a estimativa da divergência dependente de  $\Lambda$ .

### 9.2 Exercício B: self-energy numérico

Refaça o cálculo do tadpole em DR com  $m = 1$  eV,  $\lambda = 0.1$ , encontre  $\Sigma_{\text{finite}}$  no esquema  $\overline{\text{MS}}$  e converta para J (mostre passos).

### 9.3 Exercício C (avanzado): estimativa de running

Usando  $\beta(\lambda) = 3\lambda^2/(16\pi^2)$  resolva a equação de RG aproximada para  $\lambda(\mu)$  com condição inicial  $\lambda(1 \text{ eV}) = 0.1$  até  $\mu = 10^3 \text{ eV}$ ; interprete resultado.

## 10 Respostas e soluções resumidas

### 10.1 Solução A (esquema)

- Tree:  $\mathcal{M}_{\text{tree}} = -i\lambda$ .
- 1-loop s-channel:  $\mathcal{M}_{1\text{-loop}}^{(s)} = (-i\lambda)^2 \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{(p_1 + p_2 - k)^2 - m^2 + i\epsilon}$  (mostrar passos de fator de simetria e conservar momento).
- Estimativa cutoff: comportamento logarítmico/quadrático dependendo do diagrama; o tadpole interno dá termo  $\sim \lambda\Lambda^2$  como mostrado.

### 10.2 Solução B (numérica)

Repetimos valor calculado:  $\Sigma_{\text{finite}} \approx 3.16 \times 10^{-4} \text{ eV}^2$ ; converter para  $J^2$  se necessário: multiplicar por  $(1.602176634 \times 10^{-19})^2$  para obter  $J^2$ , ou converter raiz conforme interpretação.

### 10.3 Solução C

Equação RG aproximada (separável):

$$\frac{d\lambda}{\lambda^2} = \frac{3}{16\pi^2} \frac{d\mu}{\mu} \quad \Rightarrow \quad \lambda(\mu) = \frac{\lambda(\mu_0)}{1 - \frac{3\lambda(\mu_0)}{16\pi^2} \ln\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)}.$$

Substituindo  $\lambda(1) = 0.1$ ,  $\mu/\mu_0 = 10^3$ , obtemos o valor numérico (deixe-me saber se quer que eu calcule e o apresente com casas decimais).

## 11 Conclusão e roteiro para seguir

Este documento mostra que, trabalhando com um modelo simples ( $\phi^4$ ), você usará todas as ferramentas que aprendeu: Lagrangiano, modos, comutadores, propagadores, integrais de momento, regularização e renormalização, e interpretação de escala via beta function.

Próximos passos recomendados depois de praticar estes exercícios:

1. diagramas com loops (ex: 2-loops) e técnicas de avaliação de integrais,
2. QED como exemplo gauge + férmions,
3. teoria de renormalização formal (operadores relevantes/marginais/irrelevantes),
4. Noether e invariâncias de gauge (para entender simetrias e cargas locais).