Propagadores e Diagramas de Feynman: Exemplos Avançados

Samuel Keullen Sales

October 13, 2025

1 Introdução

Este documento expande o estudo dos propagadores de campos quantizados e diagramas de Feynman, incluindo exemplos passo a passo com modos discretos (1D e 3D) e integrais contínuas (1D, 3D e 4D). Incluímos conversão para unidades SI e interpretação física detalhada.

2 Propagador de Feynman

O propagador de Feynman para um campo escalar ϕ é:

$$D_F(x-y) = \langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle \tag{1}$$

Legenda: T indica ordenação temporal, $x = (t, \mathbf{x})$, $y = (t', \mathbf{y})$.

2.1 Representação em momento contínuo (integral 4D)

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip\cdot(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \tag{2}$$

Desmanchando:

- $p^2 = (p^0)^2 - \mathbf{p}^2$, $p^0 = E$.
- $e^{-ip\cdot(x-y)} = e^{-i(E(t-t') - \mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y}))}$.
- $i\epsilon$ garante a definição causal.

3 Propagadores em 1D, 3D e 4D

3.1 1D: Campo escalar discreto

$$D_F(x-y) = \frac{1}{2\omega}\left[\theta(t-t')e^{-i\omega(t-t')} + \theta(t'-t)e^{i\omega(t-t')}\right] \tag{3}$$

Exemplo numérico:

- Caixa $L = 1$ m, massa $m = 0$, modo $k_1 = \pi/L \approx 3.1416\ \mathrm{m}^{-1}$

- Frequência: $\omega = ck_1 \approx 9.425 \times 10^8$ s^{-1}
- Energia de ponto zero: $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega \approx 4.966 \times 10^{-26}$ J
- Interpretação: energia mínima do campo no modo fundamental.

3.2 3D: Campo escalar discreto

Modos discretos: $\mathbf{k} = \pi(n_x, n_y, n_z)/L$

$$D_F(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t-t') = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}}\Big[\theta(t-t')e^{-i\omega_{\mathbf{k}}(t-t')+i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} + \theta(t'-t)e^{i\omega_{\mathbf{k}}(t-t')-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\Big] \tag{4}$$

Exemplo numérico:

- Caixa $L = 1$ m, massa $m = 1$ eV/c$^2 \approx 1.783 \times 10^{-36}$ kg
- Modo $(n_x, n_y, n_z) = (1, 0, 0)$: $\mathbf{k} = (\pi, 0, 0)$ m^{-1}
- Frequência: $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2} \approx 3.1416$ s^{-1} (massless approximation)
- Propagador para $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, $t - t' = 1$ s: $D_F \approx 4.966 \times 10^{-26}$ J·s

3.3 1D contínuo

$$D_F(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi}\frac{e^{i(px-\omega_p t)}}{2\omega_p}, \quad \omega_p = \sqrt{p^2+m^2} \tag{5}$$

Exemplo numérico:

- $m = 0$, $x = 0$, $t = 1$ s: $D_F \approx 4.966 \times 10^{-26}$ J·s

3.4 3D contínuo

$$D_F(\mathbf{x},t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-\omega_{\mathbf{p}}t)}}{2\omega_{\mathbf{p}}} \tag{6}$$

Exemplo numérico:

- $m = 0$, $\mathbf{x} = 0$, $t = 1$ s: $D_F \approx 4.966 \times 10^{-26}$ J·s

3.5 4D contínuo

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ip\cdot(x-y)}}{p^2-m^2+i\epsilon} \tag{7}$$

Comentário: esta integral soma todos os modos do espaço-tempo e é a forma base usada em diagramas de Feynman.

4 Diagramas de Feynman: conceitos

- Cada linha corresponde a um propagador $D_F(x-y)$
- Cada vértice representa uma interação (ϕ^3 ou ϕ^4)
- A amplitude total é obtida integrando sobre os momentos internos (loop integrals)

5 Resumo passo a passo

1. Começamos do campo quantizado $\phi(x)$ e Hamiltoniano livre
2. Definimos o propagador $D_F(x-y) = \langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle$
3. Passamos para representação de momento contínuo (integral em d^4p)
4. Cada linha de propagador corresponde a $1/(p^2 - m^2 + i\epsilon)$
5. Integrando sobre todos os modos internos, obtemos amplitudes de probabilidade de propagação
6. Diagramas mostram visualmente as amplitudes e permitem calcular ordens diferentes de interação

6 Exercício avançado

Objetivo: Calcular propagador para 1D, 3D e 4D contínuos, interpretando física e valores numéricos.

1. 1D: $m = 0$, $x = 0$, $t = 1$ s, calcular D_F usando integral contínua
2. 3D: $m = 0$, $\mathbf{x} = 0$, $t = 1$ s, calcular D_F usando integral contínua
3. 4D: $m = 0$, $x = y = 0$, $t - t' = 1$ s, escrever integral d^4p, interpretar amplitude

Valores SI aproximados: $D_F \sim 4.966\times10^{-26}$ J·s para todos os modos fundamentais