Postulados e Formalismo Matemático na Mecânica Quântica

Samuel Keullen Sales

October 11, 2025

História e Descobridores

A Mecânica Quântica (MQ) surgiu no início do século XX para explicar fenômenos que a mecânica clássica não conseguia, como radiação do corpo negro, efeito fotoelétrico e espectros atômicos. Contribuíram para o desenvolvimento da MQ:

- Max Planck (quantização de energia, 1900)
- Albert Einstein (efeito fotoelétrico, 1905)
- Niels Bohr (modelo atômico, 1913)
- Werner Heisenberg, Erwin Schrödinger, Paul Dirac (formulação moderna dos postulados e equações de movimento)

O que são os Postulados da Mecânica Quântica

Os postulados são regras fundamentais que descrevem o que é um estado quântico, como ele evolui no tempo e como extrair resultados de medições. Eles formam a base de toda a MQ e são verificáveis experimentalmente.

Principais Postulados e Fórmulas Destrinchadas

1. **Estado do Sistema:**
$$|\psi\rangle \in \mathcal{H}$$

   Legenda:

   - $\mathcal{H}$: espaço de Hilbert (vetores complexos com produto interno)
   - $|\psi\rangle$: vetor de estado do sistema
   - Pode ser expandido em uma base $\{|a_i\rangle\}$ com coeficientes $c_i = \langle a_i|\psi\rangle$

2. **Observáveis:**
$$\hat{A}|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle$$

   Legenda:

   - $\hat{A}$: operador linear representando uma grandeza física (posição, momento, energia)
   - a_i: valor próprio (resultado possível da medição)

- $|a_i\rangle$: estado próprio (estado após a medição)

3. **Evolução Temporal:**

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle$$

Legenda:

- $\hat{H}$: Hamiltoniano (energia total)
- i: unidade imaginária (fase complexa, evolução unitária)
- $\hbar$: constante de Planck reduzida

4. **Probabilidade de Medição:**

$$P(a_i) = |\langle a_i|\psi\rangle|^2$$

Legenda:

- $\langle a_i|\psi\rangle$: amplitude de probabilidade
- $|\langle a_i|\psi\rangle|^2$: probabilidade real (0 a 1)
- Normalização: $\sum_i P(a_i) = 1$

Formalismo Matemático

O formalismo é o conjunto de ferramentas que tornam os postulados operacionais:

- $|\psi\rangle$: Ket, vetor de estado
- $\langle\psi|$: Bra, transposto conjugado
- $\langle\phi|\psi\rangle$: produto interno, sobreposição de estados
- $\hat{A}$: operador, representa observáveis
- $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$: Hermitiano, garante resultados reais
- $\hat{H}$: Hamiltoniano, define a dinâmica
- $e^{-i\hat{H}t/\hbar}$: operador de evolução temporal

Exemplo Físico Completo: Pacote Gaussiano de Partícula Livre

Problema: Um elétron de massa m_e se propaga livremente no vácuo com número de onda k_0 e posição inicial $x_0 = 0$. Determine a função de onda para $t > 0$ e a densidade de probabilidade em x.

Passo 1: Estado Inicial

$$\psi(x,0) = \left(\frac{1}{\pi\sigma_0^2}\right)^{1/4} e^{-x^2/(2\sigma_0^2)} e^{ik_0x}$$

Legenda:

- σ_0: largura espacial inicial

- k_0: número de onda central, $p_0 = \hbar k_0$

Passo 2: Evolução Temporal (Equação de Schrödinger Livre)

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_e}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

Solução analítica:

$$\psi(x,t) = \left(\frac{1}{\pi\sigma_0^2}\right)^{1/4}\frac{1}{\sqrt{1+i\frac{\hbar t}{2m_e\sigma_0^2}}}\exp\left(-\frac{(x-vt)^2}{4\sigma_0^2(1+i\frac{\hbar t}{2m_e\sigma_0^2})}+i\frac{p_0 x}{\hbar}-i\frac{p_0^2 t}{2m_e\hbar}\right)$$

Legenda:

- $v = p_0/m_e$: velocidade clássica
- O denominador complexo introduz espalhamento e fase

Passo 3: Densidade de Probabilidade

$$P(x,t) = |\psi(x,t)|^2$$

Interpretação:

- $P(x,t)$: probabilidade de localizar o elétron em x no tempo t
- Integral $\int P(x,t)dx = 1$ (normalização preservada)
- O pacote de onda se desloca e se espalha ao longo do tempo

Observações Finais:

- A unidade imaginária i introduz fase e interferência.
- O formalismo permite calcular qualquer observável e prever probabilidades.
- Antes de avançar para operadores e simetrias, é essencial dominar esses conceitos e fórmulas.