Equações de Campo de Einstein e Aplicações: Schwarzschild e Kerr

Samuel Keullen Sales

October 11, 2025

Introdução e História

As equações de campo de Einstein são a base da **Relatividade Geral**, formuladas por Albert Einstein em 1915. Elas descrevem como a matéria e energia determinam a curvatura do espaço-tempo. A origem matemática da teoria encontra raízes no trabalho de **Bernhard Riemann**, que introduziu o conceito de variedades curvas no século XIX, e de outros matemáticos como **Elwin Bruno Christoffel** e **Gregorio Ricci-Curbastro**, que desenvolveram os tensores essenciais para a formulação moderna da geometria diferencial.

A primeira solução exata das equações de Einstein em vácuo foi encontrada por **Karl Schwarzschild** em 1916, descrevendo o campo gravitacional esférico de uma massa estática. Décadas depois, **Roy Kerr** generalizou Schwarzschild para o caso de uma massa em rotação, resultando na famosa **métrica de Kerr**, fundamental para o estudo de buracos negros rotativos.

Equações de Campo de Einstein

As equações de campo podem ser escritas na forma compacta:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{1}$$

onde:

- $G_{\mu\nu}$ é o **tensor de Einstein**,
- $R_{\mu\nu}$ é o **tensor de Ricci**,
- R é o **escalar de Ricci**,
- $g_{\mu\nu}$ é o **tensor métrico**,
- $T_{\mu\nu}$ é o **tensor energia-momento**,
- G é a constante gravitacional de Newton,
- c é a velocidade da luz.

Essa equação relaciona a geometria do espaço-tempo (lado esquerdo) com a distribuição de matéria e energia (lado direito).

Visualização das Equações

Para estudo inicial, é útil expressar as métricas em coordenadas esféricas (t, r, θ, ϕ):

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 + g_{\phi\phi}d\phi^2 + 2g_{t\phi}dtd\phi \tag{2}$$

onde cada $g_{\mu\nu}$ depende da simetria do sistema estudado (esférica, rotacional, etc.).

1 Métrica de Schwarzschild

Constantes e dados

$$\begin{aligned}
G &= 6.674 \times 10^{-11} \quad \text{(Constante gravitacional)} \\
c &= 3 \times 10^{8} \quad \text{(Velocidade da luz)} \\
M &= 1.989 \times 10^{30} \quad \text{(Massa do Sol)} \\
r &= 6.96 \times 10^{8} \quad \text{(Raio do Sol)} \\
\theta &= \pi/2, \quad \sin\theta = 1
\end{aligned}$$

Valores intermediários (arredondados)

$$\begin{aligned}
2GM &= 2.655 \times 10^{20} \\
c^2 &= 9 \times 10^{16} \\
r^2 &= 4.844 \times 10^{17} \\
\frac{2GM}{c^2 r} &= 4.238 \times 10^{-6} \\
1 - \frac{2GM}{c^2 r} &= 0.999996 \\
\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} &= 1.000004 \\
r^2 \sin^2\theta &= 4.844 \times 10^{17}
\end{aligned}$$

Métrica covariante $g_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}
g_{tt} &= -0.999996 \\
g_{rr} &= 1.000004 \\
g_{\theta\theta} &= 4.844 \times 10^{17} \\
g_{\phi\phi} &= 4.844 \times 10^{17}
\end{aligned}$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -0.999996 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.000004 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4.844 \times 10^{17} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4.844 \times 10^{17} \end{bmatrix}$$

Métrica contravariante $g^{\mu\nu}$

$$
\begin{aligned}
g^{tt} &= -1.000004 \\
g^{rr} &= 0.999996 \\
g^{\theta\theta} &= 2.064 \times 10^{-18} \\
g^{\phi\phi} &= 2.064 \times 10^{-18}
\end{aligned}
$$

$$
g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1.000004 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.999996 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.064 \times 10^{-18} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.064 \times 10^{-18} \end{bmatrix}
$$

Conexões de Christoffel não nulas

$$
\begin{aligned}
\Gamma^r_{tt} &= -3.045 \times 10^{-15} & \Gamma^r_{rr} &= 3.045 \times 10^{-15} \\
\Gamma^r_{\theta\theta} &= -6.96 \times 10^{8} & \Gamma^r_{\phi\phi} &= -6.96 \times 10^{8} \\
\Gamma^t_{tr} &= -3.045 \times 10^{-15} & \Gamma^\theta_{r\theta} &= 1.437 \times 10^{-9} \\
\Gamma^\phi_{r\phi} &= 1.437 \times 10^{-9} & \Gamma^\theta_{\phi\phi} &= 0 \\
\Gamma^\phi_{\theta\phi} &= 0
\end{aligned}
$$

Tensor de Ricci, Escalar e Einstein

$$
R_{\mu\nu} \approx 0, \quad R \approx 0, \quad G_{\mu\nu} \approx 0
$$

Tensor de Riemann

$$
R^r_{\theta r\theta} \approx 4.32 \times 10^{-16}\,\mathrm{m}^{-2}
$$

—

2 Métrica de Kerr (equador, $\theta = \pi/2$)

Constantes e dados

$$
\begin{aligned}
&M = 1.989 \times 10^{30} & &G = 6.674 \times 10^{-11} & &c = 3 \times 10^{8} \\
&\theta = \pi/2, \quad \sin\theta = 1 & &r = 6.96 \times 10^{8} \\
&r_s = 2GM/c^2 = 2949.91 & &a = 0.5 r_s = 1.47495 \times 10^{3}
\end{aligned}
$$

Definições e preliminares

$$
\begin{aligned}
p^2 &= r^2 + a^2 \cos^2\theta = 4.844 \times 10^{17} \\
\Delta &= r^2 - 2GMr/c^2 + a^2 = 4.84416 \times 10^{17}
\end{aligned}
$$

Métrica covariante $g_{\mu\nu}$ (equador)

$$
\begin{aligned}
g_{tt} &= -0.999996 \\
g_{t\phi} &= -6.251 \times 10^{-3} \\
g_{rr} &= 1.0 \\
g_{\theta\theta} &= 4.844 \times 10^{17} \\
g_{\phi\phi} &= 4.84416 \times 10^{17}
\end{aligned}
$$

$$
g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -0.999996 & 0 & 0 & -6.251 \times 10^{-3} \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4.844 \times 10^{17} & 0 \\ -6.251 \times 10^{-3} & 0 & 0 & 4.84416 \times 10^{17} \end{bmatrix}
$$

Métrica contravariante $g^{\mu\nu}$

$$
\begin{aligned}
g^{tt} &= -1.000004 \\
g^{t\phi} &= -1.291 \times 10^{-20} \\
g^{rr} &= 1.0 \\
g^{\theta\theta} &= 2.064 \times 10^{-18} \\
g^{\phi\phi} &= 2.064 \times 10^{-18}
\end{aligned}
$$

$$
g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1.000004 & 0 & 0 & -1.291 \times 10^{-20} \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.064 \times 10^{-18} & 0 \\ -1.291 \times 10^{-20} & 0 & 0 & 2.064 \times 10^{-18} \end{bmatrix}
$$

Conexões de Christoffel principais (valores arredondados)

$$
\begin{aligned}
\Gamma^r_{tt} &= 3.045 \times 10^{-15} & \Gamma^r_{t\phi} &= -4.486 \times 10^{-12} \\
\Gamma^r_{rr} &= -3.042 \times 10^{-15} & \Gamma^r_{\theta\theta} &= -6.96 \times 10^{8} \\
\Gamma^r_{\phi\phi} &= -6.96 \times 10^{8} & \Gamma^t_{tr} &= 3.045 \times 10^{-15} \\
\Gamma^\phi_{tr} &\approx 9.27 \times 10^{-30} & \Gamma^\theta_{r\theta} &= 1.437 \times 10^{-9} \\
\Gamma^\phi_{r\phi} &= 1.437 \times 10^{-9}
\end{aligned}
$$

Tensor de Riemann (exemplos)

$$
\begin{aligned}
R^r_{\theta r\theta} &\approx 0 \\
R^r_{\phi r\phi} &\approx 0 \\
R^t_{rtr} &\approx -9.27 \times 10^{-30}
\end{aligned}
$$

Tensor de Ricci, Escalar e Einstein

$$
R_{\mu\nu} \approx 0, \quad R \approx 0, \quad G_{\mu\nu} \approx 0
$$

Observações físicas e arrasto de referência

- Campo quase plano (Riemann $\sim 10^{-30}$)
- Espaço-tempo de Kerr no equador, longe do horizonte ($r \gg r_s$)
- Tensor de Einstein $\approx 0 \rightarrow$ vácuo
- $g_{t\phi} \neq 0$ indica leve arrasto de referência (efeito relativístico)
- Correções de rotação ($a \sim 10^3$ m) são minúsculas comparadas ao raio solar ($\sim 10^9$ m)

Componente	Schwarzschild	Kerr (equador)
g_{tt}	-0.999996	-0.999996
g_{rr}	1.000004	1.0
$g_{\theta\theta}$	4.844×10^{17}	4.844×10^{17}
$g_{\phi\phi}$	4.844×10^{17}	4.84416×10^{17}
$g_{t\phi}$	0	-0.006251

A tabela ilustra claramente o efeito de arrasto de referência: apenas Kerr possui $g_{t\phi} \neq 0$.