Exercícios Detalhados Antes de Propagadores de Feynman

Samuel Keullen Sales

October 13, 2025

1 Introdução

Neste documento, apresentamos dois exercícios detalhados sobre campos escalares, desde a quantização em modos discretos até a obtenção do propagador de Feynman em 1D e 3D. Todos os cálculos são mostrados passo a passo, incluindo conversão para unidades SI e interpretação física de cada resultado.

2 Exercício 1 — Campo Escalar 1D

2.1 Dados

- Campo escalar $\phi(x,t)$, sem massa ($m = 0$), caixa de comprimento $L = 1$ m
- Constante de Planck reduzida: $\hbar = 1.055 \times 10^{-34}$ J·s
- Velocidade da luz: $c = 2.998 \times 10^{8}$ m/s

2.2 Passo 1: Modos discretos

$$k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

$$\omega_n = c|k_n|$$

Modo fundamental $n = 1$:

$$k_1 = \frac{\pi}{1} \approx 3.1416 \text{ m}^{-1}, \quad \omega_1 = ck_1 \approx 2.998 \times 10^{8} \cdot 3.1416 \approx 9.425 \times 10^{8} \text{ s}^{-1}$$

2.3 Passo 2: Hamiltoniano por modos

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} \hbar\omega_n \left(a_n^{\dagger} a_n + \frac{1}{2} \right)$$

Interpretação: cada modo é um oscilador harmônico independente; energia mínima de cada modo:

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_n$$

2.4 Passo 3: Energia numérica do modo fundamental

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_1 = 0.5 \cdot 1.055 \times 10^{-34} \cdot 9.425 \times 10^{8} \approx 4.97 \times 10^{-26}\ \text{J}$$

2.5 Passo 4: Propagador 1D discreto

$$\langle 0|T\{\phi(x,t)\phi(y,0)\}|0\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\omega_n L}\left(e^{-i\omega_n t + ik_n(x-y)} + e^{i\omega_n t - ik_n(x-y)}\right)$$

2.6 Passo 5: Soma → Integral contínuo

$$\sum_n \frac{1}{L} \to \int \frac{dk}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad \Delta_F^{1D}(x,t) = \int \frac{dk}{2\pi}\frac{1}{2\omega_k} e^{-i\omega_k t + ik(x-y)}$$

2.7 Interpretação final

O propagador mede a correlação entre pontos do campo em diferentes tempos. Mesmo no modo fundamental, vemos a quantização do vácuo e como cada modo contribui para o propagador.

3 Exercício 2 — Campo Escalar 3D

3.1 Dados

- Campo escalar massivo ($m = 1$ eV$/c^2 \approx 1.783 \times 10^{-36}$ kg), caixa de lado $L = 1$ m
- Constantes: $\hbar = 1.055 \times 10^{-34}$ J·s, $c = 2.998 \times 10^8$ m/s

3.2 Passo 1: Modos discretos 3D

$$\mathbf{k} = \frac{\pi}{L}(n_x, n_y, n_z), \quad n_i = 0, 1, 2, ...$$

$$\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{|\mathbf{k}|^2 c^2 + \left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2}$$

3.3 Passo 2: Hamiltoniano

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \left(a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2}\right)$$

3.4 Passo 3: Energia do modo fundamental $(1, 0, 0)$

$$k = \pi/L = 3.1416 \text{ m}^{-1}$$

$$\omega = \sqrt{(ck)^2 + (mc^2/\hbar)^2}$$

$$(mc^2/\hbar) = \frac{1.783 \times 10^{-36} \cdot (2.998 \times 10^8)^2}{1.055 \times 10^{-34}} \approx 1.518 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$$

$$(ck)^2 = (2.998 \times 10^8 \cdot 3.1416)^2 \approx 8.869 \times 10^{17} \ll (1.518 \times 10^{15})^2$$

$$\omega \approx 1.518 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$$

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega \approx 0.5 \cdot 1.055 \times 10^{-34} \cdot 1.518 \times 10^{15} \approx 8.01 \times 10^{-20} \text{ J} \approx 0.5 \text{ eV}$$

3.5 Passo 4: Propagador 3D discreto

$$\langle 0|T\{\phi(\mathbf{x}, t)\phi(\mathbf{y}, 0)\}|0\rangle = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}} L^3} \left(e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t + i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} + e^{i\omega_{\mathbf{k}} t - i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\right)$$

3.6 Passo 5: Soma → Integral contínuo

$$\sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{L^3} \to \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \quad \Rightarrow \quad \Delta_F^{3D}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t + i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}$$

3.7 Interpretação final

O propagador em 3D mostra como cada modo contribui à correlação do campo em três dimensões. Ele prepara a forma contínua, que será generalizada para 4D e usada em diagramas de Feynman.