Geodésicas e Conexões no Espaço-Tempo

Samuel Keullen Sales

9 de outubro de 2025

Origem da Ideia

A noção de **geodésica** vem da geometria diferencial. Em superfícies como a esfera, as geodésicas são as **linhas de menor distância** entre dois pontos (ex: arcos de grandes círculos).

Com Einstein (1915), a gravitação foi reinterpretada: não como força, mas como efeito da curvatura do espaço-tempo. Corpos livres seguem as **geodésicas** do espaço-tempo, não sentindo força, mas movendo-se de acordo com a geometria.

Intuição Física das Geodésicas

- Espaço-tempo plano: um corpo sem forças move-se em linha reta com velocidade constante. - Espaço-tempo curvo: a "reta" é deformada, mas o corpo ainda segue o caminho mais reto possível localmente.

Uma geodésica é a generalização da linha reta para um espaço curvo.

Para partículas massivas, a geodésica **maximiza o tempo próprio**. Para partículas sem massa, $ds^2 = 0$ (geodésicas nulas).

Equação das Geodésicas

A forma geral:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu{}_{\nu\rho}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0 \tag{1}$$

Legenda:

- $x^\mu(\lambda)$ — coordenadas do ponto na trajetória;
- λ — parâmetro ao longo da curva (tempo próprio τ);

- $\Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho}$ — símbolos de Christoffel, definem a curvatura local;
- $\frac{dx^{\nu}}{d\lambda}$ — vetor tangente à trajetória.

Destrinche:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x^{\mu}}{d\lambda^2} &\rightarrow \text{aceleração “reta” do corpo} \\
\Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho}\frac{dx^{\nu}}{d\lambda}\frac{dx^{\rho}}{d\lambda} &\rightarrow \text{correção devido à curvatura} \\
\text{Soma igual a zero} &\Rightarrow \text{movimento livre, sem força externa.}
\end{aligned}$$

Conexões e Derivada Covariante

A **conexão** define como transportar vetores de um ponto a outro em um espaço curvo. É formalizada via derivada covariante:

$$\nabla_{\mu}V^{\nu} = \partial_{\mu}V^{\nu} + \Gamma^{\nu}{}_{\mu\rho}V^{\rho} \tag{2}$$

Legenda:

- ∇_{μ} — derivada covariante na direção x^{μ};
- V^{ν} — vetor a ser derivado;
- $\Gamma^{\nu}{}_{\mu\rho}$ — símbolos de Christoffel.

Destrinche:

$$\begin{aligned}
\partial_{\mu}V^{\nu} &\rightarrow \text{variação usual do vetor} \\
\Gamma^{\nu}{}_{\mu\rho}V^{\rho} &\rightarrow \text{correção da curvatura} \\
\nabla_{\mu}V^{\nu} &\rightarrow \text{derivada que respeita a geometria do espaço-tempo}
\end{aligned}$$

Transporte Paralelo

Um vetor V^{μ} é transportado paralelamente se:

$$u^{\nu}\nabla_{\nu}V^{\mu} = 0 \tag{3}$$

onde $u^{\nu} = \frac{dx^{\nu}}{d\lambda}$ é o vetor tangente à curva.
Interpretação: O vetor não “gira” em relação à curvatura ao longo da trajetória.

Relação com Geodésicas

A geodésica é a curva cujo vetor tangente se transporta paralelamente:

$$u^\nu \nabla_\nu u^\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} u^\nu u^\rho = 0$$

Ou seja, equações das geodésicas = condição de transporte paralelo do vetor velocidade.

Símbolos de Christoffel (Conexão de Levi-Civita)

$$\Gamma^\mu{}_{\nu\rho} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} \left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial g_{\sigma\rho}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\sigma} \right) \tag{4}$$

Legenda:

- $g_{\mu\nu}$ — métrica do espaço-tempo;
- $g^{\mu\sigma}$ — inversa da métrica;
- Derivadas parciais medem variações da métrica nos diferentes pontos.

Destrinche: Γ indica como a direção de uma linha reta muda devido à curvatura local.

Exemplos

1. Espaço-Tempo Plano

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = 0$$

Interpretação: Movimento retilíneo e uniforme, sem força.

2. Espaço-Tempo Curvo (Schwarzschild)

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right) c^2dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1} dr^2 + r^2d\Omega^2$$

Explicação: - Tempo passa mais devagar perto da massa; - Espaço radial é "esticado"; - Geodésicas explicam órbitas e deflexão de luz.

Resumo

— Conceito — Significado — Equação — ————————————-—————— — Conexão — Como comparar vetores em pontos diferentes — $\Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho}$ — — Derivada covariante — Derivada respeitando curvatura — $\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma^{\nu}{}_{\mu\rho} V^\rho$ — — Transporte paralelo — Vetor não gira ao longo da curva — $u^\nu \nabla_\nu V^\mu = 0$ — — Geodésica — Curva cujo vetor tangente se transporta paralelamente — $u^\nu \nabla_\nu u^\mu = 0$ —