Exercício – Lagrangiano de um bloco preso a uma mola em plano inclinado

Enunciado: Um bloco de massa $m = 2\,\mathrm{kg}$ está preso a uma mola de constante elástica $k = 50\,\mathrm{N/m}$ em um plano inclinado de $30°$. Considerando $\sin(30°) = 0.5$ e $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$, deseja-se:

1. Analisar a hipótese de movimento $x(t) = 0.1\,t^2$ (m). 2. Calcular as energias cinética e potenciais. 3. Determinar a Lagrangiana $L = T - V$. 4. Verificar se a equação de Euler–Lagrange é satisfeita. 5. Recalcular aplicando a condição inicial do ponto de equilíbrio $x(0) = -0.196$ m e $\dot{x}(0) = 0$.

—

Dados iniciais

$$
\begin{aligned}
m &= 2\,\mathrm{kg} \\
k &= 50\,\mathrm{N/m} \\
\theta &= 30° \quad \Rightarrow \quad \sin\theta = 0.5 \\
g &= 9.8\,\mathrm{m/s^2}
\end{aligned}
$$

Hipótese de teste: $x(t) = 0.1\,t^2$ (m) Tempos para avaliar: $t = 0,\ 1,\ 2,\ 3$

—

Velocidade

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}(0.1t^2) = 0.2t$$

$$
\begin{aligned}
t_0 &: 0.2(0) = 0 \\
t_1 &: 0.2(1) = 0.2 \\
t_2 &: 0.2(2) = 0.4 \\
t_3 &: 0.2(3) = 0.6
\end{aligned}
$$

—

Aceleração

$$\ddot{x}(t) = \frac{d}{dt}(0.2t) = 0.2$$

$$
\begin{aligned}
t_0 &: 0.2 \\
t_1 &: 0.2 \\
t_2 &: 0.2 \\
t_3 &: 0.2
\end{aligned}
$$

—

Energia Cinética

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$t_0 : \tfrac{1}{2}(2)(0)^2 = 0$$
$$t_1 : \tfrac{1}{2}(2)(0.2)^2 = 0.04$$
$$t_2 : \tfrac{1}{2}(2)(0.4)^2 = 0.16$$
$$t_3 : \tfrac{1}{2}(2)(0.6)^2 = 0.36$$

—

Energia Potencial Gravitacional

$$V_g = mg\sin\theta\; x(t)$$

$$t_0 : 2(9.8)(0.5)(0.1 \cdot 0^2) = 0$$
$$t_1 : 2(9.8)(0.5)(0.1 \cdot 1^2) = 0.98$$
$$t_2 : 2(9.8)(0.5)(0.1 \cdot 2^2) = 3.92$$
$$t_3 : 2(9.8)(0.5)(0.1 \cdot 3^2) = 8.82$$

—

Energia Potencial da Mola

$$V_s = \frac{1}{2}k(x(t))^2$$

$$t_0 : \tfrac{1}{2}(50)(0.1 \cdot 0^2)^2 = 0$$
$$t_1 : \tfrac{1}{2}(50)(0.1 \cdot 1^2)^2 = 0.25$$
$$t_2 : \tfrac{1}{2}(50)(0.1 \cdot 2^2)^2 = 4.00$$
$$t_3 : \tfrac{1}{2}(50)(0.1 \cdot 3^2)^2 = 20.25$$

—

Energia Potencial Total

$$V = V_g + V_s$$

$$t_0 : 0 + 0 = 0$$
$$t_1 : 0.98 + 0.25 = 1.23$$
$$t_2 : 3.92 + 4.00 = 7.92$$
$$t_3 : 8.82 + 20.25 = 29.07$$

—

Lagrangiana

$$L = T - V$$

$$\begin{aligned}
&t_0 : 0 - 0 = 0\\
&t_1 : 0.04 - 1.23 = -1.19\\
&t_2 : 0.16 - 7.92 = -7.76\\
&t_3 : 0.36 - 29.07 = -28.71
\end{aligned}$$

—

Equação de Euler–Lagrange

$$L = \tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 - \left(mg\sin\theta\, x + \tfrac{1}{2}kx^2\right)$$

A equação de movimento resultante é:

$$m\ddot{x} + kx + mg\sin\theta = 0$$

Substituindo $x(t) = 0.1t^2$ e $\ddot{x} = 0.2$, observa-se que o termo não se anula, logo a hipótese não satisfaz a equação.

—

Condição de Equilíbrio Estático

Devido à presença do termo gravitacional, o equilíbrio não ocorre em $x = 0$, mas sim em:

$$x_{eq} = -\frac{mg\sin\theta}{k} = -\frac{9.8}{50} = -0.196\,\mathrm{m}$$

Vamos aplicar a condição inicial $x(0) = -0.196$ e $\dot{x}(0) = 0$ e revalidar os termos.

—

Nova avaliação (condição inicial $x(0) = -0.196$)

$$\begin{aligned}
&x(t) = -0.196 \quad \text{(constante)}\\
&\dot{x}(t) = 0\\
&\ddot{x}(t) = 0
\end{aligned}$$

Energia Cinética:

$$T = \tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 = 0$$

Potencial Gravitacional:

$$V_g = mg\sin\theta\, x = 2(9.8)(0.5)(-0.196) = -1.9208$$

Potencial da Mola:

$$V_s = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(50)(-0.196)^2 = 0.9604$$

Energia Potencial Total:

$$V = V_g + V_s = -1.9208 + 0.9604 = -0.9604$$

Lagrangiana:

$$L = T - V = 0 - (-0.9604) = 0.9604$$

—

Verificação da Equação de Movimento

$$m\ddot{x} + kx + mg\sin\theta = 0$$

Substituindo $x = -0.196$, $\ddot{x} = 0$:

$$2(0) + 50(-0.196) + 2(9.8)(0.5) = -9.8 + 9.8 = 0$$

Resultado: A equação é exatamente satisfeita (resíduo = 0). Logo, $x(t) = -0.196$ é uma solução estática estável, com energia constante no tempo.

—

Conclusão

A hipótese inicial $x(t) = 0.1t^2$ não satisfaz a equação de movimento, pois o termo da força resultante não se anula. Ao aplicar a condição de equilíbrio $x(0) = -0.196$ e $\dot{x}(0) = 0$, obtém-se uma solução estacionária ($x(t)$ constante) que satisfaz exatamente a equação de Euler–Lagrange e a equação de movimento.