Passos Antes de Propagadores de Feynman

(how the equations "converse" — resumo técnico)

Samuel Keullen Sales

October 13, 2025

Abstract

Documento-resumo que consolida a cadeia lógica que leva da formulação Lagrangiana e dos postulados de quantização até a noção de propagador (preparação imediata para diagramas de Feynman). Mostra as equações completas e suas formas simplificadas / desmanchadas, com interpretação física em cada etapa. Usa unidades naturais ($\hbar = c = 1$) para as fórmulas principais; quando útil são adicionadas indicações de conversão para SI.

1 Visão geral — sequência lógica (micro-fluxograma)

As peças principais e como elas se alimentam:

1. **Lagrangiano** $\mathcal{L}[\Phi]$ – define dinâmica e simetrias.

2. **Equação de movimento** via Euler–Lagrange: $\delta S/\delta\Phi = 0$.

3. **Momento canônico** $\Pi(x) = \partial\mathcal{L}/\partial(\partial_0\Phi)$ — fornece o par canônico (Φ, Π).

4. **Condicionamento canônico (quantização)**: impor $[\Phi(t, \mathbf{x}), \Pi(t, \mathbf{y})] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ (para bosons) ou anticonmutador para férmions.

5. **Expansão em modos / operadores**: $\Phi(x) = \sum\_k(a_k u_k(x) + a_k^\dagger u_k^*(x))$.

6. **Hamiltoniano** H **e geradores**: $H = \int d^3x\, T^{00}$; operadores de tempo-evolução e espectro de energias.

7. **Correlações/propagação**: quantidades físicas como $\langle 0|T\{\Phi(x)\Phi(y)\}|0\rangle$ surgem naturalmente e são a ponte para propagadores e Feynman diagrams.

2 Exemplo padrão: campo escalar livre (compacto e simplificado)

2.1 Lagrangiano e Euler–Lagrange

Campo escalar real $\phi(x)$:

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \tfrac{1}{2}m^2\phi^2. \tag{1}$$

Variação (Euler–Lagrange):

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\Box + m^2)\phi = 0.$$

Forma desmanchada: $\Box = \partial_t^2 - \nabla^2$, então

$$(\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2)\phi(t, \mathbf{x}) = 0.$$

Interpretação: equação de onda relativística para modos independentes (osciladores harmônicos por modo de momento).

2.2 Momento canônico e comutadores

Momento canônico:

$$\pi(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \phi)} = \partial_t \phi(t, \mathbf{x}).$$

Impor condição de quantização (bosônica):

$$[\phi(t, \mathbf{x}), \pi(t, \mathbf{y})] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \tag{2}$$

Isto transforma campos clássicos em operadores sobre o espaço de Fock.

2.3 Expansão em modos — forma completa e simplificada

Forma completa (campo livre, espaço infinito):

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \big(a_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{i\omega_{\mathbf{k}} t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \big), \tag{3}$$

com $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$.
Forma simplificada (modo discreto, caixa de volume V): escreva soma sobre modos $\mathbf{k}_n$ e fatores $1/\sqrt{2\omega_n V}$ — útil para contar modos.

2.4 Hamiltoniano e espectro — ligação com operadores

Hamiltoniano (normal-order omitted briefly):

$$H = \int d^3x \left(\tfrac{1}{2}\pi^2 + \tfrac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \tfrac{1}{2}m^2\phi^2 \right) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, \omega_{\mathbf{k}} \Big(a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + \tfrac{1}{2}\delta^{(3)}(0) \Big).$$

Desmanche: cada modo contribui com níveis de energia $\omega_{\mathbf{k}}(n + 1/2)$ — reconheça o oscilador harmônico.

3 Como as equações "conversam" — mecanismo passo a passo

Aqui mostramos o fluxo lógico com pequenos trechos algébricos (síntese):

1. Escrevo $\mathcal{L}[\phi]$ (equação 1).
2. Derivo EOM: $(\Box + m^2)\phi = 0$; soluções plane-wave $e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ com $\omega = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$.
3. Substituo soluções na expansão de modo (3) para parametrizar o espaço de soluções por amplitudes $a_{\mathbf{k}}$.
4. Os comutadores canônicos (2) implicam comutadores para $a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}}^\dagger$; isto define o álgebra de operadores do problema.
5. O Hamiltoniano escrito em termos de $a^\dagger a$ dá o espectro e a noção de partícula (ocupação de modo $\mathbf{k}$).
6. Com operadores e vácuo definidos, podemos calcular correladores como $\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle$ — que medem "como a excitação em y afeta x". Estas quantidades são a raiz dos propagadores.

4 Rumo aos propagadores — definição e origem

4.1 Time-ordered correlator (definição)

A função que chamamos de propagador de Feynman para um campo escalar é

$$\Delta_F(x-y) \equiv \langle 0|\, T\{\phi(x)\phi(y)\}\,|0\rangle, \tag{4}$$

onde T ordena temporalmente os operadores: $T\{A(x)B(y)\} = A(x)B(y)$ se $x^0 > y^0$, e $\pm B(y)A(x)$ caso contrário (sinal para fótons/férmions conforme estatística).

4.2 Como surge do formalismo anterior

Use a expansão em modos (3) e calcule o vácuo-valor:

$$\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}(x^0-y^0)+i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})},$$
$$\langle 0|\phi(y)\phi(x)|0\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} e^{+i\omega_{\mathbf{k}}(x^0-y^0)+i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}.$$

O time-ordering combina essas duas expressões e, via manipulação usando uma pequena prescrição $i\varepsilon$, resulta na forma integral 4D familiar:

$$\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ik\cdot(x-y)}.$$

(*Nota:* a derivação completa requer tratamento cuidadoso das integrais em k^0; o importante aqui é a origem: correlador de campo no vácuo construído a partir da expansão em modos e da álgebra de operadores.)

5 Comentários interpretativos — o que tudo isso significa

- O Lagrangiano codifica as leis locais (dinâmica) e as simetrias; as equações de movimento descrevem quais configurações são fisicamente permitidas.
- A quantização promove soluções clássicas a operadores; os comutadores garantem a estatística (Bose/Fermi) e fixam a estrutura algébrica.
- A expansão em modos organiza o campo em graus de liberdade discretizáveis (modos) — cada modo vira um oscilador quântico independente.
- Correladores (incluindo o propagador de Feynman) são objetos físicos: medem correlação causal entre pontos do espaço-tempo — no regime interativo tornam-se os blocos de construção de amplitudes (diagramas de Feynman).

6 Resumo rápido de equações-chave (lista para "ler")

$$\mathcal{L}[\phi] = \tfrac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \tfrac{1}{2}m^2\phi^2, \tag{5}$$

$$(\Box + m^2)\phi = 0, \tag{6}$$

$$\pi = \partial_t\phi, \tag{7}$$

$$[\phi(t,\mathbf{x}), \pi(t,\mathbf{y})] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{8}$$

$$\phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}(a_k e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + a_k^\dagger e^{i\omega t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}), \tag{9}$$

$$\Delta_F(x-y) = \langle 0|T\{\phi(x)\phi(y)\}|0\rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}e^{-ik\cdot(x-y)}. \tag{10}$$

Próximo passo sugerido (roteiro curto)

Para entrar em propagadores e diagramas de Feynman com segurança:

1. Revise integral em k^0 e técnica de contorno (resíduos).
2. Estude a derivação do propagador via integral de caminho (path integral) — mostra diretamente a origem combinatorial dos diagramas.
3. Pratique transformações Fourier/time-ordering em exemplos simples (1D) antes de encarar integrais 4D.