Tensor Métrico e Espaço-Tempo

História, Intuição, Fórmulas e Exercícios

Samuel Keullen Sales

9 de outubro de 2025

Resumo / Objetivo

Este texto fornece uma visão concisa e prática do *tensor métrico* $g_{\mu\nu}$: breve história, definição e intuição, fórmulas principais com legenda, exemplos ilustrativos e dois exercícios resolvidos (um em espaço plano e outro em espaço curvo). Cada exercício apresenta a fórmula usada e um *destrinche* passo a passo.

1 História (quem "inventou")

- **Carl Friedrich Gauss** desenvolveu ideias fundamentais sobre curvatura de superfícies (séc. XIX).
- **Bernhard Riemann** (1854) formulou a noção de variedades n-dimensionais e introduziu formalmente a ideia de uma métrica g dependente da posição — a base matemática do tensor métrico.
- **Hermann Minkowski** (início do séc. XX) mostrou que a relatividade restrita pode ser vista como geometria de um espaço-tempo 4D com métrica de assinatura $(-,+,+,+)$.
- **Albert Einstein** (1915) adotou o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ em Relatividade Geral: $g_{\mu\nu}$ descreve a geometria do espaço-tempo e a gravidade.

2 O que é e para que serve

O *tensor métrico* $g_{\mu\nu}(x)$ é uma família de funções (componentes de uma matriz) que define o comprimento físico/intervalo entre pontos infinitesimais:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)\, dx^\mu dx^\nu.$$

Serve para:

- medir distâncias e intervalos espaço-tempo;
- definir produtos escalares invariantes entre vetores: $A \cdot B = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu$;
- levantar/abaixar índices: $A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$;
- derivar conexões (Christoffel) e, daí, as geodésicas (trajetórias livres) e tensores de curvatura (Ricci, Riemann).

3 Fórmulas principais (com legenda)

Fórmulas

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu \tag{1}$$

$$A \cdot B = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu \tag{2}$$

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu, \qquad A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu \tag{3}$$

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta^\mu{}_\nu \tag{4}$$

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2} g^{\rho\sigma} \big(\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}\big) \tag{5}$$

$$\frac{d^2 x^\rho}{d\lambda^2} + \Gamma^\rho_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0 \qquad \text{(equação de geodésica)} \tag{6}$$

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \qquad \text{(Equações de Einstein)} \tag{7}$$

Legenda (símbolos)

$g_{\mu\nu}$ componentes do tensor métrico (matriz simétrica).

$g^{\mu\nu}$ inversa matricial de $g_{\mu\nu}$.

x^μ coordenadas (ex.: $x^0 = ct$ ou $x^0 = t$ conforme convenção; $x^{1,2,3}$ espaciais).

ds^2 intervalo infinitesimal (quadrado do "comprimento").

$\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ símbolos de Christoffel (conexão Levi-Civita, dependem de derivadas de g).

λ parâmetro ao longo da curva (podendo ser tempo próprio τ para partículas massivas).

$R_{\mu\nu}, R$ tensor de Ricci e escalar de curvatura (derivados de derivadas de Γ).

4 Exercícios resolvidos (2 casos: plano e curvo) — cada um: Fórmula, destrinche e passos

Exercício 1 — Espaço plano (Minkowski)

Enunciado: Uma partícula viaja com velocidade $v = 0.6\,c$ ao longo do eixo x. Dois eventos ocorrem no referencial do observador em $t_1 = 0$ e $t_2 = 10$ s. Calcule o tempo próprio τ medido pela partícula entre esses eventos, mostrando todos os passos onde o tensor métrico atua.

Fórmula usada: $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ e $d\tau = \dfrac{\sqrt{-\,ds^2}}{c}$ (para trajetórias timelike, com assinatura $(-,+,+,+)$).

Destrinche e passos

1. **Métrica de Minkowski (convenção $x^0 = ct$):**

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1,\ 1,\ 1,\ 1).$$

Ou, explicitando c em $x^0 = ct$, escreve-se $ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$.

2. **Dados:**
$$\Delta t = t_2 - t_1 = 10 \text{ s}, \qquad v = 0.6\,c.$$
3. **Deslocamento espacial ao longo de x:**
$$\Delta x = v\,\Delta t = 0.6\,c \times 10 \text{ s}.$$
Substitui $c = 3.0 \times 10^8$ m/s:
$$\Delta x = 0.6 \times 3.0 \times 10^8 \text{ m/s} \times 10 \text{ s}.$$
Cálculo passo a passo:
$$0.6 \times 3.0 = 1.8,$$
$$1.8 \times 10^8 \text{ m/s} \times 10 \text{ s} = 1.8 \times 10^9 \text{ m}.$$
Logo $\Delta x = 1.8 \times 10^9$ m.
4. **Calcule $c^2 \Delta t^2$:**
$$c^2 = (3.0 \times 10^8 \text{ m/s})^2 = 9.0 \times 10^{16} \text{ m}^2/\text{s}^2.$$
$$\Delta t^2 = (10 \text{ s})^2 = 100 \text{ s}^2.$$
$$c^2 \Delta t^2 = 9.0 \times 10^{16} \times 100 = 9.0 \times 10^{18} \text{ m}^2.$$
5. **Calcule Δx^2:**
$$\Delta x^2 = (1.8 \times 10^9 \text{ m})^2 = (1.8)^2 \times 10^{18} \text{ m}^2.$$
$$(1.8)^2 = 3.24 \quad \Rightarrow \quad \Delta x^2 = 3.24 \times 10^{18} \text{ m}^2.$$
6. **Compute ds^2 usando a métrica:**
$$ds^2 = -c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2 = -9.0 \times 10^{18} + 3.24 \times 10^{18}.$$
$$ds^2 = -5.76 \times 10^{18} \text{ m}^2.$$
Observe o papel do tensor métrico: multiplica $c^2 \Delta t^2$ por $g_{00} = -1$ e Δx^2 por $g_{11} = +1$.
7. **Tempo próprio:**
$$-ds^2 = 5.76 \times 10^{18} \text{ m}^2.$$
$$\sqrt{-ds^2} = \sqrt{5.76 \times 10^{18}} = \sqrt{5.76} \times 10^9 = 2.4 \times 10^9 \text{ m}.$$
(porque $\sqrt{5.76} = 2.4$ e $\sqrt{10^{18}} = 10^9$.)
$$\tau = \frac{\sqrt{-ds^2}}{c} = \frac{2.4 \times 10^9 \text{ m}}{3.0 \times 10^8 \text{ m/s}}.$$
$$\frac{2.4}{3.0} = 0.8, \quad 10^9/10^8 = 10 \quad \Rightarrow \quad \tau = 0.8 \times 10 = 8.0 \text{ s}.$$
8. **Resposta:** O tempo próprio medido pela partícula entre os eventos é $\boxed{\tau = 8.0 \text{ s}}$.

Exercício 2 — Espaço curvo (superfície de esfera 2D)
Enunciado: Considere a métrica da superfície esférica de raio R (coordenadas (θ, φ)):
$$ds^2 = R^2\big(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\big).$$
(a) Derive explicitamente os símbolos de Christoffel $\Gamma^\theta_{\varphi\varphi}$ e $\Gamma^\varphi_{\theta\varphi}$. (b) Calcule o comprimento ds para $R = 1$, $\theta = \frac{\pi}{4}$, $d\theta = 0.1$ e $d\varphi = 0.2$. Mostre cada passo.

Fórmula usada:
$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2} g^{\rho\sigma}\big(\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}\big).$$

Destrinche e passos (parte a: Christoffel)

1. **Componentes do tensor métrico (na base (θ, φ)):**

$$g_{\theta\theta} = R^2, \qquad g_{\varphi\varphi} = R^2 \sin^2\theta, \qquad g_{\theta\varphi} = 0.$$

2. **Componentes da inversa $g^{\mu\nu}$:**

$$g^{\theta\theta} = \frac{1}{R^2}, \qquad g^{\varphi\varphi} = \frac{1}{R^2 \sin^2\theta}.$$

   (inversa de matriz diagonal é inverso de cada elemento.)

3. **Calcule $\Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi}$:** usando a fórmula, os únicos termos não nulos envolvem derivadas em relação a θ:

$$\Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} = -\tfrac{1}{2}\, g^{\theta\theta}\, \partial_\theta g_{\varphi\varphi}.$$

   (porque os outros termos são nulos devido a $g_{\theta\varphi} = 0$ e simetria).

4. **Derivada:**

$$\partial_\theta g_{\varphi\varphi} = \partial_\theta\big(R^2 \sin^2\theta\big) = R^2 \cdot 2\sin\theta\cos\theta = 2R^2 \sin\theta\cos\theta.$$

5. **Substituindo:**

$$\Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} = -\tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \big(2R^2 \sin\theta\cos\theta\big).$$

   Simplificando:

$$\Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta.$$

6. **Calcule $\Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi}$ (simétrico em θ, φ nas posições μ, ν):**

$$\Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} = \tfrac{1}{2} g^{\varphi\varphi} \partial_\theta g_{\varphi\varphi}.$$

$$\Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{R^2 \sin^2\theta} \cdot \big(2R^2 \sin\theta\cos\theta\big).$$

   Simplificando:

$$\Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta.$$

7. **Resumo simbólico:**

$$\boxed{\Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta, \qquad \Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} = \cot\theta.}$$

Destrinche e passos (parte b: comprimento ds num deslocamento)

1. **Fórmula:**

$$ds^2 = R^2\big(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\big).$$

2. **Dados numéricos:** $R = 1$, $\theta = \frac{\pi}{4}$, $d\theta = 0.1$, $d\varphi = 0.2$.

3. **Calcule $\sin\theta$ e $\sin^2\theta$:**

$$\theta = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.70710678.$$

$$\sin^2\theta = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} = 0.5.$$

4. **Calcule $d\theta^2$ e $d\varphi^2$:**

$$d\theta^2 = (0.1)^2 = 0.01, \qquad d\varphi^2 = (0.2)^2 = 0.04.$$

5. **Substitua na métrica:**

$$ds^2 = 1^2\big(0.01 + 0.5 \times 0.04\big).$$

$$0.5 \times 0.04 = 0.020.$$

$$ds^2 = 0.01 + 0.020 = 0.030.$$

6. **Comprimento físico:**

$$ds = \sqrt{0.030} \approx 0.17320508.$$

7. **Resposta:** $\boxed{ds \approx 0.1732 \text{ (unidades de } R = 1).}$

Conclusão curta

- O tensor métrico é o objeto central que transforma coordenadas em medidas físicas (distâncias, tempos, ângulos) e gera, via derivadas, a conexão e a curvatura.
- Em espaços planos (Minkowski) a métrica é constante e os cálculos envolvidos são diretos (ex.: tempo próprio via ds^2); em espaços curvos a métrica depende de coordenadas, exigindo derivadas para obter $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ e, daí, as geodésicas e tensores de curvatura.

Se quiser, eu posso transformar este conteúdo em um PDF formatado com numeração de equações/figuras ou ampliar com um exercício extra (Schwarzschild) — diga que eu já gero o .tex finalizado.