Resumo Detalhado de 4-Vetores na Relatividade Especial

Samuel Keullen Sales

October 8, 2025

1. Introdução

Este documento detalha os conceitos de transformações de Lorentz, 4-vetores, energia e momento (4-momento) e 4-força na relatividade especial. Inclui explicações formais, interpretações, fórmulas destrinchadas, legendas e exemplos práticos.

2. 4-Vetores

Um 4-vetor é um objeto covariante sob transformações de Lorentz. Os principais 4-vetores são:

$$\begin{aligned}
&X^\mu = (ct, \mathbf{x}) && \text{4-posição} \\
&U^\mu = \frac{dX^\mu}{d\tau} = \gamma(c, \mathbf{v}) && \text{4-velocidade} \\
&P^\mu = mU^\mu = (E/c, \mathbf{p}) && \text{4-momento} \\
&F^\mu = \frac{dP^\mu}{d\tau} && \text{4-força}
\end{aligned}$$

Observação: O 4-vetor posição é independente, o 4-momento depende do momento 3D e da massa, e a 4-força depende do 4-momento. O 4-velocidade tem magnitude c no tempo próprio.

3. Energia e Momento (4-Momento)

3.1 Forma científica

$$P^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right) \quad \text{4-momento, componente temporal = energia, espacial = momento} \tag{1}$$

$$E = \gamma mc^2 \quad \text{Energia total, incluindo repouso} \tag{2}$$

$$\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v} \quad \text{Momento 3D relativístico} \tag{3}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{Fator de Lorentz} \tag{4}$$

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2 \quad \text{Relação fundamental energia-momento, invariância relativística} \tag{5}$$

3.2 Forma destrinchada

- **Energia de repouso:** $E_0 = mc^2$ (partícula em repouso)
- **Energia cinética relativística:** $E_k = (\gamma - 1)mc^2$

- **Momento 3D:** $\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$
- **Verificação da relação:** $E^2 - (pc)^2 = (mc^2)^2$

3.3 Exemplo prático

Dado: $m = 1$ kg, $v = 0.6c$

1. Fator de Lorentz: $\gamma = 1/\sqrt{1 - 0.6^2} = 1.25$
2. Energia total: $E = \gamma mc^2 \approx 1.125 \times 10^{17}$ J
3. Momento: $\mathbf{p} = \gamma mv = 0.75c \approx 2.25 \times 10^8$ kg m/s
4. Verificação: $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2 \approx 1.125 \times 10^{17}$ J

4. 4-Força

4.1 Forma científica

$$F^\mu = \frac{dP^\mu}{d\tau} \qquad \text{4-força como derivada do 4-momento pelo tempo próprio} \tag{6}$$

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \qquad \text{Componentes espaciais, força clássica} \tag{7}$$

4.2 Interpretação

A 4-força depende do 4-momento, garantindo covariância. Componentes espaciais se reduzem à força clássica em referenciais comuns.

5. Relação Hierárquica dos 4-Vetores

- 4-posição X^μ: independente
- 4-velocidade $U^\mu = dX^\mu/d\tau$: derivada da posição
- 4-momento $P^\mu = mU^\mu$: depende da 4-velocidade e massa
- 4-força $F^\mu = dP^\mu/d\tau$: depende do 4-momento

Ou seja: $X^\mu \to U^\mu \to P^\mu \to F^\mu$.

6. Outros 4-Vetores (Revisão rápida)

$$\begin{aligned} X^\mu &= (ct, \mathbf{x}) && \text{4-posição} \\ U^\mu &= \gamma(c, \mathbf{v}) && \text{4-velocidade} \\ P^\mu &= mU^\mu && \text{4-momento} \\ F^\mu &= dP^\mu/d\tau && \text{4-força} \end{aligned}$$