

Espaço-Tempo Extremo: Buracos Negros e Cosmologia Básica

Samuel Keullen Sales

October 11, 2025

1. Buracos Negros

História e Descobridores

- 1796: John Michell e Pierre-Simon Laplace propuseram "estrelas escuras", cuja gravidade impede a luz de escapar.
- 1915-1916: Einstein publica a Teoria da Relatividade Geral.
- 1916: Karl Schwarzschild encontra a solução exata para uma massa esférica não carregada e sem rotação.
- 1960s: John Wheeler populariza o termo "black hole". Roger Penrose e Stephen Hawking estudam singularidades.

Conceitos Principais

Horizonte de Eventos

Limite além do qual nada escapa do buraco negro. Intuição física: ponto sem retorno.

Singularidade

Ponto central de densidade infinita e curvatura extrema. Intuição física: "coração" do buraco negro.

Fórmulas Relevantes

Raio de Schwarzschild:

$$r_s = \frac{2GM}{c^2} \quad (1)$$

- G = constante gravitacional ($6.674 \times 10^{-11}, \text{m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$)
- M = massa do buraco negro
- c = velocidade da luz ($3.0 \times 10^8, \text{m/s}$)

Dilatação do tempo próximo ao horizonte:

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}}, dt \quad (2)$$

- $d\tau$ = tempo medido pelo observador próximo
- dt = tempo medido pelo observador distante
- r = distância radial do centro do buraco negro

Exemplo de Cálculo

Raio de Schwarzschild de um buraco negro de 10 massas solares ($M_{\odot} \approx 2 \times 10^{30}$, kg):

$$r_s = \frac{2 \cdot 6.674 \times 10^{-11} \cdot 10 \cdot 2 \times 10^{30}}{(3.0 \times 10^8)^2} \approx 29.7, \text{ km} \quad (3)$$

Exercício Resolvido

Tempo próprio a $3 r_s$ de um buraco negro de 10 massas solares durante 1 hora para observador distante:

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}}, dt = \sqrt{1 - \frac{2 \cdot 6.674 \times 10^{-11} \cdot 10 \cdot 2 \times 10^{30}}{89100 \cdot 10^3 \cdot (3 \cdot 10^8)^2}} \cdot 3600, s \approx 3172, s \quad (4)$$

Resposta: 53 minutos e 2 segundos.

2. Cosmologia Básica (FRW)

História

- 1920s: Edwin Hubble descobre que galáxias se afastam \rightarrow universo em expansão.
- 1930s: Friedmann e Lemaître desenvolvem soluções para as equações de Einstein.
- 1998: Descobre-se expansão acelerada (energia escura).

Conceitos Principais

Métrica FRW (Friedmann–Robertson–Walker)

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 (d\chi^2 + \chi^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta, d\phi^2)) \quad (5)$$

- $a(t)$ = fator de escala
- χ = coordenada comoving radial
- θ, ϕ = coordenadas angulares

Equações de Friedmann

Primeira equação:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (6)$$

Segunda equação:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (7)$$

Legenda:

- ρ = densidade de energia do universo
- p = pressão média
- k = curvatura espacial (0 plano, +1 fechado, -1 aberto)
- Λ = constante cosmológica

Exemplo de Cálculo

Distância física radial de uma galáxia comoving $\chi = 3000$, Mpc:

$$D(t) = a(t)\chi \quad (8)$$

Hoje ($a_0 = 1$): $D_0 = 3000$, Mpc

Passado ($a = 0.5$): $D_{\text{passado}} = 1500$, Mpc

Incluindo ângulos

$$D_{\text{angular}} = a(t) \sqrt{\chi^2 + \chi^2(\Delta\theta^2 + \sin^2 \theta, \Delta\phi^2)} \quad (9)$$

- $\theta = 45^\circ = 0.785 \text{ rad}$, $\phi = 30^\circ = 0.524 \text{ rad}$
- $\chi^2(\Delta\theta^2 + \sin^2 \theta \Delta\phi^2) = 9,000,000 \cdot 0.753 \approx 6,777,000$
- Soma com χ^2 radial: $9,000,000 + 6,777,000 = 15,777,000$
- Raiz quadrada: $D_{\text{angular}} \approx 3972, \text{ Mpc}$

Exercícios Resolvidos

1. Distância física radial hoje: $D_0 = 3000, \text{ Mpc}$
2. Distância física radial no passado ($a = 0.5$): $D_{\text{passado}} = 1500, \text{ Mpc}$
3. Distância física 3D hoje (com ângulos): $D_{\text{angular}} \approx 3972, \text{ Mpc}$