

Exercícios Resolvidos de Relatividade Especial e Geral

Samuel Keullen Sales

October 11, 2025

1. Buraco Negro Schwarzschild: Tempo Próprio

Objetivo: Calcular o tempo próprio de um observador próximo a $2r_s$.

Dados:

- Massa: $M = 10M_{\odot} = 2 \times 10^{31} \text{ kg}$
- Constante gravitacional: $G = 6.674 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg}/\text{s}^2$
- Velocidade da luz: $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
- Distância radial: $r = 2r_s$
- Intervalo de tempo observado de longe: $dt = 3600 \text{ s}$

Cálculo: Raio de Schwarzschild:

$$r_s = \frac{2GM}{c^2} = \frac{2 \cdot 6.674 \times 10^{-11} \cdot 2 \times 10^{31}}{(3 \cdot 10^8)^2} \approx 29.65 \text{ km}$$

Distância do observador: $r = 2r_s \approx 59.3 \text{ km}$

Tempo próprio:

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}} dt = \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} \cdot dt = \sqrt{0.5} \cdot 3600 \approx 2545.6 \text{ s} \approx 42 \text{ min}$$

Interpretação: Tempo passa mais devagar próximo ao buraco negro.

2. Buraco Negro Kerr: Órbita Circular

Objetivo: Calcular o período de uma órbita circular equatorial.

Dados:

- Massa: $M = 10M_{\odot}$
- Parâmetro de rotação: $a = 0.5r_s \approx 14.83 \text{ km}$
- Raio orbital: $r = 3r_s \approx 88.95 \text{ km}$

Cálculo: Frequência angular aproximada:

$$\Omega = \frac{\sqrt{GM/r^3}}{1 + a\sqrt{GM/r^3}/c}$$

$$GM = 6.674 \times 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{31} = 1.3348 \times 10^{21} \text{ m}^3/\text{s}^2$$

$$r^3 = (88.95 \times 10^3)^3 \approx 7.04 \times 10^{14} \text{ m}^3$$

$$\sqrt{GM/r^3} \approx \sqrt{1.3348 \times 10^{21}/7.04 \times 10^{14}} \approx 1367 \text{ s}^{-1}$$

$$1 + a\sqrt{GM/r^3}/c \approx 1 + 14.83 \cdot 1367/3 \cdot 10^8 \approx 1.00007$$

$$\Omega \approx 1366.9 \text{ s}^{-1}$$

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} \approx 0.0046 \text{ s}$$

Interpretação: A órbita é extremamente rápida devido à proximidade do buraco negro.

3. FRW: Distâncias de Galáxias

Objetivo: Calcular distância física de galáxias comoving.

Dados:

- Coordenada comoving: $\chi = 3000 \text{ Mpc}$
- Fator de escala hoje: $a_0 = 1$
- Fator de escala no passado: $a = 0.5$

Cálculo:

$$D_0 = a_0 \chi = 1 \cdot 3000 = 3000 \text{ Mpc}$$

$$D_{\text{passado}} = a \chi = 0.5 \cdot 3000 = 1500 \text{ Mpc}$$

Interpretação: Galáxias estavam mais próximas no passado.

4. FRW Avançado: Equações de Friedmann

Objetivo: Calcular taxa de expansão H e aceleração \ddot{a}/a .

Dados:

- Densidade: $\rho = 1 \times 10^{-26} \text{ kg/m}^3$
- Pressão: $p = 0$
- Constante cosmológica: $\Lambda = 0$
- Curvatura: $k = 0$

Cálculo:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho = 5.585 \times 10^{-36} \Rightarrow H \approx 7.47 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho \approx -2.792 \times 10^{-36} \text{ s}^{-2}$$

$$a(t = 0.5t_0) = (0.5)^{2/3} \approx 0.63$$

Interpretação: Expansão desacelerada, galáxias mais próximas no passado.

5. Exercício Integrado: Observador viajando do buraco negro à galáxia

Objetivo: Integrar métricas Schwarzschild, Kerr e FRW.

1. **Tempo próprio Schwarzschild:** $d\tau \approx 2545.6 \text{ s}$
2. **Órbita Kerr:** $T \approx 0.0046 \text{ s}$

3. **Expansão FRW:** Distância hoje: $D_0 = 3000 \text{ Mpc}$ Distância no passado: $D_{\text{passado}} = 1500 \text{ Mpc}$ Taxa de expansão: $H \approx 7.47 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1}$
Aceleração: $\ddot{a}/a \approx -2.792 \times 10^{-36} \text{ s}^{-2}$

Interpretação: O observador experimenta **tempo dilatado localmente** (buracos negros) e **expansão global desacelerada** (universo FRW). Esta integração mostra como **RG conecta escalas locais e cosmológicas**.