Lagrange e Equações de Euler–Lagrange

Resumo Teórico e Aplicações

Samuel Keullen Sales

October 5, 2025

Introdução

O formalismo de Lagrange é uma reformulação elegante da mecânica clássica. Em vez de tratar forças diretamente (como faz Newton com $F = ma$), Lagrange descreve o movimento de um sistema a partir de suas **energias** e **restrições**.

A grande vantagem é que ele permite resolver problemas complexos com coordenadas não-cartesianas, sistemas com restrições e, futuramente, se generaliza facilmente para a Relatividade e a Mecânica Quântica.

1. Conceitos Fundamentais

1.1 Lagrangiana

A Lagrangiana é definida como:

$$L = T - V$$

onde:

- T é a energia cinética do sistema;
- V é a energia potencial.

Forma expandida:

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = \frac{1}{2} m \dot{q_i}^2 - V(q_i)$$

Essa expressão depende das coordenadas generalizadas q_i, suas derivadas temporais $\dot{q}_i$, e do tempo t.

—

1.2 Equação de Euler–Lagrange

A condição para que o caminho físico seja aquele realmente seguido pelo sistema é obtida do **princípio da ação estacionária**:

$$\delta S = 0, \quad \text{onde } S = \int_{t_1}^{t_2} L \, dt$$

A partir dessa condição, obtém-se a equação de Euler–Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Forma destrinchada:

$$\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}_{\text{momento conjugado}} \quad \xrightarrow{d/dt} \quad \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)}_{\text{variação temporal do momento}} \quad - \quad \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_i}}_{\text{variação espacial da Lagrangiana}} \quad = 0$$

O resultado expressa o equilíbrio dinâmico do sistema.

—

2. Exemplos Fundamentais

2.1 Partícula Livre

Para uma partícula de massa m movendo-se livremente:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

Aplicando Euler–Lagrange:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) - 0 = 0 \Rightarrow m\ddot{x} = 0$$

Interpretação: A aceleração é nula, portanto o movimento é retilíneo uniforme. Esse é o caso mais simples — e é o ponto de partida para relatividade.

—

2.2 Massa em Mola (Oscilador Harmônico)

Para uma mola ideal com constante k:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

Notas para memorizar:

- **Energia Cinética (T)**:
  - Massa em mola: $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \to$ energia do movimento da massa ao longo do eixo da mola. Pense: *quanto mais rápido se move, maior T.*
- **Energia Potencial (V)**:
  - Massa em mola: $V = \frac{1}{2}kx^2 \to$ energia armazenada na mola devido à deformação. Pense: *quanto mais a mola é comprimida/esticada, maior V.*

Resumo prático: T mede "energia de movimento" (liberdade), V mede "energia de restrição" (força restauradora). O sistema oscila equilibrando essas duas energias.

Aplicando Euler–Lagrange:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Forma padrão:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \text{onde } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

O sistema oscila harmonicamente — solução:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

—

2.3 Pêndulo Simples

Para um pêndulo de massa m e comprimento l:

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos\theta)$$

Notas para memorizar:

- **Energia Cinética** (T):
  - Pêndulo: $T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$ → energia associada à velocidade angular da massa. Pense: *quanto mais rápido o pêndulo balança, maior T.*
- **Energia Potencial** (V):
  - Pêndulo: $V = mgl(1 - \cos\theta)$ → energia armazenada devido à altura relativa da massa. Pense: *quanto mais alto o pêndulo sobe, maior V.*

Resumo prático: T mede "energia de movimento" (liberdade), V mede "energia de restrição" (força restauradora). O sistema oscila equilibrando essas duas energias.

Aplicando Euler–Lagrange:

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0$$

ou

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

Para pequenos ângulos ($\sin\theta \approx \theta$):

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

que é novamente o **oscilador harmônico simples**.

—

3. Interpretação Física e Conservações

3.1 Quando o tempo não aparece explicitamente em L:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow E = \dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \text{constante}$$

Interpretação: Conservação da energia total.

3.2 Quando uma coordenada q_i não aparece em L:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0$$

Interpretação: Conservação do momento conjugado (momento linear ou angular, dependendo do sistema).

—

4. Perguntas Conceituais e Respostas

1. **O que representa fisicamente a Lagrangiana $L = T - V$?**
   Representa a diferença entre a energia de movimento e a energia de restrição do sistema. Minimizar a ação associada a L gera as equações de movimento.

2. **Por que usamos coordenadas generalizadas q_i?**
   Porque sistemas com restrições têm menos graus de liberdade do que o espaço 3D total; q_i descreve apenas o essencial.

3. **O que ocorre se L não depende de t explicitamente?**
   A energia total é conservada.

4. **O que ocorre se L não depende de uma coordenada q_i?**
   O momento conjugado correspondente é conservado.

5. **Como Lagrange se relaciona com Newton?**
   Ambos produzem as mesmas equações de movimento; Lagrange o faz via energia e coordenadas generalizadas, sem lidar com forças diretamente.

—

5. Conclusão

O formalismo de Lagrange e as equações de Euler–Lagrange formam o **núcleo conceitual** de toda a física moderna:

- Na **Relatividade**, a Lagrangiana incorpora o espaço-tempo de Minkowski;
- Na **Mecânica Quântica**, ela se transforma em uma densidade de campo na formulação de Feynman;
- E com o **Teorema de Noether**, conecta simetrias a leis de conservação.

Estudar Lagrange é o primeiro passo sólido rumo à Física Teórica Moderna.