QFT: Simetrias e Conservação — Noether & Gauge

Guia com equações destrinchadas e exercícios resolvidos

Samuel Keullen Sales

October 13, 2025

Abstract

Este documento apresenta Noether e invariância de gauge de forma prática: (i) exposição formal e legenda termo-a-termo das equações-chave; (ii) exercícios resolvidos com valores numéricos e conversão para SI; (iii) interpretações físicas prontas para registrar em relatórios. O objetivo é preparar você para a prova cobrindo cálculo e interpretação.

Contents

1 Introdução: o papel das simetrias 2

2 Teorema de Noether — enunciado e legenda das fórmulas 2

2.1 Enunciado (forma curta) 2

2.2 Construção explícita da corrente (campo escalar) 2

3 Exemplo (desmontado) — invariância de fase global $U(1)$ para campo escalar complexo 2

3.1 Lagrangiano 2

3.2 Transformação 3

3.3 Corrente de Noether (derivação curta) 3

3.4 Verificação com ondas planas (preparando exercício 1) 3

4 Invariância translacional e tensor energia-momento 3

4.1 Definição 3

4.2 Exemplo prático (campo escalar real) 3

5 Invariância de gauge local (esboço e legenda) 4

5.1 Transformação local $U(1)$ 4

6 Exercícios resolvidos (passo a passo) — preparo para a prova 4

6.1 Exercício 1 (resolvido) — corrente de Noether para onda plana 4

6.2 Exercício 2 (resolvido) — tensor energia-momento para onda senoidal (1+1D simplificada) 5

6.3 Exercício 3 (resolvido) — derivada covariante e invariância de gauge local 6

7 Checklist de assuntos para prova (resumo rápido) 7

8 Referências rápidas (para revisão) 7

1 Introdução: o papel das simetrias

Breve: simetrias contínuas implicam correntes conservadas (Noether). Simetrias locais (gauge) exigem campos de gauge para preservar invariância e introduzem interações.

2 Teorema de Noether — enunciado e legenda das fórmulas

2.1 Enunciado (forma curta)

Se a ação $S = \int d^4x\, \mathcal{L}(\phi, \partial\phi)$ é invariante sob uma transformação contínua de parâmetro pequeno α:

$$\phi(x) \to \phi'(x) = \phi(x) + \delta\phi(x), \qquad \delta\phi(x) = \alpha\, \Delta\phi(x),$$

então existe uma corrente j^μ conservada:

$$\boxed{\partial_\mu j^\mu = 0.}$$

2.2 Construção explícita da corrente (campo escalar)

Para transformações internas (não dependem de x), a corrente de Noether é, tipicamente,

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi + \text{c.c.},$$

onde "c.c." indica conjugado complexo quando necessário.

Legenda (destrinchada):

- $\mathcal{L}$: Lagrangiano, função das variáveis de campo e suas derivadas.
- $\partial\mathcal{L}/\partial(\partial_\mu\phi)$: momento canônico associado à variação de ϕ (derivada conjugada).
- $\delta\phi$: variação do campo sob a transformação de simetria (proporcional ao gerador da simetria).
- $\partial_\mu j^\mu = 0$: conservação local da quantidade associada (integrando sobre espaço gera quantidade global conservada).

3 Exemplo (desmontado) — invariância de fase global $U(1)$ para campo escalar complexo

3.1 Lagrangiano

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^* (\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi.$$

Legenda: primeiro termo = derivadas cinéticas (energia cinética do campo), segundo = termo de massa.

3.2 Transformação

$$\phi(x) \to e^{i\alpha}\phi(x) \approx \phi(x) + i\alpha\phi(x) \quad (\text{para } \alpha \ll 1).$$

Variação: $\delta\phi = i\alpha\phi$.

3.3 Corrente de Noether (derivação curta)

$$j^\mu = i\big(\phi\partial^\mu\phi^* - \phi^*\partial^\mu\phi\big).$$

Destrinchamento:

- $\phi\partial^\mu\phi^*$: campo vezes derivada do conjugado (fluxo de fase).
- sinal i: surge da variação de fase complexa.
- j^0 (componente temporal) corresponde à densidade de carga; j^i são densidades de corrente espacial.

3.4 Verificação com ondas planas (preparando exercício 1)

Se $\phi(x) = \phi_0 e^{-ip\cdot x}$ então

$$\partial^\mu\phi = -ip^\mu\phi, \qquad \partial^\mu\phi^* = +ip^\mu\phi^*.$$

Substituindo:

$$j^\mu = i\big(\phi(ip^\mu\phi^*) - \phi^*(-ip^\mu\phi)\big) = i(2ip^\mu|\phi|^2) = -2p^\mu|\phi|^2.$$

Interpretação: corrente proporcional a p^μ e à densidade $|\phi|^2$; seu sinal depende da convenção de corrente (alguns livros definem com sinal trocado — o que importa é consistência).

4 Invariância translacional e tensor energia-momento

4.1 Definição

Se $\mathcal{L}$ é invariante sob $x^\mu \to x^\mu + a^\mu$, então a corrente de Noether é o tensor energia-momento:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial^\nu\phi - g^{\mu\nu}\mathcal{L}.$$

Legenda:

- T^{00}: densidade de energia; T^{0i}: densidade de momento; T^{ij}: fluxo de momento.
- $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$: expressa conservação local de energia-momento.

4.2 Exemplo prático (campo escalar real)

Com $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2$,

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu\phi\,\partial^\nu\phi - g^{\mu\nu}\Big(\tfrac{1}{2}(\partial_\alpha\phi)^2 - \tfrac{1}{2}m^2\phi^2\Big).$$

Observação: essa é a forma *canônica*; existem formas simétricas (Belinfante) úteis em GR.

5 Invariância de gauge local (esboço e legenda)

5.1 Transformação local $U(1)$

$$\phi(x) \to e^{i\alpha(x)}\phi(x).$$

Sem campo de gauge, $\partial_\mu \phi$ não transforma covariantemente; por isso definimos a derivada covariante:

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu,$$

e exigimos que $A_\mu \to A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha(x)$ para que

$$D_\mu \phi \to e^{i\alpha(x)} D_\mu \phi.$$

Lagrangiano gauge-invariante (escalares + Maxwell):

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^*(D^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi - \tfrac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Legenda: A_μ é o campo de gauge (potencial eletromagnético), $F_{\mu\nu}$ é a força (campo elétrico/magnético).

6 Exercícios resolvidos (passo a passo) — preparo para a prova

Observação: em todos os exercícios trabalho primeiramente em unidades naturais ($\hbar = c = 1$) e só converto quando solicitado; as conversões usam

$$1 \text{ eV} = 1.602176634 \times 10^{-19} \text{ J}.$$

6.1 Exercício 1 (resolvido) — corrente de Noether para onda plana

Enunciado: para $\phi(x) = \phi_0 e^{-ip\cdot x}$ com amplitude ϕ_0 real (escolha $\phi_0 = 1$ para simplicidade) e transformação $U(1)$, calcule j^μ e interprete fisicamente. Converta j^0 para unidades SI assumindo $p^0 = E = 1$ eV.

Solução:

1. Fórmula da corrente:
$$j^\mu = i(\phi \partial^\mu \phi^* - \phi^* \partial^\mu \phi).$$

2. Para $\phi = \phi_0 e^{-ip\cdot x}$ com ϕ_0 real:
$$\partial^\mu \phi = -ip^\mu \phi, \quad \partial^\mu \phi^* = +ip^\mu \phi^*.$$

3. Substituindo:
$$j^\mu = i\big(\phi(ip^\mu \phi^*) - \phi^*(-ip^\mu \phi)\big) = i(2ip^\mu |\phi|^2) = -2p^\mu |\phi|^2.$$

4. Escolhendo $\phi_0 = 1$ (portanto $|\phi|^2 = 1$) e $p^\mu = (E, \mathbf{p})$ com $E = 1$ eV:
$$j^\mu = -2p^\mu = (-2E,\ -2\mathbf{p}).$$

5. Componente temporal (densidade de carga) em unidades de eV:

$$j^0 = -2E = -2 \text{ eV}.$$

6. Converter para SI (Joule): multiplicar por $1.602176634 \times 10^{-19}$:

$$j^0_{\text{SI}} = -2 \times 1.602176634 \times 10^{-19} \text{ J} \approx -3.204 \times 10^{-19} \text{ J}.$$

Interpretação física (pronta para relatório):
A corrente de Noether associada à invariância de fase global é proporcional ao quadrimomento do modo e à densidade $|\phi|^2$. A componente temporal j^0 representa a densidade de carga (para um campo com carga unitária). O sinal depende da convenção; fisicamente importa a conservação $\partial_\mu j^\mu = 0$, ou seja, a quantidade total de carga (integral de j^0 em todo o espaço) é constante no tempo.

Observação sobre dimensões: aqui tratamos $|\phi|^2$ adimensional por escolha de normalização (modo de exercício). Em análises físicas completas as unidades do campo devem ser tratadas consistentemente, mas o procedimento algébrico e a interpretação permanecem iguais.

6.2 Exercício 2 (resolvido) — tensor energia-momento para onda senoidal (1+1D simplificada)

Enunciado: dado $\phi(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$ em 1+1 dimensões e Lagrangiano livre $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_t\phi)^2 - \frac{1}{2}(\partial_x\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2$, calcule $T^{\mu\nu}$, verifique $\partial_\mu T^{\mu 0} = 0$ (conservação de energia), e obtenha a densidade de energia T^{00} numericamente para $A = 1$, $k = 1 \text{ m}^{-1}$, $m = 0$ (modo massless), no instante $t = 0$ e $x = 0$. Converta o resultado para SI.
Solução:

1. Fórmula do tensor (canônico, para campo real):

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu\phi\,\partial^\nu\phi - g^{\mu\nu}\mathcal{L}.$$

Em 1+1D com sinal de métrica $g^{00} = 1$, $g^{11} = -1$.

2. Derivadas da onda:

$$\partial_t\phi = -\omega A\cos(kx - \omega t), \qquad \partial_x\phi = kA\cos(kx - \omega t).$$

3. Densidade de energia (componente T^{00}):

$$T^{00} = \tfrac{1}{2}(\partial_t\phi)^2 + \tfrac{1}{2}(\partial_x\phi)^2 + \tfrac{1}{2}m^2\phi^2.$$

(para esse Lagrangiano a forma simplificada é a soma de energia cinética, energia de gradiente e energia de massa)

4. Substituindo $m = 0$, $A = 1$, $k = 1 \text{ m}^{-1}$, em $t = 0$, $x = 0$: $\cos(0) = 1$.

$$\partial_t\phi|_{0,0} = -\omega, \quad \partial_x\phi|_{0,0} = k.$$

5. Para campo massless a relação de dispersão é $\omega = ck$. Em SI $c = 2.997\,924\,58 \times 10^8$ m/s, com $k = 1$ m^{-1}:
$$\omega = ck = 2.9979 \times 10^8 \text{ s}^{-1}.$$
6. Agora calcule T^{00} (mantendo unidades SI para energia density):
$$T^{00} = \tfrac{1}{2}(\omega^2) + \tfrac{1}{2}(k^2) = \tfrac{1}{2}(\omega^2 + k^2).$$
Atenção: em unidades naturais $\hbar = c = 1$ as dimensões mudam; aqui estamos convertendo para SI *apenas* pela relação $\omega = ck$. Para dar um valor em SI consistente precisamos assumir unidade de ϕ; para ilustração pegamos A sem dimensão e calculamos a quantidade numérica (unidade será (field units)$^2 \cdot$ s^{-2}). Substituindo números:
$$\omega^2 \approx (2.9979 \times 10^8)^2 \approx 8.9876 \times 10^{16} \text{ s}^{-2}, \qquad k^2 = 1 \text{ m}^{-2}.$$
$$T^{00} \approx \tfrac{1}{2}(8.9876 \times 10^{16} + 1) \approx 4.4938 \times 10^{16} \text{ (unidade: field}^2 \cdot \text{s}^{-2}).$$

Interpretação física pronta:
O componente T^{00} representa a densidade de energia local do campo. Para ondas eletromagnéticas ou campos físicos, a densidade inclui energia cinética (derivada temporal), energia de variação no espaço (gradiente) e termos de massa. A conservação $\partial_\mu T^{\mu 0} = 0$ garante que a energia total (integral espacial de T^{00}) é constante no tempo.

Nota prática: Em cálculos reais a unidade de ϕ é física e deve ser usada para obter Joules por metro cúbico; aqui mostramos procedimento e número escala para treinamento algebraico.

6.3 Exercício 3 (resolvido) — derivada covariante e invariância de gauge local

Enunciado: considere transformação local $\alpha(x) = \beta x$ com $\beta = 0.05$ (length)$^{-1}$ (escolha de conveniência), campo escalar $\phi(x)$ e campo de gauge A_μ. Mostre que, sem A_μ, a Lagrangiana não é invariante e que a introdução da derivada covariante $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ restaura invariância desde que A_μ transforme como $A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu\alpha/e$.

Solução (passos lógicos):

1. Sem gauge: $\partial_\mu\phi \to \partial_\mu(e^{i\alpha(x)}\phi) = e^{i\alpha(x)}(\partial_\mu\phi + i(\partial_\mu\alpha)\phi)$. O termo adicional $i(\partial_\mu\alpha)\phi$ impede que $\partial_\mu\phi$ transforme na mesma forma simples.
2. Com covariante: defina $D_\mu\phi \equiv (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi$. Sob transformação local:
$$\phi \to e^{i\alpha(x)}\phi, \qquad A_\mu \to A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x).$$
3. Então
$$D_\mu\phi \to (\partial_\mu + ieA_\mu - i\partial_\mu\alpha)\big(e^{i\alpha}\phi\big) = e^{i\alpha}(\partial_\mu + ieA_\mu)\phi = e^{i\alpha}D_\mu\phi,$$
ou seja, $D_\mu\phi$ transforma covariantemente e o termo $(D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi)$ é invariante localmente.

Interpretação física pronta:
A necessidade do campo de gauge A_μ é puramente geométrica: para promover uma simetria global a local (dependente de x) é necessário introduzir uma conexão que compense as variações locais. Fisicamente isso representa a introdução de uma força mediada por A_μ (no caso $U(1)$, o campo eletromagnético).

7 Checklist de assuntos para prova (resumo rápido)

- Saber derivar correntes de Noether a partir de variações de campos.
- Interpretar j^μ e $T^{\mu\nu}$ fisicamente (densidade de carga, energia, momento).
- Realizar verificações com ondas planas (modo útil para diagramas e propagadores).
- Entender por que a invariância de gauge local exige introdução de A_μ e como D_μ transforma.
- Saber converter entre unidades naturais e SI quando necessário (usar 1 eV $= 1.602 \times 10^{-19}$ J e $\hbar c \simeq 197.326$ eV $\cdot$ nm se precisar ligar energia e comprimento).

8 Referências rápidas (para revisão)

Livros sugeridos (português/inglês): Peskin & Schroeder, Srednicki, Weinberg, Ryder. (Use-os para ver derivação canônica e convenções de sinais — a forma pode mudar por convenção, mas o método é o mesmo.)