Exemplo Resolvido: Pacote Gaussiano Livre

Samuel Keullen Sales

October 11, 2025

Exercício Resolvido: Evolução de um Pacote Gaussiano Livre

Um elétron de massa $m_e = 9.109 \times 10^{-31}$ kg está inicialmente localizado em $x = 0$ com uma função de onda gaussiana de largura σ_0 e número de onda central k_0. A função de onda inicial é:

$$\psi(x,0) = \left(\frac{1}{\pi\sigma_0^2}\right)^{1/4} e^{-x^2/(2\sigma_0^2)} e^{ik_0 x}$$

Dados numéricos:

$$\sigma_0 = 2.0 \times 10^{-10}\,\mathrm{m}, \quad k_0 = 5.0 \times 10^9\,\mathrm{m}^{-1}, \quad t = 2.0 \times 10^{-15}\,\mathrm{s},$$

$$\hbar = 1.054 \times 10^{-34}\,\mathrm{J{\cdot}s}, \quad m_e = 9.109 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}.$$

1. Função de onda inicial

(a) Cálculo do fator de normalização:

$$A = \left(\frac{1}{\pi\sigma_0^2}\right)^{1/4}$$

$$\sigma_0^2 = (2.0 \times 10^{-10})^2 = 4.0 \times 10^{-20}$$

$$\pi\sigma_0^2 = 3.1416 \times 4.0 \times 10^{-20} = 1.25664 \times 10^{-19}$$

$$\frac{1}{\pi\sigma_0^2} = 7.95775 \times 10^{18}$$

$$A = (7.95775 \times 10^{18})^{1/4} = 5.320 \times 10^4 \quad [\mathrm{m}^{-1/2}]$$

(b) Substituindo os valores:

$$\psi(x,0) = 5.320 \times 10^4\, e^{-x^2/(8.0\times10^{-20})} e^{i(5.0\times10^9)x}$$

2. Momento e velocidade

(a) Momento médio:

$$p_0 = \hbar k_0$$

$$p_0 = (1.054 \times 10^{-34})(5.0 \times 10^{9}) = 5.27 \times 10^{-25}\,\text{kg}\cdot\text{m/s}$$

(b) Velocidade média:

$$v = \frac{p_0}{m_e}$$

$$v = \frac{5.27 \times 10^{-25}}{9.109 \times 10^{-31}} = 5.7847 \times 10^{5}\,\text{m/s}$$

3. Evolução temporal

(a) Cálculo do fator complexo:

$$\tau = \frac{\hbar t}{2m_e\sigma_0^2}$$

$$\hbar t = (1.054 \times 10^{-34})(2.0 \times 10^{-15}) = 2.108 \times 10^{-49}$$

$$2m_e = 2 \times 9.109 \times 10^{-31} = 1.8218 \times 10^{-30}$$

$$2m_e\sigma_0^2 = (1.8218 \times 10^{-30})(4.0 \times 10^{-20}) = 7.2872 \times 10^{-50}$$

$$\tau = \frac{2.108 \times 10^{-49}}{7.2872 \times 10^{-50}} = 2.892743$$

$$i\frac{\hbar t}{2m_e\sigma_0^2} = i\,2.892743$$

(b) Denominador complexo:

$$1 + i\frac{\hbar t}{2m_e\sigma_0^2} = 1 + i\,2.892743$$

(c) Função de onda no tempo t:

$$\psi(x,t) = A\left(1 + i\frac{\hbar t}{2m_e\sigma_0^2}\right)^{-1/2} e^{-\frac{(x-vt)^2}{4\sigma_0^2(1+i\frac{\hbar t}{2m_e\sigma_0^2})}} e^{i\frac{p_0 x}{\hbar}} e^{-i\frac{p_0^2 t}{2m_e\hbar}}$$

Substituindo valores:

$$\psi(x,t) = 5.320 \times 10^{4}(1 + i\,2.892743)^{-1/2} e^{-\frac{(x-5.7847\times10^{5}t)^2}{4(4.0\times10^{-20})(1+i\,2.892743)}} e^{i(5.0\times10^{9})x} e^{-i\,2.8927}$$

4. Densidade de probabilidade

(a) Largura no tempo:

$$\sigma_t = \sigma_0\sqrt{1 + \left(\frac{\hbar t}{2m_e\sigma_0^2}\right)^2}$$

$$\tau^2 = (2.892743)^2 = 8.36894$$

$$1 + \tau^2 = 9.36894$$

$$\sqrt{1+\tau^2} = 3.0616$$

$$\sigma_t = (2.0 \times 10^{-10}) \times 3.0616 = 6.1232 \times 10^{-10}\,\text{m}$$

(b) Densidade de probabilidade:

$$P(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t} e^{-\frac{(x-vt)^2}{2\sigma_t^2}}$$

(c) Posição central:

$$x_c = vt = (5.7847 \times 10^5)(2.0 \times 10^{-15}) = 1.1569 \times 10^{-9}\,\text{m}$$

5. Interpretação física

(a) Largura do pacote: A largura σ_t aumenta com o tempo devido à dispersão quântica. Isso ocorre porque diferentes componentes de momento do pacote se propagam com velocidades ligeiramente diferentes, resultando em um espalhamento gradual da função de onda.

(b) Posição média: A posição média $\langle x \rangle = x_c(t)$ se move com velocidade constante $v = p_0/m_e$, ou seja, o centro do pacote segue a trajetória clássica de uma partícula livre.

Conclusão

Com o passar do tempo, o pacote gaussiano se desloca e se espalha simultaneamente. O centro se move como uma partícula clássica livre, enquanto a incerteza em posição aumenta devido à dispersão quântica.