Lagrangiana, Euler-Lagrange e Noether: Um Guia Destrinchado

Samuel Keullen Sales

October 6, 2025

1. Lagrange

Em um momento do sistema, calculamos a Lagrangiana:

$$L = T - V$$

onde T é a energia cinética e V é a energia potencial naquele instante. Cada L representa o *momento do sistema* naquele instante.

2. Ação

Para avaliar um caminho completo do sistema, integramos L ao longo do tempo:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt$$

Discretizando:

$$S \approx (L_1 \cdot \Delta t) + (L_2 \cdot \Delta t) + \cdots + (L_n \cdot \Delta t)$$

Cada L_i é a Lagrangiana naquele instante, e Δt é o intervalo de tempo.

3. Perturbação da trajetória

Criamos uma pequena perturbação na trajetória:

$$q(t) \to q(t) + \delta q(t)$$

Isso altera T e V, gerando um Lagrangiano perturbado $L(q + \delta q, \dot{q} + \dot{\delta q})$ e uma ação perturbada $S[q + \delta q]$.

Comparando com a ação original:

$$\delta S = S[q + \delta q] - S[q]$$

Intuição prática: imagine desenhar um caminho e empurrar levemente com o dedo. Se a ação não muda, você está no caminho natural do sistema.

4. Condição do caminho físico (Euler-Lagrange)

O caminho físico faz a ação ser estacionária:

$$\delta S = 0$$

Isso leva à equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

Resolvendo, obtemos $q(t)$, a trajetória real do sistema.

5. Simetria e Noether

Se o sistema possui simetria, ou seja, se a Lagrangiana é invariante sob uma transformação:

$$L(q, \dot{q}, t) \text{ invariante}$$

então, pelo Teorema de Noether, existe uma quantidade conservada.
A forma geral da quantidade conservada é:

$$Q = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i$$

onde δq_i representa a mudança infinitesimal da coordenada q_i associada à simetria.

Como testar simetria na prática

Para descobrir se energia, momento linear ou angular é conservado:

1. Escolha a transformação que deseja testar (tempo, espaço, rotação).
2. Crie a Lagrangiana perturbada aplicando a transformação infinitesimal:

$$q_i \to q_i + \delta q_i$$

3. Calcule a variação da ação:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \big(L(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \dot{\delta q_i}) - L(q_i, \dot{q}_i)\big) dt$$

4. Se $\delta S = 0$, a Lagrangiana é invariante e existe uma quantidade conservada Q.

Exemplo prático de simetria

- Se L não depende do tempo, a simetria temporal garante que a energia total é conservada: $E = T + V$.
- Se L não depende de uma coordenada espacial x, a simetria de translação garante que o momento linear é conservado.
- Se L é invariante sob rotações, o momento angular é conservado.

Intuição: se o sistema "não sente" a transformação, existe algo que permanece constante ao longo do tempo. Noether identifica exatamente essa quantidade.

6. Energia que sobra

A energia total do sistema, quando existe simetria temporal, é:

$$E = T + V$$

Comparando com a Lagrangiana:

$$L = T - V$$

a diferença instantânea é:

$$E - L = (T + V) - (T - V) = 2V$$

Intuição prática:

- $E = T + V$ é a energia total que realmente se conserva ao longo do tempo.
- L define a ação e a trajetória correta do sistema.
- A diferença $E - L = 2V$ mostra matematicamente como a energia potencial contribui para a relação entre energia total e Lagrangiana em cada instante.

7. Resumo mental

- $L = T - V \to$ momento do sistema
- $\int L dt \to$ ação
- Perturbação $q(t) \to q(t) + \delta q \to L$ perturbado $\to \delta S$
- $\delta S = 0 \to$ Euler-Lagrange $\to$ caminho físico real
- Simetria $\to$ Noether $\to$ quantidade conservada:

$$Q = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i$$

- Energia conservada: $E = T + V$, diferença $E - L = 2V$

8. Observação sobre perturbação e simetria

Se a Lagrangiana perturbada não muda a ação ($\delta S = 0$), a Lagrangiana é simétrica para aquela transformação. Isso garante, por Noether, que existe uma quantidade física constante. A simetria prática do sistema identifica exatamente qual grandeza se conserva.