Tensor de Ricci e Escalar de Curvatura

Samuel Keullen Sales

October 9, 2025

1 História e Motivação

O **Tensor de Ricci** foi introduzido por **Gregorio Ricci-Curbastro** e seu aluno **Tullio Levi-Civita** no final do século XIX, no contexto do desenvolvimento do cálculo tensorial, também conhecido como *Ricci Calculus*. O objetivo inicial era criar ferramentas matemáticas para estudar a **geometria de variedades curvas** de forma covariante, ou seja, independente do sistema de coordenadas.

Mais tarde, Albert Einstein percebeu que o Tensor de Ricci era essencial para descrever **como a matéria curva o espaço-tempo** em sua teoria da **Relatividade Geral** (1915).

O **Escalar de Curvatura** surge naturalmente ao se contrair o Tensor de Ricci e fornece um valor escalar que representa a curvatura global em cada ponto de uma variedade. Ele é usado nas equações de Einstein para relacionar curvatura e matéria.

2 Intuição Física

- O **Tensor de Ricci** mede a curvatura que afeta o volume de uma pequena bola de partículas em queda livre. Ele é derivado do Tensor de Riemann, resumindo as informações relevantes para volumes.
- O **Escalar de Curvatura** é a média da curvatura em todas as direções. Em termos físicos:
  - $R > 0$: espaço curvado positivamente (como uma esfera)
  - $R < 0$: espaço curvado negativamente (como um hiperboloide)
  - $R = 0$: espaço plano

3 Definições Matemáticas

3.1 Tensor de Ricci

O Tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ é obtido a partir do **Tensor de Riemann** $R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu}$ através da contração de um índice:

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu}$$

Legenda:

- $R_{\mu\nu}$: Tensor de Ricci (2 índices, simétrico)
- $R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu}$: Tensor de Riemann (4 índices)
- ρ: índice de contração (somado)

3.2 Escalar de Curvatura

O Escalar de Curvatura R é obtido contraindo o Tensor de Ricci com a métrica $g^{\mu\nu}$:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

Legenda:

- R: Escalar de Curvatura
- $g^{\mu\nu}$: Tensor métrico inverso
- $R_{\mu\nu}$: Tensor de Ricci

4 Exemplos de Aplicação

4.1 Espaço plano (Minkowski)

Métrica em 4D:

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$$

Cálculo do Tensor de Ricci e Escalar de Curvatura:

$$R_{\mu\nu} = 0, \quad R = 0$$

Interpretação: Espaço-tempo plano, sem curvatura.

4.2 Superfície esférica 2D

Métrica em coordenadas esféricas (θ, ϕ):

$$ds^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2$$

Cálculo do Tensor de Ricci:

$$R_{\theta\theta} = 1, \quad R_{\phi\phi} = \sin^2\theta$$

Escalar de Curvatura:

$$R = \frac{2}{r^2}$$

Interpretação: Espaço curvo com curvatura positiva constante; geodésicas se convergem.

5 Exercícios Resolvidos

Exercício 1: Espaço plano 2D

Problema: Calcule $R_{\mu\nu}$ e R para o espaço plano 2D.

Solução passo a passo:

1. Métrica do espaço plano 2D: $ds^2 = dx^2 + dy^2$
2. Cálculo do Tensor de Riemann: todos os coeficientes $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = 0$
3. Tensor de Ricci: $R_{\mu\nu} = R^\rho{}_{\mu\rho\nu} = 0$
4. Escalar de Curvatura: $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = 0$

Resultado: $R_{\mu\nu} = 0$, $R = 0$ (espaço plano)

Exercício 2: Superfície esférica de raio r

Problema: Verifique que $R = 2/r^2$.

Solução passo a passo:

1. Métrica: $ds^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\phi^2$
2. Tensor de Ricci:
$$R_{\theta\theta} = 1, \quad R_{\phi\phi} = \sin^2\theta$$
3. Escalar de Curvatura:
$$R = g^{\theta\theta}R_{\theta\theta} + g^{\phi\phi}R_{\phi\phi}$$
Onde $g^{\theta\theta} = 1/r^2$, $g^{\phi\phi} = 1/(r^2\sin^2\theta)$
4. Substituindo:
$$R = \frac{1}{r^2}\cdot 1 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cdot\sin^2\theta = \frac{2}{r^2}$$

Resultado: Escalar de Curvatura positivo constante, indicando espaço curvo.