Pendulo Simples: Período Exato e Aproximado

Enunciado

Um pêndulo simples tem comprimento $l = 0.5\,\mathrm{m}$ e é solto com ângulo inicial $\theta_0 = 10^\circ$, sem velocidade inicial ($\dot{\theta}_0 = 0$). Utilize $g = 9.81\,\mathrm{m/s}^2$.

1. Determine a equação do movimento usando Lagrangiana / Euler–Lagrange.
2. Faça a aproximação de pequeno ângulo e calcule o período T_{aprox}.
3. Calcule o período exato T_{exato} usando a série para $K(k)$ e estime o erro percentual da aproximação linear.
4. Avalie se a hipótese de pequeno ângulo é aceitável ($< 1\%$ de erro).

a) Equação do movimento via Lagrangiana

A energia cinética do pêndulo é:

$$T = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

A energia potencial é:

$$V = mgl(1 - \cos\theta)$$

A Lagrangiana é:

$$L = T - V = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos\theta)$$

Aplicando a equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(ml^2\dot{\theta}) + mgl\sin\theta = 0$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$$

—

b) Aproximação de pequeno ângulo

Para $\theta \ll 1$, $\sin\theta \approx \theta$:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

Período aproximado:

$$T_{\text{aprox}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Cálculo:

$$\frac{l}{g} = \frac{0.5}{9.81} \approx 0.05097$$

$$\sqrt{\frac{l}{g}} = \sqrt{0.05097} \approx 0.22576$$

$$T_{\text{aprox}} = 2\pi \cdot 0.22576 \approx 1.4185\,\text{s}$$

—

c) Período exato via série de $K(k)$

Passo 1: Conversão para radianos

$$\theta_0 = 10^\circ \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0.17453\,\text{rad}$$

Dividindo por 2:

$$\frac{\theta_0}{2} = 0.08725$$

Passo 2: Cálculo de k

$$k = \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \approx \sin(0.08725) \approx 0.0871$$

$$k^2 = 0.0075$$

Passo 3: Série de $K(k)$

$$K(k) = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1}{4}k^2 + \frac{9}{64}k^4 + \frac{25}{256}k^6 + \frac{1225}{16384}k^8\right)$$

Cálculo detalhado:

$$\frac{1}{4}k^2 = 0.25 \cdot 0.0075 = 0.001875$$

$$\frac{9}{64}k^4 = 0.140625 \cdot (0.0075)^2 = 7.91 \times 10^{-6}$$

$$\frac{25}{256}k^6 = 0.09765625 \cdot (0.0075)^3 \approx 4.11 \times 10^{-8}$$

$$\frac{1225}{16384}k^8 \approx 0.0748 \cdot (0.0075)^4 \approx 2.36 \times 10^{-10}$$

Soma:

$$1 + 0.001875 + 7.91 \times 10^{-6} + 4.11 \times 10^{-8} + 2.36 \times 10^{-10} \approx 1.00187795$$

$$K(k) \approx \frac{\pi}{2} \cdot 1.00187795 \approx 1.5737$$

—

Passo 4: Período exato

$$T_{\text{exato}} = 4\sqrt{\frac{l}{g}}K(k)$$

$$4 \cdot 0.22576 \cdot 1.5737 \approx 1.421\,\mathrm{s}$$

—

d) Comparação e validação da hipótese de pequeno ângulo

Diferença em segundos:

$$\Delta T = T_{\text{exato}} - T_{\text{aprox}} = 1.421 - 1.4185 \approx 0.0025\,\text{s}$$

Erro percentual:

$$\text{Erro} = \frac{\Delta T}{T_{\text{exato}}} \cdot 100 \approx \frac{0.0025}{1.421} \cdot 100 \approx 0.16\%$$

Conclusão: O erro é menor que 1%, logo a aproximação de pequeno ângulo é aceitável para $\theta_0 = 10°$.