Guia Interpretativo de Quantização de Campos (unidades naturais e conversões)

Samuel Keullen Sales

October 13, 2025

Abstract

Documento focado em **quantização de campos: scalar, spinor (Dirac) e gauge (Maxwell)**. Objetivo: ensinar *detalhe como* ler, desmontar *e* aplicar *cada fórmula. Usamos unidades naturais ($\hbar = c = 1$) para escrever as fórmulas de forma compacta e fornecemos conversões completas para unidades SI (J, m, s) em exemplos numéricos. Cada seção contém:*

1. *Fórmula formal com legenda.*
2. *Desmontagem termo-a-termo (interpretação física).*
3. *Quantização passo-a-passo (como surgem operadores, condições de contorno, modos).*
4. *Um exemplo numérico totalmente detalhado (todas as contas intermediárias) primeiro em unidades naturais, depois convertido para SI.*
5. *Conclusão interpretativa — como um físico "lê" a equação.*

Constantes e fatores de conversão (referência)

Em unidades naturais ($\hbar = c = 1$) as quantidades energéticas são expressas em eV (ou MeV etc.) e comprimentos em eV^{-1}. Para converter entre sistemas usamos:

$$\hbar c = 197.3269804 \text{ MeV} \cdot \text{fm} = 1.973269804 \times 10^{-7} \text{ eV} \cdot \text{m}, \tag{1}$$
$$1 \text{ m} = 5.067730717679395 \times 10^{6} \text{ eV}^{-1}, \tag{2}$$
$$1 \text{ eV} = 1.602176634 \times 10^{-19} \text{ J}. \tag{3}$$

(Valores numéricos usados nos exemplos.)

1 Campo Escalar

1.1 Fórmula formal (unidades naturais)

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \tfrac{1}{2}m^2\phi^2. \tag{4}$$

Legenda: $\phi(x)$ campo escalar real; m massa (em eV em unidades naturais); índices espaço-temporais $\mu = 0, 1, 2, 3$.

1.2 Desmanche e interpretação

Escrevemos explicitamente termos temporal e espacial (assumindo métrica $+, -, -, -$):

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}(\partial_t\phi)^2 - \tfrac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \tfrac{1}{2}m^2\phi^2. \tag{5}$$

Interpretação:

- $\frac{1}{2}(\partial_t\phi)^2$: densidade de energia cinética (temporal).
- $-\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2$: energia associada a variações espaciais (modos, gradientes).
- $-\frac{1}{2}m^2\phi^2$: termo de massa (potencial local) que define energia de repouso das excitações.

1.3 Quantização — passos essenciais

1. Identifique conjugado canônico: $\pi(x) = \partial\mathcal{L}/\partial(\partial_t\phi) = \partial_t\phi$.
2. Imponha comutadores canônicos no mesmo tempo:

$$[\phi(t,\mathbf{x}), \pi(t,\mathbf{y})] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}).$$

3. Expansão em modos (campo livre):

$$\phi(t,\mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}}\left(a_{\mathbf{k}}e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + a^\dagger_{\mathbf{k}}e^{i\omega_{\mathbf{k}}t-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\right), \tag{6}$$

com $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}$ em unidades naturais.

4. Operadores seguem: $[a_{\mathbf{k}}, a^\dagger_{\mathbf{k}'}] = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$.

1.4 Exemplo numérico detalhado (massless 1D) — passo a passo

Objetivo: calcular energia de ponto zero do modo fundamental numa caixa 1D de comprimento $L = 1$ m.

1) Trabalhando em unidades naturais (energia em eV):

- Converta o comprimento para unidades naturais:

$$L(\mathrm{eV}^{-1}) = L(\mathrm{m}) \times 5.067730717679395 \times 10^6 \ \mathrm{eV}^{-1}.$$

  Substituindo $L = 1$ m:

$$L = 5.067730717679395 \times 10^6 \ \mathrm{eV}^{-1}.$$

- Modos discretos (Dirichlet): $k_n = n\pi/L$. Para $n = 1$:

$$k_1 = \pi/L = \frac{3.141592653589793}{5.067730717679395 \times 10^6} = 6.199209919796972 \times 10^{-7} \ \mathrm{eV}.$$

  (Em unidades naturais k tem dimensão de energia.)

- Para campo massless $\omega_1 = |k_1| = 6.199209919796972 \times 10^{-7}$ eV.

- Energia de ponto zero por modo: $E_{0,1} = \frac{1}{2}\omega_1 = 3.099604959898486 \times 10^{-7}$ eV.

2) Conversão para SI (Joules):

$$E_{0,1}(\text{J}) = E_{0,1}(\text{eV}) \times 1.602176634 \times 10^{-19} \text{ J/eV}.$$

Substituindo:

$$E_{0,1} = 3.099604959898486 \times 10^{-7} \times 1.602176634 \times 10^{-19} = 4.9661146413798605 \times 10^{-26} \text{ J}.$$

(Operação mostrada: multiplicação direta dos mantissas e soma dos expoentes.)

3) Interpretação física (conclusão): em unidades naturais a energia do modo fundamental è 3.10×10^{-7} eV; em SI isto corresponde a $\sim 5 \times 10^{-26}$ J — macroscopicamente desprezível. O procedimento mostrou: converter comprimento, determinar k, obter ω, aplicar fator 1/2 e converter unidades.

2 Campo Spinor (Dirac)

2.1 Fórmula formal (unidades naturais)

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi. \tag{7}$$

Legenda: ψ espinor de Dirac (4 componentes); m massa em eV; γ^μ matrizes de Dirac.

2.2 Desmanche e interpretação

- O termo cinético $i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$ contém o termo temporal que gera o conjugado canônico e os termos espaciais que dão a dependência de momento.
- O termo $-m\bar{\psi}\psi$ gera a energia de repouso por partícula m (em unidades naturais, energia = massa).

2.3 Quantização — passos essenciais

1. Expansão em modos (campo livre):

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}} \left(b_{\mathbf{p},s} u_s(\mathbf{p}) e^{-iE_\mathbf{p}t} + d^\dagger_{\mathbf{p},s} v_s(\mathbf{p}) e^{iE_\mathbf{p}t} \right),$$

   com $E_\mathbf{p} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$.

2. Anticomutadores: $\{b, b^\dagger\} = \{d, d^\dagger\} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$.

3. Hamiltoniano (normal-order): $H = \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_\mathbf{p}(b^\dagger b + d^\dagger d)$.

2.4 Exemplo numérico detalhado (elétron, dois modos ocupados)

Objetivo: ocupar 1 elétron e 1 pósitron em cada um dos dois primeiros modos de uma caixa 1D $L = 1$ m; calcular energia total.

1) Unidades naturais — preparação:

- Massa do elétron: $m_e = 511$ keV $= 5.11 \times 10^5$ eV (usamos 511 000 eV para precisão mostrada).
- Converter comprimento L para eV^{-1}: $L = 5.067730717679395 \times 10^6$ eV^{-1} (como antes).
- Modos: $k_n = n\pi/L$; para $n = 1, 2$ calculamos k_1, k_2 (valores em eV):

$$k_1 = 6.199209919796972 \times 10^{-7} \text{ eV}, \quad k_2 = 1.2398419839593944 \times 10^{-6} \text{ eV}.$$

2) Calcular energias por modo (unidades naturais):

$$E_n = \sqrt{k_n^2 + m_e^2}.$$

Como $m_e \gg k_n$ (511 000 eV vs 10^{-6} eV), numericamente $E_n \approx m_e$ com grande precisão. Escrevemos explicitamente:

$$\begin{aligned} E_1 &= \sqrt{(6.1992 \times 10^{-7})^2 + (5.11 \times 10^5)^2} \\ &\approx 5.11 \times 10^5 \text{ eV}. \end{aligned}$$

3) Energia por ocupação (1 elétron + 1 pósitron) em cada modo:

$$E_{\text{modo},n} = E_n(N_{b_n} + N_{d_n}) = m_e(1+1) = 2m_e.$$

Assim,

$$E_{\text{modo},1} = 2 \times 511\,000 \text{ eV} = 1.022 \times 10^6 \text{ eV}.$$

4) Energia total para dois modos:

$$E_{\text{total}} = 2 \times E_{\text{modo},1} = 2.044 \times 10^6 \text{ eV} = 2.044 \text{ MeV}.$$

5) Conversão para SI (J):

$$E_{\text{total}}(\text{J}) = 2.044 \times 10^6 \times 1.602176634 \times 10^{-19} = 3.2748490398959997 \times 10^{-13} \text{ J}.$$

(Operação: multiplicação das mantissas e soma dos expoentes.)

Conclusão interpretativa: como as contribuições de momento são insignificantes frente à massa, cada partícula carrega sua energia de repouso m_e, e ocupar partículas e antipartículas em modos distintos soma energia linearmente. O procedimento mostrou: converter L, calcular k_n, comparar com m, decidir aproximação, somar ocupações e converter unidades.

3 Campo Gauge (Maxwell)

3.1 Fórmula formal (unidades naturais)

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{8}$$

Legenda: A_μ potencial 4-vetor; campos físicos $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ extraídos de $F_{\mu\nu}$.

3.2 Desmanche e interpretação

Em unidades naturais a densidade de energia por volume é

$$\mathcal{H} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2).$$

Cada modo do campo eletromagnético tem duas polarizações físicas (helicidades) e energia por modo ω (no caso livre, $\omega = |\mathbf{k}|$).

3.3 Quantização — passos essenciais

1. Imponha fixação de gauge conveniente (p.ex. Coulomb ou gauge de Lorenz) para remover graus não físicos.

2. Expansão em modos transversais:

$$A^\mu(x) = \sum_{\lambda=1}^{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}} \left(\epsilon^\mu(\mathbf{k}, \lambda) a_{\mathbf{k},\lambda} e^{-i\omega t} + \text{h.c.} \right).$$

3. Comutadores para operadores fotônicos: $[a_{\mathbf{k},\lambda}, a^\dagger_{\mathbf{k}',\lambda'}] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\delta_{\lambda\lambda'}$.

3.4 Exemplo numérico detalhado (dois modos, duas polarizações)

Objetivo: calcular energia de ponto zero somando dois modos ($n = 1, 2$) e duas polarizações por modo para caixa $L = 1$ m.

1) Em unidades naturais:

- Como antes, $L = 5.067730717679395 \times 10^6\ \text{eV}^{-1}$.
- Modos: $k_1 = 6.199209919796972 \times 10^{-7}$ eV, $\quad k_2 = 1.2398419839593944 \times 10^{-6}$ eV.
- Frequências: $\omega_n = |k_n|$ para fótons (massless).
- Energia por polarização e modo: $E_{n,\text{polar}} = \frac{1}{2}\omega_n$. Calculados:

  $E_{1,\text{polar}} = 3.099604959898486 \times 10^{-7}$ eV, $\quad E_{2,\text{polar}} = 6.199209919796972 \times 10^{-7}$ eV.

2) Somando polarizações e modos (unidades naturais):

$$E_\text{total}(\text{eV}) = 2\times(E_{1,\text{polar}}+E_{2,\text{polar}}) = 2\times(3.0996\times10^{-7}+6.1992\times10^{-7}) = 1.8597629759390915\times10^{-6}\ \text{eV}.$$

3) Conversão para SI:

$$E_\text{total}(\text{J}) = 1.8597629759390915\times10^{-6}\times1.602176634\times10^{-19} = 2.9796687848279163\times10^{-25}\ \text{J}.$$

Conclusão interpretativa: energia total de dois modos com duas polarizações permanece extremamente pequena ($\sim 10^{-25}$ J), demonstrando novamente a natureza microscópica da energia de ponto zero para campos em caixas macroscópicas.

Resumo final e como ler as equações

Para qualquer problema de quantização de campos siga rigorosamente estes passos:

1. Escreva o Lagrangiano na forma correta (unidades naturais) e identifique termos físicos.
2. Derive equações de movimento (Euler–Lagrange / Dirac) e encontre soluções de modos compatíveis com as condições de contorno.
3. Expresse modos em unidades naturais (energia em eV, comprimento em eV^{-1}), calcule k_n e ω_n.
4. Determine ocupações (número de quanta por modo) e calcule energia por modo: $E = \sum_n N_n \omega_n$ (com fatores 1/2 para zero-point quando apropriado).
5. Convert a para SI se necessário multiplicando por $1.602176634 \times 10^{-19}$ J/eV e convertendo comprimentos via 1 m $= 5.067730717679395 \times 10^6\ \mathrm{eV}^{-1}$.