Introdução a Lagrange e Euler-Lagrange

Samuel Keullen Sales

October 5, 2025

1 Objetivo

Este documento tem como objetivo apresentar de forma intuitiva e detalhada os conceitos de Lagrange e Euler-Lagrange, preparando para estudos em física avançada, como mecânica clássica, relatividade e mecânica quântica.

2 A Lagrangiana

A **Lagrangiana** de um sistema é definida como:

$$L = T - V \tag{1}$$

onde:

- T é a **energia cinética**, ou seja, a energia associada ao movimento. É aquela energia que mede *"quanto o sistema está se movendo"*.

$$T = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 \quad \text{ou} \quad T = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \text{ para rotações}$$

  Intuição: AHHH! Energia cinética em física avançada é basicamente isso: medir a liberdade e inércia do sistema.

- V é a **energia potencial**, relacionada às forças conservativas que limitam ou restringem o movimento:

$$V = mgh \quad \text{(gravidade)}, \qquad V = \frac{1}{2}kx^2 \quad \text{(mola)}$$

  Intuição: Essa é a energia que "puxa" o sistema de volta, regula seu movimento e define a tendência de equilíbrio.

Portanto, a Lagrangiana mede o *conflito dinâmico* entre movimento livre e restrição. O caminho físico real é aquele que torna a ação

$$S = \int L\,dt \tag{2}$$

estacionária ($\delta S = 0$).

2.1 Resumo Intuitivo

- T: quer manter o movimento, representa inércia e liberdade.
- V: quer trazer de volta, representa restrição e equilíbrio.
- $L = T - V$: mede o conflito entre liberdade e restrição. O sistema escolhe naturalmente o caminho de mínima ação.

3 Equações de Euler-Lagrange

A partir da Lagrangiana, as equações de movimento de um sistema podem ser obtidas por:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{3}$$

onde q_i são as coordenadas generalizadas do sistema.

3.1 Exemplo 1: Pêndulo Simples

- Comprimento: $l = 0.5\,m$
- Ângulo inicial: $\theta_0 = 10^\circ$
- Gravidade: $g = 9.81\,m/s^2$

A Lagrangiana é:

$$L = T - V = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos\theta)$$

Aplicando Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0$$

3.2 Exemplo 2: Massa em Mola

- Massa: m
- Constante elástica: k

Lagrangiana:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

Euler-Lagrange:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

4 Perguntas e respostas rápidas

1. É normal aplicar Lagrange apenas com exemplos no começo?
Sim. Inicialmente, o foco é entender o procedimento e interpretar fisicamente as equações. Com o tempo, ao estudar Noether e sistemas mais complexos, sua intuição se solidifica.

2. O pêndulo é um oscilador harmônico?
Aproximadamente, para pequenos ângulos, sim. A aproximação linear ($\sin\theta \approx \theta$) faz com que se comporte como um oscilador harmônico.

3. Preciso estudar partículas antes de Noether?
Não é estritamente necessário. Sistemas como pêndulos ou massas em molas são suficientes para desenvolver intuição inicial.