Exemplos

Exemplos

Equação do Transporte com Velocidade Variável - Guilherme O.

Exemplos

Equação do Transporte com Velocidade Variável

Equação do Transporte com Velocidade Variável:

$$
\begin{aligned}
u_x + c(x)u_t &= 0 \qquad & (x,t) \in (-9,9)\times(0,1), \\
u(x,0) &= f(x) & x \in (-9,9),
\end{aligned}
$$

onde $u = u(x,t)$, $c(x) = 1/5 + \sin^2(x-1)$ e $f(x) = e^{-100(x-1)^2}$.

Fisicamente, essa equação modela a dinâmica de uma onda, cujo perfil inicial é dado por $f(x)$ e que se propaga com velocidade $c(x)$ que varia conforme a posição no espaço.

Exemplos

Equação do Transporte com Velocidade Variável

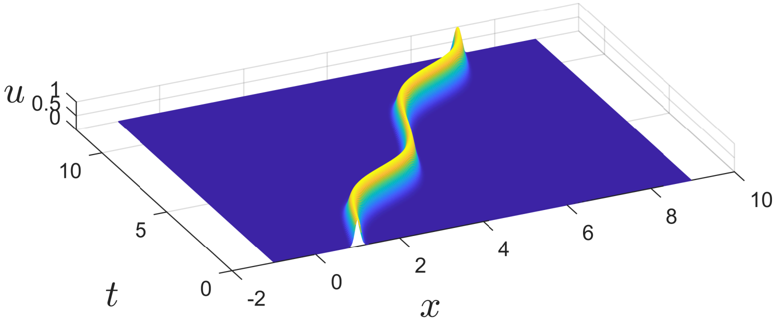


Figura: Solução analítica da Equação do Transporte com Velocidade Variável.

Exemplos

Equação do Transporte com Velocidade Variável

$$
\begin{aligned}
u_x + c(x)u_t &= 0, &\qquad (x,t) &\in (-9,9) \times (0,1),\\
u(x,0) &= f(x), &\qquad x &\in (-9,9),\\
u(\pm 9, t) &= 0, &\qquad t &\in (0, 2P),
\end{aligned}
$$

$$\Updownarrow$$

$$
\begin{aligned}
&\text{Prob. 1:} \qquad \min |u_t + c(x)u_x|, \quad (x,t) \in (-9,9) \times (0,1),\\
&\text{Prob. 2:} \qquad \min |u(x,0) - f(x)|, \quad x \in (-9,9),\\
&\text{Prob. 3:} \qquad \min |u(\pm 9,t)|, \quad t \in (0,2P),
\end{aligned}
$$

Exemplos

Equação do Transporte com Velocidade Variável

$$\min_{W,b} EQM$$

$$EQM = EQM_{\mathcal{D}} + EQM_0 + EQM_B$$

$$EQM_{\mathcal{D}} = \frac{1}{N_{\mathcal{D}}} \sum_{i=1}^{N_{\mathcal{D}}} |\hat{u}t(x_{\mathcal{D}}^i, t_{\mathcal{D}}^i) + c(x_{\mathcal{D}}^i)\hat{u}x(x_{\mathcal{D}}^i, t_{\mathcal{D}}^i)|^2$$

$$EQM_0 = \frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^{N_0} |\hat{u}(x_0^i, 0) - F(x_0^i)|^2$$

$$EQM_b = \frac{1}{N_b} \sum_{i=1}^{N_b} |\hat{u}(\pm\bar{x}, t_b^i)|^2$$

Arquitetura e Parâmetros da Rede Neural:

Parâmetro	**Valor**
Domínio espacial (x)	$[-9, 9]$
Domínio temporal (t)	$[0, 2\text{P}]$
Pontos de colocação no domínio (N_D)	16 000
Pontos de colocação na fronteira (N_b)	400
Pontos de colocação no valor inicial (N_0)	1 000
Função de Ativação	tanh
Neurônios por camada	40
Camadas intermediárias	10
Iterações do otimizador	10 000

Exemplos

Equação do Transporte com Velocidade Variável

$$\text{Domínio de Previsão: } (-9, 9) \times (0, 2P)$$
$$\text{Erro Relativo: } 5.6 \times 10^{-3}$$

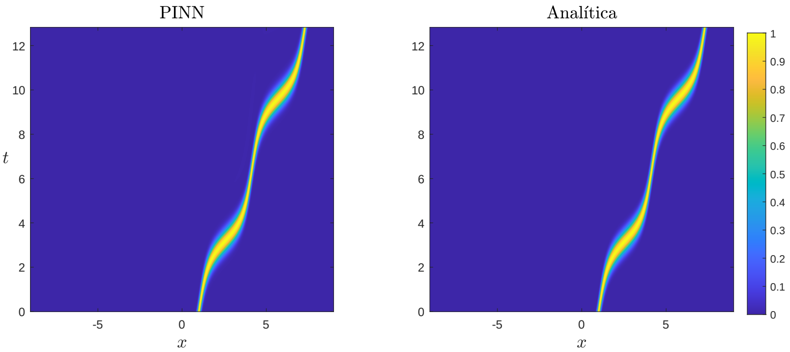


Figura: Solução numérica e solução analítica.

Exemplos

Equação do Transporte com Velocidade Variável.

Domínio de Previsão: $(-12, 12) \times (0, 3P)$

Erro Relativo: 1.23

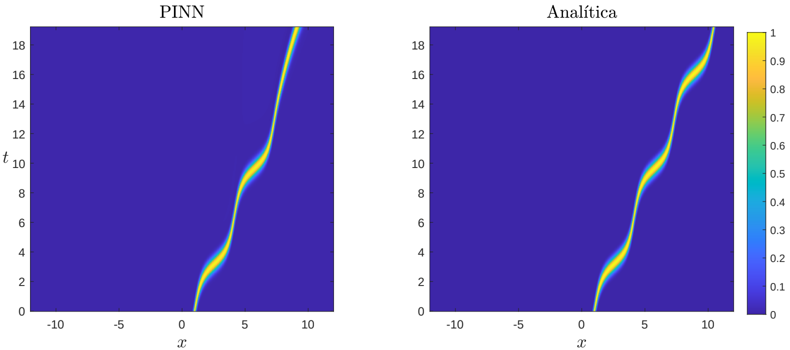


Figura: Solução numérica e solução analítica

Exemplos

Equação de Burgers Viscosa - Larry

Exemplos

Equação de Burgers Viscosa

A Equação Diferencial Parcial que trataremos consiste em determinar $u = u(x,t)$ solução de:

$$\begin{aligned} u_t + u\,u_x - \nu\,u_{xx} &= 0, && (x,t) \in (-1,1) \times (0,1) \\ u(x,0) &= u_0(x), && x \in (-1,1), \\ u(-1,t) = u(1,t) &= 0, && t \in (0,1), \end{aligned}$$

onde ν é a viscosidade.

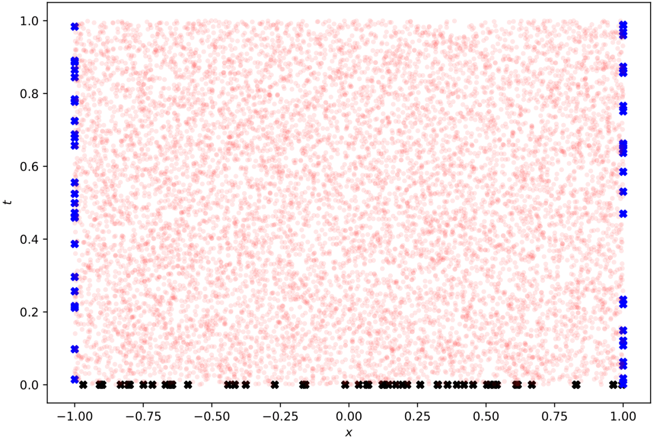
No nosso estudo, consideramos $\nu = \dfrac{0.01}{\pi}$ e $u_0(x) = -\operatorname{sen}(\pi x)$.

Essa EDP foi inicialmente proposta como um modelo matemático para turbulências.

Exemplos

Equação de Burgers Viscosa

$N_{\mathcal{D}}$ (Vermelho), N_0 (X Preto) e N_b (X Azul).



Exemplos

Equação de Burgers Viscosa

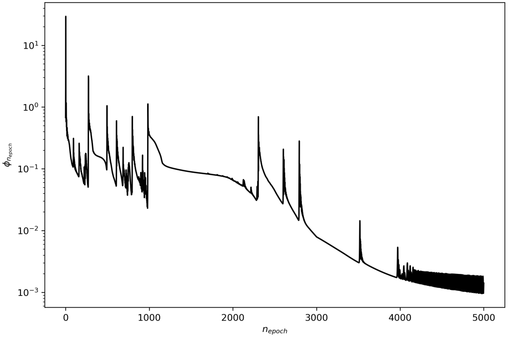


Figura: Oscilação do EMQ.

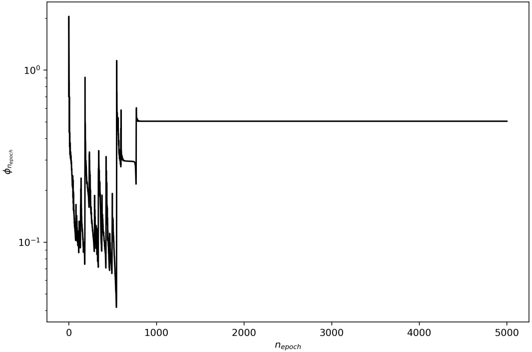


Figura: Não convergência do EMQ.

Figura: Efeitos da Taxa de Aprendizado.

Exemplos

Equação de Burgers Viscosa

Utilizando a técnica de PINNs com os seguintes parâmetros:

Parâmetro	**Valor**
Domínio espacial (x)	$[-1, 1]$
Domínio temporal (t)	$[0, 1]$
Pontos de colocação no domínio ($N_{\mathcal{D}}$)	10 000
Pontos de colocação na fronteira (N_b)	100
Pontos de colocação no valor inicial (N_0)	100
Função de Ativação	tanh
Neurônios por camada	40
Camadas intermediárias	9
Iterações do otimizador	50 000

Arquivo.gif

Exemplos

KdV e mKdv - Guilherme F. e Larry

Exemplos

KdV e mKdV

As equações de Korteweg-de-Vries (KdV) e Korteweg-de-Vries modificada (mKdV) modelam a evolução de uma onda não-linear unidimensional dispersiva e não-dissipativa ao longo do tempo. Essas equações podem ser escritas como:

$$u_t + u^p u_x + u_{xxx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t \in [0, \infty), \tag{1a}$$

$$u(x,0) = u_0(x,a), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1b}$$

A única diferença entre as duas equações é a potência p da função u, sendo a KdV a equação com $p = 1$ e mKdV a equação com $p = 2$.

As soluções exatas das equações são:

$$u(x,t) = \begin{cases} a\,\mathrm{sech}^2(k(x-ct)),\ k=\sqrt{a/12},\ c=a/3, & \text{se } p=1, \\ a\,\mathrm{sech}\big(k(x-ct)\big),\ k=a/\sqrt{6},\ c=a^2/6, & \text{se } p=2. \end{cases} \tag{2}$$

Exemplos

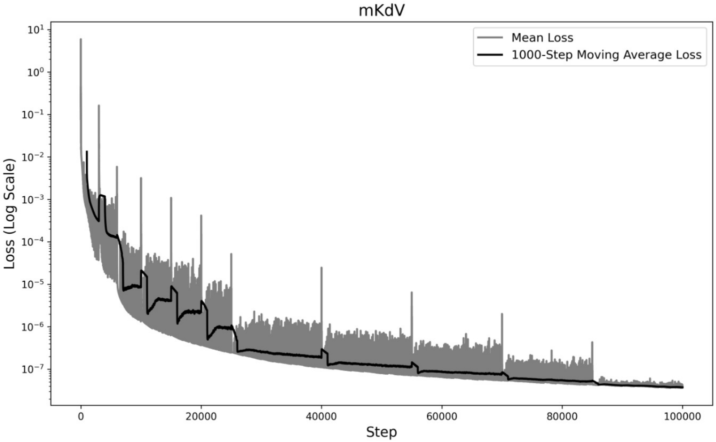
KdV e mKdV

Resolvemos a equação de Korteweg-de-Vries modificada com *amplitude de onda variando* de 1 a 2, nos seguintes parâmetros.

Parâmetro	**Valor**
Domínio espacial (x)	$[-10, 10]$
Domínio temporal (t)	$[0, 15]$
Pontos de colocação no domínio ($N_{\mathcal{D}}$)	10 000
Pontos de colocação na fronteira (N_b)	4 000
Pontos de colocação no valor inicial (N_0)	4 000
Função de Ativação	tanh
Neurônios por camada	60
Camadas intermediárias	5
Iterações do otimizador	100 000

Exemplos

KdV e mKdV



Exemplos

KdV e mKdV

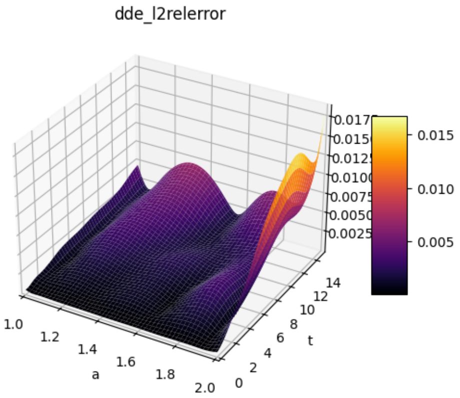


Figura: Erro Relativo L2 ao longo do tempo com amplitude variável.

arquivo.gif

Exemplos

Benjamin-Bona-Mahony (BBM) - Samuel

A Equação de Benjamin-Bona-Mahony (BBM) estudada é dada por:

$$
\begin{aligned}
u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} &= 0, && (x,t) \in (-10,20) \times (0,4),\\
u(x,0) &= u_0(x), && x \in (-10,20),\\
u(-10,t) &= g_1(t), && t \in (0,4),\\
u(20,t) &= g_2(t), && t \in (0,4),
\end{aligned}
$$

onde

- $u = u(x,t)$;
- u_0 é a **condição inicial** em $t = 0$;
- g_1, g_2 são **condições de contorno** que nos dizem como u atua na fronteira de x.

A Equação de Benjamin-Bona-Mahony (BBM) estudada é dada por:

$$
\begin{aligned}
u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} &= 0, && (x,t) \in (-10,20) \times (0,4),\\
u(x,0) &= u_0(x), && x \in (-10,20),\\
u(-10,t) &= g_1(t), && t \in (0,4),\\
u(20,t) &= g_2(t), && t \in (0,4),
\end{aligned}
$$

onde

- $u = u(x,t)$;
- u_0 é a **condição inicial** em $t = 0$;
- g_1, g_2 são **condições de contorno** que nos dizem como u atua na fronteira de x.

A Equação de Benjamin-Bona-Mahony (BBM) estudada é dada por:

$$
\begin{aligned}
u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} &= 0, && (x,t) \in (-10, 20) \times (0,4),\\
u(x,0) &= u_0(x), && x \in (-10, 20),\\
u(-10,t) &= g_1(t), && t \in (0,4),\\
u(20,t) &= g_2(t), && t \in (0,4),
\end{aligned}
$$

onde

- $u = u(x,t)$;
- u_0 é a **condição inicial** em $t = 0$;
- g_1, g_2 são **condições de contorno** que nos dizem como u atua na fronteira de x.

Exemplos

Benjamin-Bona-Mahony (BBM)

A BBM é utilizada como uma alternativa ao modelo de KdV (apresentado anteriormente) e possui solução viajante da forma:

$$u(x,t) = A\,\mathrm{sech}^2(k(x-ct)),$$

onde

- $A > 0$ é dado e chamado de **amplitude**;
- $k = \sqrt{\dfrac{A}{12+4A}}$, chamado de **frequência**;
- $c = 1 + \dfrac{A}{3}$, chamado de **velocidade**.

Exemplos

Benjamin-Bona-Mahony (BBM)

A BBM é utilizada como uma alternativa ao modelo de KdV (apresentado anteriormente) e possui solução viajante da forma:

$$u(x,t) = A\,\mathrm{sech}^2(k(x-ct)),$$

onde

- $A > 0$ é dado e chamado de **amplitude**;
- $k = \sqrt{\dfrac{A}{12+4A}}$, chamado de **frequência**;
- $c = 1 + \dfrac{A}{3}$, chamado de **velocidade**.

Exemplos

Benjamin-Bona-Mahony (BBM)

A BBM é utilizada como uma alternativa ao modelo de KdV (apresentado anteriormente) e possui solução viajante da forma:

$$u(x,t) = A\,\mathrm{sech}^2(k(x - ct)),$$

onde

- $A > 0$ é dado e chamado de **amplitude**;
- $k = \sqrt{\dfrac{A}{12 + 4A}}$, chamado de **frequência**;
- $c = 1 + \dfrac{A}{3}$, chamado de **velocidade**.

Exemplos

Benjamin-Bona-Mahony (BBM)

Substituindo na própria equação da BBM anterior, obtemos o nosso problema

$$
\begin{aligned}
u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} &= 0, && (x,t) \in (-10,20) \times (0,4), \\
u(x,0) &= A\,\mathrm{sech}^2(kx), && x \in (-10,20), \\
u(-10,t) &= A\,\mathrm{sech}^2(k(-10-ct)), && t \in (0,4), \\
u(20,t) &= A\,\mathrm{sech}^2(k(20-ct)), && t \in (0,4),
\end{aligned}
$$

onde $A > 0$, $k = \sqrt{\dfrac{A}{12+4A}}$ e $c = 1 + \dfrac{A}{3}$.

Exemplos

Benjamin-Bona-Mahony (BBM)

Utilizando a técnica de PINNs com os seguintes parâmetros:

Parâmetro	**Valor**
Amplitude inicial (A)	5
Domínio espacial (x)	$[-10, 20]$
Domínio temporal (t)	$[0, 4]$
Pontos de colocação no domínio (N_f)	15 000
Pontos de colocação na fronteira (N_b)	100
Pontos de colocação no valor inicial (N_0)	100
Neurônios por camada	50
Camadas intermediárias	3
Iterações do otimizador	15 000
Função de ativação	tanh

PINNvsEXATO.gif para ADAM.

Exemplos

Benjamin-Bona-Mahony (BBM)

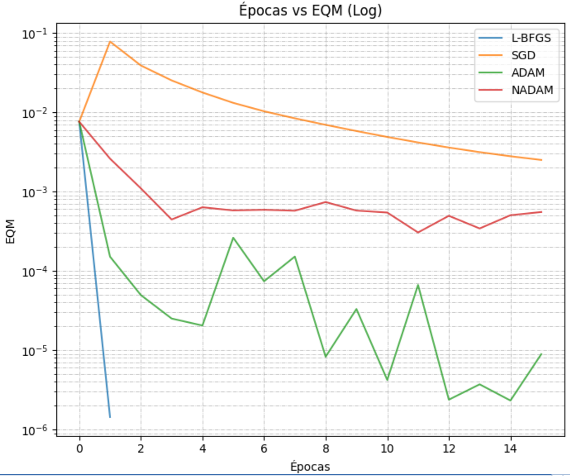
Utilizamos o otimizador conhecido como ADAM (Adaptive Moment Estimation), que não é o único disponível pelo DeepXDE.

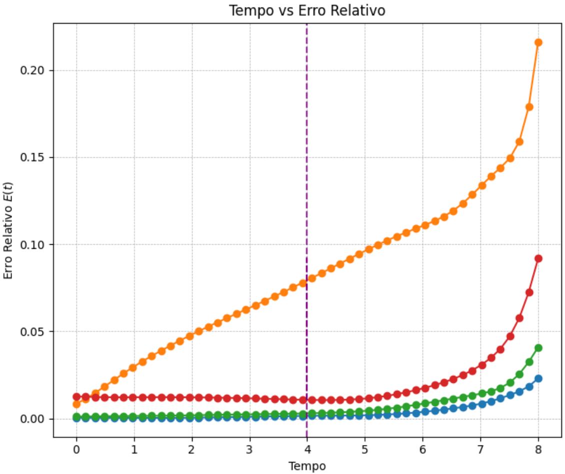
Assim, decidimos testar os seguintes otimizadores:

- **ADAM** (Adaptive Moment Estimation)
- **NADAM** (ADAM com *Nesterov Momentum*)
- **SGD** (Stochastic Gradient Descent)
- **L-BFGS** (Limited memory *Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno*)

Exemplos

Benjamin-Bona-Mahony (BBM)





Exemplos

Benjamin-Bona-Mahony (BBM)

Conclusões dos experimentos PINNs vs BBM:

- Pouca dificuldade para chegar em aproximações satisfatórias em relação às outras equações;
- Diferente de outras equações, o **L-BFGS** foi o otimizador campeão;
- Dentro do domínio temporal escolhido, a PINN tem erro satisfatório;
- Possibilidade de existir uma conexão entre otimizadores de PINNs e a EDP escolhida.

Conclusões dos experimentos PINNs vs BBM:

- Pouca dificuldade para chegar em aproximações satisfatórias em relação às outras equações;
- Diferente de outras equações, o **L-BFGS** foi o otimizador campeão;
- Dentro do domínio temporal escolhido, a PINN tem erro satisfatório;
- Possibilidade de existir uma conexão entre otimizadores de PINNs e a EDP escolhida.

Conclusões dos experimentos PINNs vs BBM:

- Pouca dificuldade para chegar em aproximações satisfatórias em relação às outras equações;
- Diferente de outras equações, o **L-BFGS** foi o otimizador campeão;
- Dentro do domínio temporal escolhido, a PINN tem erro satisfatório;
- Possibilidade de existir uma conexão entre otimizadores de PINNs e a EDP escolhida.

Conclusões dos experimentos PINNs vs BBM:

- Pouca dificuldade para chegar em aproximações satisfatórias em relação às outras equações;
- Diferente de outras equações, o **L-BFGS** foi o otimizador campeão;
- Dentro do domínio temporal escolhido, a PINN tem erro satisfatório;
- Possibilidade de existir uma conexão entre otimizadores de PINNs e a EDP escolhida.

Exemplos

Sine-Gordon - Lucas

Equação de Sine-Gordon: A equação de Sine-Gordon é expressa por:

$$\begin{aligned} &u_{tt} - u_{xx} + sen(u) = 0 \qquad && (x,t) \in (-10,10) \times (0,15), \\ &u(x,0) = f(x) && x \in (-10,10), \end{aligned}$$

Onde $f(x) = 4\arctan\left(\exp\left(\frac{x}{\sqrt{1-a^2}}\right)\right)$, e a representa a velocidade de propagação da onda ao longo do eixo x.

Sine-Gordon

Estruturação

Diferente dos outros trabalhos, foram utilizados **algoritmos evolucionários** na minha rede. Tais algoritmos otimizaram:

- A função de ativação;
- A arquitetura da rede;
- O balaço entre a importância das condições da borda e do domínio.

Sine-Gordon

Estruturação

Diferente dos outros trabalhos, foram utilizados **algoritmos evolucionários** na minha rede. Tais algoritmos otimizaram:

- A função de ativação;
- A arquitetura da rede;
- O balaço entre a importância das condições da borda e do domínio.

Sine-Gordon

Estruturação

Diferente dos outros trabalhos, foram utilizados **algoritmos evolucionários** na minha rede. Tais algoritmos otimizaram:

- A função de ativação;
- A arquitetura da rede;
- O balaço entre a importância das condições da borda e do domínio.

Sine-Gordon

Parâmetros e Resultados

Parâmetro	**Valor**
Amplitude inicial (a)	0.9
Domínio espacial (x)	$[-10, 10]$
Domínio temporal (t)	$[0, 15]$
Pontos de colocação no domínio (N_f)	5 000
Pontos de colocação na fronteira (N_b)	10 000
Pontos de colocação no valor inicial (N_0)	10 000
Iterações do otimizador	100
Neurônios por camada (escolha da rede)	33
Camadas intermediárias(escolha da rede)	3
Função de Ativação(escolha da rede)	tanh
População por geração	20
Número de gerações	5

Melhor Função de Perda: 4.8e-08.