

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

DEPARTAMENTO DE ESTRUCTURA DE LA MATERIA, FÍSICA TÉRMICA Y
ELECTRÓNICA



TRABAJO DE FIN DE GRADO

Código de TFG: ETE31

Caos y física estadística en sistemas cuánticos

Chaos and statistical physics in quantum systems

Supervisor: Armando Relaño Pérez

Samuel Lozano Iglesias

Doble Grado en Matemáticas y Física

Curso académico 2023-2024

Convocatoria de Junio

Resumen:

Se presenta un estudio de la transición entre comportamientos predecibles (integrables) y comportamientos caóticos en los sistemas cuánticos. En la primera sección se introduce la Teoría de Matrices Aleatorias, destacando las colectividades gaussianas más importantes para describir sistemas cuánticos caóticos. Asimismo, se expone la caracterización de estas colectividades por la distribución de los autovalores de sus matrices aleatorias. Esto se utiliza en la segunda sección para distinguir situaciones integrables y caóticas en un contexto cuántico, además de definir tres estadísticos (s , r y *gap ratio*) que permiten analizar el espectro de niveles del hamiltoniano del sistema. En la última sección se aplica el análisis a una red de Tavis-Cummings, modificando la fuerza de interacción entre espines y fotones y también rompiendo simetrías, con el fin de describir la transición. Finalmente, se concluye que la transición es cualitativamente monótona y continua, pudiendo expresar las propiedades de su distribución espectral como una combinación convexa de las propiedades de un comportamiento integrable y las de uno caótico.

Palabras clave: *Matrices aleatorias, estadístico, sistema caótico, sistema integrable, transición.*

Abstract:

A study of the transition between predictable (integrable) and chaotic behaviour in quantum systems is presented. The first section introduces Random Matrix Theory, highlighting the most important Gaussian ensembles for describing chaotic quantum systems. The characterisation of these ensembles by the distribution of the eigenvalues of their random matrices is also shown. This is used in the second section to distinguish integrable and chaotic situations in a quantum context, in addition to defining three statistics (s , r and *gap ratio*) that allow to analyse the spectrum of levels of the Hamiltonian of the system. In the last section, the analysis is applied to a Tavis-Cummings lattice, modifying the interaction strength between spins and photons and also breaking symmetries, in order to describe the transition. Finally, it is concluded that the transition is qualitatively monotonic and continuous, and the properties of its spectral distribution can be expressed as a convex combination of the properties of integrable and chaotic behaviour.

Key words: *Random matrices, statistic, chaotic system, integrable system, transition.*

Declaración Responsable sobre Autoría y Uso Ético de Herramientas de Inteligencia Artificial (IA)

Yo, SAMUEL LOZANO IGLESIAS, con DNI: 50250815-R, declaro de manera responsable que el presente Trabajo de Fin de Grado (TFG) titulado:

CAOS Y FÍSICA ESTADÍSTICA EN SISTEMAS CUÁNTICOS

es el resultado de mi trabajo intelectual personal y creativo, y ha sido elaborado de acuerdo con los principios éticos y las normas de integridad vigentes en la comunidad académica y, más específicamente, en la Universidad Complutense de Madrid.

Soy, pues, autor del material aquí incluido y, cuando no ha sido así y he tomado el material de otra fuente, lo he citado o bien he declarado su procedencia de forma clara -incluidas, en su caso, herramientas de inteligencia artificial-. Las ideas y aportaciones principales incluidas en este trabajo, y que acreditan la adquisición de competencias, son mías y no proceden de otras fuentes o han sido reescritas usando material de otras fuentes.

Asimismo, aseguro que los datos y recursos utilizados son legítimos, verificables y han sido obtenidos de fuentes confiables y autorizadas. Además, he tomado medidas para garantizar la confidencialidad y privacidad de los datos utilizados, evitando cualquier tipo de sesgo o discriminación injusta en el tratamiento de la información.

En Madrid a 15 de mayo de 2024

A handwritten signature in blue ink, appearing to read 'Samuel', enclosed within a large, loopy oval stroke.

Índice

1. Introducción	1
2. Teoría de Matrices Aleatorias	2
2.1. Matrices aleatorias gaussianas	2
2.2. Colectividades gaussianas clásicas, β -ensembles	3
2.3. Caracterización de la distribución de probabilidad por autovalores	4
3. Caos cuántico	5
3.1. Sistemas integrables - <i>Poisson</i>	5
3.2. Sistemas caóticos - Colectividades gaussianas	6
3.3. Transiciones de sistemas integrables a sistemas caóticos	8
4. Red de Tavis-Cummings	11
4.1. Truncado de fotones	11
4.2. Situación definida: integrable o caótica	12
4.3. Transición al caos en función de los parámetros	13
5. Conclusiones	18
Bibliografía	19

1. Introducción

La motivación primigenia de la física, así como la de la filosofía y el resto de ciencias, es describir lo que los sentidos pueden detectar. En ese proceso descriptivo surge de manera natural la necesidad de comprobar si la descripción que se cree correcta en realidad lo es, y es la comprobación la que induce a la predicción: *si mi expresión representa adecuadamente la dinámica del sistema podré saber qué pasará en el futuro*. Esto, el determinismo, que no parece más que algo lógico y de sentido común, trajo de cabeza a la comunidad física de principios del siglo XX.

Con el descubrimiento de una nueva disciplina, la física cuántica, y el cambio de paradigma posterior, la física pasó de considerarse capaz de comprender y caracterizar con certeza cualquier sistema, a entender los obstáculos insalvables a los que se tenía que adaptar al estudiar los sistemas cuánticos. Tanto es así que la ciencia en sí misma sufrió una transformación y conceptos como la indeterminación o la aleatoriedad dejaron de relacionarse con la falta de conocimiento: *soy consciente de que no puedo describir con total precisión la dinámica de un sistema cuántico*.

Volviendo a la familiar y amigable física clásica, existe un área que atenta contra el concepto de predictibilidad: el caos. Caracterizados por la sensibilidad a las condiciones iniciales y la no periodicidad, los sistemas caóticos clásicos presentan una dinámica compleja y, en el largo plazo, difícilmente predecible, cuyo análisis se sustenta en el estudio de las trayectorias: *pero, y entonces, ¿qué hago si quiero estudiar el caos y no tengo trayectorias?*

Este, entre otros, es el problema a afrontar en los sistemas caóticos cuánticos. Partiendo del supuesto de que se tenga una definición apropiada de caos cuántico, lo que no es trivial, y como el procedimiento habitual $\hbar \rightarrow 0$ para relacionar los análogos clásico y cuántico no es realizable por la ausencia de trayectorias, el estudio de un sistema caótico cuántico se centra en la expresión matricial de su hamiltoniano. Aun así, hay una nueva incógnita: *si mi sistema es caótico y exhibe cierta aleatoriedad, ¿qué matrices utilizo para representarlo?*

En este punto se introduce la Teoría de Matrices Aleatorias, que es crucial para describir el caos cuántico empleando los espectros de niveles del sistema y las colectividades gaussianas. Este procedimiento permite caracterizar un sistema integrable y uno caótico, y por ende distinguirlos, pero es posible que un mismo sistema, al variar ciertos parámetros, exponga los dos tipos de comportamiento. He aquí la pregunta sobre la que se desarrolla este Trabajo de Fin de Grado: *¿cómo es la transición de un comportamiento integrable a un comportamiento caótico, y viceversa, en un sistema cuántico?*

2. Teoría de Matrices Aleatorias

La Teoría de Matrices Aleatorias (RMT, de sus siglas en inglés *Random Matrix Theory*) es un campo de las matemáticas que surge de la intersección entre la teoría de probabilidad y el álgebra matricial. Este enfoque combina herramientas analíticas y estadísticas para estudiar propiedades de conjuntos de matrices cuyos coeficientes siguen distintas distribuciones probabilísticas.

En muchos problemas físicos las interacciones entre las componentes exhiben cierto grado de aleatoriedad, y esta debe verse representada también por las matrices que describen el sistema. La motivación detrás de la RMT radica entonces en la necesidad de modelar sistemas complejos donde la variabilidad inherente desempeña un papel crucial, siendo que la introducción de matrices aleatorias permite no abordar el estudio desde una perspectiva puramente determinista.

En lo sucesivo se tratará el subconjunto de las matrices aleatorias compuesto por las matrices aleatorias gaussianas finitas, que se definirán posteriormente de manera formal y rigurosa como matrices de dimensión $N \times N$ con variables aleatorias que siguen una distribución conjunta gaussiana. Para deducir las propiedades de este conjunto de matrices se partirá de las variables aleatorias que las conforman, y se generalizará a la ordenación de dichas variables en una estructura matricial.

2.1. Matrices aleatorias gaussianas

Antes de definir una matriz aleatoria gaussiana resulta necesario definir el concepto de variable aleatoria gaussiana [3].

Definición 2.1. Una variable aleatoria real gaussiana es una función medible $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cuya distribución de probabilidad es gaussiana, con media μ y varianza σ^2 :

$$p(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

y se denota como $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Un parámetro relevante que caracteriza una variable aleatoria es el valor esperado $\mathbb{E}[f(x)]$ de una función $f(x)$, que debe entenderse como la expectativa del valor medio experimental de $f(x)$ si el experimento se repite un número suficiente de veces. En la práctica, para la distribución de probabilidad gaussiana lo más interesante son los valores esperados de los polinomios, y en particular el del polinomio x , que define el valor esperado de la variable X en sí misma.

Definición 2.2. Dada una función $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, su valor esperado bajo la distribución $p(X)$ se define como:

$$\mathbb{E}[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot p(x) dx .$$

En particular, el valor esperado de la variable aleatoria X es:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) dx .$$

Previo a la generalización al concepto de matriz aleatoria se debe hacer una consideración: la distribución de probabilidad conjunta de cierto número finito de variables aleatorias independientes es el producto de las distribuciones individuales. Formalmente:

Teorema 2.3. Sean n variables aleatorias independientes X_1, \dots, X_n , la distribución de probabilidad conjunta de todas ellas puede escribirse en función de la distribución de probabilidad individual $p(X_i)$ de cada una:

$$p(X_1, \dots, X_n) = p(X_1) \cdot \dots \cdot p(X_n) =: \prod_{k=1}^n p(X_k) .$$

Una matriz aleatoria gaussiana será entonces un conjunto ordenado de $N \times N$ variables aleatorias cuya distribución de probabilidad depende de la traza de la matriz [3].

Definición 2.4. Una matriz aleatoria gaussiana $H = (H_{jk})_{j,k=1}^N$ de dimensión $N \times N$ es una matriz formada por un conjunto de variables aleatorias reales y cuya distribución de probabilidad es:

$$p(H) := p(H_{11}, \dots, H_{NN}) = \frac{1}{\mathcal{Z}_{N,A}} \cdot e^{-A \cdot \text{tr}(H^2)} ,$$

donde A es una constante, $\mathcal{Z}_{N,A}$ es una constante de normalización y $\text{tr}(H^2)$ es la traza de la matriz H^2 , dada por

$$\text{tr}(H^2) = \sum_{k=1}^N H_{kk}^2 .$$

2.2. Colectividades gaussianas clásicas, β -ensembles

Dentro de las matrices aleatorias gaussianas se pueden identificar tres colectividades¹ relevantes que presentan características distintas. De ellas, en este documento se estudiarán únicamente dos, las denominadas GOE (de sus siglas en inglés *Gaussian Orthogonal Ensemble*) y GUE (del inglés *Gaussian Unitary Ensemble*), mientras que la tercera colectividad se denomina GSE (del inglés *Gaussian Symplectic Ensemble*) y su estudio implica una mayor complejidad, además no ser tan importante en los análisis físicos que se harán posteriormente.

2.2.1. *Gaussian Orthogonal Ensemble*, GOE

Definición 2.5. El conjunto de matrices aleatorias gaussianas $N \times N$ que son reales y simétricas, i.e. $H_{jk} = H_{kj} \in \mathbb{R}$, y cuya distribución de probabilidad es

$$p(H) = \frac{1}{2^{N/2} \cdot \pi^{N(N+1)/4}} \cdot e^{-\frac{1}{4} \cdot \text{tr}(H^2)} ,$$

se denomina la Colectividad Ortogonal Gaussiana (GOE, *Gaussian Orthogonal Ensemble*). De manera abreviada se dirá, para una matriz H que pertenece a esta colectividad, que “ H es GOE”.

¹Se entiende por colectividad al subconjunto de matrices aleatorias que comparten distribución de probabilidad y son invariantes bajo un mismo tipo de transformación.

El nombre no se debe a que las matrices GOE sean ortogonales, que no lo son, sino a que son invariantes bajo transformaciones reales y ortogonales. Dos caracterizaciones útiles de este tipo de matrices son las que siguen, y su demostración se puede encontrar en [7]:

Proposición 2.6. Sea $A = (a_{jk})_{j,k=1}^N$ una matriz aleatoria formada por a_{jk} variables aleatorias reales gaussianas independientes, entonces la matriz $H = \frac{A+A^T}{\sqrt{2}}$ es una matriz GOE.

Proposición 2.7. Sea H una matriz aleatoria real simétrica cuyos términos diagonales siguen una distribución normal con media 0 y varianza 1, i.e. $H_{kk} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, y los no diagonales una normal con media 0 pero varianza 1/2, i.e. $H_{jk} \sim \mathcal{N}(0, 1/2)$, entonces la matriz H es GOE.

2.2.2. Gaussian Unitary Ensemble, GUE

Definición 2.8. El conjunto de matrices aleatorias gaussianas $N \times N$ que son hermitianas, i.e. $H_{jk} = H_{kj}^* \in \mathbb{C}$, donde $*$ denota el complejo conjugado, y cuya distribución de probabilidad es

$$p(H) = \frac{2^N}{\pi^{3N/2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \text{tr}(H^2)},$$

se denomina la Colectividad Unitaria Gaussiana (GUE, Gaussian Unitary Ensemble). De manera abreviada se dirá, para una matriz H que pertenece a esta colectividad, que “ H es GUE”.

En este caso, el nombre proviene de la invariancia de dichas matrices bajo transformaciones unitarias. Dos caracterizaciones análogas a las anteriores pero para matrices GUE, con la demostración presentada en [7], son:

Proposición 2.9. Sea $A = (a_{jk})_{j,k=1}^N$ una matriz aleatoria formada por a_{jk} variables aleatorias complejas gaussianas independientes, entonces la matriz $H = \frac{A+A^*}{\sqrt{2}}$ es una matriz GUE.

Proposición 2.10. Sea H una matriz aleatoria hermitiana cuyos términos diagonales son reales y siguen una distribución normal con media 0 y varianza 1, i.e. $H_{kk} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, y los no diagonales son tales que $H_{jk} \sim (\mathcal{N}(0, 1/2) + i\mathcal{N}(0, 1/2))$, entonces la matriz H es GUE.

2.3. Caracterización de la distribución de probabilidad por autovalores

La obtención de los autovalores de las matrices aleatorias resulta esencial en su caracterización e identificación, pues determinan de manera total su distribución de probabilidad y, por ende, su colectividad. Para ello, en primer lugar, se define el espectro de una matriz H .

Definición 2.11. El espectro de una matriz H es el conjunto $\mathcal{S} := \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(H - \lambda I) = 0\}$ donde λ es un autovalor de H y la matriz I es la identidad.

De esta forma, considerando un espectro ordenado $\mathcal{S} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{C} : \lambda_j < \lambda_k \text{ si } j < k\}$, la distribución de probabilidad conjunta de una matriz aleatoria se pueden caracterizar mediante el teorema siguiente [3].

Teorema 2.12. *La distribución de probabilidad conjunta de una matriz aleatoria gaussiana H de dimensión $N \times N$ con $\beta = 1, 2, 4$ se determina a partir de sus autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ como*

$$f(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \frac{1}{\mathcal{Z}_{N,A}} \cdot e^{-A \cdot \sum_{k=1}^N \lambda_k^2} \cdot \prod_{1 \leq j < k \leq N} |\lambda_k - \lambda_j|^\beta$$

donde la función de normalización $\mathcal{Z}_{N,A}$ se puede escribir en términos de la función Gamma:

$$\mathcal{Z}_{N,A} = (4A)^{-N/2 - N(N-1) \cdot A} \cdot (2\pi)^{N/2} \cdot \prod_{k=0}^{N-1} \frac{\Gamma(1 + (k+1) \cdot 2A)}{\Gamma(1 + 2A)}.$$

Los tres posibles valores de β son característicos de las tres colectividades clásicas antes descritas, siendo $\beta = 1$ para GOE, $\beta = 2$ para GUE y $\beta = 4$ para GSE. Este parámetro β , denominado índice de Dyson, es el que da el nombre de β -ensembles a las colectividades estudiadas.

De la distribución de probabilidad anterior surge de manera directa la intuición de definir una variable determinada por la separación entre autovalores consecutivos. Este, el estadístico s , y otro definido de una manera similar, el estadístico r , son dos de las herramientas que permiten clasificar las matrices en las distintas colectividades conociendo únicamente su espectro de autovalores.

3. Caos cuántico

El movimiento caótico se concibe como contraposición a un movimiento predecible y determinado, pero si bien lo primero es cierto, lo segundo no: el movimiento caótico clásico no tiene nada de azaroso ni aleatorio, es determinista. La condición clave entonces para discernir si un movimiento es caótico se basa en la ausencia de patrones repetitivos, i.e. predecibles, así como en que una pequeña variación en las condiciones iniciales modifique en gran medida el resultado final.

Volviendo al concepto de predecibilidad, clásicamente se distingue entre los sistemas integrables (predecibles) y los sistemas caóticos, siendo que de estos segundos hay muchos tipos diferentes. Esta distinción se mantiene también en sistemas cuánticos, pero su definición es más complicada y su estudio requiere de técnicas aún en desarrollo.

3.1. Sistemas integrables - *Poisson*

Definición 3.1. *Un sistema dinámico se dice clásicamente integrable si presenta n constantes del movimiento independientes y en involución, es decir, un sistema con hamiltoniano H se dice integrable si cumple que:*

- (I) *Existen funciones $\{f_k\}_{k=1}^n$, llamadas constantes del movimiento, cumpliendo que $\{f_k, H\} = 0$, $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, donde $\{\cdot, \cdot\}$ es el corchete de Poisson, y de hecho $\{f_k, H\} = \frac{df_k}{dt}$.*
- (II) *Las constantes del movimiento satisfacen que $\{f_j, f_k\} = 0$, $\forall j, k \in \{1, \dots, n\}$ con $j \neq k$.*

(III) *Las constantes del movimiento son independientes dos a dos.*

Esta definición, citada de [8], permite comprender el concepto y trasladarlo de manera directa a una situación cuántica, asumiendo que el límite clásico emerge de la descripción cuántica tomando $\hbar \rightarrow 0$. Así, la “traducción directa” de integrabilidad clásica para el caso cuántico sería la que sigue:

Definición 3.2. *Un sistema dinámico con hamiltoniano H se dice cuánticamente integrable si:*

- (I) *Existen funciones $\{f_k\}_{k=1}^n$, llamadas constantes del movimiento, cumpliendo que $[f_k, H] = 0$, donde $[A, B] = AB - BA$ es el conmutador.*
- (II) *Las constantes del movimiento satisfacen que $[f_j, f_k] = 0, \forall j, k \in \{1, \dots, n\}$ con $j \neq k$.*

La clave en este caso se encuentra en la condición (III) del caso clásico, pues, por el Teorema de von Neumann², esta condición no se puede satisfacer cuánticamente, dificultando la separación de los sistemas cuánticos en dos conjuntos disjuntos: integrables y no integrables.

De hecho, si se estudiase un hamiltoniano en un sistema finito, los proyectores cumplirían la definición 3.2, luego todos los sistemas finitos presentarían constantes del movimiento. Por este y otros motivos se han propuesto distintas definiciones alternativas de la integrabilidad cuántica, pudiéndose consultar una revisión de ellas en [6].

Con el fin de evitar este problema, en este documento se considera el estudio de los niveles espectrales de los sistemas cuánticos. Se puede probar con cierto rigor [5], y se comprueba experimentalmente, que existen cruces entre niveles energéticos que dan lugar a una descorrelación entre ellos: la correlación entre niveles asociados a un sistema con análogo clásico integrable sigue la estadística de Poisson.

3.2. Sistemas caóticos - Colectividades gaussianas

Los sistemas caóticos cuánticos parten de la idea de generalizar el concepto bien definido de sistema caótico clásico, aunque de manera clara se observa que no son tantas las similitudes como las diferencias que caracterizan a estos dos tipos de sistemas. Pese a que no hay una definición universal sobre el caos, una propuesta matemática que engloba las características que lo determinan es [13]:

Definición 3.3. *Sea un sistema dinámico definido por $\dot{x}(t) = F(X)$ con $x \in \mathcal{M}$ y $F : \mathcal{M} \rightarrow T(\mathcal{M})$ un campo vectorial, siendo \mathcal{M} una variedad diferenciable y $T(\mathcal{M})$ su espacio tangente. Entonces, el sistema dinámico clásico se dice caótico si existe $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ que presenta las siguientes características:*

²El teorema de von Neumann, cuya demostración se puede encontrar en [2], se enuncia como sigue [14]: *Sea un conjunto cualquiera de operadores hermíticos $\{O_k\}_{k=1}^n$ tales que $[O_j, O_k] = 0, \forall j \neq k$, entonces existe un operador no degenerado \mathcal{O} que verifica $O_k = O_k(\mathcal{O}), \forall k \in \{1, \dots, n\}$.*

- (I) *Cualquier trayectoria³ que comienza en \mathcal{N} permanece en \mathcal{N} , $\forall t > 0$.*
- (II) *Las trayectorias no tienden a puntos fijos, órbitas periódicas u órbitas cuasi-periódicas: sea $x(t) \in \mathcal{N}$, entonces no existe ningún valor $t_1 > 0$ tal que $\forall T > t_1$ y $\forall \varepsilon > 0$ se puede encontrar un valor $t_2 > T$ de manera que $\|x(t_2) - x(t_1)\| < \varepsilon$.*
- (III) *Condiciones iniciales similares dan lugar a trayectorias distintas para tiempos suficientemente largos: $\exists A > 0$ tal que $\forall x \in \mathcal{N}$ y para cualquier entorno \mathcal{B} de dicho punto existe un punto $y \in \mathcal{B}$ satisfaciendo $\|x - y\| > A$.*

Partiendo de una situación descrita cuánticamente, la descripción clásica correspondiente puede obtenerse tomando el límite $\hbar \rightarrow 0$, lo que llevaría a pensar que una deducción del mismo estilo sería también válida en el caso caótico, pero se puede apreciar en la definición que el caos clásico se basa en el hecho de que la trayectoria es completamente determinista, comprobable y comparable. Esta es la gran diferencia con respecto al análogo cuántico, pues la determinación completa de las trayectorias cuánticas es en todo sentido imposible, por el principio de incertidumbre de Heisenberg.

De esta forma, un análisis distinto al habitual es necesario para los sistemas caóticos cuánticos, entrando en escena las colectividades gaussianas definidas en la sección 2.1. Dichas colectividades engloban algunas características que las convierten en susceptibles de ser aplicadas a ciertos sistemas cuánticos particulares, destacando [11]:

- La colectividad GOE es aplicable a sistemas invariantes bajo inversión temporal y simetría bajo rotaciones, o sin simetría bajo rotaciones pero con espín entero.
- La colectividad GUE es aplicable a sistemas que no son invariantes bajo inversión temporal.

Estos resultados son, con cierta vaguedad, deducibles de manera teórica por las propiedades asociadas a las colectividades, aunque muchos resultados relacionados con esta teoría son en realidad conjeturas o ideas basadas en la experimentación. De ellos, destaca la conjetura BGS (*Bohigas-Giannoni-Schmit*)⁴ siguiente, formulada para sistemas simétricos bajo inversión temporal pero modificable reemplazando la colectividad GOE por la GUE para sistemas que no lo son:

Conjetura 3.4. *El espectro de niveles de todo sistema invariante bajo inversión temporal cuyo análogo clásico es caótico muestra las propiedades de fluctuación asociadas a la colectividad GOE.*

Sobre esta conjetura, no probada hasta el momento⁵, tratará gran parte del estudio realizado en la sección siguiente, así como sobre la transición entre los denominados sistemas integrables cuánticos, con una estadística de Poisson asociada, y los sistemas caóticos cuánticos, relacionados con las colectividades gaussianas de matrices aleatorias.

³Las soluciones $x(t)$ de la ecuación diferencial $\dot{x}(t) = F(x)$ se denominan trayectorias.

⁴El resultado es válido para sistemas con constante de Kolmogorov positiva, como los tratados en este documento.

⁵Los numerosos intentos para probarla han llevado a demostraciones relativamente exitosas, entre las que destaca la de Michel Berry en 1985, disponible en [4]. Aun así, todos los intentos se basan en aproximaciones para $\hbar \rightarrow 0$.

3.3. Transiciones de sistemas integrables a sistemas caóticos

Tras este estudio previo resulta interesante plantearse qué características determinan la transición de un sistema integrable a un sistema caótico, y si hay alguna manera de entenderla y describirla en base a sus posibles similitudes con los sistemas ya conocidos. Además, es relevante entender cómo se puede detectar dicha transición y qué la hace posible.

De ello tratará la última sección de este documento, analizando un caso particular con un cierto nivel de detalle. Para dicho análisis se hará uso de los estadísticos mostrados en esta sección, que permitirán aproximarnos a lo buscado: identificar, catalogar y caracterizar la transición buscada.

3.3.1. Estadístico s

Considerando el espaciado entre los autovalores E_1 y E_2 de una matriz 2×2 GOE, es decir, el espaciado $s = E_2 - E_1$, entonces se puede demostrar la *Hipótesis de Wigner* [3], que establece que la distribución del espaciado viene dada por la relación:

$$P(s) = \frac{\pi s}{2} \cdot e^{-\frac{\pi s^2}{4}}.$$

Si se considera en su lugar una matriz gaussiana $N \times N$, se comprueba que la hipótesis sigue siendo adecuada incluso para valores grandes de N . De hecho, suponiendo el espectro ordenado $\mathcal{S} = \{E_1, \dots, E_N\}$, el espaciado entre autovalores consecutivos $s_k = E_{k+1} - E_k$ con $k = 1, \dots, N - 1$ sigue una distribución dada por la ecuación [12]:

$$P(s) = A(\beta) \cdot s^\beta \cdot e^{-B(\beta)s^2},$$

donde $\beta = 1, 2, 4$ representa las distintas colectividades y los valores de $A(\beta)$ y $B(\beta)$ pueden determinarse con la función Gamma:

$$A(\beta) = 2 \cdot \frac{\Gamma^{\beta+1}((\beta+2)/2)}{\Gamma^{\beta+2}((\beta+1)/2)} \quad \text{y} \quad B(\beta) = \frac{\Gamma^2((\beta+2)/2)}{\Gamma^2((\beta+1)/2)}.$$

El término s^β de la distribución de espaciados denota la repulsión entre niveles y puede ser lineal, cuadrático o cuártico en función de la colectividad.

En cualquier caso y olvidando por un momento el detalle, la distribución $P(s) \sim s^\beta \cdot e^{-s^2}$ indica que para espaciados muy pequeños ($s \rightarrow 0$) o muy grandes ($s \rightarrow \infty$) la distribución tenderá a 0, y presentará un máximo en un valor que dependerá de β en el intervalo $(0, \infty)$. Esto refleja el motivo por el que estas colectividades pueden describir sistemas caóticos, pues la repulsión entre niveles provoca que no haya dos niveles caracterizados por la misma energía, tendiendo a 0 la probabilidad de que estén solapados.

Por otro lado, en el límite integrable, el espaciado entre niveles toma la forma $P(s) = e^{-s}$, lo que corresponde a una distribución de Poisson que representa sistemas integrables no caóticos. En

este caso, $P(0) = 1$ y $P(s)$ disminuye al aumentar s , lo que indica que la probabilidad de que los niveles estén degenerados, i.e. espaciamiento nulo, es mayor que la de cualquier otra situación [4].

3.3.1.1. Reescalado de niveles

Para el estadístico s es necesario realizar un reescalado de niveles energéticos que asegure que se cumple que el valor esperado del espaciamiento sea 1, i.e. $\langle s_k \rangle = \langle \epsilon_{k+1} - \epsilon_k \rangle = 1 \ \forall k \in \{1, \dots, n\}$, siendo ϵ_k la energía del estado k -ésimo reescalado. Esto se debe a que la escala de medición no será común a todas las magnitudes, por lo que se busca eliminar dicha escala.

Esta necesidad se satisface si se elimina la parte suave $\bar{\rho}(E)$ de la densidad de estados, que viene dada por $\rho(E) = \sum_{k=1}^n \delta(E - E_k)$, pues esta indica únicamente la escala de energías apropiada localmente, mientras que la parte fluctuante normalizada $\tilde{\rho}(E)$ es la que presenta las propiedades que se quieren estudiar [1].

Empleando la densidad acumulada de niveles $N(E) = \int_{E_0}^E \rho(E') dE'$, que simplemente toma como valores $N(E_k) = k$, se ajusta esta distribución por una función suave $\bar{N}(E)$ y se considera el nivel reescalado $\epsilon_k = \bar{N}(E_k)$ adimensional. En el caso particular tratado en este documento resulta suficiente ajustar la densidad acumulada por un polinomio de grado 8, que presenta un grado correcto para obtener una separación adecuada de la parte suave y la fluctuante.

3.3.2. Estadístico r

Otro estadístico importante que se analiza en las distintas situaciones en las que se aplica la RMT es el estadístico r . Este se define en función de los autovalores ordenados, sin necesidad de reescalado, $\{E_k\}_{k=1}^N$ de la matriz aleatoria gaussiana mediante la expresión:

$$r_k = \frac{E_{k+2} - E_{k+1}}{E_{k+1} - E_k} \quad \text{con } k = 1, \dots, N-2.$$

La utilidad de este estadístico radica en que su distribución también está bien definida y depende de manera explícita del índice de Dyson β , pero no necesita emplear un método de reescalado para los niveles obtenidos, permitiendo realizar un estudio paralelo en el que comprobar que el reescalado no ha introducido propiedades en los niveles que no les correspondían previamente. La distribución de probabilidad que sigue el estadístico r para las colectividades gaussianas es [12]:

$$P(r) = C(\beta) \cdot \frac{(r + r^2)^\beta}{(1 + r + r^2)^{1+3\beta/2}} \quad \text{con} \quad C(\beta) = \frac{3^{3(1+\beta)/2} \cdot \Gamma(1 + \beta/2)^2}{2\pi \cdot \Gamma(1 + \beta)}.$$

En el límite integrable, la distribución del estadístico r toma la forma determinada por la distribución del cociente de dos variables aleatorias con distribución de Poisson [12]:

$$P(r) = \frac{1}{(1+r)^2}.$$

Como es claro observar, la propiedad clave de los sistemas caóticos, la repulsión entre niveles, se mantiene para la distribución asociada a las colectividades gaussianas, i.e. $P_{RMT}(0) = 0$, y no ocurre para el límite integrable, i.e. $P_{Poisson}(0) = 1$.

3.3.3. *Gap ratio* \tilde{r}

Finalmente, cabe considerar una modificación del estadístico r que resulta muy interesante en sí misma en los análisis de las distintas colectividades por presentar unos valores esperados bien definidos. Se denominará a esta modificación *gap ratio*, denotada como \tilde{r}_k , con el propósito de diferenciarla del estadístico r , y para $k = 1, \dots, N - 2$ tiene la forma:

$$\tilde{r}_k = \frac{\min(E_{k+2} - E_{k+1}, E_{k+1} - E_k)}{\max(E_{k+2} - E_{k+1}, E_{k+1} - E_k)}.$$

La característica clave en este caso es que el soporte de la distribución de probabilidad de \tilde{r} es el intervalo compacto y acotado $[0, 1]$, y su distribución de probabilidad $\tilde{P}(\tilde{r})$ está directamente relacionada con la del estadístico r , $P(r)$ [10]:

$$\tilde{P}(\tilde{r}) = 2 \cdot P(\tilde{r}) \cdot \Theta(1 - \tilde{r}),$$

donde $\Theta(x)$ es la función escalón de Heaviside, definida como

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Así, puede calcularse el valor esperado del *gap ratio* \tilde{r} para un sistema integrable que sigue una distribución de Poisson:

$$\langle \tilde{r} \rangle_{Poisson} = 2 \cdot \int_0^1 \frac{x}{(1+x)^2} dx = 2 \cdot \ln(|1+x|) + \frac{2}{1+x} \Big|_0^1 = 2 \ln(2) - 1 \approx 0,386 \quad (1)$$

También puede calcularse el valor esperado para la colectividad GOE ($\beta = 1$):

$$\langle \tilde{r} \rangle_{GOE} = \frac{27 \cdot \Gamma(3/2)^2}{\pi \cdot \Gamma(2)} \int_0^1 \frac{x \cdot (x+x^2)}{(1+x+x^2)^{5/2}} dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{x^3 + 15x^2 + 12x + 8}{(x^2 + x + 1)^{3/2}} \Big|_0^1 = 4 - 2\sqrt{3} \approx 0,536 \quad (2)$$

De nuevo, la relevancia de este estadístico reside en que su soporte es acotado, pues el valor medio de la estadística de Poisson diverge para el estadístico r , con soporte \mathbb{R}^+ .

En definitiva, se tienen tres posibles estadísticos a utilizar para determinar la colectividad con la que se está tratando y para estudiar con un cierto nivel de detalle la transición de un sistema integrable a uno caótico. Esto es lo que se hará en la siguiente sección: considerar un sistema cuántico particular y, una vez obtenido su espectro de autovalores, estudiar las características que lo determinan en función de dos parámetros móviles, ya sea a partir de la distribución de probabilidad de la distancia entre sus autovalores (estadísticos r y s) o comparando el valor esperado de dicha distribución de probabilidad (estadístico \tilde{r}).

4. Red de Tavis-Cummings

La red de Tavis-Cummings (TCL, de sus siglas en inglés *Tavis-Cummings Lattice*) es un modelo especialmente interesante desde el punto de vista de la óptica cuántica, pues consigue incorporar varios grados de libertad cuánticos controlables. Esta red es relevante para el estudio que prosigue porque está compuesta por modelos integrables Tavis-Cummings (TC) que pierden dicha propiedad al juntarse en la red: se puede estudiar la transición de un conjunto de sistemas integrables acoplados a un sistema global caótico.

Por una cuestión de simplicidad en el tratamiento, se estudia un modelo de impureza que consiste en un único modelo TC al que se le añade un término que simula el efecto que produce el acoplamiento con sus vecinos en la red. Además, este tratamiento permite incluir en el modelo de impureza un parámetro μ , encargado de romper la simetría y la integrabilidad del modelo TC.

Este modelo incluye un conjunto de N átomos de 2 niveles (espines posibles $m_z = \pm 1/2$) que interaccionan con, de manera teórica, infinitos fotones incidiendo sobre ellos. Para simularlo se considera un espín $N/2$, luego la dimensión total del momento angular es $N + 1$. En definitiva, el hamiltoniano del modelo de impureza estudiado es el que sigue [10]:

$$H = \omega_c a^\dagger a + \omega_s S_z + \frac{\lambda}{\sqrt{S}} \cdot (a^\dagger S_- + a S_+) - \mu \sqrt{S} \cdot (a + a^\dagger), \quad (3)$$

donde se incluyen los operadores de aniquilación y creación: a y a^\dagger , respectivamente; los operadores de momento angular de espín S_z y escalera S_+ y S_- . En cuanto a las frecuencias ω_c y ω_s , se considera un régimen resonante en el que $\omega_c = \omega_s = \omega_0$ y se toma la unidad de energía $\omega_0 = 1$.

Se estudiarán por tanto los parámetros λ y μ , el primero como una medida de la fuerza de interacción entre los espines y los fotones, y el segundo como una ruptura de la simetría. La construcción y diagonalización de las matrices asociadas al hamiltoniano, así como el estudio que se presentará a continuación, pueden encontrarse programados en Python en [9].

4.1. Truncado de fotones

Para realizar de manera práctica el estudio del hamiltoniano (3) se debe utilizar un número finito de fotones incidentes n_{max} , pues la matriz que se quiere diagonalizar debe tener dimensión finita. Como teóricamente incidirían infinitos fotones sobre la red, se debe considerar un número de fotones grande en comparación con el número de espines, pero determinar el corte no es trivial.

Para ello, se entiende y se comprueba experimentalmente que los niveles con energías más bajas se mantienen en el mismo valor energético a medida que se aumenta el número de fotones, por lo que todos los niveles que estén por debajo de una cierta cota energética se pueden considerar como reales. Esto se observa en la figura 1, en la que se muestra la evolución de la energía asociada al estado n -ésimo para distinto número de fotones incidente sobre un modelo con $N = 2$.

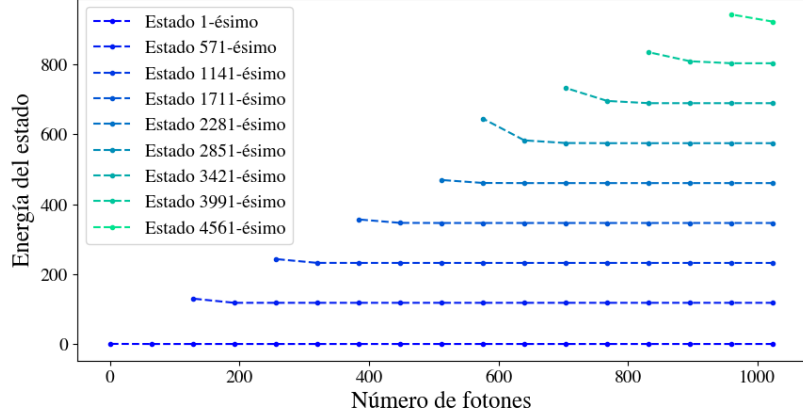


Figura 1: Evolución de estados energéticos al aumentar el número de fotones incidentes.

De esta forma, se toma como criterio para identificar los niveles reales una comparación de los estados obtenidos para el número de fotones considerado, n_{max} , con los estados para $0,9 \cdot n_{max}$: se asumirán como estados reales los asociados a la serie n_{max} que coincidan con los de la otra serie en un porcentaje mayor al 99 % y todos sus niveles inferiores también. Matemáticamente:

Observación 4.1. Sean $\{E_{1,k}\}_{k=1}^{n_1}$ y $\{E_{2,k}\}_{k=1}^{n_2}$ las dos series de estados asociados a $0,9 \cdot n_{max}$ y n_{max} , respectivamente, se tomarán como estados reales los $\{\tilde{E}_k\}_{k=1}^n$ tales que, para $k \in \{1, \dots, n_1\}$, pues $n_1 \leq n_2$, si $|E_{1,j} - E_{2,j}| \leq 0,01 \cdot E_{2,j}$, $\forall j \leq k$ entonces $\tilde{E}_k = E_{2,k}$.

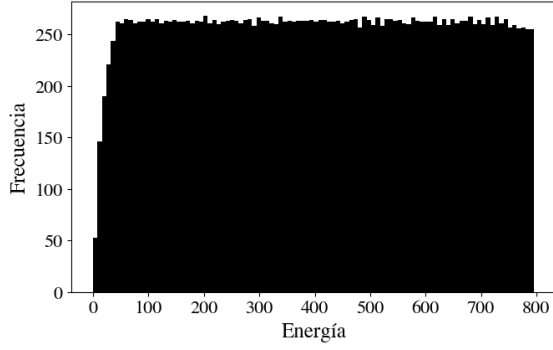
Cabe destacar que el truncado de fotones es más acusado cuanto mayores son los parámetros λ y μ , y también según aumenta el número de espines. Esto dificulta la obtención de resultados para valores de $\lambda > 10$ y $\mu > 5$ en situaciones razonables ($N \leq 32$), por lo que los resultados presentados en este documento se centrarán en los intervalos para los que el truncado no imposibilita los cálculos.

4.2. Situación definida: integrable o caótica

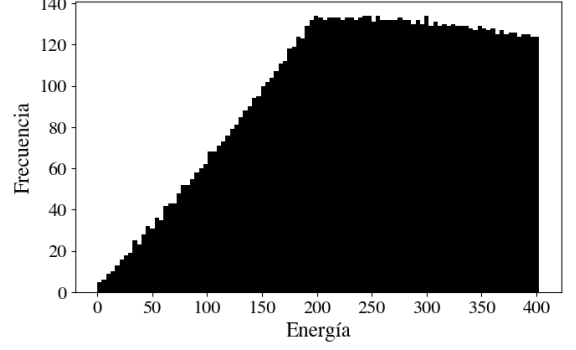
La red de Tavis-Cummings presenta características asociadas a sistemas integrables para valores de $\mu \geq 0$ bajos y $\lambda > 0$. Los espectros energéticos presentan una forma similar al de la figura 2a, teniendo en cuenta que el estado fundamental se ha trasladado a la energía $E_0 = 0$, y el resto se han movido en consecuencia. Por otro lado, la red presenta características asociadas a sistemas caóticos para valores de $\mu \geq 0$ altos y $\lambda > 0$, asemejándose los espectros a la figura 2b.

Como se puede observar, para el caso caótico la pendiente para energías bajas es menos abrupta que para el caso integrable, pero esto no es una tendencia extrapolable, pues los casos en que la pendiente es aun más suave se caracterizan por presentar una dinámica mixta.

Las diferencias entre los sistemas integrable y caótico están presentes en el estudio de los estadístico s , r y el *gap ratio*, destacando que el espectro debe reescalarsse como se indicó en la sección 3.3.1.1 para el estadístico s .



(a) *Sistema integrable, $\mu = 0,2$.*



(b) *Sistema caótico, $\mu = 3$.*

Figura 2: *Comparativa de los casos extremos para $N = 32$ y $\lambda = 1$.*

Estas diferencias son visibles en las figuras 3a y 3b, para el estadístico s ; 3c y 3d, para el estadístico r ; y 3e y 3f, para el *gap ratio*. En todas ellas se han representado a modo comparativo las distribuciones teóricas asociadas a Poisson, GOE y GUE.

Se comprueba que el método de reescalado elegido ha sido adecuado, mostrando las mismas conclusiones el estadístico s que los otros estadísticos. Además, se aprecia como en el caso caótico la distribución de probabilidad se acerca en todos los estadísticos a la correspondiente a la colectividad GOE, y no a la GUE, pues el sistema es simétrico bajo inversión temporal.

4.2.1. Caso patológico, $\lambda = 0$

Es instructivo estudiar con cierto detenimiento el caso $\lambda = 0$ y $\mu \geq 0$. En este caso, y siguiendo la ecuación (3), se tiene un hamiltoniano que no presenta acoplamiento entre los operadores relativos a los espines (S_α) y a los fotones (a y a^\dagger), por lo que el sistema debería ser equivalente a considerar dos sistemas independientes.

En la práctica esto es lo que se observa, con niveles muy próximos entre sí ($s \rightarrow 0$) y equiespaciados ($r \rightarrow 1$), independientemente del parámetro $\mu \geq 0$ que se considere, como se muestra en las figuras 4a y 4b. Los resultados para el *gap ratio* en la figura 4c son análogos.

4.3. Transición al caos en función de los parámetros

Una vez obtenidas al menos dos situaciones en las que se observan características propias de sistemas integrables y caóticos, respectivamente, resulta inmediato preguntarse cómo se caracteriza la transición de un comportamiento a otro. Intuitivamente se pensaría en una transición suave con los casos integrable y caótico como extremos, pero, ¿es una transición lineal? ¿Es una transición continua? ¿Es una transición monótona? Una vez se transita de un sistema integrable a uno caótico, si se sigue rompiendo la simetría, ¿se mantiene el caos? ¿Se puede caracterizar la transición por sistemas intermedios entre uno caótico y uno integrable?

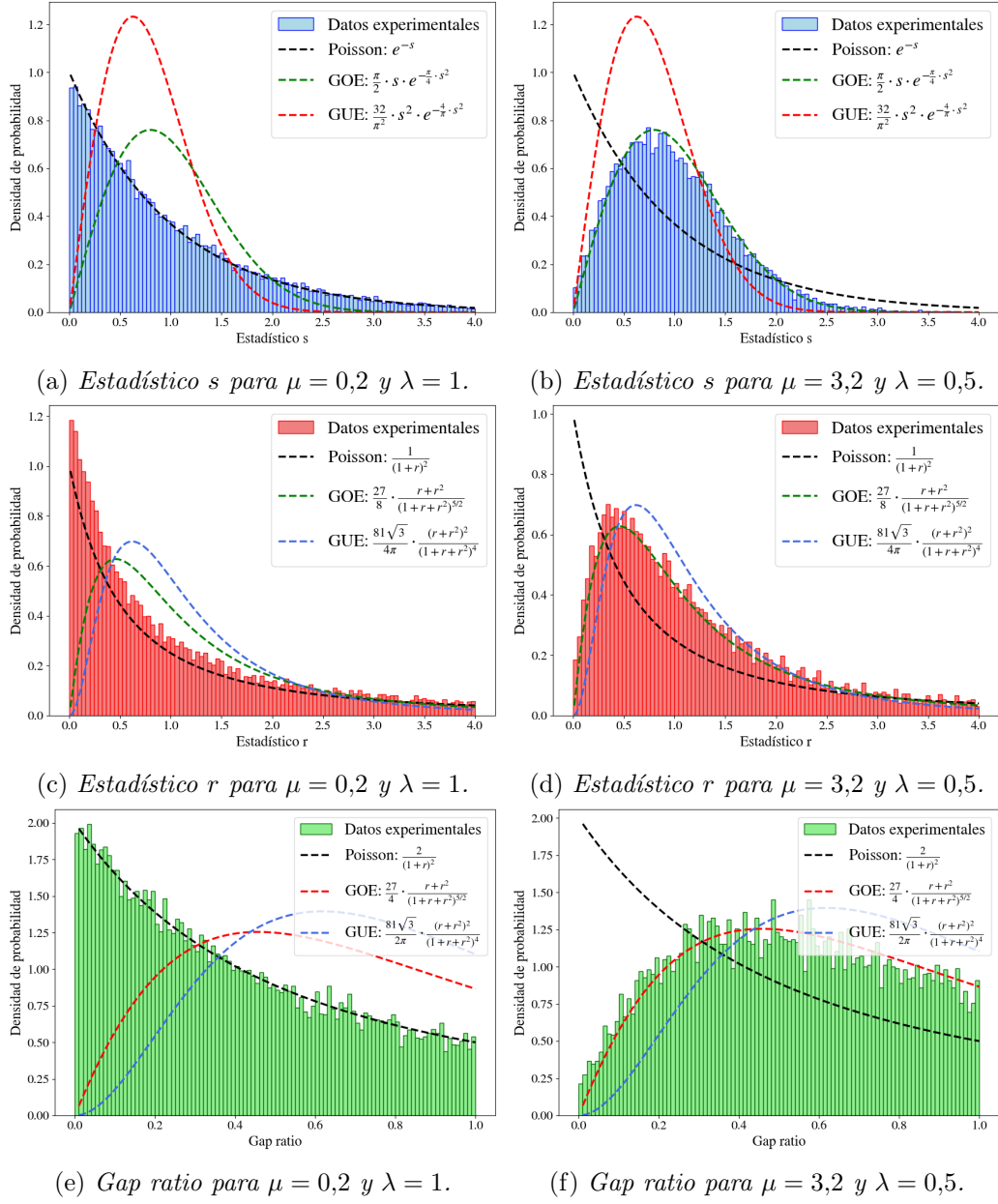


Figura 3: Comparativa de los distintos estadísticos en los casos integrable y caótico para $N = 32$.

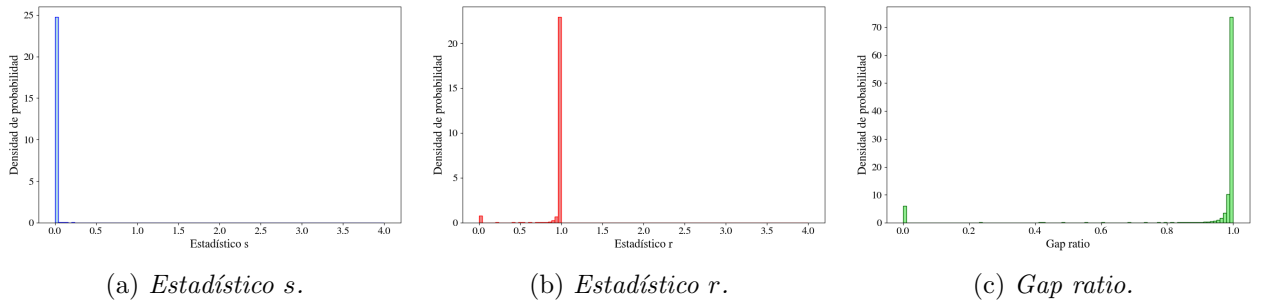


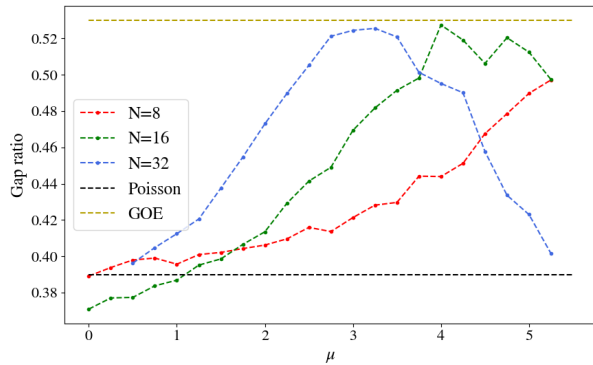
Figura 4: Caso patológico $\lambda = 0$ para $N = 32$, con $\mu \geq 0$.

4.3.1. Comparativa para distintos valores de μ

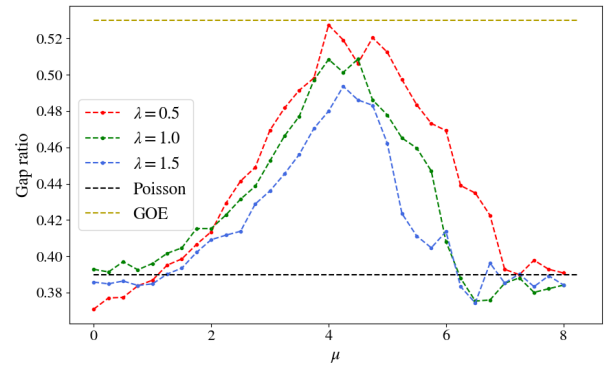
Considerando un valor de $\lambda = 0,5$ fijo, se realiza entonces un estudio con μ variable en el intervalo $0 \leq \mu \leq 5,5$, observando los distintos estadísticos. Un resultado reseñable es el mostrado en la figura 5a, donde se compara la evolución del *gap ratio* para distinto número de espines.

Por la dificultad en la realización de un análisis de este tipo, y con la pretensión de extender las conclusiones a valores mayores de μ y a distintos λ , se ha repetido el estudio con $\lambda = 1$ y $\lambda = 1,5$ para un intervalo $\mu \in [0, 8]$ pero solo en el caso $N = 16$, obteniéndose la comparativa expuesta en la figura 5b, donde se han tenido en cuenta los resultados (1) y (2) para el *gap ratio*. De las dos figuras se pueden extraer ciertas conclusiones relevantes:

1. A medida que el número de espines aumenta, la ruptura de la simetría (parámetro μ) necesaria para que se observen comportamientos caóticos es menor.
2. Tras una serie de valores de μ para los que se observa un comportamiento caótico, si se sigue aumentando dicho valor, i.e. mayor ruptura de la simetría, el comportamiento vuelve a ser integrable. Esto se puede entender como que hay unos valores de μ que rompen la simetría pero mantienen el sistema acoplado y caótico, mientras que para valores muy altos de μ el sistema actúa como sistemas integrables completamente desligados.
3. Cuanto mayor es la interacción entre los espines y los fotones, i.e. un mayor λ , menor sistema caótico puro (GOE) se obtiene. Esto indica que para situaciones con una mayor interacción entre espines y fotones se tiende a encontrar sistemas integrables o con propiedades mixtas.



(a) Transiciones para $\lambda = 0,5$ y N variable.



(b) Transiciones para $N = 16$ y λ variable.

Figura 5: Transiciones entre sistemas integrables y caóticos.

Con la intención de caracterizar de manera más detallada la transición observada en la figura 5a para $N = 32$ se considera un análisis simultáneo para los tres estadísticos. Para cada uno de ellos se intenta ajustar la distribución obtenida para $\lambda = 1$ y cada valor de μ por una combinación lineal

de las distribuciones teóricas de la Poisson y la GOE⁶. Es decir, para cada uno de los estadísticos y para cada valor de μ se busca obtener α y β valores reales tales que:

$$P_\mu = \alpha \cdot P_{Poisson} + \beta \cdot P_{GOE} \quad (4)$$

Una característica clave en este caso es que no se impone que $\alpha + \beta = 1$ ni que $\alpha, \beta \geq 0$, dejando mayor libertad al ajuste para identificar cómo es la transición⁷. Este procedimiento para cada estadístico con valores arbitrarios $\mu = 1,75$ y $\lambda = 1$ se puede observar en la figura 6.

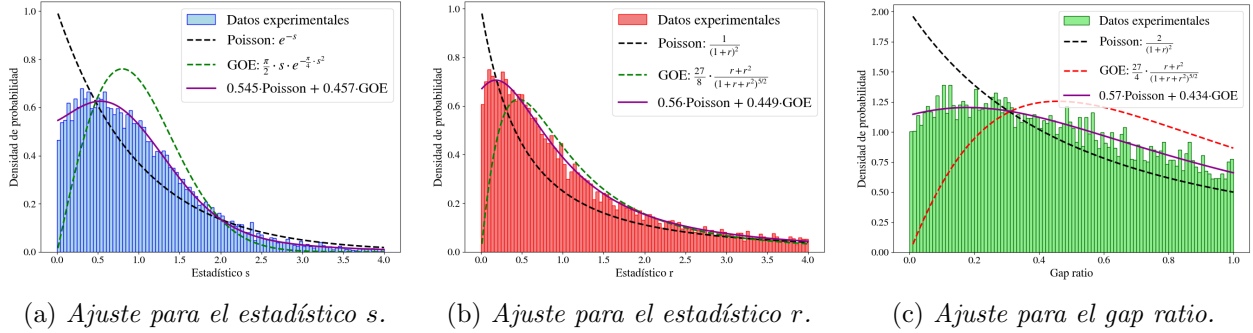


Figura 6: Ajustes experimentales para $\mu = 1,75$ y $\lambda = 1$ en el caso $N = 32$.

Repitiendo el proceso para cada uno de los valores de $\mu \in [0, 4]$ y $\lambda = 1$ se pueden obtener dos curvas (una para los valores óptimos de α y otra para los óptimos de β) para cada estadístico que indican cómo evoluciona el sistema de un tipo integrable a un tipo caótico. Una comparativa de dichas curvas para los tres estadísticos y $N = 32$ se puede observar en la figura 7.

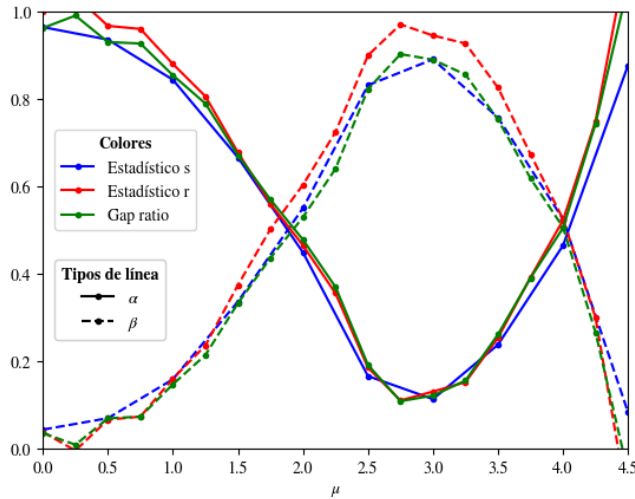


Figura 7: Evolución de α y β de los tres estadísticos en función de μ para $N = 32$ y $\lambda = 1$.

⁶En este caso se sustituye $\lambda = 0,5$ de la figura 5a por $\lambda = 1$ por completitud y para ver que lo obtenido no depende de un valor de λ característico. Aun así, resultados análogos a los mostrados se obtendrían para $\lambda = 0,5$.

⁷Si el ajuste es adecuado, al estar ambas distribuciones normalizadas se cumplirá trivialmente que $\alpha + \beta = 1$, pero la condición $\alpha, \beta \geq 0$ no tiene por qué darse de manera directa.

Como se aprecia en la figura 7, los tres estadísticos siguen evoluciones prácticamente idénticas, indicando que las propiedades estudiadas son consistentes. Asimismo, se observa que hay una región en torno a $\mu = 2$ en la que se tiene una distribución completamente mixta para después aparecer un comportamiento casi caótico puro, finalizando con la vuelta a un estado mixto y, luego, a la integrabilidad. Esto va en línea con lo comentado previamente.

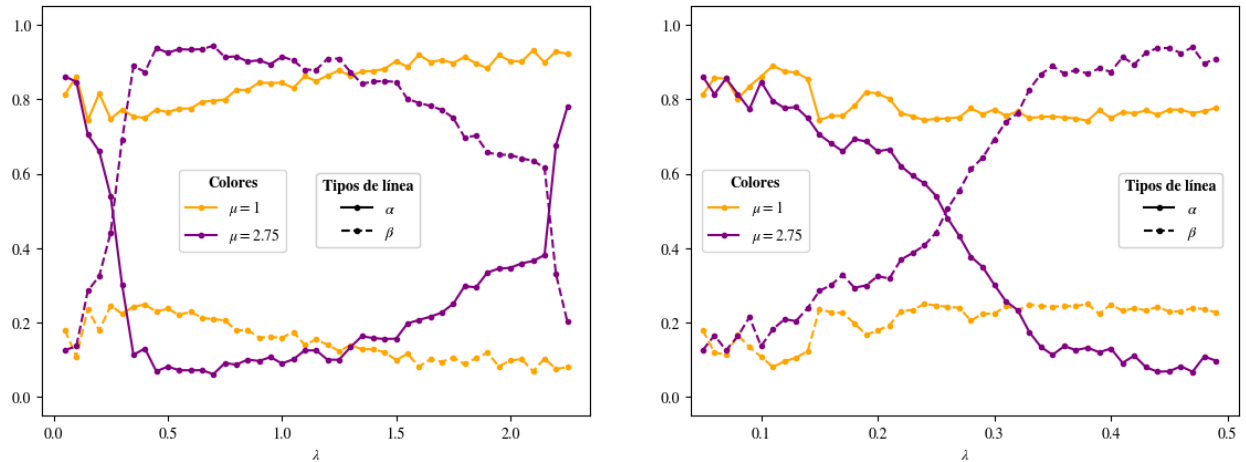
En este análisis, el dato que resulta más destacable es que sin imponer previamente que la combinación lineal fuese convexa, i.e. los coeficientes positivos y sumando 1, en la práctica el resultado obtenido indica que sí lo es para todos los valores de N , λ y μ estudiados, permitiendo extrapolar el siguiente resultado.

Conjetura 4.2. *Sea un sistema invariante bajo inversión temporal que presenta una transición entre un sistema cuyo análogo clásico es integrable a otro cuyo análogo clásico es caótico, entonces las propiedades de su distribución espectral se pueden caracterizar como una combinación convexa de las de una Poisson y las de la colectividad GOE.*

4.3.2. Comparativa para distintos valores de λ

Por otro lado, se estudia también el impacto que tiene el valor del parámetro λ en la distribución espectral del sistema. Para ello, se compararán los espectros obtenidos para $\mu = 1$ y $\mu = 2,75$, con $0,05 \leq \lambda \leq 2,25$ y $N = 32$, excluyéndose el caso patológico $\lambda = 0$.

Prevenidos por las figuras 5b y 7, para el caso $\mu = 1$ no se debería esperar observar un sistema caótico para ningún valor de λ , mientras que en el caso $\mu = 2,75$ sí se esperaría apreciar características relacionadas con la colectividad GOE, pero, ¿para cualquier valor de λ ?



(a) Transiciones abruptas bidireccionales.

(b) Zoom en la transición en torno a $\lambda = 0,25$.

Figura 8: Evolución de α y β del estadístico s en función de λ para $N = 32$, con $\mu = 1$ y $\mu = 2,75$.

Realizando un estudio análogo al presentado en la ecuación (4) para el estadístico s , pero esta vez manteniendo μ fijo y variando λ , se observa la transición abrupta al caos mostrada en la figura 8a para $\mu = 2,75$, mientras que para $\mu = 1$, como se esperaba, no se alcanza un sistema caótico.

Resulta interesante preguntarse ahora si, dada una transición tan abrupta, esta es monótona. Como se puede discernir en la figura 8b, en la que se ha estudiado el intervalo $0,05 \leq \lambda \leq 0,5$ con un paso ínfimo $\Delta\lambda = 0,01$ para tener una mayor resolución, la transición parece ser estrictamente monótona, aunque cuando se consideran valores de λ con una pendiente menor pasa a ser sólo cualitativamente monótona. Aun así, se puede argumentar que las pequeñas discrepancias pueden deberse a errores asociados al truncado de fotones.

Por último, destacar que en la figura 8a para $\mu = 2,75$ también se observa una transición abrupta pero ahora hacia un sistema integrable en el entorno de $\lambda = 2,25$, lo que hace sospechar que, pese a no ser simétricas, esta clase de transiciones guardan algún tipo de relación en las dos direcciones, i.e. de la integrabilidad al caos y viceversa.

5. Conclusiones

Tras el desarrollo completo de este documento se puede dar respuesta, al menos parcialmente y con la cautela propia de no haber realizado un estudio exhaustivo de varios sistemas, a la pregunta de la que se partía: *¿cómo es la transición de un comportamiento integrable a un comportamiento caótico, y viceversa, en un sistema cuántico?*

La transición entre un sistema cuántico integrable y uno caótico es abrupta, cualitativamente monótona y continua. Además, en las situaciones intermedias el comportamiento del sistema puede caracterizarse como una combinación convexa de un comportamiento integrable y uno caótico, siendo, estos últimos, comportamientos extremos del sistema. Que la combinación sea convexa no es más que un concepto intuitivo pero que, a priori, no tendría por qué darse: *la transición de un sistema cuántico integrable a uno cuántico caótico, y viceversa, se produce por sistemas intermedios que pueden caracterizarse por un comportamiento mixto que queda entre los dos anteriores.*

En definitiva, la Teoría de Matrices Aleatorias ha permitido estudiar con rigor y detalle un sistema cuántico que, en función de dos parámetros, presentaba comportamientos integrables, caóticos, y de transición entre ellos. El empleo de los estadísticos adecuados y el análisis físico de la red de Tavis-Cummings han propiciado la caracterización del sistema en todas las situaciones, lo que ha permitido extraer conclusiones sobre la transición caótico-integrable, siendo este el foco de estudio de este Trabajo de Fin de Grado.

Referencias

- [1] A. A. Abul-Magd and A. Y. Abul-Magd. Unfolding of the spectrum for chaotic and mixed systems. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 396:185–194, February 2014.
- [2] P. Acuña. Von Neumann’s theorem revisited. *Foundations of Physics*, 51(3):73, 2021.
- [3] K. Andersson. *A Review of Gaussian Random Matrices*. Dissertation, Linköping University, 2020.
- [4] M. V. Berry. Quantizing a classically ergodic system: Sinai’s billiard and the KKR method. *Annals of Physics*, 131:163–216, 1981.
- [5] M. V. Berry and M. Tabor. Level clustering in the regular spectrum. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 356(1686):375–394, 1977.
- [6] J. S. Caux and J. Mossel. Remarks on the notion of quantum integrability. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2011(02):P02023, February 2011.
- [7] A. Edelman and N. Raj Rao. Random matrix theory. *Acta Numerica*, 14:233–297, May 2005.
- [8] J. V. José and E. J. Saletan. *Classical Dynamics: A Contemporary Approach*. Cambridge University Press, 8th edition, 2012.
- [9] S. Lozano. Caos y física estadística en sistemas cuánticos. <https://github.com/samuloza/Caos-y-fisica-estadistica-en-sistemas-cuanticos>, 2024.
- [10] M. Prasad, H. K. Yadalam, M. Kulkarni, and C. Aron. Transition to chaos in extended systems and their quantum impurity models. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 57(1):015308, December 2023.
- [11] H. J. Stöckmann. *Quantum Chaos: An Introduction*. Cambridge University Press, Cambridge, 2nd edition, 1999.
- [12] S. H. Tekur. *Distribution of level spacing ratios in random matrix theory and chaotic quantum systems variants and applications*. PhD thesis, Indian Institute of Science Education and Research (IISER) Pune, 2019.
- [13] J. T. Townsend. Chaos theory: A brief tutorial and discussion. In A. F. Healy, S. M. Kosslyn, and R. M. Shiffrin, editors, *Essays in Honor of William K. Estes*, volume 1, pages 65–96. Lawrence Erlbaum Associates, Inc., 1992.
- [14] J. von Neumann. Über funktionen von funktionaloperatoren. *Annals of Mathematics*, 32(2):191–226, April 1931.