

# Formelsammlung ANLS

**Ersteller:**

Samuel Müller – 20.01.2020

HSLU – Rotkreuz

**Dozent:**

Josef Schuler

**Themen:**

Funktionen

Differentialrechnung

Integralrechnung

## Contents

Generelles.....	4
Mathematische Zeichen .....	4
Zahlenmenge .....	5
Die reellen Zahlen als Baumdiagramm.....	5
Die reellen Zahlen als Zwiebeldiagramm.....	5
Darstellung auf der Zahlengerade .....	5
Definitionsbereich .....	5
Wertebereich.....	5
Funktionen.....	6
Allgemeine Funktionseigenschaften .....	6
Lineare Funktion .....	6
Steigung zweier senkrecht stehender Geraden .....	6
Quadratische Funktion (Parabel).....	6
Polynom n-ten Grades .....	6
Scheitelpunkt (Spitze der Parabel, bsp. Maximaler Gewinn) .....	7
Nullstellen.....	7
Schnittpunkt mit der Y-Achse .....	7
Verschiebungen .....	7
Symmetrien (Gerade & Ungerade).....	8
Umkehrbarkeit von Funktionen .....	9
Stetigkeit, Pole, hebbare Definitionslücken .....	9
Stetige/unstetige Funktion .....	9
Endliche Sprünge .....	9
Stetigkeit und Grenzwerte (Limes) .....	10
Pole .....	10
Hebbare Definitionslücke .....	10
Ganzrationale Funktionen (Polynomfunktion) .....	11
Polynom n-ten Grades, Grad, Koeffizient, y-Achsenschnittpkt., Nullstellen.....	11
Gebrochen-rationale Funktionen (Asymptote) .....	11
Eigenschaften der gebrochen rationalen Funktionen (auch Asymptotentypen).....	11
Potenz- und Wurzelfunktion .....	12
Verschiebungen .....	12
Exponentialfunktionen .....	12
Grunddefinition .....	12
Exponentielle Zunahme, Verdoppelungszeit.....	13
Exponentielle Abnahme, Halbwertszeit .....	13
Exponentielle Zunahme, ver-p-facht .....	13

Die «a hoch t/tau» Darstellung: $G(t) = G_0 \cdot a^{t/\tau} = b \cdot a^{t/\tau}$ .....	13
Logarithmusfunktionen .....	14
Anwendung in der Preistheorie(Gewinn/Kosten) .....	15
Schulden-/Guthabenzuhname.....	15
Formeln.....	15
Differentialrechnung .....	17
Grundlagen .....	17
Formel.....	17
Ableitungsregeln.....	17
Winkel der Tangente mit x-Achse im Zusammenhang mit der Ableitung.....	18
1. , 2. , 3. Ableitung.....	18
Differenzierbarkeit(Ableitbarkeit) und Stetigkeit.....	18
Anwendung der Differentialrechnung.....	19
Tangentengleichung mit einem Punkt bestimmen .....	19
Linearisierung (1.Ableitung) einer Funktion .....	19
Quadratische Näherung/Approximation.....	19
Monotonie und Krümmung (konvex & konkav) .....	19
Kurvendiskussion (Maxima & Minima).....	20
Newton Verfahren .....	21
Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen .....	22
Annäherung zweier Funktionen (kleinste/grösste) berechnen.....	22
Flächenberechnung .....	22
Erstellen eines Polynoms (Polynom nicht bekannt) .....	24
Allgemeine Formeln/Hilfe.....	24
Aufgabenstellungen und Lösungstipps.....	24
Integralrechnung .....	25
Unbestimmtes Integral.....	25
Begriffsbestimmung .....	25
Integrationsregeln .....	25
Logarithmusfunktion .....	26
Faktorregel.....	26
Summenregel.....	26
Partielle Integration (bei Produkten: bsp. $x \cdot e^x$ ) .....	26
Substitutionsregel.....	26
Bestimmtes Integral .....	27
Berechnung des bestimmten Integrals.....	27
Bestimmtes Integral und Flächeninhalt zw. Der x-Achse & der Funktionskurve .....	27
Integrationsregeln für bestimmte Integrale.....	28

Integrationsvariable ungleich «x» .....	28
Integrierbarkeit von Funktionen.....	28
Technik des Integrierens.....	29
Substitutionsmethoden .....	29
Logarithmische Integration .....	29
Partielle Integration (Bei Funktionen mit mehreren Faktoren, Multiplikation).....	30
Facetten der Integralrechnung.....	31
Fläche zwischen Funktionskurve und x-Achse.....	31
Fläche zwischen zwei Kurven .....	31
Volumen eines Rotationskörpers (Rotation um x-Achse) .....	31
Taschenrechner bedienen .....	33

## Generelles

### Mathematische Zeichen

Zeichen	Bedeutung	Beispiel	
$\in$	„Ist Element von ...“	$-2 \in \mathbb{Z}$	
$\notin$	„Ist nicht Element von ...“	$-2 \notin \mathbb{N}$	
$\exists$	„Es existiert ...“	$\exists a, b, c \in \mathbb{N}$ so, dass $a^2 + b^2 = c^2$	
$\nexists$	„Es existiert nicht (keine) ...“	$\nexists a, b \in \mathbb{R}$ so, dass $ a + b  >  a  +  b $	
$\forall$	„Für alle ...“	$\forall a \in \mathbb{R}$ gilt $ a  \geq 0$	
$\setminus$	„Ohne ...“	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ heißt „die reellen Zahlen ohne die Null“	
$ $	„Für die gilt“	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ „x aus $\mathbb{R}$ , für die gilt $x > 0$ “	
$  $	Betrag	$ -4  = 4$	
$\sum$	Summe		
$\prod$	Produkt		
!	Fakultät		
$\approx$	„ungefähr“	$1/3 \approx 0,333$	
$\neq$	„nicht gleich“	$1/3 \neq 0,333$	
$\equiv$	„äquivalent“, „gleichwertig“	$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$	
$\infty$	„unendlich“		
$\vee$	oder, OR	$A \vee B$ (A oder B)	
$\wedge$	und, AND	$A \wedge B$ (A und B)	
$\neg$	nicht, NOT	$\neg A$ (nicht A)	
$<$	„kleiner“	$3 < 4$	
$>$	„grösser“	$-5 > -6$	
$\leq$	„kleiner oder gleich“	$3 \leq 4; 3 \leq 3$	
$\geq$	„grösser oder gleich“	$-5 \geq -6; -5 \geq -5$	
$] [$	„offenes Intervall“	$]a; b[ = \{x \mid a < x \wedge x < b\}$ $= \{x \mid a < x < b\}$	Alle Zahlen zwischen a und b, <u>exkl.</u> a und b
$[ ]$	„abgeschlossenes Intervall“	$[a; b] = \{x \mid a \leq x \wedge x \leq b\}$ $= \{x \mid a \leq x \leq b\}$	Alle Zahlen zwischen a und b, <u>inkl.</u> a und b
$[ [$	„links abgeschlossenes, rechts offenes Intervall“	$[a; b[ = \{x \mid a \leq x \wedge x < b\}$ $= \{x \mid a \leq x < b\}$	Alle Zahlen zwischen a und b, <u>inkl.</u> a, <u>exkl.</u> b
$] ]$	„links offenes, rechts abgeschlossenes Intervall“	$]a; b] = \{x \mid a < x \wedge x \leq b\}$ $= \{x \mid a < x \leq b\}$	Alle Zahlen zwischen a und b, <u>exkl.</u> a, <u>inkl.</u> b

#### Bemerkung:

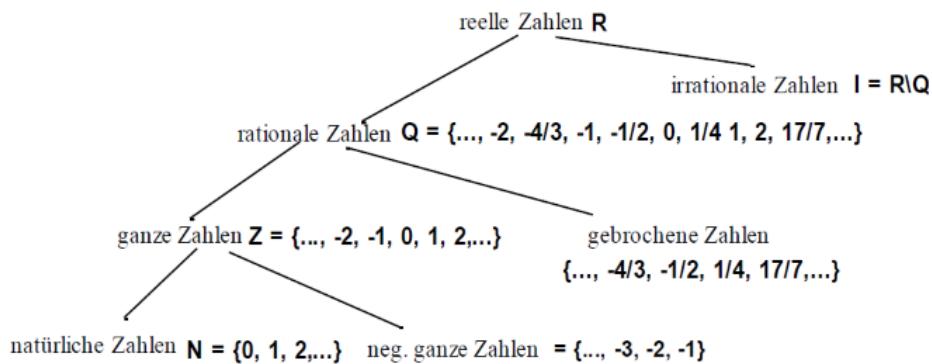
Falls die Grenzen der Intervalle  $-\infty$  oder  $\infty$  sind, dann werden die offenen Intervalle gebraucht:

$] -\infty; b]$       $[a; \infty[$       $] -\infty; \infty[$

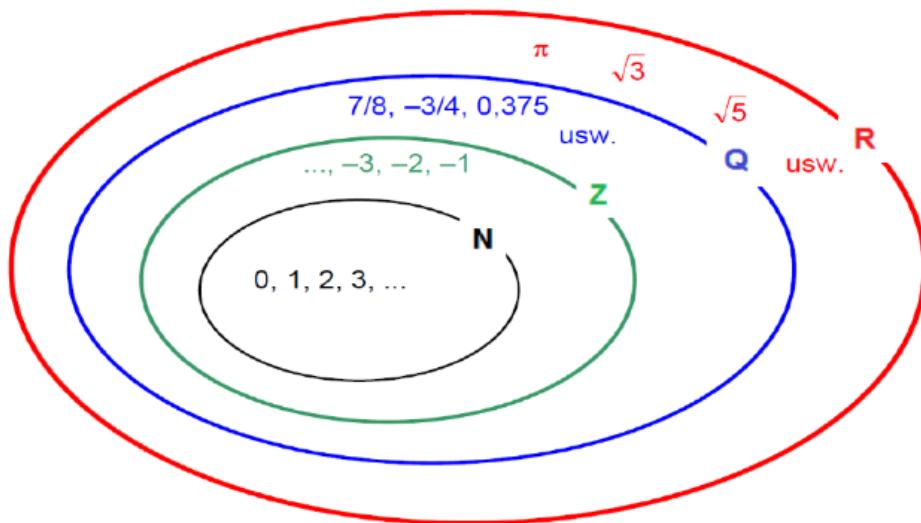
- \* Die Zahl Null wird aus der Zahlenmenge ausgeschlossen.  $\mathbb{N}^* \{1, 2, 3, \dots\}$
- + Es sind nur die positiven Zahlen und die Null zu nehmen.  $\mathbb{Z}^+ \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Es sind nur die negativen Zahlen und die Null zu nehmen.  $\mathbb{Z}^- \{\dots, -3, -2, -1, 0\}$

## Zahlenmenge

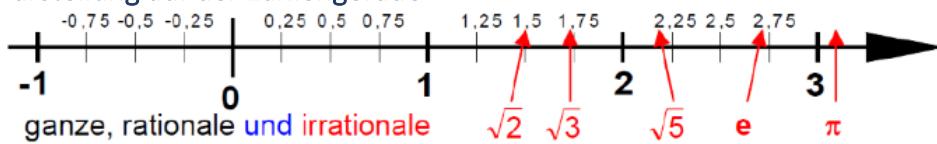
Die reellen Zahlen als Baumdiagramm



Die reellen Zahlen als Zwiebeldiagramm



Darstellung auf der Zahlengerade



Beispiele von rationalen (= „als Bruch darstellbare“) Zahlen:  $\frac{2}{3}, \frac{17}{6}, \frac{4}{1} = 4, \frac{3}{1} = 3$

Beispiele von Zahlen, die nicht rational sind:  $\pi, \sqrt{2}$ , usw.

## Definitionsbereich

Welche x-Werte darf ich in die Funktion einsetzen?  $D=[1;6] \rightarrow 1-6$

## Wertebereich

Welche y-Werte nimmt die Funktion an?  $W=[0;20] \rightarrow 0-20$

## Funktionen

### Allgemeine Funktionseigenschaften

#### Lineare Funktion

##### Geradengleichung

$$y = f(x) = ax + b$$

- **a**(m) = Steigung (+/-  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ) (+=geht nach oben; -=fällt nach unten)
- **b** = y-Achsenmittelpunkt
- **Punkte** auf im Koordinatensystem werden so angegeben: (x,y)
- **F(x)** bedeutet, dass x die **unabhängige** Variable ist und y die **abhängige**

##### Zweipunkte-Geradengleichung

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- erster Punkt = (x1;y1)
- zweiter Punkt = (x2;y1)
- nach y auflösen

#### Beispiel:

Gesucht ist die Gleichung der Geraden, die durch die Punkte P(2; 3) und Q(4; 8) geht.

Beide Punkte in die 2-Punkte-Form einsetzen und kreuzweise ausmultiplizieren.

Nach y auflösen.

Einsetzen in die 2-Punkte-Form:  $\frac{8-3}{4-2} = \frac{y-3}{x-2}$  resp.  $\frac{5}{2} = \frac{y-3}{x-2}$

Mit kreuzweisem ausmultiplizieren folgt:  $5 \cdot (x - 2) = 2 \cdot (y - 3)$ .

Nach y aufgelöst:  $y = 2,5x - 2$

##### Punkt-Steigungs-Form

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

#### Beispiel:

Gesucht ist die Gleichung der Geraden, die durch den Punkt P(6; -2) geht und die Steigung m = -1/2 besitzt.

Einsetzen in die Punkt-Steigungs-Form:  $-\frac{1}{2} = \frac{y - (-2)}{x - 6}$  oder  $-\frac{1}{2}(x - 6) = y + 2$

Nach y aufgelöst:  $y = -0,5x + 1$

Kontrolle: Natürlich muss der Punkt P die Gleichung erfüllen: P: -2 = -1/2 · 6 + 1

#### Steigung zweier senkrecht stehender Geraden

Zwei Geraden g1 und g2 stehen genau dann senkrecht aufeinander, wenn das **Produkt** ihrer **Steigung** den **Wert -1** ergibt. Math. Form:  $g_1 \perp g_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$  resp.  $g_1 \perp g_2 \Leftrightarrow m_1 = -1/m_2$

#### Quadratische Funktion (Parabel)

$$y = ax^2 + bx + c$$

##### Mitternachtsformel:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Wenn **Diskriminante negativ** ist, gibt es

**keine Lösungen:**

d.h.  $b^2 - 4ac < 0$

#### Polynom n-ten Grades

Grad	Bezeichnung	allgemeine Schreibweise
0	konstant	$a_0$
1	linear	$a_1 \cdot z + a_0$
2	quadratisch	$a_2 \cdot z^2 + a_1 \cdot z + a_0$
3	kubisch	$a_3 \cdot z^3 + a_2 \cdot z^2 + a_1 \cdot z + a_0$
4	quartisch	$a_4 \cdot z^4 + a_3 \cdot z^3 + a_2 \cdot z^2 + a_1 \cdot z + a_0$
5	quintisch	$a_5 \cdot z^5 + a_4 \cdot z^4 + a_3 \cdot z^3 + a_2 \cdot z^2 + a_1 \cdot z + a_0$

z kann durch x ersetzt werden und a1, a2, a3 durch a, b, c, etc.

Eine Polynomfunktion 3-ten Grades lautet:  $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

## Scheitelpunkt (Spitze der Parabel, bsp. Maximaler Gewinn)

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$S\left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac-b^2}{4a}\right) \text{ resp. } S\left(-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

→ Beim Scheitelpunkt ist typischerweise ein **Maxima** oder ein **Minima** zu finden.

## Nullstellen

Die **Nullstellen** einer Funktion  $y = f(x)$  sind diejenigen **Werte für  $x_i$ , für die  $f(x_i) = 0$  gilt**. D.h. die **Nullstellen** einer Funktion  $y = f(x)$  sind die **Lösungen der Gleichung  $f(x) = 0$** . Bei grösseren Polynomen einfach substituieren, bsp.  $z=x^2$

## Beispiel:

Die Nullstellen der Funktion  $y = f(x) = x^2 - 3x + 2$  sind die Lösungen der Gleichung  $x^2 - 3x + 2 = 0$ . Nullstellen:  $x_1 = 2$  und  $x_2 = 1$

## Schnittpunkt mit der Y-Achse

Der **Schnittpunkt** einer Funktion  $y = f(x)$  mit der y-Achse ist der Punkt  $S(0; f(0))$ . Also **0** für  $x$  einsetzen oder **c** ablesen.

## Beispiel:

Der **Schnittpunkt** der Funktion  $y = f(x) = x^2 - 3x + 2$  mit der y-Achse ist der Punkt  $S(0; 2)$ .

## Verschiebungen

### Graph $y = f(x) = ax^2 + c$

- I)  $c > 0$  Verschiebung der Parabel  $y = ax^2$  **nach oben** um  $|c|$ -Einheiten
- II)  $c < 0$  Verschiebung der Parabel  $y = ax^2$  **nach unten** um  $|c|$ -Einheiten

## Eigenschaften:

1) DB und WB:	$DB = \mathbb{R}$ I) Für $a > 0$ : $WB = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq c\}$ II) Für $a < 0$ : $WB = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq c\}$
2a) Nullstellen:	Lösungen der Gleichung $0 = ax^2 + c$
2b) Schnittpunkt mit x-Achse:	I) $\left(\sqrt{\frac{-c}{a}}, 0\right)$ & $\left(-\sqrt{\frac{-c}{a}}, 0\right)$ , falls $\frac{-c}{a} \geq 0$ II) Keine Schnittpunkte, falls $\frac{-c}{a} < 0$
3) Schnittpunkt mit y-Achse:	$B(0; c)$
4) Scheitelpunkt:	$S(0; c)$
5) Spezielles:	Der Wechsel von $a > 0$ zu $a < 0$ entspricht einer Spiegelung an der Geraden $y = c$ .

### Graph $y = f(x) = a(x + d)^2$

- I)  $d > 0$  Verschiebung der Parabel  $y = ax^2$  **nach links** um  $|d|$ -Einheiten
- II)  $d < 0$  Verschiebung der Parabel  $y = ax^2$  **nach rechts** um  $|d|$ -Einheiten

## Eigenschaften:

1) DB und WB:	$DB = \mathbb{R}$ I) Für $a > 0$ : $WB = \mathbb{R}_+$ II) Für $a < 0$ : $WB = \mathbb{R}_-$
2) Nullstelle:	$x = -d$
3) Schnittpunkt mit y-Achse:	$B(0; a \cdot d^2)$
4) Scheitelpunkt:	$S(-d; 0)$

Graph  $y = f(x) = a(x + d)^2 + e$

Entsprechend den beiden vorhergehenden Graphen Verschiebung nach oben/unter und recht-links.

### Eigenschaften:

	$DB = \mathbb{R}$
1) DB und WB:	I) Für $a > 0$ : WB = { $y \in \mathbb{R} \mid y \geq e$ } II) Für $a < 0$ : WB = { $y \in \mathbb{R} \mid y \leq e$ }
2) Nullstelle:	Lösung(en) der Gleichung $0 = a(x + d)^2 + e$
3) Schnittpunkt mit y-Achse:	$B(0; a \cdot d^2 + e)$
4) Scheitelpunkt:	$S(-d; e)$

### Symmetrien (Gerade & Ungerade)

#### Gerade (Achsensymmetrisch bez. der y-Achse)

Eine Funktion  $y = f(x)$  heisst **gerade**, wenn  $\forall x \in DB$  auch  $-x$  im DB liegt und  $f(x) = f(-x)$  gilt.

#### Ungerade (Punktsymmetrisch bez. dem Nullpunkt)

Eine Funktion  $y = f(x)$  heisst **ungerade**, wenn  $\forall x \in DB$  auch  $-x$  im DB liegt und  $f(x) = -f(-x)$  resp.  $-f(x) = f(-x)$  gilt.

### Beispiele:

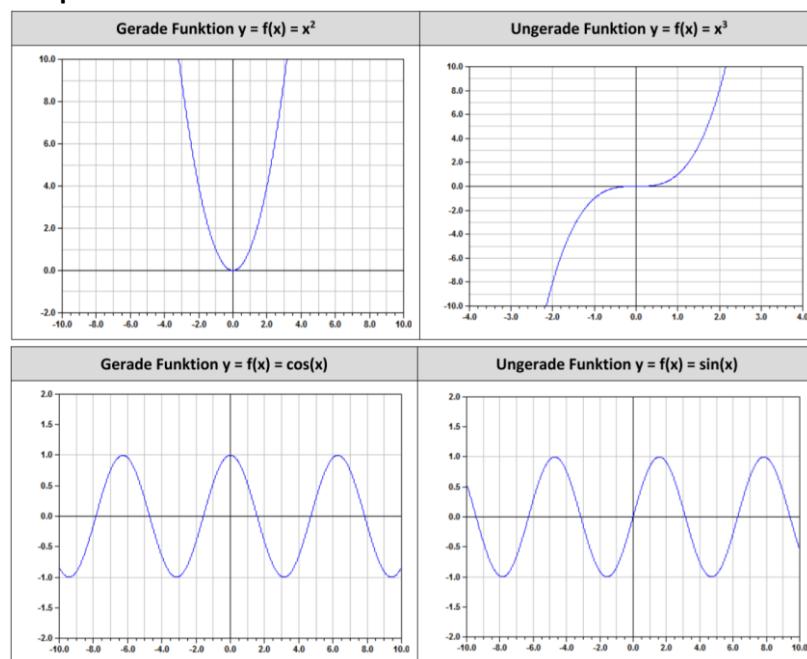
Um Symmetrie zu testen, einfach eine Zahl für  $x$  einsetzen  
 Bsp.  $f(x) = x^2 \Rightarrow f(x) = 2^2 = 4$  }  $f(x) = f(-x)$ , also **gerade**  
 $f(-x) = -2^2 = 4$

Bsp.  $f(x) = x^3 \Rightarrow f(x) = 2^3 = 8$  }  $f(x) = -f(-x)$ , also **ungerade**.  
 $f(-x) = -2^3 = -8$

### Gerade/Ungerade Potenz- & Exponentfunktionen

- Eine Potenzfunktion:  $f(x) = ax^n$   
 Ist für  $a \neq 0$  genau **dann gerade**, wenn der **Exponenten n gerade ist**, und genau **dann ungerade**, wenn der **Exponent n ungerade ist**.
- Eine Polynomfunktion:  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  **Achtung Reihenfolge vertauscht**.  
 Ist genau **dann gerade**, wenn alle **ungeradzahligen Koeffizienten  $a_1, a_3, a_5, \dots$  gleich null** sind, und genau **dann ungerade**, wenn alle **geradzahligen Koeffizienten  $a_0, a_2, a_4, \dots$  gleich null** sind.

### Beispiel:



## Umkehrbarkeit von Funktionen

Allgemeiner Algorithmus zur Bestimmung der Umkehrfunktion:

1. x und y werden miteinander vertauscht
2.  $x = f(y)$  wird nach y aufgelöst

Die Schritte 1) und 2) können auch miteinander vertauscht werden.

### Beispiel:

$$y = f(x) = 2x + 3 \rightarrow y = 2x + 3 \text{ wird zu } x = 2y + 3 \rightarrow y = \frac{1}{2}x - 1.5$$

**Bemerkung:** Die Umkehrfunktion  $g(x)$  ist geometrisch gesehen eine Spiegelung der Ursprungsfunktion  $f(x)$  an der  $y = x$  Geraden. Wenn sich die Funktion und Umkehrfunktion schneiden, so schneiden sich diese zwei Kurven zwangsläufig auf dieser Geraden.

### Wichtige Eigenschaften

Nur streng monotone Funktionen, resp. streng monotone Abschnitte von Funktionen können umgekehrt werden.

- i) Die ganze lineare Funktion  $y = mx + b$  kann invertiert werden. Die inverse Funktion ist wiederum eine lineare Funktion.
- ii) Von der quadratischen Funktion kann nur ein Parabelast invertiert werden. Die Umkehrfunktion ist eine Wurzelfunktion.
- iii) Die Hyperbel kann im ganzen Definitionsbereich invertiert werden, die Umkehrfunktion ist wiederum eine Hyperbel.
- iv) Sowohl die Logarithmusfunktion wie Exponentialfunktion können im ganzen Definitionsbereich invertiert werden. Eine Funktion ist die Umkehrfunktion der anderen.
- v) Die Trigonometrischen Funktionen können nur innerhalb eines kleinen Bereichs invertiert werden.
- vi) Das gilt für viele weiteren Funktionen, wie z.B. für Polynome oder gebrochen rationale Funktionen.

### Definitions- und Wertebereich

Beim Umkehren wird der **Definitionsbereich** der ursprünglichen Funktion zum **Wertebereich** der invertierten Funktion, der Wertebereich der ursprünglichen Funktion wird zum Definitionsbereich der invertierten Funktion.

**D = Was darf ich für x einsetzen. Typisch  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$**   
**W = Was sind die möglichen Werte von y. Typ.  $W = \mathbb{R} \setminus \{2\}$**

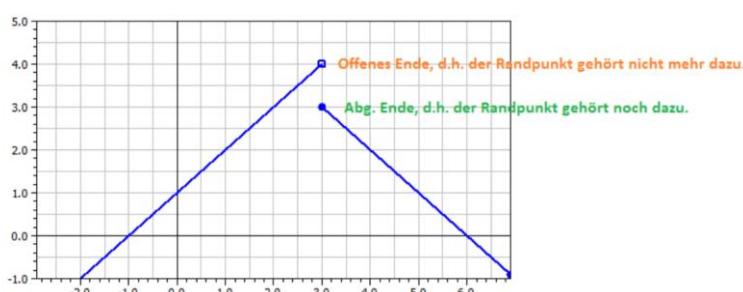
## Stetigkeit, Pole, hebbare Definitionslücken

### Stetige/unstetige Funktion

- Eine stetige Funktion kann man etwas salopp beschreiben, als eine Funktion, die ich ohne Absetzen des Stiftes zeichnen kann. D.h. **Der Funktionswert ist einer Funktion ist für beide Abschnitte gleich.** D.h. Den Grenzwert in beiden Funktionen als **x** einsetzen und ausrechnen. **Resultat gleich = stetig.** Bzw. **beide Tangenten sind gleich.**
- Eine unstetige Funktion kann man eben nicht ohne Absetzen des Stiftes zeichnen.
- Dabei ist eine unstetige Funktion i.d.R. nur an wenigen Stellen unstetig, d.h. sie hat nur wenige Sprünge.
- In diesem Sinne kann man drei Typen von Unstetigkeitsstellen unterscheiden: Endliche Sprünge, Pole (also unendliche Sprünge) und hebbare Definitionslücken.

### Endliche Sprünge

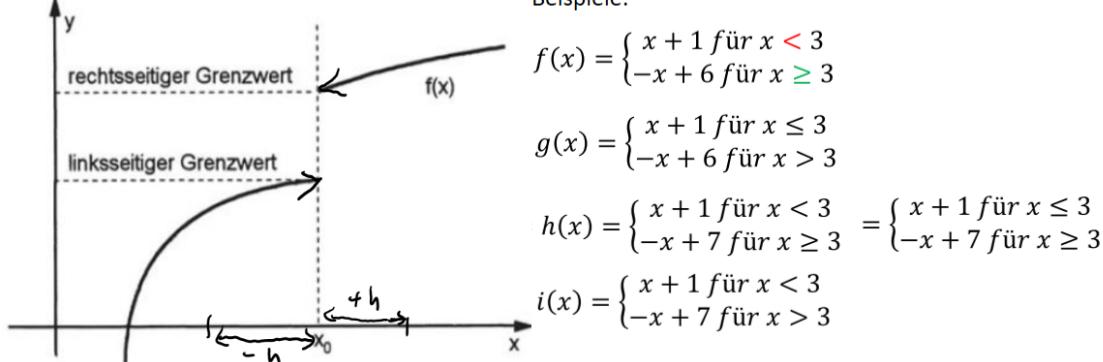
Wir betrachten die Funktion:  $y = f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{für } x < 3 \\ -x + 6 & \text{für } x \geq 3 \end{cases}$



## Stetigkeit und Grenzwerte (Limes)

Der Grenzwert / Limes bzw.  $\lim f(x_0 - h)$  = linksseitig oder  $\lim f(x_0 + h)$  zeigt an wie nahe die Funktion von links, bzw. rechts an einen Punkt  $x_0$  kommen kann.  $h$  ist ein Wert der immer kleiner wird und gegen 0 geht bis die Funktion also den Punkt  $x_0$  berührt oder praktisch berührt.

Beispiele:



Bestimmen Sie im Beispiel 4.1 alle möglichen Grenzwerte der 4 versch. Funktion an der Stelle  $x_0 = 3$  und – falls möglich – den Funktionswert. D.h. Füllen Sie die untenstehende Tabelle aus.

Funktion	$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 - h)$	$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h)$	$f(x_0)$
$y = f(x)$	4	3	3
$y = g(x)$	4	3	4
$y = h(x)$	4	4	4
$y = i(x)$	4	4	Nicht def.

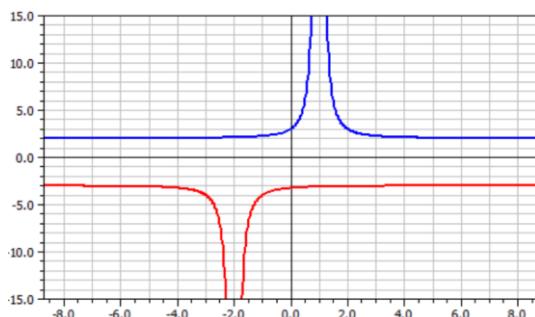
## Pole

**Pole** oder **senkrechte Asymptoten** kommen bei Funktionen der Form  $y = f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$  (**gebrochen rationale Funktionen**) bei den **Nullstellen des Nenners** vor, also an den **Stellen, wo  $h(x) = 0$  ist**. Umgekehrt gilt aber, dass es möglich sein kann, dass es bei einer Nullstelle des Nenners keinen Pol hat.

**Asymptote**: Eine Linie (Kurve, häufig als Gerade), der sich der Graph einer Funktion im Unendlichen immer weiter annähert. **Pole**: sind die Punkte wo eine Funktion nicht definiert ist.

## Beispiel:

Gegeben sind die Funktionen  $y = f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} + 2$  und  $y = i(x) = -\frac{1}{(x+2)^2} - 3$



Funktion	$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 - h)$	$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h)$	$f(x_0)$
$y = f(x)$	$\infty$	$\infty$	Ex. nicht
$y = i(x)$	$-\infty$	$-\infty$	Ex. nicht

Man sieht sehr schön die senkrechten Asymptoten an den Stellen  $x_0 = 1$  resp.  $x_0 = -2$ .

## Berechnung von Asymptoten im Kapitel Gebrochen-rationale Funktionen.

### Hebbare Definitionsbrüche

Grundsätzlich gilt: „**Polynome** sind überall stetig und gebrochene Funktionen sind bis auf die Nullstellen des Nenners stetig“. Es gibt nun aber eine **Ausnahme**, denn wenn der **Zähler** eine gleiche Nullstelle hat wie der

**Nenner**, so kann man an dieser Stelle die Definitionslücke aufheben. Man spricht dann von einer „**hebbaren Definitionslücke**.“

### Beispiel:

Gegeben ist die Funktion:  $y = f(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{x-3}$  mit  $DB = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ .

→  $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{x-3} = \frac{x^2(x-3)}{x-3} = x^2 \rightarrow f(3) = 3^2 = 9 \rightarrow$  Somit kann die Funktion an der Stelle  $x = 3$  stetig erweitert werden, insbesondere wird sie dadurch an der Stelle  $x = 3$  stetig.

→ Die erweiterte Funktion lautet:  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 3x^2}{x-3} & \text{für } \mathbb{R} \setminus \{3\} \\ 9 & \text{für } x = 3 \end{cases}$

## Ganzrationale Funktionen (Polynomfunktion)

### Polynom n-ten Grades, Grad, Koeffizient, y-Achsen Schnittpkt., Nullstellen

- I) Funktionen der Form:  $y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , mit  $a_n \neq 0$  und  $n \in \mathbb{N}$ , heißen **Polynome n-ten Grades**.
- II) Kurzschreibweise:  $y = f(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot x^k$
- III) Die höchste Potenz heißt „**Grad**“ des Polynoms.
- IV) Die **Koeffizienten**  $a_k \in \mathbb{R}$  sind beliebige, aber feste reelle Zahlen.
- V) Das Polynom **schneidet** die **y-Achse** im Punkt  $P(0; f(0)) = P(0; a_0)$ .
- VI) Die **Nullstellen** sind die Lösungen der Gleichung  $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0$

### Beispiel:

Es ist das Polynom  $y = f(x) = x^3 + 2x^2 - 13x + 10$  gegeben.

- I) & III) ist ein Polynom 3-ten Grades, da die höchste Potenz gleich 3 ist.
- IV) Die Koeffizienten sind die folgenden konkreten Zahlen:  $a_3 = 1$ ;  $a_2 = 2$ ;  $a_1 = -13$  und  $a_0 = 10$
- V) Schnittpunkt mit der y-Achse ist bei  $P(0; f(0)) = P(0; 10)$
- VI) Nullstellen:  $y = f(x) = x^3 + 2x^2 - 13x + 10 = (x+5) \cdot (x-1) \cdot (x-2) \rightarrow x_1 = -5$ ;  $x_2 = 1$ ;  $x_3 = 2$

## Gebrochen-rationale Funktionen (Asymptote)

Funktionen der Form:  $y = f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$  wobei  $g(x)$  und  $h(x)$  Polynome n-ten resp. m-ten Grades sind, heißen **gebrochen rationale Funktionen**.

**Wichtig:** n & m müssen nicht gleich sein:

$$\begin{aligned} g(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \\ h(x) &= b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0 \end{aligned}$$

### Eigenschaften der gebrochen rationalen Funktionen (auch Asymptotentypen)

1) <b>Definitionsbereich:</b>	$DB = \mathbb{R} \setminus \{\text{Nullstellen des Nenners}\}$ Bsp. $DB = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$
2) <b>Nullstellen:</b>	Die Nullstellen der Funktion entsprechen zu 99% den Nullstellen des Zählers. Leider „nur“ zu 99%, denn wenn einer der Nullstellen des Nenners auch im Zähler vorkommt, dann „kürzen“ sie sich weg. $x_1 = -2$ & $x_2 = 2$
3) <b>Senkrechte Asymptoten:</b>	Die senkrechten Asymptoten laufen zu 99% durch die Nullstellen des Nenners. Leider „nur“ zu 99%, denn wenn einer der Nullstellen des Nenners auch im Zähler vorkommt, dann wird diese aus dem Definitionsbereich zwar „verbaut“, aber es geht keine senkrechte Asymptote durch diesen Wert. Man spricht in diesem Zusammenhang von einer „hebbaren Definitionslücke“.
4) <b>Verhalten für grosse <math> x </math>:</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>I) <b>Waagrechte Asymptote (*):</b> Falls Grad des Zählers = Grad Nenner Die Asymptote hat die Gleichung <math>y = \frac{a_n}{b_n}</math>      (<math>n = m</math>)</li> <li>II) <b>x-Achse als Asymptote:</b> Falls Grad des Zählers &lt; Grad Nenner      (<math>n &lt; m</math>)</li> <li>III) <b>schiefe Asymptote:</b> Falls Grad des Zählers um Eins grösser als Grad des Nenners ist. Die Gleichung der Asymptote wird mittels Polynomdivision ermittelt.</li> <li>IV) <b>keine Asymptote:</b> Falls <math>n &gt; m+1</math>      (<math>n &gt; m+1</math>)</li> </ul>
5) <b>Schnittpunkt mit y-Achse:</b>	$S(0; f(0)); \text{ resp. } S\left(0; \frac{a_0}{b_0}\right)$ $S = (0; 5.25)$

(\*) Asymptote = eine Gerade, die sich an die Kurve anschmiegt.

$$y = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

**Waagrechte Asymptote:**  $y = \frac{a_n}{b_m}$

**Schiefe Asymptote:** Zähler/Nenner, also Polynomdivision  $g(x)$  durch  $h(x)$  rechnen.

$$\begin{aligned} \text{Bsp. } f(x) &= \frac{x^2}{x+1} \rightarrow x^2 : (x+1) = x - 1 + \frac{1}{x+1} \\ &\quad -(x^2 + x) \\ &\quad \quad \quad -x \\ &\quad \quad \quad -(-x - 1) \\ &\quad \quad \quad \quad \quad 1 \end{aligned}$$

## Potenz- und Wurzelfunktion

Die **Wurzelfunktion** ist die **Umkehrfunktion** der **Quadratfunktion**.  $y = f(x) = \sqrt{x} = av(x + c)$

### Verschiebungen

*Graph  $y = f(x) = av(x + d), a > 0$*

- I)  $d > 0$  Verschiebung **nach oben** um  $|d|$ -Einheiten
- II)  $d < 0$  Verschiebung **nach unten** um  $|d|$ -Einheiten

### Eigenschaften:

1) DB und WB:	$DB = \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ $WB = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$
2) Nullstelle:	Für $d > 0$ : keine Nullstelle Für $d \leq 0$ : $x = (-d/a)^2 = (d/a)^2$
3) Schnittpunkt mit y-Achse:	$B(0; d)$

*Graph  $y = f(x) = av(x + c), a > 0$*

- I)  $c > 0$  Verschiebung **nach links** um  $|c|$ -Einheiten
- II)  $c < 0$  Verschiebung **nach rechts** um  $|c|$ -Einheiten

### Eigenschaften:

1) DB und WB:	$DB = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -c\}$ $WB = \mathbb{R}_+ = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$
2) Nullstelle:	$x = -c$
3) Schnittpunkt mit y-Achse:	Für $c \geq 0$ : $B(0; \sqrt{c})$ Für $c < 0$ : keinen Schnittpunkt

*Graph  $y = f(x) = av(x + c) + d, a > 0$*

Entsprechend den beiden vorhergehenden Graphen Verschiebung nach oben/unter und recht-links.

### Eigenschaften:

1) DB und WB:	$DB = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -c\}$ $WB = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq d\}$
2) Nullstelle:	Für $d > 0$ : keine Nullstelle Für $d \leq 0$ : $x = (-d/a)^2 - c = (d/a)^2 - c$
3) Schnittpunkt mit y-Achse:	Für $c \geq 0$ : $B(0; \sqrt{c} + d)$ Für $c < 0$ : keinen Schnittpunkt

## Exponentialfunktionen

### Grunddefinition

$y = f(x) = a^x$  respektive  $y = f(x) = b \cdot a^x$

$b = y$ -Achsenschnittpunkt

### Eulerische Zahl

$f(x) = b \cdot e^{x \ln(a)}$  respektive  $f(t) = b \cdot e^{t \ln(a)}$

## Exponentielle Zunahme, Verdoppelungszeit

Eine **exponentielle Zunahme** werde mit der Exponentialfunktion  $f(t) = b \cdot a^t$  (**a > 1**) beschrieben.

Die **Verdoppelungszeit** berechnet sich dann wie folgt:  $T_V = \log_a 2 = \frac{\lg 2}{\lg a} = \frac{\ln 2}{\ln a}$

$$\text{HILFT: } \log_a(x) = y \rightarrow a^y = x \quad \& \quad \log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)} = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$$

### Beispiel:

Ein Prozess wird mit der Funktion  $y = f(t) = 6 \cdot 1,017^t$  beschrieben.

a) Verdoppelungszeit:  $T_V = \log_a 2 = \frac{\lg 2}{\lg 1,017} = 41,11$

b) Interpretation der Funktion: Die Funktion beschreibt eine **Zunahme um 1,7% pro Zeiteinheit**. Am **Anfang** (zum Zeitpunkt 0) hat man **6 Elemente** (Franken, Bakterien usw.), **nach 41 Zeiteinheiten** hat sich die **Anzahl verdoppelt**.

## Exponentielle Abnahme, Halbwertszeit

Eine **exponentielle Abnahme** werde mit der Exponentialfunktion  $f(t) = b \cdot a^t$  (**0 < a < 1**) beschrieben.

Die **Halbwertszeit** berechnet sich dann wie folgt:  $T_H = \log_a 0.5 = \frac{\lg 0.5}{\lg a} = \frac{\ln 0.5}{\ln a} = \frac{-\lg 2}{\lg a} = \frac{-\ln 2}{\ln a}$

### Beispiel:

Ein Prozess wird mit der Funktion  $y = f(t) = 6 \cdot 0,945^t$  beschrieben.

a) Halbwertszeit:  $T_H = \log_a 0.5 = \frac{\lg 0.5}{\lg 0,945} = 12,25$

b) Interpretation der Funktion: Die Funktion beschreibt eine **Abnahme um  $1 - 0,945 = 0,055 = 5,5\%$  pro Zeiteinheit**. Am **Anfang** hat man **6 Elemente nach ca. 12 Zeiteinheiten** hat sich die **Anzahl halbiert**.

## Exponentielle Zunahme, ver-p-facht

Eine **exponentielle Zunahme/Abnahme** werde mit der Exponentialfunktion  $f(t) = b \cdot a^t$  beschrieben.

Die Zeit, bis sich etwas „**ver- p- facht**“ hat, berechnet sich dann wie folgt:  $T_p = \log_a p = \frac{\lg p}{\lg a} = \frac{\ln p}{\ln a}$

### Beispiel:

Ein Prozess wird mit der Funktion  $y = f(t) = 8 \cdot 1,09^t$  beschrieben.

a) Zeitpunkt Anfangsmenge verdreifacht:  $T_3 = \log_a 3 = \frac{\lg 3}{\lg 1,09} = 12,74$  **Resultat:** Nach fast 13 Zeiteinheiten verdreifacht sich die Menge.

b) Zeitpunkt  $\frac{1}{4}$  Anfangsmenge:  $T_{1/4} = \log_a 0,25 = \frac{\lg 0,25}{\lg 1,09} = -16,09$  **Resultat:** Vor ca. 16 ZE war erst  $\frac{1}{4}$  der Menge vorhanden.

c) Verdoppelungszeit:  $T_2 = \log_a 2 = \frac{\lg 2}{\lg 1,09} = 8,04$  **Resultat:** Nach ca. 8 Zeiteinheiten verdoppelt sich Menge.

d) Halbwertszeit:  $T_{1/2} = \log_a 0,5 = \frac{\lg 0,5}{\lg 1,09} = -8,04$  **Resultat:** Vor ca. 8 ZE war erst die halbe Menge vorhanden.

e) Interpretation der Funktion: Die Funktion beschreibt eine **Zunahme um 9% pro Zeiteinheit**. Am **Anfang** (zum Zeitpunkt 0) hat man **8 Elemente** (Franken, Bakterien usw.).

Die «a hoch t/tau» Darstellung:  $G(t) = G_0 \cdot a^{t/\tau} = b \cdot a^{t/\tau}$

$G(t) = G_0 \cdot a^{t/\tau} = b \cdot a^{t/\tau} \rightarrow G_0 = b = \text{Anfangswert}; a = \text{a-fache von } G_0; \tau = \text{Zeitkonstante in der das a-fache von } G_0 \text{ erreicht wird.}$

### Beispiel:

a) In **4** Zeiteinheiten wächst die Anfangsmenge **2** auf das **5**-fache  $\rightarrow G(t) = 2 \cdot 5^{\frac{t}{4}}$

b) In **2,5** Zeiteinheiten wächst die Anfangsmenge **3,4** auf das **1,8**-fache  $\rightarrow G(t) = 3,4 \cdot 1,8^{\frac{t}{2,5}}$

c) In **6,3** Zeiteinheiten schrumpft die Anfangsmenge **9,8** auf ein **1/10**  $\rightarrow G(t) = 9,8 \cdot 0,1^{\frac{t}{6,3}}$

d) In **18** Zeiteinheiten schrumpft die Anfangsmenge **12,5** auf **1%**  $\rightarrow G(t) = 12,5 \cdot 0,01^{\frac{t}{18}}$

e) In **18** Zeiteinheiten nimmt die Anfangsmenge **12,5** um **1%** ab  $\rightarrow G(t) = 12,5 \cdot 0,99^{\frac{t}{18}}$

## Logarithmusfunktionen

Die Funktion der Form  $y = f(x) = \log_a(x)$  ( $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} = \mathbb{R}_+ \setminus \{0; 1\}$ ) heisst **Logarithmusfunktion zur Basis a**.

### Regeln:

I)  $\log_a(1) = 0$

II)  $\log_a(x) = \frac{\lg(x)}{\lg(a)} = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$

### Eigenschaften:

1) Definitionsbereich:	$DB = \mathbb{R}_+^*$ (nur positive Werte ohne 0) $= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
2) Wertebereich:	$WB = \mathbb{R}$ (es werden alle y-Werte angenommen)
3) Nullstelle:	Genau eine Nullstelle, für jedes a ist $x = 1$ die Nullstelle.
4) Symmetrie:	Keine Symmetrie, aber $\log_a(x)$ & $\log_{\frac{1}{a}}(x)$ gehen mit Spiegelung an der x-Achse ineinander über.
5) Schnittpunkt mit y-Achse:	Keine Schnittpunkte, da $x = 0$ nicht im DB kann $f(0)$ nicht gebildet werden.
6) Monotonie:	Für $a > 1$ streng monoton steigend, und für $0 < a < 1$ streng monoton fallend.
7) Asymptote:	y-Achse ist Asymptote
8) Umkehrfunktion:	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>h(x) = a^x</math> ist Umkehrfunktion von <math>f(x) = \log_a(x)</math></li> <li>• <math>g(x) = e^x</math> ist Umkehrfunktion von <math>f(x) = \ln(x)</math></li> <li>• <math>i(x) = 10^x</math> ist Umkehrfunktion von <math>f(x) = \log_{10}(x) = \lg(x)</math></li> <li>• <math>k(x) = 2^x</math> ist Umkehrfunktion von <math>f(x) = \log_2(x)</math></li> </ul> <p style="color: blue;">→ generell: 1. x &amp; y vertauschen 2. auf y auflösen.</p>

## Anwendung in der Preistheorie(Gewinn/Kosten)

### Schulden-/Guthabenzuhname

$f(x) = b \cdot a^t \rightarrow b = \text{Anfangswert}(Guthaben, Kredit/Schulden); a = \text{Zunahme in \%}(1+\% \text{ d.h. } 50\% \text{ Z.} = 1.5) t = \text{Zeit}$

### Formeln

**GE** = Geldeinheit; **ME** = Mengeneinheit; **x** = Menge/Stückzahl

Funktion	Beschreibung in Prosa	Beschreibung in math. Form	Einheit
<b>Erlösfunktion E(x) (Umsatzfunktion)</b>	Erlös = Menge mal Stückpreis	$E(x) = x \cdot p(x)$ Falls der Preis $p$ konstant ist, dann gilt: $p(x) = p$ . Also: $E(x) = x \cdot p$	GE
<b>Gewinnfunktion G(x)</b>	Gewinn = Erlös - Kosten	$G(x) = E(x) - K(x)$	GE
<b>Gewinn pro Menge</b>		$g(x) = \frac{G(x)}{x} = \frac{E(x) - K(x)}{x}$	GE/ME
<b>Kostenfunktion K(x)</b>	Kosten = variable Kosten + fixe Kosten	$K(x) = K_v(x) + K_f$ <i>Variable Kosten mal x → = 3x + 36</i>	GE
<b>Bei quadratischer Kostenfunktion</b> $K(x) = ax^2 + bx + c$ gilt:		$K_v(x) = ax^2 + bx$ $K_f = c$	
<b>Variable Stückkosten</b>	Kosten pro Mengeneinheit $k_v(x)$	$k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x}$	GE/ME
<b>Bei quadratischer Kostenfunktion K(x) gilt:</b>		$k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x} = \frac{ax^2 + bx}{x} = ax + b$	
<b>Deckungsbeitrag D</b>	Deckung = Erlös – variable Kosten	$D(x) = E(x) - K_v(x)$	GE
<b>Durchschnittlicher Deckungsbeitrag d</b>	Deckungsbeitrag pro Mengeneinheit	$d(x) = \frac{D(x)}{x} = \frac{E(x) - K_v(x)}{x}$	GE/ME
<b>Nutzenschwelle, Gewinnsschwelle (Break-even-Point)</b>	Ab dieser Menge wird ein Gewinn erwirtschaftet	$G(x) = 0$ oder $E(x) = K(x)$ Erste Nullstelle der Gewinnfunktion.	ME
<b>Nutzengrenze (Gewinnsschwelle.)</b>	Ab dieser Menge wird kein Gewinn mehr erwirtschaftet.	$G(x) = 0$ oder $E(x) = K(x)$ Zweite Nullstelle der Gewinnfunktion.	ME
<b>Gewinnmaximale Menge</b>	Menge bei der der Gewinn maximal wird.	$x_{\text{Gopt}}$	ME
<b>Gewinnoptimale Menge bei quadratischer Gewinnfunktion (*):</b>		x-Koordinate des Scheitelpunktes	ME
<b>Maximaler Gewinn</b>	Der höchstmögliche Gewinn.	$G_{\text{max}} = G(x_{\text{Gopt}})$	GE
<b>Maximaler Gewinn bei quadratischer Gewinnfunktion (*):</b>		y-Koordinate des Scheitelpunktes	GE
<b>Erlösmaximal Menge</b>	Menge bei der der Erlös maximal wird.	$x_{\text{Eopt}}$	ME
<b>Erlösoptimale Menge bei quadratischer Erlösfunktion (*):</b>		x-Koordinate des Scheitelpunktes	ME
<b>Maximaler Erlös</b>	Der höchstmögliche Erlös.	$E_{\text{max}} = E(x_{\text{Eopt}})$	GE
<b>Maximaler Erlös bei quadratischer Erlösfunktion (*):</b>		y-Koordinate des Scheitelpunktes	GE

**Duchschnittskosten:** Kosten/x

$$k(x) = K(x)/x$$

**Breack-even Point:** Gewinn = 0

$$G(x) = 0 \rightarrow \text{auf } x \text{ auflösen}$$

### Beispiel 1:

Ein Hersteller verkauft ein Gut zu einem Stückpreis von Fr 78.-. Bei der Herstellung ergeben sich Stückkosten von Fr 35.- und monatliche Fixkosten von Fr 980.-.

- Kostenfkt:**  $K(x)=35x + 980$
- Erlösfkt:**  $E(x) = 78x$
- Gewinnfkt:**  $G(x) = 78x - (35x + 980) = 43x - 980$
- Variable Kosten/Stück:**  $k_v(x)= 35x/x = 35$
- Deckungsbeitrag/Stück:**  $D(x) = (78x - 35x)/x = 43$
- Break-even Point:**  $0 = 78x - 35x - 980 \rightarrow 22.8 \text{ Stück/Monat}$
- Monatliche Gewinn > 1500:**  $G(x) = 1500 \rightarrow 1500 = 78x - 35x - 980 \rightarrow 57.6 \text{ Stück}$

**Beispiel 2:**

Berechnen Sie mittels Nullstellen- und Scheitelpunktberechnungen die genauen Werte.

Aufgaben:

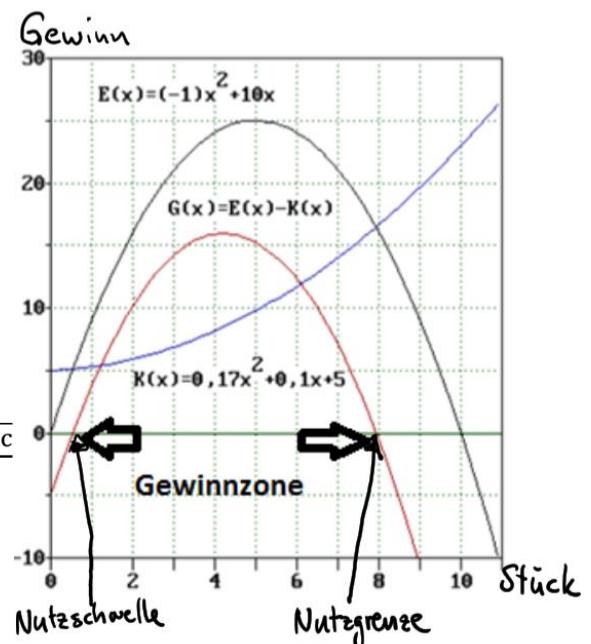
- Bestimmen Sie  $(x_{E\text{opt}}; E_{\max})$
- Bestimmen Sie die Nutzenschwelle und -grenze sowie die Gewinnzone.
- Bestimmen Sie  $(x_{G\text{opt}}; G_{\max})$

Formeln:

i) Die Lösungsformel der quadr. Gl.  $ax^2 + bx + c = 0$  lautet  $X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

ii) Die quadratische Funktion  $y = f(x) = ax^2 + bx + c$  besitzt den **Scheitelpunkt**

$$S\left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac-b^2}{4a}\right) \text{ resp. } S\left(-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a}\right)$$



Lösung:

a) Scheitelpunkt der Funktion  $E(x)$  ist  $S(5; 25)$ . Somit ist die Erlösmaximale Menge 5 ME und der maximale Erlös 25 GE.

b) Es sind die Nullstellen von  $G(x) = E(x) - K(x) = -1.17 \cdot x^2 + 9.9 \cdot x - 5$  zu bestimmen: Also: Nutzenschwelle = 0,539 ME und Nutzengrenze = 7,922 ME. Die Gewinnzone lautet demnach  $[0,539; 7,922]$

c) Der Scheitelpunkt der Funktion  $G(x)$  ist  $S(4,23; 15,94)$ .

Somit beträgt die gewinnmaximale Menge 4,23 ME und der maximale Gewinn beträgt 15,94 GE.

**Beispiel 3:**

Über eine quadratische Gewinnfunktion ist Folgendes bekannt:

- Die Nutzenschwelle beträgt 10 ME
- Die Nutzengrenze beträgt 90 ME
- Der maximale Gewinn beträgt 800 GE

Bestimmen Sie diese Gewinnfunktion und geben Sie sie in der Normalenform an.

Lösung:

Die Funktion hat die Form  $G(x) = a(x - 10)(x - 90)$

Der maximale Gewinn beträgt 800 GE; er wird an der Stelle  $x = \frac{10+90}{2} = 50$  erwirtschaftet, d.h. der Punkt  $(50; 800)$  ist ein Punkt der Gewinnfunktion:

Der Faktor  $a$  wird bestimmt durch Einsetzen von  $(50; 800)$ ,

$$\text{also: } 800 = a(50 - 10)(50 - 90) = a \cdot 40 \cdot (-40) \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

**Resultat:** Die Gewinnfunktion lautet:  $G(x) = -\frac{1}{2}(x - 10)(x - 90) = -\frac{1}{2}x^2 + 50x - 450$

# Differentialrechnung

## Grundlagen

Beim Differenzieren/Ableiten einer Funktion wird die Tangente an einem bestimmten Punkt der Funktion bestimmt und somit die Steigung dieses Punktes und somit der Tangente bestimmt. D.h. **erste Ableitung** der Funktion ist **gleich der Steigungsfunktion** der Tangente an **einem bestimmten Punkt**. D.h. In diese Funktion muss der **x-Wert** des **Punktes eingesetzt** werden und das **Resultat ist die Steigung der Tangente**, sprich **m**.

### Beispiel:

Bestimmen Sie die Tangente an die Funktion  $y = f(x) = x^2$  an der Stelle  $x=1$ .

$$f'(x) = 2x \rightarrow f'(x=1) = 2 \cdot 1 = 2 \rightarrow m \text{ der Tangente} = 2$$

Durch einsetzen von  $x=1$  in  $f(x)$  findet man  $y$  heraus.  $\rightarrow 1^2 = 1$ . Nun kann  $x$  &  $y$  &  $m$  in Geradengleichung eingesetzt werden um  $b$  zu bestimmen.

### Formel

Von einer Geraden ist die Steigung  $m$  und ein Punkt  $P(x_0; y_0)$  gegeben.

Gesucht ist die Geradengleichung  $y = mx + b$ .

Punkt-Steigungs-Formel:  $m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$

$$\Rightarrow f'(x_0) = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Rightarrow y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \Rightarrow y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0$$

*Steigung*

## Ableitungsregeln

### 1. Potenzregel:

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

### 2. Konstantenregel:

$$f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$$

### 3. $x^1$ -Regel:

$$f(x) = x^1 = x \Rightarrow f'(x) = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1$$

### 4. $x^0$ -Regel:

$$f(x) = x^0 = 1 \Rightarrow f'(x) = 0 \cdot x^{0-1} = 0 \cdot x^{-1} = 0$$

### 5. $x^x$ -Regel:

$$f(x) = x^x \Rightarrow f'(x) = x^x \cdot (\ln(x) + 1)$$

### 6. $a^x$ -Regel:

$$f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = \ln(a) \cdot a^x$$

### 7. Faktorregel:

$$f(x) = a \cdot g(x) \Rightarrow f'(x) = (a \cdot g(x))' = a \cdot g'(x)$$

### 8. Folgerung 1 aus Faktorregel:

$$f(x) = a \cdot x^n \Rightarrow f'(x) = a n x^{n-1}$$

### 9. Folgerung 2 aus Faktorregel:

$$f(x) = a \cdot x \Rightarrow f'(x) = a$$

### 10. Summenregel:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

### 11. Produktregel:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

### 12. Quotientenregel:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2} = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

### 13. Folgerung aus Quotientenregel:

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{-g'(x)}{(g(x))^2}$$

### 14. Kettenregel:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

*Immer aussen*  $[(x+2)^2] \cdot$  innen  $[x+2]$

Bsp.  $f(x) = (x+2)^2 \Rightarrow f'(x) = 2(x+2)^{2-1} \cdot 1 = (2x+4) \cdot 1 = 2x+4$

*aussen*  
*innen*

### 15. $e^x$ -Regel:

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$$

Achtung:  $f(x) = e^{ax} \Rightarrow f'(x) = e^{ax} \cdot a$  (Kettenregel)

### 16. ln-Regel:

$$f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

### 17. Logarithmus-Regel 1:

$$f(x) = \log_a(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln(a)}$$

### 18. Logarithmus-Regel 2:

$$f(x) = \log_y(x) = \frac{(x)'}{(x) \cdot \ln(y)} = \frac{1}{x \cdot \ln(y)}$$

### 19. Logarithmus-Regel 3:

$$f(x) = \log_5(x+1) = \frac{(x+1)'}{(x+1) \cdot \ln(5)} = \frac{1}{(x+1) \cdot \ln(5)}$$

→ **Generell:** Es wird immer nach der unabhängigen Variablen abgeleitet, egal wie sie heißt. Das heißt, Variablen welche nicht in der Klammer sind ( $x$ ) sind die Konstanten.

**Beispiel:**  $t$  ist die Variable

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$$

$$s'(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}a \cdot 2t + v_0 = at + v_0$$

$$s''(t) = \frac{d}{dt}(s'(t)) = a$$

$$s'''(t) = \frac{d}{dt}(s''(t)) = 0$$

### Winkel der Tangente mit x-Achse im Zusammenhang mit der Ableitung

Geradengleichung:  $y = mx + b$

Steigung:  $m = \frac{\text{vertikale Differenz}}{\text{horizontale}} = \tan(\alpha)$  Zurückrechnen:  $\tan(\text{Winkel gegeben}) = m$

Der Winkel der Tangente zur x-Achse wäre dann der  $\arctan(\alpha)$ . Oder  $\arctan(m)$

**ACHTUNG:** Bei negativem Ergebnis  $180 + \text{Ergebnis rechnen}$ . (→ Resultat < 180)

**Beispiel:**

Gegeben ist die Funktion  $y = f(x) = -x^3 + 3x^2 + 4$ .

Bestimmen Sie den Winkel (in Grad) der Tangenten mit der x-Achse an der Stelle  $x = 0,5$ .

Lösung:

$$f'(x) = -3x^2 + 6x \Rightarrow f'(x = 0,5) = -3 \cdot 0,5^2 + 6 \cdot 0,5 = 2,25$$

$$\alpha = \arctan(f'(0,5)) = \arctan(2,25) = 66,04^\circ$$

### 1., 2., 3. Ableitung

**Beispiele:**

$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$
1) $f(x) = a$	$f'(x) = 0$	$f''(x) = 0$	$f'''(x) = 0$
2) $f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$	$f'''(x) = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$
3) $f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$f''(x) = e^x$	$f'''(x) = e^x$
4) $f(x) = e^{ax}$	$f'(x) = ae^{ax}$	$f''(x) = a^2e^{ax}$	$f'''(x) = a^3e^{ax}$
5) $f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = 1/x$	$f''(x) = -1/x^2$	$f'''(x) = 2/x^3$
6) $f(x) = \log_a(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\ln(a) \cdot x}$	$f''(x) = \frac{-1}{\ln(a) \cdot x^2}$	$f'''(x) = \frac{2}{\ln(a) \cdot x^3}$

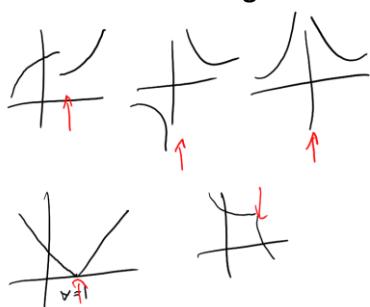
### Differenzierbarkeit(Ableitbarkeit) und Stetigkeit

Gegeben die Funktion  $f(x)$ . Die **Funktion  $f(x)$  ist an Sprüngen und Knicken nicht differenzierbar**.

Eine **differenzierbare** Funktion ist **auch stetig**.

Eine **stetige Funktion** muss aber **nicht differenzierbar sein**. Bsp.  $f(x) = |x|$

**Grafische Darstellung:**



An diesen Stellen ist die Funktion nicht differenzierbar.

Wo **kein Definitionsbereich**, da ist sie **nicht differenzierbar**.

**Wenn differenzierbar, dann müssen die Tangenten beider Teilstücke die gleiche Steigung haben. Sprich die 1. Ableitung machen und den Grenzwert als  $x$  einsetzen. Wenn diese gleich sind, dann ist sie differenzierbar, ansonsten nicht.**

## Anwendung der Differentialrechnung

Tangentengleichung mit einem Punkt bestimmen

Die Tangentengleichung im Punkt  $(x_0; y_0)$  der Kurve  $y = f(x)$  lautet

**Tangentengleichung:**  $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0$

Zudem gilt: **Zwei Geraden**  $g_1$  und  $g_2$  stehen genau dann **senkrecht aufeinander**, wenn das **Produkt ihrer Steigungen** den Wert **-1** ergibt.

**Normalengleichung:**  $m_1 = -\frac{1}{m_2}$

**Normale:** Senkrechte Gerade zur Tangente.

**Linearisierung:** Tangente

Linearisierung (1.Ableitung) einer Funktion

Die erste Ableitung einer Funktion kann verwendet werden, eine Funktion in einer gewissen Umgebung zu approximieren. Wir sprechen dann von der 1. Ableitung als lineare Approximation oder 1. Näherung in einer gewissen Umgebung eines Punktes.

**Linearisierung = Tangente an Funktion**

1. erste Ableitung bestimmen  $\rightarrow m$
2. untenstehende Formel ausfüllen, wenn punkt  $(x; y)$  vorhanden, ansonsten:
  - a.  $x$  in Funktion einsetzen und  $y$  bestimmen
  - b.  $b$  bestimmen durch einsetzen von  $m$ ,  $x$  und  $y$  in Geradengleichung:  $y = mx + b$
  - c. Dann  $b$  &  $m$  in Geradengleichung einsetzen.

**Tangentengleichung:**  $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0$

**Quadratische Näherung/Approximation**

Mit der linearen Näherung hat man den Nachteil, dass die Krümmung nicht berücksichtigt wird. Die zweite Ableitung sagt etwas die Krümmung aus.

**Quadratische Näherung:**

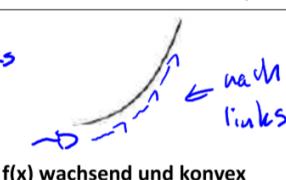
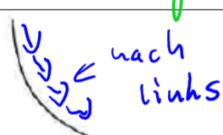
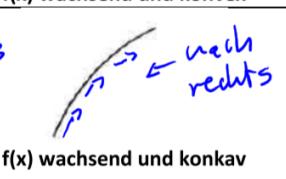
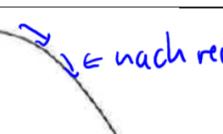
1. erste Ableitung bestimmen
2. zweite Ableitung bestimmen
3. untenstehende Formel ausfüllen

$$y = g(x) = \frac{f''(x_0)}{2} (x - x_0)^2 + f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

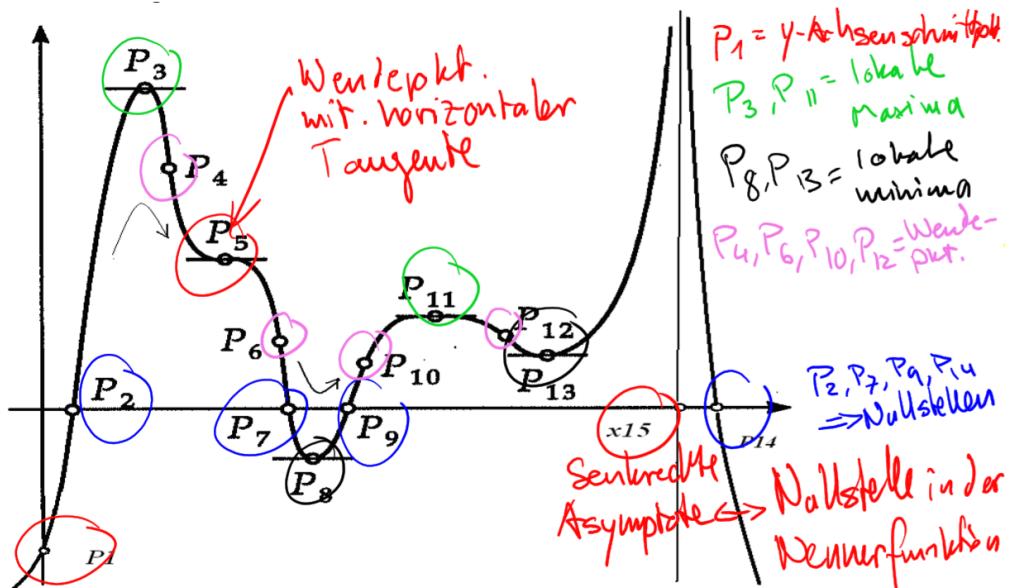
Monotonie und Krümmung (konvex & konkav)

**Achtung:**

Wenn eine **Ungleichung ('>' oder '<')** mit einer **negativen Zahl** dividiert oder multipliziert wird, so **ändert sich das Ungleichheitszeichen**. d.h. ' $<$ ' wird zu ' $>$ ' und ' $>$ ' wird zu ' $<$ '.

$f'(x) > 0$ , d.h. $f(x)$ ist monoton wachsend <i>wenn positiv</i>	$f'(x) < 0$ , d.h. $f(x)$ ist monoton fallend <i>wenn negativ</i>
$f''(x) > 0$ , d.h. $f(x)$ ist konvex = linksgekrümmt <i>links</i>  $f(x)$ wachsend und konvex	 $f(x)$ fallend und konvex <i>nach links</i>
$f''(x) < 0$ , d.h. $f(x)$ ist konkav = rechtsgekrümmt <i>rechts</i>  $f(x)$ wachsend und konkav	 $f(x)$ fallend und konkav <i>nach rechts</i>

## Kurvendiskussion (Maxima &amp; Minima)



Punkt	Eigenschaft	Mathematische Bedingung
P <sub>3</sub> & P <sub>11</sub>	Lokales Maximum	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>f'(x_i) = 0</math> ← Lösungswerte in zweiter Ableitung einsetzen</li> <li>• <math>f''(x_i) &lt; 0</math></li> </ul>
P <sub>8</sub> & P <sub>13</sub>	Lokales Minimum	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>f'(x_i) = 0</math> ← Lösungswerte in zweiter Ableitung einsetzen</li> <li>• <math>f''(x_i) &gt; 0</math></li> </ul>
P <sub>4</sub> , P <sub>6</sub> , P <sub>10</sub> & P <sub>12</sub>	Wendepunkte	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>f''(x_i) = 0</math></li> <li>• <math>f'''(x_i) \neq 0</math></li> </ul>
P <sub>5</sub>	Terassenpunkt	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>f'(x_i) = 0</math></li> <li>• <math>f''(x_i) = 0</math></li> <li>• <math>f'''(x_i) \neq 0</math></li> </ul>

Lokale Extremwerte**Achtung:**

Wenn eine Ungleichung ('>' oder '<') mit einer negativen Zahl dividiert oder multipliziert wird, so ändert sich das Ungleichheitszeichen. d.h. '<' wird zu '>' und '>' wird zu '<'.

**Lokales Minimum:**

- Horizontale Tangente (1. Ableitung = Null) ← Nullstelle bestimmen
- auf x auflösen
- x in f(x) einsetzen und auf y auflösen
- erhaltene x<sub>1,2</sub> Werte sind Koordinate des lokalen Minimum/Maximum (Scheitelpunkt)
- Linkskrümmung (2. Ableitung (mit eingesetztem x<sub>1</sub>/x<sub>2</sub>) > Null) --> **Minimum**

**Lokales Maximum:**

- Horizontale Tangente (1. Ableitung = Null) ← Nullstelle bestimmen
- auf x auflösen
- x in f(x) einsetzen und auf y auflösen
- erhaltener x<sub>1,2</sub> Werte sind Koordinate des lokalen Minimum/Maximum (Scheitelpunkt)
- Rechtskrümmung (2. Ableitung (mit eingesetztem x<sub>1</sub>/x<sub>2</sub>) < Null) --> **Maximum**

### Zwei verschiedene Wendepunkte

#### Achtung:

Wenn eine **Ungleichung ('>' oder '<')** mit einer **negativen Zahl** dividiert oder multipliziert wird, so ändert sich das **Ungleichheitszeichen**. d.h. '<' wird zu '>' und '>' wird zu '<'.

#### Wendepunkt:

- Ohne Krümmung (**2. Ableitung = Null**)
- **3. Ableitung (x-Koordinate von Wendepunkte eingesetzt) != 0**

#### Terrassenpunkt:

- Horizontale Tangente (**1. Ableitung = Null**) ← Nullstelle bestimmen
- Ohne Krümmung (**2. Ableitung = Null**)
- **3. Ableitung (x-Koordinate von Terrassenpunkt eingesetzt) != 0**

### Newton Verfahren

Formel um **x-AchSENSCHNITTPUNKT (Nullstellen)** einer Funktion zu bestimmen.

Die Formel muss solange ausgeführt werden, bis zweimal das gleiche Resultat herauskommt.

Dabei gilt:

$x_n$  = Anfangswert bzw. Resultat vom letzten Ausführen der Formel.

$x_{n+1}$  = Bezeichnung von x (erstes Mal =  $x_1$ , da  $x_n = x_0$  beim ersten Mal)

#### Nullstellenfunktion:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

**Beispiel:** für  $f(x) = x^3 + 2x - 5$

1.  $f'(x)$  bestimmen:

$$f'(x) = 3x^2 + 2$$

2. Startwert bestimmen für  $x_0$ :

$$x_0 = 2.5$$

3. Einsetzen in Formel von oben:

$$f(x_0) = 2.5^3 + 2*2.5 - 5 = 15.625$$

$$f'(x_0) = 3*2.5^2 + 2 = 20.75$$

$$\rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2.5 - \frac{15.625}{20.75} = 1.747 \dots$$

4. Resultat, also 1.747 als neuer Startwert nehmen und nochmals in Formel einfügen:

$$x_1 = 1.747$$

$$f(x_1) = 1.747^3 + 2*1.747 - 5 = 3.8258$$

$$f'(x_1) = 3*1.747^2 + 2 = 11.156$$

$$\rightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.747 - \frac{3.8258}{11.156} = 1.404$$

5. usw. bis wir zweimal das gleiche Resultat bekommen.

## Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen

Annäherung zweier Funktionen (kleinste/grösste) berechnen

1. Neue Funktion bilden und dort lokale Maxima, bzw. Minima berechnen

2.  $d(x) = f(x) - g(x)$  (danach normal wie immer mit 1.& 2. Ableitung lokales Maxima/Minima bestimmen)

### Flächenberechnung

Es müssen die folgenden Schritte ausgeführt werden:

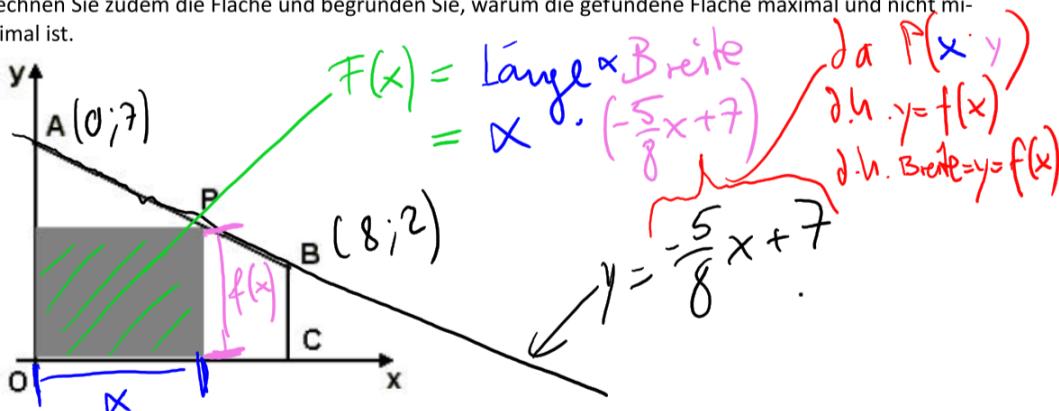
1. Bezeichnungen einführen je nach Aufgabenstellung. (Min/Max. Wert erwartet)
2. Die zu maximierende resp. minimierende Funktion  $F(x)$  herleiten.
3.  $F(x)$  ableiten, also  $F'(x)$  bilden  $F'(x) = 0$  setzen und auf  $x$  auflösen. Resultat: Nullstelle  $x_0$ .
4. Die 2-te Ableitung berechnen und  $x_0$  einsetzen [also:  $F''(x_0)$  berechnen]. Für Maxima muss  $F''(x_0) < 0$  und für Minima muss  $F''(x_0) > 0$  sein.
5. Das Resultat erhält man durch Einsetzen von  $x_0$  in die Funktion  $F(x)$  [also:  $F(x_0)$  berechnen].

→ Um lokales Min./Max. zu bestimmen. (Dort wo Tangentensteigung = 0 genkt)

→ Um zu bestimmen ob maxima oder minima.

### Beispiel:

Aus dem rechtwinkligen Trapez OABC soll ein möglichst grosses Rechteck so ausgeschnitten werden, dass P auf AB liegt (siehe Zeichnung). Berechnen Sie die Koordinaten von P aus A(0; 7) und B(8; 2). Berechnen Sie zudem die Fläche und begründen Sie, warum die gefundene Fläche maximal und nicht minimal ist.



### Zweipunkte Geradengleichung

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \begin{array}{l} \bullet \text{ erster Punkt } = (x_1; y_1) \\ \bullet \text{ zweiter Punkt } = (x_2; y_2) \\ \bullet \text{ nach } y \text{ auflösen} \end{array}$$

### Lösungsvariante 1: (Scheitelpunktberechnung)

1. Bestimmen der Geraden durch die Punkte A & B. Einsetzen der Pkte A(0; 7) & B(8; 2) in die 2-Punkte-Form:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow \frac{y - 7}{x - 0} = \frac{2 - 7}{8 - 0} \Leftrightarrow \frac{y - 7}{x} = -\frac{5}{8} \Leftrightarrow y = -\frac{5}{8}x + 7$$

2. Allgemeiner Flächeninhalt bestimmen. Angenommen Pkt. P hat die Koordinaten  $P(x; y)$ , dann:

$$A(x) = x \cdot y = x \cdot \left(-\frac{5}{8}x + 7\right) = -\frac{5}{8}x^2 + 7x$$

3. Bestimmen des Scheitelpunktes:

$$S = \left(-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a}\right) = \left(-\frac{7}{10}; 0 - \frac{49}{80}\right) = \left(\frac{56}{10}; \frac{98}{5}\right) = (5,6 / 19,6)$$

4. Bestimmen der Koordinaten des Punktes P und bestimmen der Fläche.

$y = -\frac{5}{8} \cdot 5,6 + 7 = 3,5$  Also lautet die Fläche  $A = 5,6 \cdot 3,5 = 19,6$  (was mit der y-Koordinate des Scheitelpunktes übereinstimmt.)

### **5. Resultat:**

Die Koordinaten des Punktes P lauten  $P(5,6; 3,5)$ , die Fläche beträgt 19,6 FE und die Fläche ist maximal, da die zugrunde gelegte quadratische Funktion nach unten geöffnet ist ( $a = -5/8 < 0$ ), und der Scheitelpunkt somit ein Maximum beschreibt.

Lösungsvariante 2: (Differentialrechnung)

**1. & 2.** Diese Schritte bleiben gleich wie oben.

**3.** Erste Ableitung bestimmen und deren Nullstelle bestimmen.

$$A(x) = -\frac{5}{8}x^2 + 7x \Rightarrow A'(x) = -\frac{5}{8} \cdot 2x + 7 = -\frac{5}{4}x + 7$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{5}{4}x + 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{28}{5} = 5,6$$

**4.** Bestimmen der Koordinaten des Punktes P und bestimmen der Fläche.

$$y = -\frac{5}{8} \cdot 5,6 + 7 = 3,5 \quad \text{Also lautet die Fläche } A = 5,6 \cdot 3,5 = 19,6$$

**5.** Verifikation, dass es sich um ein Maximum handelt.

$$A''(x) = -\frac{5}{4} \Rightarrow A''(x = 5,6) = -\frac{5}{4} < 0 \Rightarrow \text{rel. Max.}$$

**6. Resultat:**

Die Koordinaten des Punktes P lauten P(5,6; 3,5), die Fläche beträgt 19,6 FE, die Überprüfung, dass die Fläche maximal ist, wurde in Schritt 5 vollzogen.

**Beispiel 2:**

Eine zylinderförmige Cola-Dose aus Blech soll erstellt werden (die Blechdicke kann vernachlässigt werden). Das Volumen der Dose sei  $V = 330 \text{ cm}^3$ . Bestimmen Sie den Radius der Grundfläche so, dass die Oberfläche der Dose minimal wird.

- a) Stellen Sie die Höhe der Dose als Funktion des Radius dar.
- b) Stellen Sie die Oberfläche der Dose ebenfalls als Funktion des Radius dar.
- c) Bestimmen Sie jetzt, für welchen Radius die Dosenoberfläche minimal wird.

**Lösung:** Höhe der Dose in Abhängigkeit vom Radius:

$$h(r) = \frac{V}{\pi \cdot r^2} = \frac{330}{\pi} \cdot r^{-2} \approx 105r^{-2}$$

Oberfläche in Abhängigkeit vom Radius:

$$\begin{aligned} A(r) &= 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h(r) \quad (\text{Zwei mal Grundfläche + Mantelfläche}) \\ &= 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \left(\frac{330}{\pi} \cdot r^{-2}\right) \\ &= 2\pi r^2 + 660 \cdot r^{-1} \end{aligned}$$

Ableitung der Flächenformel:

$$A'(r) = 4\pi r - 660r^{-2}$$

Nullstellen der Ableitung:  $0 = 4\pi r - 660r^{-2}$ , somit  $4\pi r^3 = 660$ , und daraus folgt

$$r = \sqrt[3]{\frac{165}{\pi}} \approx 3.74$$

**Generell:**

Parabel nach links oder rechts verschieben	$f(x) = (x - d)^2$
Parabel nach oben oder unten verschieben	$f(x) = x^2 + c$
Parabel strecken oder stauchen	$f(x) = ax^2$
Punktprobe	Liegt P auf $G_f$ ?
y-Achsenabschnitt berechnen	$x = 0$
Nullstellen berechnen	$y = 0$
Funktionsgleichung bestimmen	$f(x) = \dots$
Quadratische Ergänzung	$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2$
Scheitelpunktf orm berechnen	$f(x) = a(x - d)^2 + e$
Scheitelpunkt berechnen	$S(x_s   y_s)$
Faktorisierte Form	$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

## Erstellen eines Polynoms (Polynom nicht bekannt)

Je nach Aufgabenstellung kennt man die Funktionsgleichung, das Polynom, nicht. Man hat lediglich ein paar Angaben dazu. Wichtig hierbei ist es alle bekannten Gleichungen aufzustellen, damit man am Ende ein Polynom erstellen kann.

### Allgemeine Formeln/Hilfe

#### *Polynom n-ten Grades*

Grad	Bezeichnung	allgemeine Schreibweise
0	konstant	$a_0$
1	linear	$a_1 \cdot z + a_0$
2	quadratisch	$a_2 \cdot z^2 + a_1 \cdot z + a_0$
3	kubisch	$a_3 \cdot z^3 + a_2 \cdot z^2 + a_1 \cdot z + a_0$
4	quartisch	$a_4 \cdot z^4 + a_3 \cdot z^3 + a_2 \cdot z^2 + a_1 \cdot z + a_0$
5	quintisch	$a_5 \cdot z^5 + a_4 \cdot z^4 + a_3 \cdot z^3 + a_2 \cdot z^2 + a_1 \cdot z + a_0$

$z$  kann durch  $x$  ersetzt werden und  $a_1, a_2, a_3$  durch  $a, b, c$ , etc.

Eine Polynomfunktion 3-ten Grades lautet:  $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

### *Gerade/Ungerade*

- Eine Potenzfunktion:  $f(x) = ax^n$   
Ist für  $a \neq 0$  genau dann gerade, wenn der Exponenten  $n$  gerade ist, und genau dann ungerade, wenn der Exponent  $n$  ungerade ist.
- Eine Polynomfunktion:  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$   
Ist genau dann gerade, wenn alle ungeradzahligen Koeffizienten  $a_1, a_3, a_5, \dots$  gleich null sind, und genau dann ungerade, wenn alle geradzahligen Koeffizienten  $a_0, a_2, a_4, \dots$  gleich null sind.
- Eine Funktion  $y = f(x)$  heisst gerade, wenn  $\forall x \in DB$  auch  $-x$  im DB liegt und  $f(x) = f(-x)$  gilt.
- Eine Funktion  $y = f(x)$  heisst ungerade, wenn  $\forall x \in DB$  auch  $-x$  im DB liegt und  $f(x) = -f(-x)$  resp.  $-f(x) = f(-x)$  gilt.

### *Relative Extreme (Maxima/Minima/Terassenpunkt/Wendepunkt)*

Punkt	Eigenschaft	Mathematische Bedingung
$P_3 \ & \ P_{11}$	Lokales Maximum	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>f'(x_i) = 0</math></li> <li>• <math>f''(x_i) &lt; 0</math></li> </ul>
$P_8 \ & \ P_{13}$	Lokales Minimum	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>f'(x_i) = 0</math></li> <li>• <math>f''(x_i) &gt; 0</math></li> </ul>
$P_4, P_6, P_{10} \ & \ P_{12}$	Wendepunkte	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>f''(x_i) = 0</math></li> <li>• <math>f'''(x_i) \neq 0</math></li> </ul>
$P_5$	Terassenpunkt	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>f'(x_i) = 0</math></li> <li>• <math>f''(x_i) = 0</math></li> <li>• <math>f'''(x_i) \neq 0</math></li> </ul>

### *y-Achsenschnittpunkt*

Bedeutet Konstante des Polynoms. Bsp. y-Achsenschn.pkt.=11, bei Polynom 3. Grades: d = 11 (eine Gleichung)

### *x-Achsenschnittpunkt*

Bedeutet Nullstellen des Polynoms.  $p(x)=0$

### Aufgabenstellungen und Lösungstipps

1. An welcher Stelle  $x > 0$  unterscheiden sich die Funktionswerte von  $f(x)=x^3+1$  &  $g(x)=x^2$  am wenigsten?
  - a. Es ist das Minimum der Funktion  $d(x)=f(x)-g(x)=x^3+1-x^2$  zu bestimmen.
2. Bei Gleichungen mit mehreren Unbekannten.
  - a. Zuerst die Gleichung mit den wenigsten Unbekannten auf eine Unbekannte auflösen.
  - b. Dieses Unbekannte danach mit dem Lösungswert in die Gleichung mit den zweitwenigsten Unbekannten einsetzen, usw.

# Integralrechnung

## Unbestimmtes Integral

Unbestimmte Integrale haben keine Integralgrenzen.

Sie zu berechnen bedeutet, eine **Stammfunktion** der Funktion im Integral zu finden.

Das Ergebnis ist eine Funktion. Diese ist jedoch nur bis auf eine Konstante eindeutig: Da eine Stammfunktion abgeleitet wieder die Funktion ergeben muss, kann eine beliebige konstante Zahl zu einer Stammfunktion addiert werden und die neue Funktion ist immer noch eine Stammfunktion, da Konstanten beim Ableiten verschwinden.

Wenn ein bestimmtes Integral gesucht ist, können wir zunächst das unbestimmte Integral bestimmen und durch die Wahl eines konkreten **C** das bestimmte Integral ermitteln.

$$\int f(x) dx = F(x) + C \text{ für eine allgemeine Stammfunktion } F \text{ mit } F'(x) = f(x).$$

### Begriffsbestimmung

Die Schreibweise ist wie folgt:

$$F(x) = \int f(x) dx$$

Gesprochen ist das: "F von x ist gleich dem Integral über f von x de x"

### Begriffe:

- **Integrand:** Die zu integrierende Funktion  $f(x)$  (Funktion die unter dem Integral steht.)
- **Integrationsvariable:** Variable  $x$
- **Unbestimmtes Integral:**  $\int f(x) dx$  (da es keine eindeutige Funktion ist)
- **Stammfunktion:**  $F(x) + c$
- **Integrationskonstante:**  $c$

**Es gilt:** Das Resultat einer Integration der Form  $\int f(x) dx$  ist **nur bis auf eine Konstante eindeutig**, d.h.  
 $\int f(x) dx = F(x) + c, c \in R$

Wobei **F(x) + c keine einzelne Funktion, sondern eine Funktionenschar ist.**

**Zusammengefasst:** Differentiation und Integration heben sich - je nach Reihenfolge - auf oder bis auf eine Konstante auf. Wenn man **zuerst differenziert** und dann **integriert** erhält man **bis auf eine Konstante die ursprüngliche Funktion**. Wenn **zuerst integriert** und dann **differenziert**, erhält man die **ursprüngliche Funktion**.

### Integrationsregeln

**Generell: Immer zuerst als Potenz schreiben und dann Integral rechnen**

Bsp.:

b)  $\int \frac{1}{x^3} dx = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + c = -\frac{x^{-2}}{2} + c = -\frac{1}{2x^2} + c$

c)  $\int \sqrt[4]{x^3} dx = \int x^{\frac{3}{4}} dx = \frac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1} + c = \frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} + c = \frac{4}{7} \cdot x^{\frac{7}{4}} + c$

**Potenzfunktion**

I)  $\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + c$  für  $k \in \mathbb{R}$  und  $k \neq -1$

II)  $\int x^k dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$  für  $k = -1$  Bei  $x^{-1}$  resp.  $\frac{1}{x}$

III)  $\int dx = \int 1 dx = x + c$

IV)  $\int a dx = ax + c$

Formel:  $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

Beispiel:  $\sqrt[2]{4} \cdot \sqrt[2]{9} = \sqrt[2]{4 \cdot 9} = \sqrt[2]{36} = 6$

Formel:  $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

Beispiel:  $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\frac{16}{4}} = \sqrt[3]{4} = 2$

Formel:  $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

Beispiel:  $\sqrt[2]{\sqrt[3]{81}} = \sqrt[2 \cdot 3]{81} = \sqrt[6]{81} = 3$

Formel:  $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n \cdot m]{a^m}$

Beispiel:  $(\sqrt[2]{4})^2 = \sqrt[2]{4^2} = \sqrt[2]{16} = 4$

Zudem:  $\sqrt[6]{x^{11}} = \sqrt[6]{x^5 \cdot x^6} = x^6 \sqrt[6]{x^5}$

**Exponentialfunktion**

I.  $\int e^x dx = e^x + c$

II.  $\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot e^{ax+b} + c$

III.  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$  für  $a \in \mathbb{R}_+^*$  und  $a \neq 1$

**Logarithmusfunktion**

I.  $\int \ln x dx = x \cdot \ln x - x + c$  für  $x \in \mathbb{R}_+^*$

II.  $\int \ln(ax+b) dx = \frac{1}{a}[(ax+b) \cdot \ln(ax+b) - (ax+b)] + c$

III.  $\int \log_a x dx = \frac{1}{\ln a}(x \cdot \ln x - x) + c$  für  $x \in \mathbb{R}_+^*$

**Faktorregel**

Ein konstanter Faktor kann vor das Integralzeichen genommen werden.

Mathematisch:  $\int a \cdot f(x) dx = a \int f(x) dx$

**Summenregel**

Das Integral aus einer Summe von Funktionen ist gleich der Summe der Integrale der einzelnen Funktionen.

Weitere allgemeine Regeln auf Seite 29 Kapitel «Technik des Integrierens/Substitution»

Mathematisch:  $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$

**Produktregel (ACHTUNG)**

Achtung!!  $\int f(x) \cdot g(x) dx \neq \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx$

Bei Produkt einfach beide Funktionen multiplizieren und dann den Integral berechnen.

$\int f(x) \cdot g(x) dx = \int x^3 \cdot x^4 dx = \int x^7 dx = \frac{x^8}{8} + c$

Partielle Integration (bei Produkten: bsp.  $x \cdot e^x$ )

$$\int u'(x) v(x) dx = u(x) v(x) - \int u(x) v'(x) dx$$

D.h. erster Produktteil =  $u'(x)$  und zweiter Produktteil =  $v(x)$

**Beispiel:**

$\int e^x \cdot x dx$

Wir fassen  $e^x$  als  $u'(x)$  auf;  $u(x)$  ist dann bekannt, nämlich  $u(x) = e^x$  (6.8). (6.11) liefert dann  $\int e^x \cdot x dx = e^x \cdot x - \int e^x \cdot 1 dx = e^x \cdot x - e^x + C = e^x(x - 1) + C$ .

**Substitutionsregel**

Wir können im Fall linearer Substitution eine allgemeine Regel formulieren:

$\int f(ax+b) dx$  soll berechnet werden.  $u = ax+b$ ,  $du = a dx$ ,  $dx = \frac{1}{a} du$ , also:

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} \int f(u) du.$$

**Beispiele:**  $\int \sqrt{2x-7} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (2x-7)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3} (2x-7) \sqrt{2x-7} + C$

$$\int \frac{dx}{(3x+4)^2} = \frac{1}{3} \cdot \left( -\frac{1}{3x+4} \right) + C = -\frac{1}{3(3x+4)} + C$$

$$\int \frac{dx}{1-x} = -\ln|1-x| + C$$

- Kommt von  $ax+b$ , was in diesem Fall  $-1x+1$  ist.  $1/a = 1/-1 = -1$

**Einige Beispiele:**

$$\int \frac{4-x}{x} dx = \int \frac{4}{x} - \int \frac{x}{x} = \int 4 \cdot \frac{1}{x} - \int 1 = 4 \ln(|x|) - x + c$$

$$\int 4x^{-2} + \frac{1}{x^3} dx = 4 \cdot \int \frac{x^{-1}}{-1} + \int x^{-3} = 4 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{4}{x} - \frac{1}{2x^2} + C = -\frac{8x+1}{2x^2} + C$$

$$\int \sqrt{x} - 5 dx = x^{1/2} - 5x^0 = \frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{5 \cdot x}{1} = \frac{2}{3}x^{3/2} - 5x + c$$

$$\int e^x - 4^x dx = e^x - \frac{4^x}{\ln(4)} + c$$

$$\int \ln 4 \cdot 2^x dx = \ln 4 \cdot \int 2^x dx = \ln 4 \cdot \frac{2^x}{\ln 2} + C \quad (\text{Ln ist die Konstante})$$

**Bestimmtes Integral**

- Die **Differentiation** dient uns zum **Bestimmen der Monotonie, Tangenten, Extremwerte, Wendepunkte** usw. von Funktionen.
- Die **Integration** dient uns sehr **oft zur Bestimmung von Flächen, Schwerpunkten, Kurvenlängen, Rotationsvolumen, Mantelflächen, Oberflächen, Trägheitsmomente, physikalischer Arbeit** usw.

**Berechnung des bestimmten Integrals**

Formel:  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

Wobei F die Stammfunktion von f(x) ist und F(a) und F(b) die in diese **Stammfunktion eingesetzten Werte** bedeuten. Die **Integrationskonstante c** muss **nicht berücksichtigt** werden.

**Kochrezept:**

- Bestimmen der Stammfunktion F(x)
- Bilden der zwei eingesetzten Werte F(a) und F(b)
- Die Differenz F(b) - F(a) ergibt das gesuchte bestimmte Integral.

**Beispiel 1:**  $\int_1^5 \frac{1}{5}x^2 dx = \frac{1}{5} \int_1^5 x^2 dx = \frac{1}{5} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_1^5 = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{5^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right) = \frac{1}{5} \cdot \frac{124}{3} = \frac{124}{15} = 8,2667$

**Beispiel 2:**  $\int_0^6 -x^2 + 6x dx = \frac{-x^3}{3} + 3x^2 \Big|_0^6 = \frac{-6^3}{3} + 3 \cdot 6^2 - 0 = -72 + 108 = 36$

**Beispiel 3:**  $\int_3^6 -x^2 + 6x dx = \frac{-x^3}{3} + 3x^2 \Big|_3^6 = \frac{-6^3}{3} + 3 \cdot 6^2 - \left(\frac{-3^3}{3} + 3 \cdot 3^2\right) = 36 - 18 = 18$

**Bestimmtes Integral und Flächeninhalt zw. Der x-Achse & der Funktionskurve****Kochrezept:**

- Berechnen der Nullstellen von f(x).
- Die Integrale einzeln rechnen.
- Die gesamte Fläche ergibt sich aus der Addition der Beträge der einzelnen bestimmten Integrale.

**Betrag:** Ist der positive Wert der Lösung.

Sprich für **-2** wäre es **2**.

## Integrationsregeln für bestimmte Integrale

### Regel 1:

Faktorregel:  $\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx$

### Regel 2:

Additionsregel:  $\int_a^b f(x) \pm g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$

### Regel 3:

Vertauschungsregel:  $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$

### Regel 4:

$\int_a^a f(x) dx = 0$

### Regel 5:

Zerlegungsregel:  
Für  $a < c < b$  gilt:  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

### Regel 6:

Vergleichsregel  
Sind die beiden Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  im Intervall  $a \leq x \leq b$  stetig und gilt in diesem Intervall immer  $g(x) \leq f(x)$ , dann ist

$$\int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx$$

## Integrationsvariable ungleich «x»

Nach welchem Symbol integriert wird entscheidet allein die Variable hinter dem "d".

**Beispiel 11a:** Berechnen Sie nun  $\int_{-1}^2 a + z^2 dz$

**Lösung:** Der Parameter  $a$  wird wie eine konstante Zahl behandelt.

$$\int_{-1}^2 a + z^2 dz = [a \cdot z + \frac{z^3}{3}]_{-1}^2 = (2a + \frac{8}{3}) - (-a + \frac{-1}{3}) = 3a + 3$$

## Integrierbarkeit von Funktionen

Ungleich den Funktionen sind **Sprünge und Knicke** kein Problem beim Integrieren.

1. Differenzierbar => integrierbar (immer)
2. Nicht integrierbar, wenn Integritätsintervall gegen +/- unendlich geht! (Besitzt eine Polstelle resp. ist unbeschränkt)

## Technik des Integrierens

Wenn die zu integrierende Funktion nur schon ein wenig von der Grundfunktion abweicht, müssen wir eine Integrationstechnik anwenden.

### Substitutionsmethoden

#### Lineare Substitution unbestimmte Integrale

Gleches Resultat geht auch mit der Substitutionsformel:  $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} \int f(u) du$ .

Schritte	Ausführung
0) Zu berechnendes Integral	$\int (6x-1)^7 dx$
1) Substitution	$z = 6x - 1 \quad \leftarrow \text{Term durch } z \text{ ersetzen}$
2) Berechnung von $z'(x)$	$z'(x) = \frac{dz}{dx} = 6 \quad (\text{Ableitung von } 6x + 1 = 6)$
3) Auflösen nach $dx$	$dx = \frac{dz}{6} = \frac{1}{6} dz$
4) Integral neu schreiben	$\int \frac{1}{6} z^7 dz = \frac{1}{6} \int z^7 dz$
5) Integral berechnen	$\frac{1}{6} \int z^7 dz = \frac{1}{6} \cdot \frac{z^8}{8} + c = \frac{1}{48} z^8 + c$
6) Zurücksubstituieren	$\frac{1}{48} z^8 + c = \frac{1}{48} (6x-1)^8 + c$
7) Probe	$(\frac{1}{48} (6x-1)^8 + c)' = \frac{1}{48} (6x-1)^7 \cdot 8 \cdot 6 = (6x-1)^7$

Kettenregel:  
äußere x innerer Ableitung

### Logarithmische Integration

Falls die Substitution  $z$  von der Form  $z = \frac{1}{g(x)}$  ist, oder gleichbedeutend, wenn der Integrand die Form  $\frac{g'(x)}{g(x)}$  hat, ergibt sich für die Lösung eine allgemeine Formel.

Formel:  $\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln|g(x)| + c$

Allgemeine Regeln:

- $\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a \cdot (n+1)} (ax+b)^{n+1} + c$  Achtung: geht nicht bei  $ax^2+b$
- $\int \sqrt{ax+b} dx = \frac{2}{3a} (ax+b)^{\frac{3}{2}} + c$
- $\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot e^{ax+b} + c$
- $\int \frac{c}{ax+b} dx = \frac{c}{a} \ln(ax+b) + c$
- $\int \ln(ax+b) dx = \frac{1}{a} [(ax+b) \cdot \ln(ax+b) - (ax+b)] + c$
- $\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \cdot \sin(ax+b) + c$

Lineare Substitution bestimmte Integrale

Schritte	Ausführung
0) Zu berechnendes Integral	$\int_1^2 (6x - 1)^7 dx$
1) Substitution	$z = 6x - 1$
2) Berechnung von $z'(x)$	$z'(z) = \frac{dx}{dz} = 6$
3) Auflösen nach $dx$	$dx = \frac{dz}{6} = \frac{1}{6} \cdot dz$
4) Integral neu schreiben	$\int \frac{1}{6} z^7 dz = \frac{1}{6} \int z^7 dz$
5) Integral berechnen	$\frac{1}{6} \int z^7 dz = \frac{1}{6} \cdot \frac{z^8}{8} + c = \frac{1}{48} z^8 + c$
6.1) Grenzen substituieren	$x = 1 \Rightarrow z = 5; x = 2 \Rightarrow z = 11$ ; da $z = 6x - 1$
6.2) Die Grenzen einsetzen	$\frac{1}{48} \cdot z^8 \Big _5^{11} = \frac{1}{48} \cdot 11^8 - \frac{1}{48} \cdot 5^8 = 4'457'672$

**Partielle Integration (Bei Funktionen mit mehreren Faktoren, Multiplikation)**

Wird angewendet, wenn wir das Integral aus einem Produkt berechnen müssen.

Formel:  $\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$

**Kochrezept:**Beispiel für Integral:  $I = \int x \cdot e^x dx$ 

Schritte	Ausführung
1) Festlegen von $f(x)$ und $g'(x)$	$f(x) = x$ $g'(x) = e^x$
2) Berechnen von $f'(x)$ und $g(x)$	$f'(x) = 1$ $g(x) = \int e^x dx = e^x$
3) Einsetzen	$I = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x dx$
4) Fertig rechnen	$I = x \cdot e^x - e^x + C$
5) Kontrolle	$(x \cdot e^x - e^x)' = e^x + x \cdot e^x - e^x = x \cdot e^x \checkmark$

**Bestimmtes Integral**

Einfach Grenzen in die Lösung von oben eingeben.

$$I = \int_0^1 x \cdot e^x dx = (x \cdot e^x - e^x) \Big|_0^1 = (1 \cdot e^1 - e^1) - (0 \cdot e^0 - e^0) = 1$$

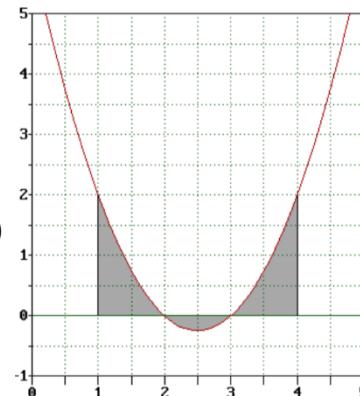
## Facetten der Integralrechnung

Das Berechnen eines **bestimmten Integrals** ist nur dann gleich der zu **bestimmenden Fläche**, wenn:

1. Funktion nur **positive y-Werte** hat (ansonsten mit Betrag rechnen)
2. Die zu bestimmende Fläche zwischen Funktionskurve und x-Achse liegt.

### Fläche zwischen Funktionskurve und x-Achse

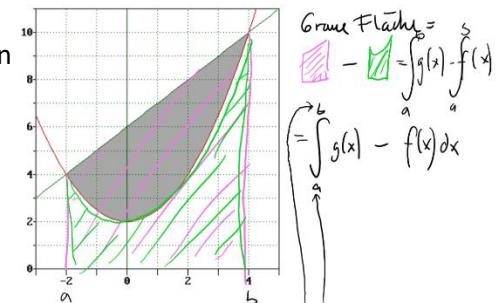
1. Bestimmen der Nullstellen von  $f(x)$ 
  - a.  $f(x) = 0 \rightarrow x_1, x_2$
2. Stammfunktion bestimmen
  - a. **Integral von  $f(x)$  in der Volumenformel (WICHTIG!)**
3. Die einzelnen Integrale bestimmen
  - a.  $I_1 = \text{Integral von Anfang Bereich bis } x_1$  (bez.  $x_1$  - Anfang Bereich)
  - b.  $I_2 = \text{Integral von } x_1 \text{ bis } x_2$  (bez.  $x_2 - x_1$ )
  - c.  $I_3 = \text{Integral von } x_2 \text{ bis Ende Bereich}$  (bez. Ende Bereich -  $x_2$ )
4. Bestimmen der Fläche durch Addition der Beträge
  - a. Resultat von  $I_1 + I_2 + I_3$  positiv machen und zusammenzählen



### Fläche zwischen zwei Kurven

Generell muss die Fläche zwischen der einen Funktion und der x-Achse minus die Fläche der zweiten Funktion und der x-Achse gerechnet werden.

1. Bestimmen der x-Koordinaten der Schnittpunkte der beiden Funktionen
  - a.  $f(x) = g(x) \rightarrow x_1, x_2 \rightarrow$  Anfang- und Endbereich ( $a, b$ )
2. Fläche A bestimmen
  - a. Bestimmtes Integral  $a$  bis  $b$  von  $f(x)$  --> Fläche A
3. Fläche B bestimmen
  - a. Bestimmtes Integral  $a$  bis  $b$  von  $g(x)$  --> Fläche B
4. Flächen subtrahieren um gewünschte Fläche zu bekommen
  - a.  $A - B$  resp.  $B - A$ , sodass Resultat positiv wird.



### Volumen eines Rotationskörpers (Rotation um x-Achse)

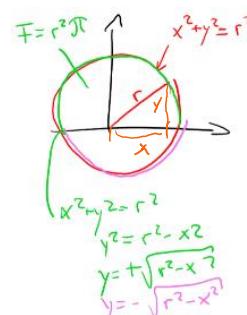
Generell gilt:

$$\text{Fläche eines Kreises: } r^2 \cdot \pi$$

$$\text{Volumen einer Kugel: } \frac{4}{3} r^3 \cdot \pi$$

$$\text{Volumen Kegel: } \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$$

$$\text{Funktion Halbkreis: } y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$



### Formel Volumen Rotationskörper um x-Achse

$$\text{Formel: } V_x = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

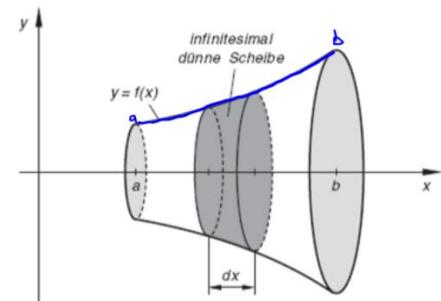
Für  $f(x)$  einfach Funktion für die Gerade  $a \rightarrow b$  einsetzen.

### Beispiel:

Wir berechnen nun das Volumen des Rotationskörpers des Halbkreises mit Radius 3, der um die x-Achse rotiert, also das Volumen einer Kugel mit Radius 3.

Formel der Funktion für ein Halbkreis:  $y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$

$$\begin{aligned} V_{\text{Kugel}} &= \pi \cdot \int_{-3}^3 [\sqrt{3^2 - x^2}]^2 dx = \pi \cdot \int_{-3}^3 3^2 - x^2 dx = \pi \cdot \left(9x - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_{-3}^3 = \\ &= \pi \cdot \left[ \left(9 \cdot 3 - \frac{3^3}{3}\right) - \left(9 \cdot (-3) - \frac{(-3)^3}{3}\right) \right] = \pi \cdot [(27 - 9) - (-27 + 9)] = (54 - 18)\pi = 36\pi \end{aligned}$$



**Formel Volumen Rotationskörper um y-Achse**

**Formel:**  $V_y = \pi \cdot \int_c^d [g(y)]^2 dy$

**WICHTIG:**

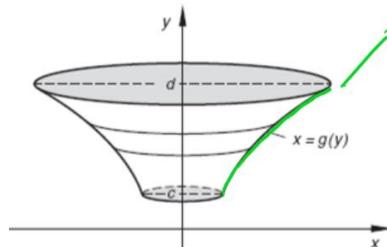
Zuerst muss die Funktion  $y = f(x)$  auf  $x = g(y)$  umgewandelt werden. Also Funktion auf  $x$  auflösen.

Bsp.:

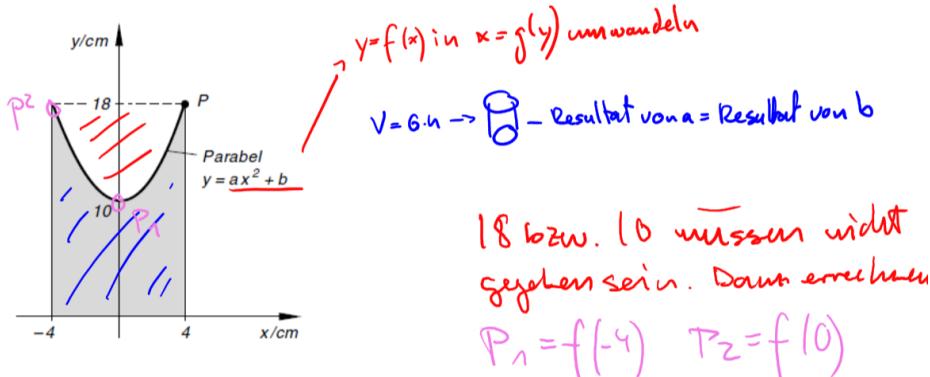
$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \Rightarrow y^2 = r^2 - x^2 \Rightarrow x^2 = r^2 - y^2 \Rightarrow x = g(y) = \sqrt{r^2 - y^2}$$

**Kochrezept:**

1. Grenzen berechnen, also a und b
2.  $x = g(y)$  bestimmen (Umrechnen)
3. Integral rechnen

**Beispiel:**

- a) Welchen Rauminhalt gibt es, wenn die untenstehende Parabel um die y-Achse rotiert wird?  
 b) Welchen Rauminhalt besitzt der Körper, der durch Drehung der grau schraffierten Fläche um die y-Achse entsteht?

Lösung

Zunächst bestimmen wir die Gleichung der Parabel. Da der Scheitelpunkt auf der y-Achse liegt, lautet die Grundgleichung:  $y = f(x) = ax^2 + c$

Der Scheitelpunkt lautet  $(0; 10)$ , damit folgt  $c = 10$ , also:  $y = f(x) = ax^2 + 10$ .

Der Parameter  $a$  wird ermittelt durch einsetzen eines weiteren bekannten Punktes, z.B.  $(4; 18)$

$$\text{Also: } 18 = a \cdot 4^2 + 10 \Rightarrow 16a = 8 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\text{somit lautet die Parabelgleichung: } y = f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 10$$

a) Somit ist nun  $x = g(y)$ , resp.  $x^2 = [g(y)]^2$  zu rechnen.

$$y = f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 10 \Rightarrow x^2 = 2(y - 10) = 2y - 20 = [g(y)]^2$$

$$V_{\text{Paraboloid}} = \pi \cdot \int_{10}^{18} [g(y)]^2 dy = \pi \cdot \int_{10}^{18} 2y - 20 dy = \pi[y^2 - 20y] \Big|_{10}^{18} = \dots = 64\pi$$

b) Das gesuchte Rotationsvolumen  $V$  berechnet sich mit:

$$V = V_{\text{Zylinder}} - V_{\text{Paraboloid}} = r^2 \pi \cdot h - \pi \cdot \int_{10}^{18} [g(y)]^2 dy = 4^2 \pi \cdot 18 - \pi \cdot \int_{10}^{18} [g(y)]^2 dy$$

$$\text{Also: } V = V_{\text{Zylinder}} - V_{\text{Paraboloid}} = 288\pi - 64\pi = 224\pi \approx 703,73 \text{ cm}^3$$

## Taschenrechner bedienen

1. Resultat speichern:
  - a. SHIFT + RCL(STO) + (Eine der Tasten mit den Roten Buchstaben)
2. Gespeichertes Resultat abrufen:
  - a. ALPHA + (Eine der Tasten mit den Roten Buchstaben)  
→ **WICHTIG: nicht Enter drücken** sondern einfach Rechnung weiterfahren.  
Also bsp. ALPHA + A + 17 + = → Das würde das Resultat anzeigen.
3. Gespeicherte Resultate löschen:
  - a. SHIFT + MODE(CLR) + 1 + = → oder Rechner aus- und einschalten.
4. «ANS» ist das Resultat der letzten Rechnung.