Lucerne University of
Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE
LUZERN
Informatik
FH Zentralschweiz

J ∫ Skripte

Modul I.BA_ANLS
Kompetenznachweis (= Testprüfung) HS 19/20
Di. 17. Dez. 2019 (18:15 – 19:45), Zimmer SA1 Midi

Name: *Musterlösung V1.0*

Bedingungen (für die Prüfung):

Zeit:	90 Minuten
Hilfsmittel:	Beliebige schriftliche Unterlagen (Open book), offizieller HSLU TR (zu Beginn des Moduls abgegeben) oder TI-30 ECO-RS.

Bitte beachten Sie:
- Mit Bleistift oder mit roter Farbe schreiben ist ***nicht*** gestattet.
- Lösungen auf den dafür vorgesehenen Platz eintragen, ev. Rückseiten oder die ***angehängten Zusatzblätter*** benutzen.
- Lesen Sie zuerst die Aufgaben, bevor Sie zu lösen anfangen!
- Saubere und deutliche Resultatformulierung.
- Nicht aufgehende Resultate entweder in der genauen Form stehen lassen (gekürzter Bruch, vereinfachte Wurzel usw.) oder auf 3 Stellen genau angeben.
- Unbelegte oder nicht nachvollziehbare Resultate werden nicht berücksichtigt.
- Ungültiges ist sauber durchzustreichen, Mehrfachlösungen werden nicht gewertet.
- Der Lösungsweg muss klar ersichtlich sein.
- Koordinatensysteme sind sauber zu beschriften (Achsen und Einheiten).
- Im Koordinatensystem enthaltene Funktionen sind anzuschreiben.
- ***Rechenaufgaben*** werden mit dem ***Unterstreichen*** des Resultates beendet.
- ***Gleichungen*** werden mit Angabe der ***Lösungsmenge*** beendet.
- Zu ***Textaufgaben*** gehört am Schluss ein ***Resultatsatz*** in Prosa.

Punktzahlen:
maximal: **60**
für die Note 6: **50**
für die Note 4: **30**

Ich wünsche Ihnen viel Glück und viel Erfolg

Josef Schuler

Punkteübersicht:

Aufgabe	Max. Punktzahl	erreichte Punktzahl	
1)	4 + 6 = 10		
2)	6 + 6 = 12		
3)	8		
4)	5 + 5 = 10		
5)	5 + 8 = 13		
6)	7		
	---------------		Note
Total	60		
	==========	==============	

Notenskala:

$\textbf{Note} = \frac{1}{10} \cdot \text{erreichte Punktzahl} + 0{,}75$ **Danach wird auf die halbe Note gerundet.**

Als Tabelle:

Note	Punkte	Anzahl
6 = A	≥ 50	
5,5 = B	≥ 45	
5 = C	≥ 40	
4,5 = D	≥ 35	
4 = E	≥ 30	
3,5 = FX	≥ 25	
3 = F	< 25	

Aufgabe 1.1: 4 Punkte

Kreuzen Sie in der Auswahl ***alle*** richtigen Aussagen an. Pro richtiges Ankreuzen gibt es 1 Punkt. ***Falsches Ankreuzen gibt ½ Punkt Abzug!!*** Die Summe kann nicht negativ werden.

NR	Aufgabe	Auswahl
a)	Die Funktion $f(x) = -5x^3 + 4x$ ist ungerade.	☐wahr ☐falsch ☐Nur natürliche Zahlen können gerade oder ungerade sein. ☐Das kann man nicht allgemein beantworten. ☐Keine der Angaben ist richtig.
b)	Jede Potenzfunktion $f(x) = x^n$ ist für natürliche n gerade.	☐wahr ☐falsch ☐Nur natürliche Zahlen können gerade oder ungerade sein. ☐Das kann man nicht allgemein beantworten. ☐Keine der Angaben ist richtig.
c)	Jedes Polynom vierten Grades hat genau vier reelle Nullstellen.	☐wahr ☐falsch ☐Von einem Polynom geraden Grades weiss man nur dass es eine gerade Anzahl Nullstellen hat. ☐Ein Polynom vierten Grades kann zwischen Null und vier Nullstellen haben. ☐Das kann man nicht allgemein beantworten. ☐Keine der Angaben ist richtig.

Lösung:

NR	Aufgabe	Auswahl
a)	Die Funktion $f(x) = -5x^3 + 4x$ ist ungerade.	☑wahr ☐falsch ☐Nur natürliche Zahlen können gerade oder ungerade sein. ☐Das kann man nicht allgemein beantworten. ☐Keine der Angaben ist richtig.
b)	Jede Potenzfunktion $f(x) = x^n$ ist für natürliche n gerade.	☐wahr ☑falsch ☐Nur natürliche Zahlen können gerade oder ungerade sein. ☐Das kann man nicht allgemein beantworten. ☐Keine der Angaben ist richtig.
c)	Jedes Polynom vierten Grades hat genau vier reelle Nullstellen.	☐wahr ☑falsch ☐Von einem Polynom geraden Grades weiss man nur dass es eine gerade Anzahl Nullstellen hat. ☑Ein Polynom vierten Grades kann zwischen Null und vier Nullstellen haben. ☐Das kann man nicht allgemein beantworten. ☐Keine der Angaben ist richtig.

Aufgabe 1.2: **6 Punkte**

Ein Monopolist hat bei der Herstellung seines Produkts variable Kosten von 4 GE (= Geldeinheit) pro Stück. Die Fixkosten betragen 100 GE.
Aus Erfahrungswerten hat er die Nachfragefunktion ermittelt: $p_N(x) = -\frac{1}{20}x + 10$

a) [3 P.] Berechnen Sie die Funktionsgleichung
   i) Der Kostenfunktion,
   ii) der Erlösfunktion
   iii) und der Gewinnfunktion des Monopolisten.

b) [3 P.] In welchem Bereich ist die Produktion gewinnbringend?

Alternative:
Konnten Sie in a) nicht alle Funktionen bestimmen so dürfen Sie in b) mit der Gewinnfunktion $G_2(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 30x - 500$ weiter rechnen.

Lösung:

a) Berechnen Sie die folgenden Funktionsgleichungen
   i) Kostenfunktion: $K(x) = K_v(x) + K_f = 4x + 100$
   ii) Erlösfunktion: $E(x) = x \cdot p_N(x) = x \cdot \left(-\frac{1}{20}x + 10\right) = -\frac{1}{20}x^2 + 10x$
   iii) Gewinnfunktion:

$$G(x) = E(x) - K(x) = -\frac{1}{20}x^2 + 10x - (4x + 100) = -\frac{1}{20}x^2 + 6x - 100$$

b) Es ist die Nutzengrenze und die Nutzenschwelle zu bestimmen, d.h. die Nullstellen der Gewinnfunktion. ½ P.

$$-\frac{1}{20}x^2 + 6x - 100 = 0 \Rightarrow x^2 - 120x + 2000 = 0 \Rightarrow (x - 20)(x - 100) = 0$$

$\Rightarrow x_1 = 20;\ x_2 = 100$ 2 P.

Resultat: Im Bereich von 20 bis 100 ME produziert er gewinnbringend. ½ P.

Alternative:

$$-\frac{1}{4}x^2 + 30x - 500 = 0 \Rightarrow x^2 - 120x + 2000 = 0 \Rightarrow x_1 = 20;\ x_2 = 100$$

Resultat: Im Bereich von 20 bis 100 ME produziert er gewinnbringend. ½ P.

Bemerkung: Die Werte können auch mit der Lösungsformel berechnet werden.

Aufgabe 2.1: **6 Punkte**

Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = 2x^2 + ln(x)$. Bestimmen Sie den/die Wendepunkt(e). Es ist zu kontrollieren, ob es sich tatsächlich um Wendepunkte handelt oder nicht.

Achtung:

Nicht aufgehende Brüche oder Ausdrücke soweit wie möglich vereinfachen und stehen lassen oder auf 3 Stellen nach dem Komma berechnen.

Lösung:

$$y = f(x) = 2x^2 + ln(x) \Rightarrow f'(x) = 4x + \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = 4 - \frac{1}{x^2};\ f'''(x) = \frac{2}{x^3}$$

Je 1 P.

Wendepunkt bestimmen, d.h. f''(x) = 0 setzen.

$$0 = 4 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{x^2} = 4 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x_{1;2} = \pm\frac{1}{2}$$

1 P.

Wobei x = -0,5 nicht im Definitionsbereich liegt und somit nicht betrachtet werden muss.

½ P.

$$f'''(x = 0{,}5) = \frac{2}{0{,}5^3} \neq 0$$

Somit hat es an der Stelle x = 0,5 einen Wendepunkt. ½ P.

Bestimmen des Punktes

$$y = f(x = 0{,}5) = 2 \cdot 0{,}5^2 + ln(0{,}5) = 0{,}5 + \ln(0{,}5) = 0{,}5 - \ln(2) \approx -0{,}193$$

Resultat: Der Punkt (0.5; 0,5-ln(2)) ist der einzige Wendepunkt von $f(x) = 2x^2 + ln(x)$

1 P.

Aufgabe 2.2: **6 Punkte**

Gesucht ist eine ganzrationale Funktion f(x) 3-ten Grades, die die Symmetrieeigenschaft „ungerade“ aufweist und die im Punkt (1; -6) ein Minimum besitzt.
Eine Überprüfung, ob an dieser Stelle wirklich ein Minimum ist, ist nicht nötig.

Lösung:

Ansatz: $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Da f(x) ungerade → keine geraden Exponenten, also b = d = 0 1 P.

Also: $f(x) = ax^3 + cx$

Es gilt: $f'(x) = 3ax^2 + c$ 1 P.
Bedingungen:

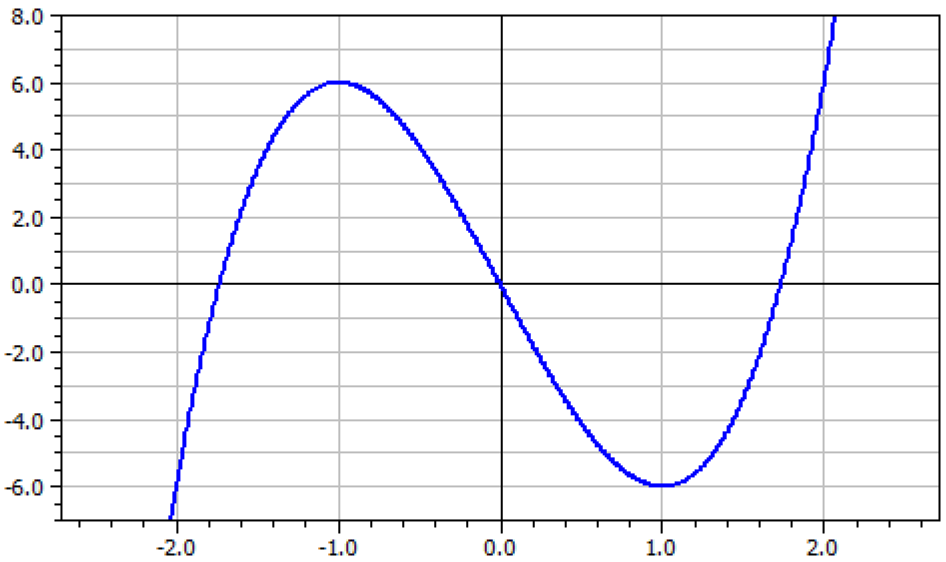
I) An der Stelle x = 1 ein Minimum: $3a + c = 0$ 1 P.
II) P(1; -6) ist Punkt der Kurve: $a + c = -6$ 1 P.

Resultat: Das Gleichungssystem liefert a = 3 und c = -9 1½ P.
also: $f(x) = 3x^3 - 9x$ ½ P.

Bemerkung:
Anbei noch die (nicht gefragte) Überprüfung, dass bei x = 1 ein Minimum ist.
$f(x) = 3x^3 - 9x \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 9 \Rightarrow f''(x) = 12x$

$f''(x = 1) = 12 \cdot 1 = 12 > 0$

Zur Kontrolle die Graphik (nicht verlangt):

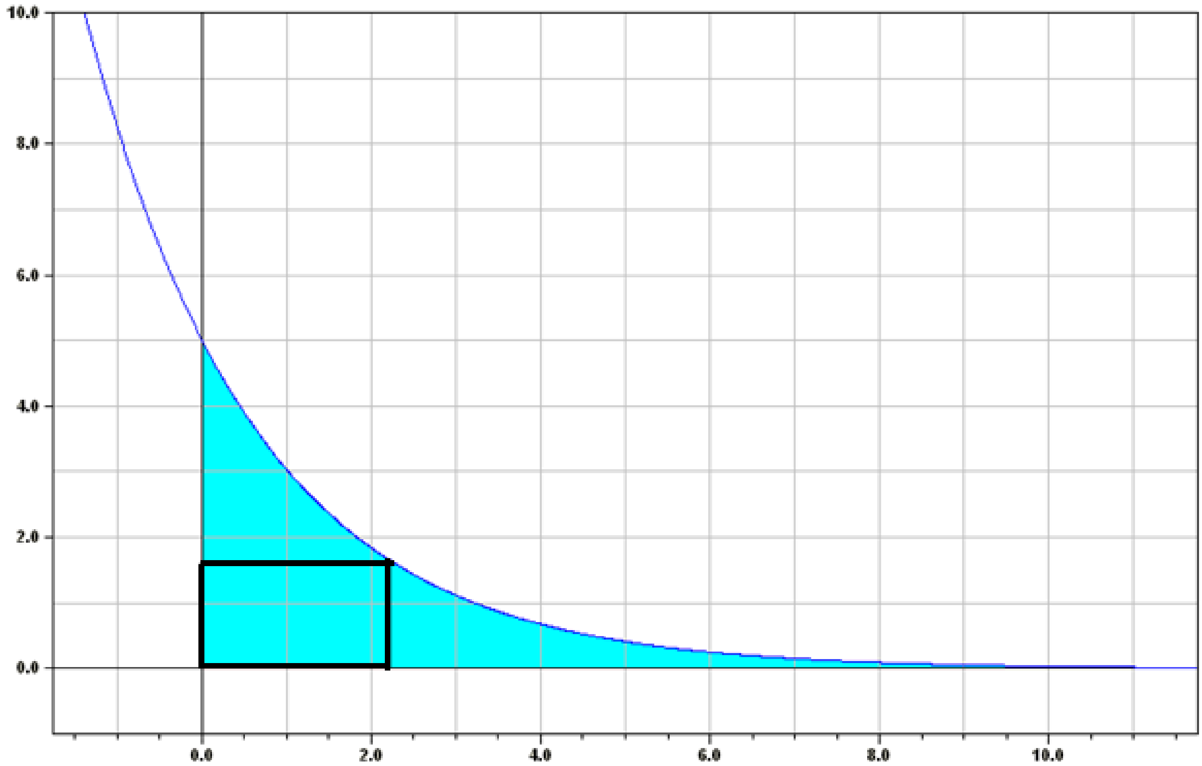


Aufgabe 3: **8 Punkte**

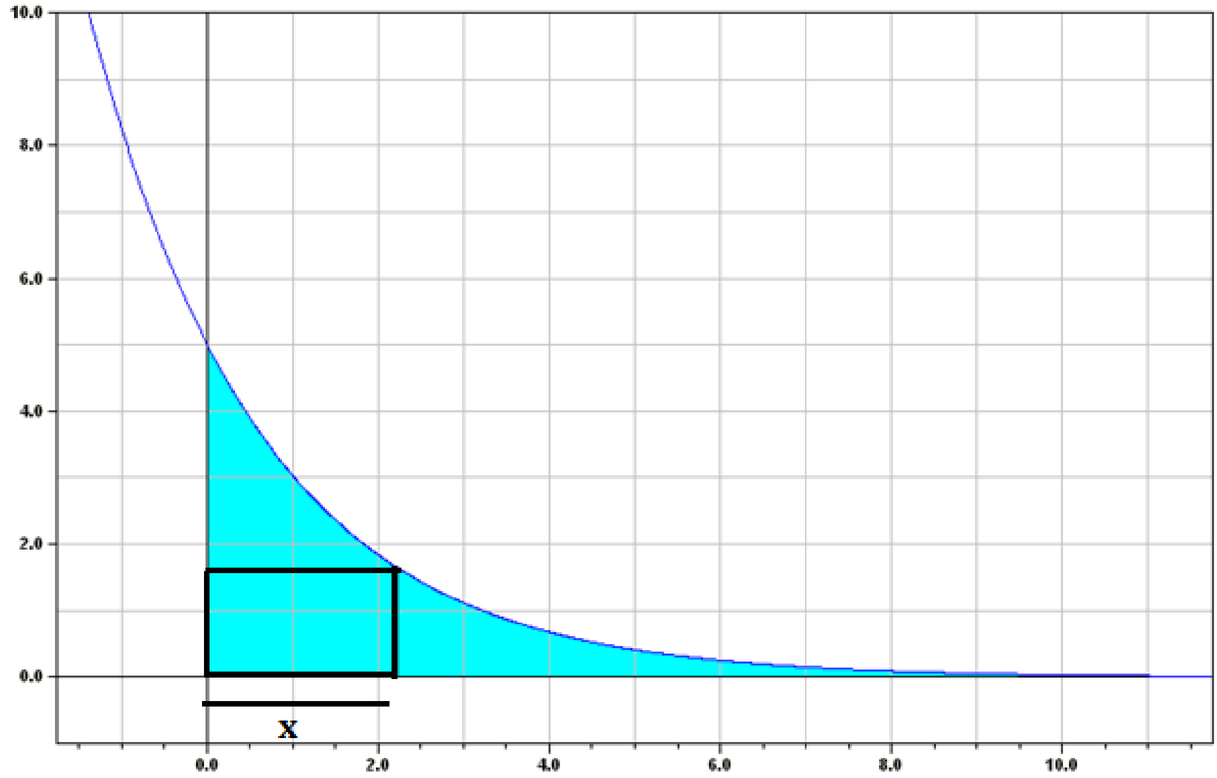
In den markierten Bereich der Funktion $y = f(x) = 5 \cdot e^{-\frac{x}{2}}$ soll ein Rechteck mit möglichst grosser Fläche eingezeichnet werden. Dabei soll je eine Seite auf der x- resp. y-Achse liegen (siehe Grafik). Bestimmen Sie die Länge und Breite sowie die Fläche dieses Rechtecks. Das Resultat ist mit einer Genauigkeit von 2 Stellen nach dem Komma darzustellen.

Bemerkung:

Die Verifikation, dass es sich um ein Maximum handelt, muss ***nicht*** gemacht werden!



Lösung:



Somit beträgt die Fläche des Rechtecks:

$F(x) = x \cdot f(x) = x \cdot 5 \cdot e^{-\frac{x}{2}}$ 1 P.

$F'(x) = \left(x \cdot f(x)\right)' = x' \cdot f(x) + x \cdot f'(x) = 5e^{-\frac{x}{2}} + x \cdot 5 \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

$= \frac{5}{2} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot (2 - x)$

3 P.

Es ist die Nullstelle von F'(x) zu bilden:

$0 = \frac{5}{2} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot (2 - x) \Rightarrow 2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$ 2 P.

Die Fläche beträgt somit:

$F(x = 2) = 2 \cdot f(x = 2) = 2 \cdot 5 \cdot e^{-\frac{2}{2}} = 2 \cdot 5 \cdot e^{-1} = \frac{10}{e} = 3{,}6788$

1 P.

Resultat: Die Länge des Rechtecks beträgt 2 LE, die Breite beträgt

$y = f(x = 2) = 5 \cdot e^{-\frac{2}{2}} = \frac{5}{e} = 1{,}84\ LE$, die max. Fläche beträgt 3,68 FE.

1 P.

Aufgabe 4.1: **5 Punkte**

Ist eine Funktion f(x) gegeben, dann heisst die Funktion $\overline{f}(x)$ Durchschnittsfunktion und ist wie folgt definiert: $\overline{f}(x) = \frac{f(x)}{x}$

Es gilt nun der folgende Satz:

Ist x_0 eine Stelle, wo $\overline{f}(x)$ extremal ist, dann gilt an dieser Stelle: $\overline{f}(x_0) = f'(x_0)$

Verifizieren Sie diesen Satz mit der Funktion $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 80x$

Lösung:

$$f(x) = -x^3 + 2x^2 + 80x$$

$$\overline{f}(x) = \frac{-x^3+2x^2+80x}{x} = -x^2 + 2x + 80$$

1 P.

Nullstelle von $\overline{f}'(x)$ berechnen

$$\overline{f}'(x) = -2x + 2$$

$$0 = -2x + 2 \Rightarrow x = 1$$ 1 P.

$$f'(x) = -3x^2 + 4x + 80$$ 1 P.

$$f'(x = 1) = -3 + 4 + 80 = \underline{\underline{81}}$$ 1 P.

$$\overline{f}(x = 1) = \frac{f(x = 1)}{1} = \frac{-1 + 2 + 80}{1} = \underline{\underline{81}}$$

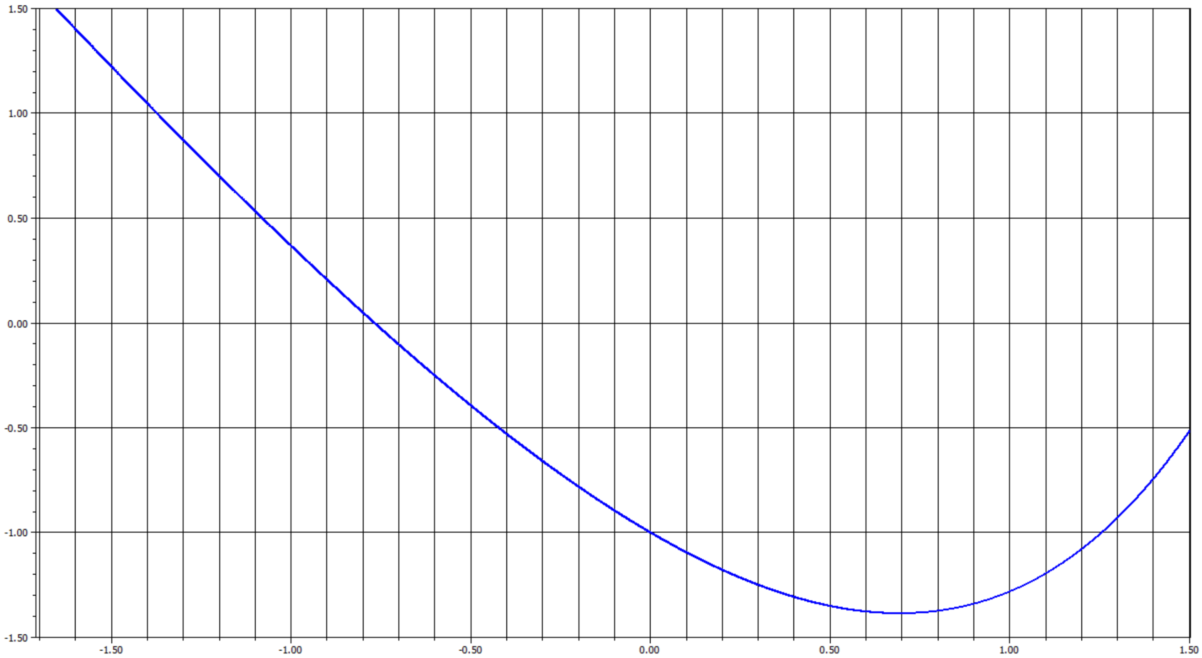
1 P.

Aufgabe 4.2: **5 Punkte**

Führen Sie zwei Schritte des Newton-Verfahrens zur Bestimmung der Nullstelle der Funktion $f(x) = e^x - 2x - 2$ durch. Beginnen Sie mit dem Startwert $x_0 = 0$.

<u>Alternative:</u>

Sollten Sie das rechnerische Verfahren nicht beherrschen, so können Sie zwei Schritte graphisch einzeichnen. Sie erhalten dafür aber nur maximal 2 Punkte!!



Lösung:

$f(x) = e^x - 2x - 2 \Rightarrow f'(x) = e^x - 2$ 1 P.

Iterationsformel: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Schritt 1 mit Startwert $x_0 = 0$:

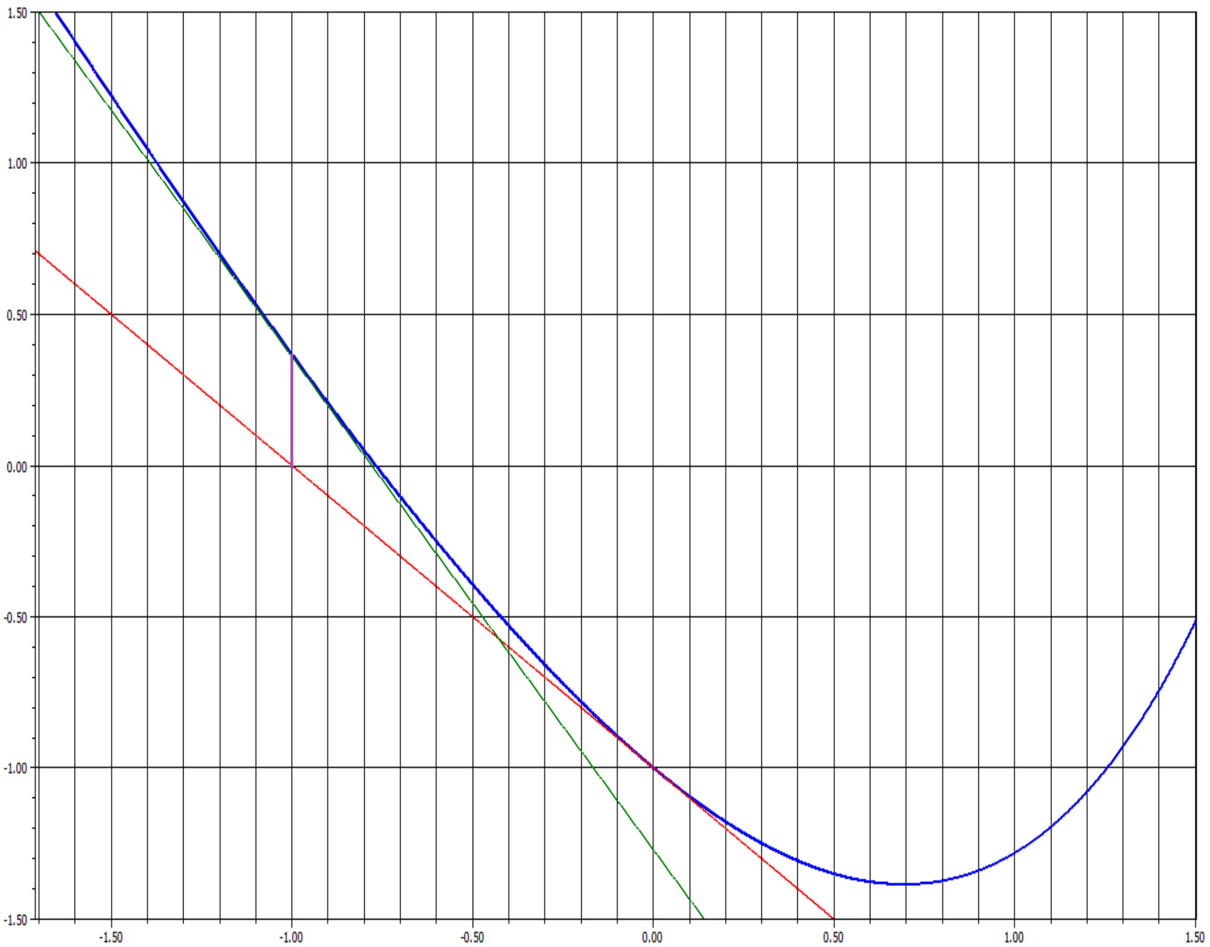
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{e^0 - 2 \cdot 0 - 2}{e^0 - 2} = 0 - \frac{-1}{-1} = -1$$

2 P.

Schritt 2: $x_1 = -1$:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -1 - \frac{e^{-1} - 2 \cdot (-1) - 2}{e^{-1} - 2} = -1 - \frac{e^{-1}}{e^{-1} - 2} = -0{,}775$$

2 P.



Aufgabe 5.1: **5 Punkte**

Berechnen Sie das bestimmte Integral.

$$\int_2^3 x \cdot ln(x)\,dx$$

Lösung:

Für die partielle Integration gilt: $\int f(x) \cdot g(x)\,dx = F(x) \cdot g(x) - \int F(x) \cdot g'(x)\,dx$

Also $f(x) = x \Rightarrow F(x) = \frac{x^2}{2}$

Und $g(x) = ln(x) \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x}$

1 P.

Wir berechnen zuerst die Stammfunktion:

$$\int x \cdot ln(x)\,dx = \frac{x^2}{2} \cdot ln(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\,dx = \frac{x^2}{2} \cdot ln(x) - \frac{1}{2}\int x\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot ln(x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} \cdot \left(ln(x) - \frac{1}{2}\right)$$

2 P.

Und nun das bestimmte Integral:

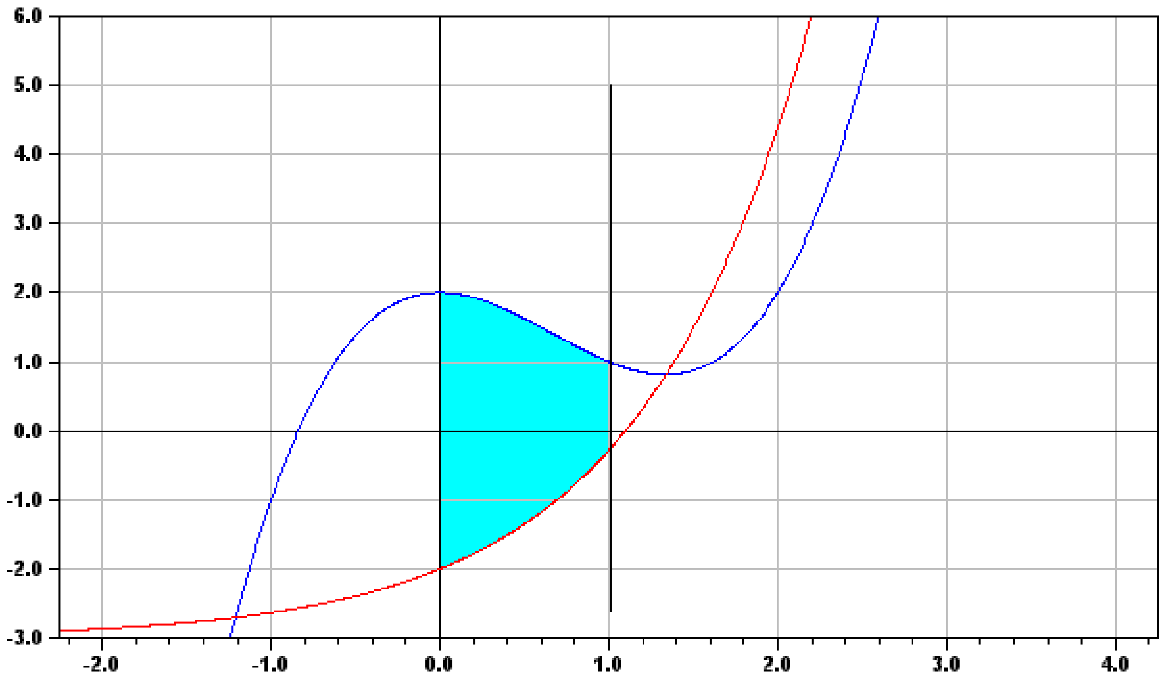
$$\int_2^3 x \cdot ln(x)\;dx = \left.\frac{x^2}{2} \cdot \left(ln(x) - \frac{1}{2}\right)\right|_2^3 = \frac{3^2}{2} \cdot \left(ln(3) - \frac{1}{2}\right) - \left[\frac{2^2}{2} \cdot \left(ln(2) - \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{9}{2} \cdot ln(3) - \frac{9}{4} - \frac{4}{2} \cdot ln(2) + \frac{4}{4} = \frac{9}{2} \cdot ln(3) - 2 \cdot ln(2) - 1{,}25 \approx \underline{\underline{2{,}30746}}$$

2 P.

Aufgabe 5.2: **8 Punkte**

Berechnen Sie die Fläche, die von den Funktionen $f(x) = e^x - 3$ und $g(x) = x^3 - 2x^2 + 2$, der *y*-Achse und der Geraden x = 1 begrenzt wird (siehe Diagramm). Das Schlussresultat ist auf 3 Stellen nach dem Komma zu runden.



Lösung:

Fläche =

$$= \int_0^1 x^3 - 2x^2 + 2\,dx - \int_0^1 e^x - 3\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + 2x \Big|_0^1 - [e^x - 3x|_0^1]$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + 2 - 0 - [e - 3 - (1 - 0)] = -\frac{5}{12} + 2 - e + 4 = \frac{67}{12} - e = 2{,}865$$

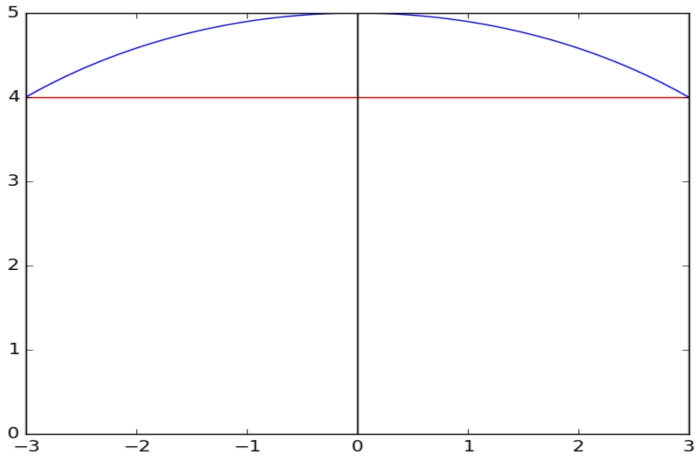
Bewertungshinweise:

- 1 P. für Fläche als Differenz der zwei Integrale, inkl. richtige Grenzen (jeweils -0.5 P. für eine falsche Grenze oder für falsche Reihenfolge; -1 P. für Fläche als *Summe* der Integrale).
- Pro Stammfunktion 2 P → 4 P.
- Pro bestimmtes Integral 1 P. → 2 P.
- Korrektes Schlussresultat 1P.

Aufgabe 6: **7 Punkte**

Ein Flächenstück ist wie folgt definiert:

- Oben wird das Flächenstück durch die Funktion $y = f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ begrenzt.
- Unten wird das Flächenstück durch die Gerade mit der Gleichung y = 4 begrenzt.
- Siehe Zeichnung.



Bestimmen Sie das Volumen des Ringes, der entsteht, wenn das beschriebene Flächenstück um die x-Achse rotiert wird.

Hinweis 1: Es muss die Differenz von zwei Rotationskörpervolumina berechnet werden.

Hinweis 2:
Sollte es möglich sein, dass ein Rotationskörpervolumen elementargeometrisch berechnet werden kann, so dürfen Sie das elementargeometrisch berechnen.

Lösung:
V_1 = Volumen des Rotationskörpers, der durch die obere Kurve erzeugt wird.

$$V_1 = \pi \int_{-3}^{3} \left(f(x)\right)^2 dx = \pi \int_{-3}^{3} \left(\sqrt{25 - x^2}\right)^2 dx = \pi \int_{-3}^{3} 25 - x^2\, dx = \pi \left(25x - \frac{x^3}{3}\right)_{-3}^{3}$$

$$= \pi \left[25 \cdot 3 - \frac{3^3}{3} - \left(25(-3) - \frac{(-3)^3}{3}\right)\right] = \pi[75 - 9 - (-75 + 9)] = \underline{\underline{132\pi}}$$

4 P.

V_2 = Volumen des Rotationskörpers, der durch die untere Kurve erzeugt wird.
V_2 = Zylinder mit Radius 4 und Höhe 6, also $V_2 = r^2 \cdot \pi \cdot h = 4^2 \cdot \pi \cdot 6 = 96\pi$ 2 P.

Oder mit dem Integral:

$$V_2 = \pi \int_{-3}^{3} \left(f(x)\right)^2 dx = \pi \int_{-3}^{3} 4^2\, dx = 2\pi \int_{0}^{3} 4^2\, dx = 2\pi(16x)_0^3 = 2\pi \cdot 48 = \underline{\underline{96\pi}}$$

Das Volumen des Rings ist
$V_1 - V_2 = \pi(132 - 96) = \underline{\underline{36\pi \approx 113{,}1}}$ 1 P.

Oder direkt:

$$V_1 - V_2 = \pi \int_{-3}^{3} 25 - x^2\, dx - \pi \int_{-3}^{3} 4^2\, dx = \pi \int_{-3}^{3} 25 - x^2 - 16\, dx = \pi \int_{-3}^{3} 9 - x^2\, dx =..= 36\pi$$