Formelsammlung ANLS

Ersteller:

Samuel Müller – 20.01.2020

HSLU – Rotkreuz

Dozent:

Josef Schuler

Themen:

Funktionen

Differentialrechnung

Integralrechnung

Contents

Generelles 4

Mathematische Zeichen 4

Zahlenmenge 5

Die reellen Zahlen als Baumdiagramm 5

Die reellen Zahlen als Zwiebeldiagramm 5

Darstellung auf der Zahlengerade 5

Funktionen 6

Allgemeine Funktionseigenschaften 6

Lineare Funktion 6

Steigung zweier senkrecht stehender Geraden 6

Quadratische Funktion (Parabel) 6

Polynom n-ten Grades 6

Scheitelpunkt (Spitze der Parabel, bsp. Maximaler Gewinn) 7

Nullstellen 7

Schnittpunkt mit der Y-Achse 7

Verschiebungen 7

Symmetrien (Gerade & Ungerade) 8

Umkehrbarkeit von Funktionen 9

Stetigkeit, Pole, hebbare Definitionslücken 9

Stetige/unstetige Funktion 9

Endliche Sprünge 9

Stetigkeit und Grenzwerte (Limes) 10

Pole 10

Hebbare Definitionslücke 10

Ganzrationale Funktionen (Polynomfunktion) 11

Polynom n-ten Grades, Grad, Koeffizient, y-Achsenschnittpkt., Nullstellen 11

Gebrochen-rationale Funktionen 11

Eigenschaften der gebrochen rationalen Funktonen 11

Potenz- und Wurzelfunktion 12

Verschiebungen 12

Exponentialfunktionen 12

Grunddefinition 12

Exponentielle Zunahme, Verdoppelungszeit 13

Exponentielle Abnahme, Halbwertszeit 13

Exponentielle Zunahme, ver-p-facht 13

Die «a hoch t/tau» Darstellung: $G(t) = G_0 \cdot a^{t/\tau} = b \cdot a^{t/\tau}$ 13

Logarithmusfunktionen 14

Anwendung in der Preistheorie(Gewinn/Kosten) 15

Schulden-/Guthabenzuhname..... 15

Formeln..... 15

Differentialrechnung 17

Grundlagen 17

Formel..... 17

Ableitungsregeln..... 17

Winkel der Tangente mit x-Achse im zusammenhang mit der Ableitung..... 18

1. , 2. , 3. Ableitung 18

Differenzierbarkeit(Ableitbarkeit) und Stetigkeit..... 18

Anwendung der Differentialrechnung..... 19

Tangentengleichung mit einem Punkt bestimmen 19

Linearisierung (1.Ableitung) einer Funktion 19

Quadratische Näherung/Approximation..... 19

Monotonie und Krümmung (konvex & konkav) 19

Kurvendiskussion (Maxima & Minima)..... 20

Newton Verfahren 21

Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen 22

Erstellen eines Polynoms (Polynom nicht bekannt) 23

Allgemeine Formeln/Hilfe..... 23

Aufgabenstellungen und Lösungstipps..... 24

Intergralrechnung..... 25

Unbestimmtes Integral..... 25

Begriffsbestimmung 25

Integrationsregeln 25

Bestimmtes Integral 27

Berechnung des bestimmten Integrals..... 27

Bestimmtes Integral und Flächeninhalt zw. Der x-Achse & der Funktionskurve 27

Integrationsregeln für bestimmte Integrale..... 28

Integrationsvariable ungleich «x» 28

Integrierbarkeit von Funktionen..... 28

Technik des Integrierens..... 29

Substitutionsmethoden 29

Logarithmische Integration 29

Partielle Integration (Bei Funktionen mit mehreren Faktoren, Multiplikation)..... 30

Facetten der Integralrechnung..... 31

Fläche zwischen Funktionskurve und x-Achse..... 31

Fläche zwischen zwei Kurven 31

Volumen eines Rotationskörpers (Rotation um x-Achse) 31
Taschenrechner bedienen 33

Generelles

Mathematische Zeichen

Zeichen	Bedeutung	Beispiel	
∈	„Ist Element von …"	-2 ∈ ℤ	
∉	„Ist nicht Element von …"	-2 ∉ ℕ	
∃	„Es existiert …"	∃ a, b, c ∈ ℕ so, dass $a^2 + b^2 = c^2$	
∄	„Es existiert nicht (keine) …"	∄ a, b ∈ ℝ so, dass |a + b| > |a| + |b|	
∀	„Für alle …"	∀ a ∈ ℝ gilt |a| ≥ 0	
\	„Ohne …"	ℝ\{0} heisst „die reellen Zahlen ohne die Null"	
|	„Für die gilt"	{x ∈ ℝ | x > 0} „x aus ℝ, für die gilt x > 0"	
| |	Betrag	|-4| = 4	
∑	Summe		
∏	Produkt		
!	Fakultät		
≈	„ungefähr"	1/3 ≈ 0,333	
≠	„nicht gleich"	1/3 ≠ 0,333	
≡	„äquivalent", „gleichwertig"	$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$	
∞	„unendlich"		
∨	oder, OR	A ∨ B (A oder B)	
⋀	und, AND	A ⋀ B (A und B)	
¬	nicht, NOT	¬A (nicht A)	
<	„kleiner"	3 < 4	
>	„grösser"	-5 > -6	
≤	„kleiner oder gleich"	3 ≤ 4; 3 ≤ 3	
≥	„grösser oder gleich"	-5 ≥ -6; -5 ≥ -5	
] [	„offenes Intervall"	]a; b[= { x | a < x ⋀ x < b } = { x | a < x < b }	Alle Zahlen zwischen a und b, exkl. a und b
[ ]	„abgeschlossenes Intervall"	[a; b] = { x | a ≤ x ⋀ x ≤ b } = { x | a ≤ x ≤ b }	Alle Zahlen zwischen a und b, inkl. a und b
[[	„links abgeschlossenes, rechts offenes Intervall"	[a; b[= { x | a ≤ x ⋀ x < b } = { x | a ≤ x < b }	Alle Zahlen zwischen a und b, inkl. a, exkl. b
]]	„links offenes, rechts abgeschlossenes Intervall"	]a; b] = { x | a < x ⋀ x ≤ b } = { x | a < x ≤ b }	Alle Zahlen zwischen a und b, exkl. a, inkl. b

Bemerkung:

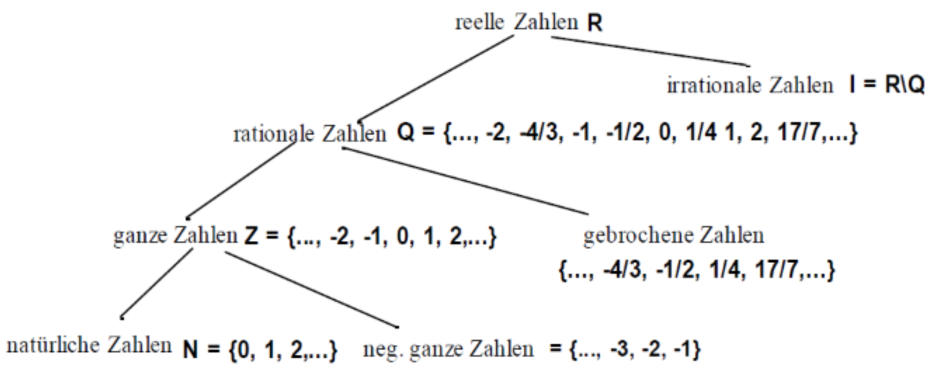
Falls die Grenzen der Intervalle -∞ oder ∞ sind, dann werden die offenen Intervalle gebraucht:

]-∞; b] [a; ∞[ ]-∞; ∞[

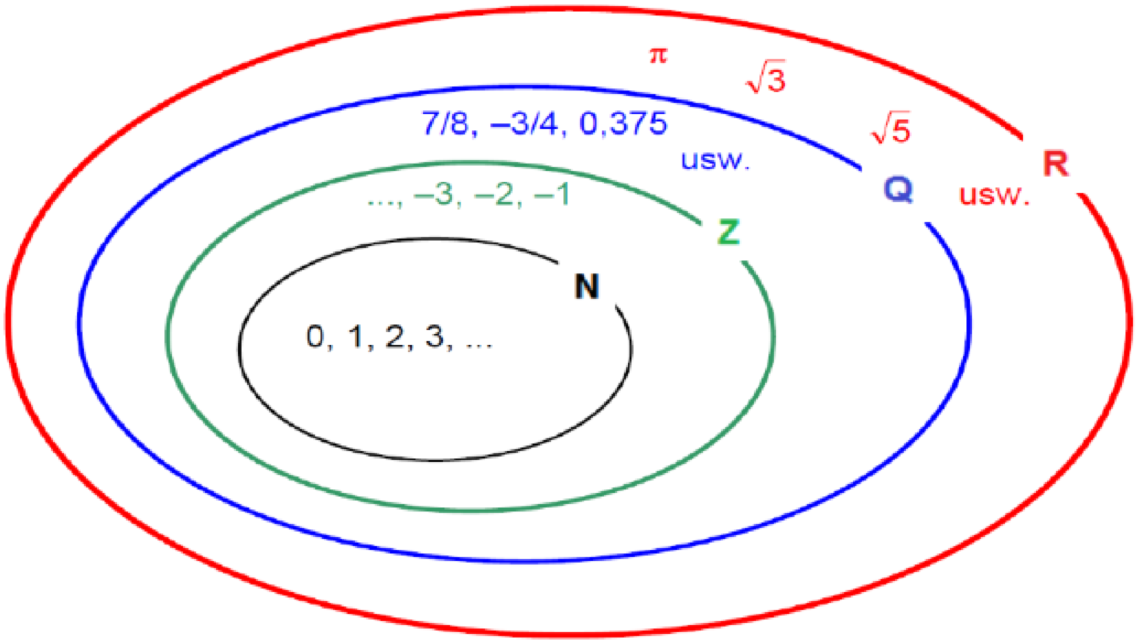
* Die Zahl Null wird aus der Zahlenmenge ausgeschlossen. N^* {1, 2, 3, …}
+ Es sind nur die positiven Zahlen und die Null zu nehmen. Z_+ {0, 1, 2, 3, …}
- Es sind nur die negativen Zahlen und die Null zu nehmen. Z_- {…, -3, -2, -1, 0}

Zahlenmenge

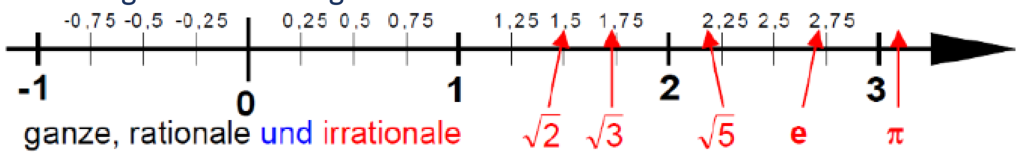
Die reellen Zahlen als Baumdiagramm



Die reellen Zahlen als Zwiebeldiagramm



Darstellung auf der Zahlengerade



Beispiele von rationalen (= „als Bruch darstellbare") Zahlen: $\frac{2}{3}$, $\frac{17}{6}$, $\frac{4}{1} = 4$, $\frac{3}{1} = 3$

Beispiele von Zahlen, die nicht rational sind: π, $\sqrt{2}$, usw.

Funktionen

Allgemeine Funktionseigenschaften

Lineare Funktion

Geradengleichung

y = ax + b

- a(m) = **Steigung** $(+/-\frac{\Delta y}{\Delta x})$ (+=geht nach oben; -=fällt nach unten)
- b = **y-Achsenschnittpunkt**
- **Punkte** auf im Koordinatensystem werden so angegeben: (x,y)

Zweipunkte-Geradengleichung

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

- erster Punkt = (x1;y1)
- zweiter Punkt = (x2;y1)
- nach y auflösen

Beispiel:

Gesucht ist die Gleichung der Geraden, die durch die Punkte P(2; 3) und Q(4; 8) geht.

Beide Punkte in die 2-Punkte-Form einsetzen und kreuzweise ausmultiplizieren.
Nach y auflösen.
Einsetzen in die 2-Punkte-Form: $\frac{8-3}{4-2}=\frac{y-3}{x-2}\ resp.\ \frac{5}{2}=\frac{y-3}{x-2}$
Mit kreuzweisem ausmultiplizieren folgt: $5\cdot(x-2)=2\cdot(y-3)$.
Nach y aufgelöst: y = 2,5x – 2

Punkt-Steigungs-Form

$$m=\frac{y-y_1}{x-x_1}$$

Beispiel:

Gesucht ist die Gleichung der Geraden, die durch den Punkt P(6; -2) geht und die Steigung m = -1/2 besitzt.
Einsetzen in die Punkt-Steigungs-Form: $-\frac{1}{2}=\frac{y-(-2)}{x-6}\ oder\ -\frac{1}{2}(x-6)=y+2$
Nach y aufgelöst: y = -0,5x + 1
Kontrolle: Natürlich muss der Punkt P die Gleichung erfüllen: P: -2=-1/2 · 6 + 1

Steigung zweier senkrecht stehender Geraden

Zwei Geraden g1 und g2 stehen genau dann senkrecht aufeinander, wenn das **Produkt** ihrer **Steigung** den **Wert -1** ergibt. Math. Form: g1 ⊥ g2 ⇔ m1 · m2 = -1 resp. g1 ⊥ g2 ⇔ m1 = -1/m2

Quadratische Funktion (Parabel)

$y = ax^2 + bx + c$

Mitternachtsformel:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Polynom n-ten Grades

Grad	Bezeichnung	allgemeine Schreibweise
0	konstant	a_0
1	linear	$a_1\cdot z+a_0$
2	quadratisch	$a_2\cdot z^2+a_1\cdot z+a_0$
3	kubisch	$a_3\cdot z^3+a_2\cdot z^2+a_1\cdot z+a_0$
4	quartisch	$a_4\cdot z^4+a_3\cdot z^3+a_2\cdot z^2+a_1\cdot z+a_0$
5	quintisch	$a_5\cdot z^5+a_4\cdot z^4+a_3\cdot z^3+a_2\cdot z^2+a_1\cdot z+a_0$

z kann durch **x** ersetzt werden und **a1, a2, a3** durch **a, b, c**, etc.
Eine Polynomfunktion 3-ten Grades lautet: $\mathbf{p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d}$

Scheitelpunkt (Spitze der Parabel, bsp. Maximaler Gewinn)

$y = f(x) = ax^2 + bx + c$

$S\left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ resp. $S\left(-\frac{b}{2a}; c-\frac{b^2}{4a}\right)$

- ➔ Beim Scheitelpunkt ist typischerweise ein **Maxima** oder ein **Minima** zu finden.

Nullstellen

Die **Nullstellen** einer Funktion y = f(x) sind diejenigen **Werte für xi**, **für die f(xi) = 0 gilt**. D.h. die **Nullstellen** einer Funktion y = f(x) sind die **Lösungen** der **Gleichung f(x) = 0**.

Beispiel:
Die Nullstellen der Funktion $y = f(x) = x^2 - 3x + 2$ sind die Lösungen der Gleichung $\boldsymbol{x^2 - 3x + 2 = 0}$. *Nullstellen:* $\boldsymbol{x_1 = 2}$ *und* $\boldsymbol{x_2 = 1}$

Schnittpunkt mit der Y-Achse

Der **Schnittpunkt** einer Funktion y = f(x) mit der y-Achse ist der Punkt **S(0; f(0))**.

Beispiel:
*Der **Schnittpunkt** der Funktion $y = f(x) = x^2 - 3x + 2$ mit der y-Achse ist der Punkt **S(0; 2)**.*

Verschiebungen

Graph $y = f(x) = ax^2 + c$

I) **c** > 0 Verschiebung der Parabel $y = ax^2$ **nach oben** um |c|-Einheiten
II) **c** < 0 Verschiebung der Parabel $y = ax^2$ **nach unten** um |c|-Einheiten

Eigenschaften:

1) DB und WB:	DB = $\mathbb{R}$ I) Für a > 0: WB = { $y \in \mathbb{R} \mid y \geq c$ } II) Für a < 0: WB = { $y \in \mathbb{R} \mid y \leq c$ }
2a) Nullstellen:	Lösungen der Gleichung $0 = ax^2 + c$
2b) Schnittpunkt mit x-Achse:	I) $\left(\sqrt{\frac{-c}{a}};\ 0\right)$ & $\left(-\sqrt{\frac{-c}{a}};\ 0\right)$, falls $\frac{-c}{a} \geq 0$ II) Keine Schnittpunkte, falls $\frac{-c}{a} < 0$
3) Schnittpunkt mit y-Achse:	$B(0;\ c)$
4) Scheitelpunkt:	$S(0;\ c)$
5) Spezielles:	Der Wechsel von a > 0 zu a < 0 entspricht einer Spiegelung an der Geraden y = c.

Graph $y = f(x) = a(x + d)^2$

I) **d** > 0 Verschiebung der Parabel $y = ax^2$ **nach links** um |d|-Einheiten
II) **d** < 0 Verschiebung der Parabel $y = ax^2$ **nach rechts** um |d|-Einheiten

Eigenschaften:

1) DB und WB:	DB = $\mathbb{R}$ I) Für a > 0: WB = $\mathbb{R}_+$ II) Für a < 0: WB = $\mathbb{R}_-$
2) Nullstelle:	x = -d
3) Schnittpunkt mit y-Achse:	$B(0;\ a \cdot d^2)$
4) Scheitelpunkt:	$S(-d; 0)$

Graph $y = f(x) = a(x + d)^2 + e$
Entsprechend den beiden vorhergehenden Graphen Verschiebung nach oben/unter und recht/links.

Eigenschaften:

1) DB und WB:	DB = $\mathbb{R}$ I) Für a > 0: WB = { y ∈ $\mathbb{R}$ | y ≥ e } II) Für a < 0: WB = { y ∈ $\mathbb{R}$ | y ≤ e }
2) Nullstelle:	Lösung(en) der Gleichung $0 = a(x + d)^2 + e$
3) Schnittpunkt mit y-Achse:	$B(0;\ a \cdot d^2 + e)$
4) Scheitelpunkt:	$S(-d; e)$

Symmetrien (Gerade & Ungerade)

Gerade (Achsensymmetrisch bez. der y-Achse)
Eine Funktion y = f(x) heisst **gerade**, wenn ∀ x ∈ DB auch -x im DB liegt und **f(x) = f(-x)** gilt.

Ungerade (Punktsymmetrisch bez. dem Nullpunkt)
Eine Funktion y = f(x) heisst **ungerade**, wenn ∀ x ∈ DB auch -x im DB liegt und **f(x) = -f(-x)** resp. **-f(x) = f(-x)** gilt.

Beispiele:

Um Symetrie zu testen, einfach eine Zahl für x einsetzen

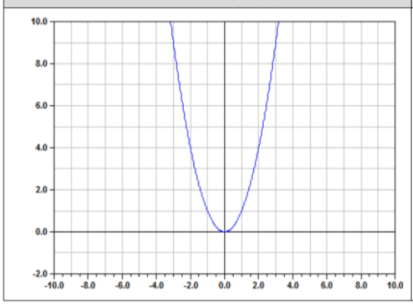
Bsp. $f(x) = x^2 \underset{x=2}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{l} f(x) = 2^2 = 4 \\ f(-x) = -2^2 = 4 \end{array}\right\} f(x) = f(-x)$, also gerade

Bsp. $f(x) = x^3 \underset{x=2}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{l} f(x) = 2^3 = 8 \\ f(-x) = -2^3 = -8 \end{array}\right\} f(x) = -f(-x)$, also unger.

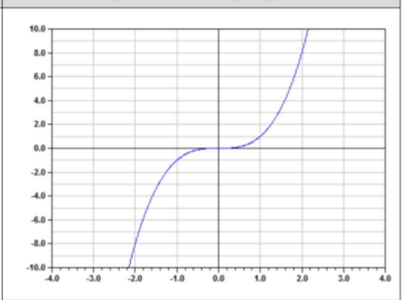
Gerade/Ungerade Potenz- & Exponentfunktionen
- Eine Potenzfunktion: **$f(x) = ax^n$**
  Ist für a ≠ 0 genau **dann** gerade, **wenn** der **Exponenten n gerade ist**, und genau **dann** ungerade, **wenn** der **Exponent n ungerade ist**.
- Eine Polynomfunktion: $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$
  Ist genau **dann** gerade, **wenn** alle ungeradzahligen Koeffizienten **a_1, a_2, a_5, . . .** gleich null sind, und genau dann ungerade, **wenn** alle geradzahligen Koeffizienten **a_0, a_2, a_4, . . .** gleich null sind.

Beispiel:

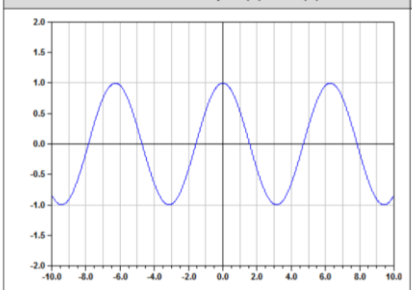
Gerade Funktion $y = f(x) = x^2$



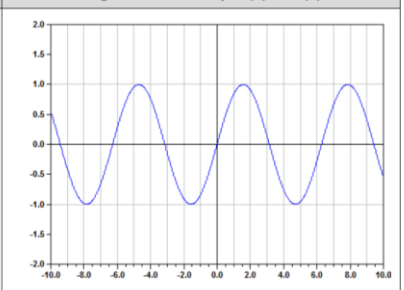
Ungerade Funktion $y = f(x) = x^3$



Gerade Funktion y = f(x) = cos(x)



Ungerade Funktion y = f(x) = sin(x)



Umkehrbarkeit von Funktionen

Allgemeiner Algorithmus zur Bestimmung der Umkehrfunktion:

1. x und y werden miteinander vertauscht
2. x = f(y) wird nach y aufgelöst

Die Schritte 1) und 2) können auch miteinander vertauscht werden.

Beispiel:
$y = f(x) = 2x + 3 \rightarrow y = 2x + 3$ wird zu $x = 2y + 3 \rightarrow y = \frac{1}{2}x - 1.5$

Bemerkung: Die Umkehrfunktion g(x) ist geometrisch gesehen eine Spiegelung der Ursprungsfunktion f(x) an der y = x Geraden. Wenn sich die Funktion und Umkehrfunktion schneiden, so schneiden sich diese zwei Kurven zwangsläufig auf dieser Geraden.

Wichtige Eigenschaften

Nur streng monotone Funktionen, resp. streng monotone Abschnitte von Funktionen können umgekehrt werden.

i) Die ganze lineare Funktion y = mx + b kann invertiert werden. Die inverse Funktion ist wiederum eine lineare Funktion.
ii) Von der quadratischen Funktion kann nur ein Parabelast invertiert werden. Die Umkehrfunktion ist eine Wurzelfunktion.
iii) Die Hyperbel kann im ganzen Definitionsbereich invertiert werden, die Umkehrfunktion ist wiederum eine Hyperbel. oder) (
iv) Sowohl die Logarithmusfunktion wie Exponentialfunktion können im ganzen Definitionsbereich invertiert werden. Die eine Funktion ist die Umkehrfunktion der anderen. ⇒ log
v) Die Trigonometrischen Funktionen können nur innerhalb eines kleinen Bereichs invertiert werden. (0/0) = cos (0/1)
vi) Das gilt für viele weiteren Funktionen, wie z.B. für Polynome oder gebrochen rationale Funktionen.

Definitions- und Wertebereich
Beim Umkehren wird der Definitionsbereich der ursprünglichen Funktion zum Wertebereich der invertierten Funktion, der Wertebereich der ursprünglichen Funktion wird zum Definitionsbereich der invertierten Funktion.

$\mathbb{D}$ = Was darf ich für x einsetzen. Typisch $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\mathbb{W}$ = Was sind die möglichen Werte von y. Typ. $\mathbb{W} = \mathbb{R} \geq \{2\}$

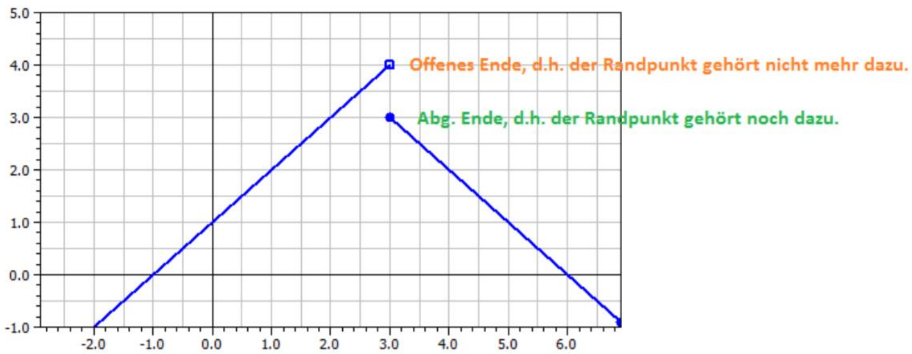
Stetigkeit, Pole, hebbare Definitionslücken

Stetige/unstetige Funktion

- Eine stetige Funktion kann man etwas salopp beschreiben, als eine Funktion, die ich ohne Absetzen des Stiftes zeichnen kann.
- Eine unstetige Funktion kann man eben nicht ohne Absetzen des Stiftes zeichnen.
- Dabei ist eine unstetige Funktion i.d.R. nur an wenigen Stellen unstetig, d.h. sie hat nur wenige Sprünge.
- In diesem Sinne kann man drei Typen von Unstetigkeitsstellen unterscheiden: Endliche Sprünge, Pole (also unendliche Sprünge) und hebbare Definitionslücken.

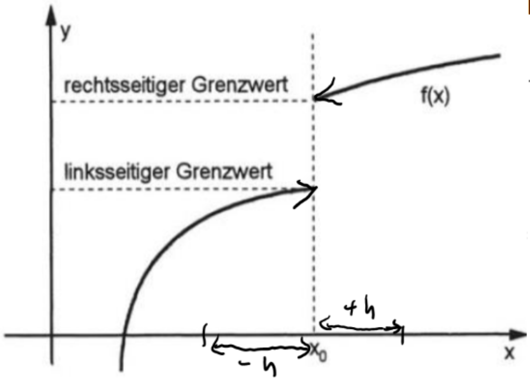
Endliche Sprünge

Wir betrachten die Funktion: $y = f(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ für } x < 3 \\ -x + 6 \text{ für } x \geq 3 \end{cases}$



Stetigkeit und Grenzwerte (Limes)

Der Grenzwert / Limes bzw. lim f(x_0 - h) = linksseitig oder lim f(x_0 + h) zeigt an wie nahe die Funktion von links, bzw. rechts an einen Punkt x_0 kommen kann. h ist ein Wert der immer kleiner wird und gegen 0 geht bis die Funktion also den Punkt x_0 berührt oder praktisch berührt.



Beispiele:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 \text{ für } x < 3 \\ -x+6 \text{ für } x \geq 3 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x+1 \text{ für } x \leq 3 \\ -x+6 \text{ für } x > 3 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} x+1 \text{ für } x < 3 \\ -x+7 \text{ für } x \geq 3 \end{cases} = \begin{cases} x+1 \text{ für } x \leq 3 \\ -x+7 \text{ für } x \geq 3 \end{cases}$$

$$i(x) = \begin{cases} x+1 \text{ für } x < 3 \\ -x+7 \text{ für } x > 3 \end{cases}$$

Bestimmen Sie im Beispiel 4.1 alle möglichen Grenzwerte der 4 versch. Funktion an der Stelle $x_0 = 3$ und – falls möglich – den Funktionswert. D.h. Füllen Sie die untenstehende Tabelle aus.

Funktion	$\lim_{h\to 0} f(x_0 - h)$	$\lim_{h\to 0} f(x_0 + h)$	$f(x_0)$
$y = f(x)$	4	3	3
$y = g(x)$	4	3	4
$y = h(x)$	4	4	4
$y = i(x)$	4	4	Nicht def.

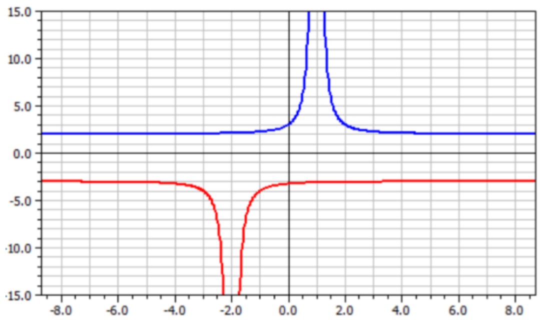
Pole

Pole oder **senkrechte Asymptoten** kommen bei Funktionen der Form $y = f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ (gebrochen rationale Funktionen) bei den **Nullstellen des Nenners** vor, also an den **Stellen**, **wo h(x) = 0 ist.** Umgekehrt gilt aber, dass es möglich sein kann, dass es bei einer Nullstelle des Nenners keinen Pol hat.

Asymptote: Eine Linie (Kurve, häufig als Gerade), der sich der Graph einer Funktion im Unendlichen immer weiter annähert.

Beispiel:

Gegeben sind die Funktionen $y = f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} + 2$ und $y = i(x) = -\frac{1}{(x+2)^2} - 3$



Funktion	$\lim_{h\to 0} f(x_0 - h)$	$\lim_{h\to 0} f(x_0 + h)$	$f(x_0)$
$y = f(x)$	∞	∞	Ex. nicht
$y = i(x)$	$-\infty$	$-\infty$	Ex. nicht

Man sieht sehr schön die senkrechten Asymptoten an den Stellen $\mathbf{x_0 = 1}$ resp. $\mathbf{x_0 = -2}$.

Hebbare Definitionslücke

Grundsätzlich gilt: „**Polynome** sind **überall stetig** und **gebrochene Funktionen** sind **bis auf die Nullstellen des Nenners stetig**“. Es gibt nun aber eine **Ausnahme**, denn wenn der **Zähler** eine **gleiche Nullstelle** hat **wie** der

Nenner, so kann man an dieser Stelle die Definitionslücke aufheben. Man spricht dann von einer „**hebbaren Definitionslücke**."

Beispiel:
Gegeben ist die Funktion: $y = f(x) = \frac{x^3-3x^2}{x-3}$ mit $DB = \mathbb{R}\backslash\{3\}$.

➔ $f(x) = \frac{x^3-3x^2}{x-3} = \frac{x^2\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}} = x^2$ → f(3) = 3^2 = **9** → Somit kann die Funktion an der Stelle x = 3 erweitert werden, insbesondere wird sie dadurch an der Stelle x = 3 stetig.

➔ Die erweiterte Funktion lautet: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-3x^2}{x-3} & \text{für } \mathbb{R}\backslash\{3\} \\ 9 & \text{für } x = 3 \end{cases}$

Ganzrationale Funktionen (Polynomfunktion)

Polynom n-ten Grades, Grad, Koeffizient, y-Achsenschnittpkt., Nullstellen

I) Funktionen der Form: $\mathbf{y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}$, mit $a_n \neq 0$ und $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$, heissen **Polynome n-ten Grades**.

II) Kurzschreibweise: y = f(x) = $\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k$

III) Die höchste Potenz heisst „**Grad**" des Polynoms.

IV) Die **Koeffizienten** $a_k \in \mathbb{R}$ sind beliebige, aber feste reelle Zahlen.

V) Das Polynom **schneidet** die **y-Achse** im Punkt P(0; f(0)) = P(**0**; a_0).

VI) Die **Nullstellen** sind die Lösungen der Gleichung $\mathbf{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0}$

Beispiel:
Es ist das Polynom y = f(x) = x3 + 2x2 − 13x + 10 gegeben.
I) & III) ist ein Polynom 3-ten Grades, da die höchste Potenz gleich 3 ist.
IV) Die Koeffizienten sind die folgenden konkreten Zahlen: $a_3 = 1$; $a_2 = 2$; $a_1 = -13$ und $a_0 = 10$
V) Schnittpunkt mit der y-Achse ist bei P(0; f(0)) = P(0; 10)
VI) Nullstellen: y = f(x) = $x^3 + 2x^2 - 13x + 10 = (x + 5) \cdot (x - 1) \cdot (x - 2)$ → $x_1 = -5$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$

Gebrochen-rationale Funktionen

Funktionen der Form: $y = f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ wobei g(x) und h(x) Polynome n-ten resp. m-ten Grades sind, heissen **gebrochen rationale Funktionen.**

Wichtig: n & m müssen nicht gleich sein:

$$\mathbf{g(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0}$$
$$\mathbf{h(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + b_{m-2} x^{m-2} + \dots + b_1 x + b_0}$$

Eigenschaften der gebrochen rationalen Funktonen

1)	**Definitionsbereich:**	DB = $\mathbb{R}\backslash$\{Nullstellen des Nenners\} Bsp. DB = $\mathbb{R}\backslash\{-2;2\}$
2)	**Nullstellen:**	Die Nullstellen der Funktion entsprechen zu 99% den Nullstellen des Zählers. Leider „nur" zu 99%, denn wenn einer der Nullstellen des Nenners auch im Zähler vorkommt, dann „kürzen" sie sich weg. $x_1 = 7$ & $x_2 = -3$
3)	**Senkrechte Asymptoten:**	Die senkrechten Asymptoten laufen zu 99% durch die Nullstellen des Nenners. $x = -2$ & $x = 2$ Leider „nur" zu 99%, denn wenn einer der Nullstellen des Nenners auch im Zähler vorkommt, dann wird diese aus dem Definitionsbereich zwar „verbannt", aber es geht keine senkrechte Asymptote durch diesen Wert. Man spricht in diesem Zusammenhang von einer „hebbaren Definitionslücke".
4)	**Verhalten für grosse |x|:**	**I) Waagrechte Asymptote (*):** Falls Grad des Zählers = Grad Nenner (n = m) Die Asymptote hat die Gleichung $y = \frac{a_n}{b_n}$ **II) x-Achse als Asymptote:** Falls Grad des Zählers < Grad Nenner (n < m) **III) schiefe Asymptote:** Falls Grad des Zählers um Eins grösser als Grad des Nenners ist. (n = m + 1) Die Gleichung der Asymptote wird mittels Polynomdivision ermittelt. **IV) keine Asymptote:** Falls n > m+ 1 (n > m + 1)
5)	**Schnittpunkt mit y-Achse:**	S(0; f(0)); resp. $S\left(0; \frac{a_0}{b_0}\right)$ $S = (0; 5.25)$

(*) Asymptote = eine Gerade, die sich an die Kurve anschmiegt.

Potenz- und Wurzelfunktion

Die **Wurzelfunktion ist** die **Umkehrfunktion** der **Quadratfunktion**. y = f(x) = **√(x)** = **a√(x + c)**

Verschiebungen

Graph y = f(x) = a√(x) + d, a > 0

I) **d** > 0 Verschiebung **nach oben** um |d|-Einheiten

II) **d** < 0 Verschiebung **nach unten** um |d|-Einheiten

Eigenschaften:

1) DB und WB:	DB = $\mathbb{R}_+$ = {x ∈ $\mathbb{R}$ | x ≥ 0} WB = {y ∈ $\mathbb{R}$ | y ≥ d}
2) Nullstelle:	Für d > 0: keine Nullstelle Für d ≤ 0: x = $(-d/a)^2$ = $(d/a)^2$
3) Schnittpunkt mit y-Achse:	$\mathrm{B}(0;\ \mathrm{d})$

Graph y = f(x) = a√(x + c), a > 0

I) **c** > 0 Verschiebung **nach links** um |c|-Einheiten

II) **c** < 0 Verschiebung **nach rechts** um |c|-Einheiten

Eigenschaften:

1) DB und WB:	DB = {x ∈ $\mathbb{R}$ | x ≥ −c} WB = $\mathbb{R}_+$ = {y ∈ $\mathbb{R}$ | y ≥ 0}
2) Nullstelle:	x = −c
3) Schnittpunkt mit y-Achse:	Für c ≥ 0: $\mathrm{B}\left(0;\ \sqrt{\mathrm{c}}\right)$ Für c < 0: keinen Schnittpunkt

Graph y = f(x) = a√(x + c) + d, a > 0

Entsprechend den beiden vorhergehenden Graphen Verschiebung nach oben/unter und recht/links.

Eigenschaften:

1) DB und WB:	DB = {x ∈ $\mathbb{R}$ | x ≥ −c} WB = {y ∈ $\mathbb{R}$ | y ≥ d}
2) Nullstelle:	Für d > 0: keine Nullstelle Für d ≤ 0: x = $(-d/a)^2 - c$ = $(d/a)^2 - c$
3) Schnittpunkt mit y-Achse:	Für c ≥ 0: $\mathrm{B}\left(0;\ \sqrt{\mathrm{c}} + \mathrm{d}\right)$ Für c < 0: keinen Schnittpunkt

Exponentialfunktionen

Grunddefinition

y = f(x) = a^x respektive **y = f(x) = b · a^x**

b = y-Achsenschnittpunkt

Eulerische Zahl

$\boldsymbol{f(x) = b \cdot \mathrm{e}^{x\ln(a)}}$ respektive $\boldsymbol{f(t) = b \cdot \mathrm{e}^{t\ln(a)}}$

Exponentielle Zunahme, Verdoppelungszeit

Eine **exponentielle Zunahme** werde mit der Exponentialfunktion **f(t) = b · a^t^ (a > 1)** beschrieben.

Die **Verdoppelungszeit** berechnet sich dann wie folgt: $\boldsymbol{T_v} = \boldsymbol{log_a 2} = \boldsymbol{\frac{lg\,2}{lg\,a}} = \boldsymbol{\frac{ln\,2}{ln\,a}}$

Beispiel:

Ein Prozess wird mit der Funktion $y = f(t) = 6 \cdot 1{,}017^t$ beschrieben.

a) Verdoppelungszeit: $T_V = \log_a 2 = \frac{\lg 2}{\lg 1{,}017} = 41{,}11$

b) Interpretation der Funktion: Die Funktion beschreibt eine **Zunahme** um **1,7% pro Zeiteinheit**. Am **Anfang** (zum Zeitpunkt 0) hat man **6 Elemente** (Franken, Bakterien usw.), **nach 41** Zeiteinheiten hat sich die **Anzahl verdoppelt**.

Exponentielle Abnahme, Halbwertszeit

Eine **exponentielle Abnahme** werde mit der Exponentialfunktion **f(t) = b · a^t^ (0 < a < 1)** beschrieben.

Die **Halbwertszeit** berechnet sich dann wie folgt: $\boldsymbol{T_H} = \boldsymbol{log_a 0.5} = \boldsymbol{\frac{lg\,0.5}{lg\,a}} = \boldsymbol{\frac{ln\,0.5}{ln\,a}} = \boldsymbol{\frac{-lg\,2}{lg\,a}} = \boldsymbol{\frac{-ln\,2}{ln\,a}}$

Beispiel:

Ein Prozess wird mit der Funktion $y = f(t) = 6 \cdot 0{,}945^t$ beschrieben.

a) Halbwertszeit: $T_H = \log_a 0{,}5 = \frac{\lg 0{,}5}{\lg 0{,}945} = 12{,}25$

b) Interpretation der Funktion: Die Funktion beschreibt eine **Abnahme um** 1-0,945 = 0,055 = **5,5%** pro Zeiteinheit. Am **Anfang** (zum Zeitpunkt 0) hat man **6 Elemente** (Franken, Bakterien usw.), **nach** ca. **12 Zeiteinheiten** hat sich die **Anzahl halbiert**.

Exponentielle Zunahme, ver-p-facht

Eine **exponentielle Zunahme/Abnahme** werde mit der Exponentialfunktion $f(t) = b \cdot a^t$ beschrieben.

Die Zeit, bis sich etwas „**ver- p- facht**" hat, berechnet sich dann wie folgt: $\boldsymbol{T_p} = \boldsymbol{log_a p} = \boldsymbol{\frac{lg\,p}{lg\,a}} = \boldsymbol{\frac{ln\,p}{ln\,a}}$

Beispiel:

Ein Prozess wird mit der Funktion $y = f(t) = 8 \cdot 1{,}09^t$ beschrieben.

a) Zeitpunkt Anfangsmenge verdreifacht: $T_3 = \log_a 3 = \frac{\lg 3}{\lg 1{,}09} = 12{,}74$ ***Resultat:*** Nach fast 13 Zeiteinheiten verdreifacht sich die Menge.
b) Zeitpunkt ¼ Anfangsmenge: $T_{1/4} = \log_a 0{,}25 = \frac{\lg 0{,}25}{\lg 1{,}09} = -16{,}09$ ***Resultat:*** Vor ca. 16 ZE war erst ¼ der Menge vorhanden.
c) Verdoppelungszeit: $T_2 = \log_a 2 = \frac{\lg 2}{\lg 1{,}09} = 8{,}04$ ***Resultat:*** Nach ca. 8 Zeiteinheiten verdoppelt sich Menge.
d) Halbwertszeit: $T_{1/2} = \log_a 0{,}5 = \frac{\lg 0{,}5}{\lg 1{,}09} = -8{,}04$ ***Resultat:*** Vor ca. 8 ZE war erst die halbe Menge vorhanden.
e) Interpretation der Funktion: Die Funktion beschreibt eine **Zunahme** um 9% pro Zeiteinheit. Am **Anfang** (zum Zeitpunkt 0) hat man **8 Elemente** (Franken, Bakterien usw.).

Die «a hoch t/tau» Darstellung: $G(t) = G_0 \cdot a^{t/\tau} = b \cdot a^{t/\tau}$

$G(t) = G_0 \cdot a^{t/\tau} = b \cdot a^{t/\tau}$ → G_0 = b = Anfangswert; a = a-fache von G_0; τ = Zeitkonstante in der das a-fache von G_0 erreicht wird.

Beispiel:

a) In **4** Zeiteinheiten wächst die Anfangsmenge **2** auf das **5**-fache → $G(t) = 2 \cdot 5^{\frac{t}{4}}$

b) In **2,5** Zeiteinheiten wächst die Anfangsmenge **3,4** auf das **1,8**-fache → $G(t) = 3.4 \cdot 1.8^{\frac{t}{2.5}}$

c) In **6,3** Zeiteinheiten schrumpft die Anfangsmenge **9,8** auf ein **1/10** → $G(t) = 9.8 \cdot 0.1^{\frac{t}{6.3}}$

d) In **18** Zeiteinheiten schrumpft die Anfangsmenge **12,5** auf **1%** → $G(t) = 12.5 \cdot 0.01^{\frac{t}{18}}$

e) In **18** Zeiteinheiten nimmt die Anfangsmenge **12,5** um **1%** ab → $G(t) = 12.5 \cdot 0.99^{\frac{t}{18}}$

Logarithmusfunktionen

Die Funktion der Form **$y = f(x) = \log_a(x)$** ($a \in \mathbb{R}_+^*\backslash\{1\} = \mathbb{R}_+\backslash\{0; 1\}$) heisst **Logarithmusfunktion zur Basis a**.

Regeln:

I) $\log_a(1) = 0$

II) $\log_a(x) = \frac{lg(x)}{lg(a)} = \frac{ln(x)}{ln(a)}$

Eigenschaften:

1) Definitionsbereich:	DB = $\mathbb{R}_+^*$ (nur positive Werte ohne 0) $= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
2) Wertebereich:	WB = $\mathbb{R}$ (es werden alle y-Werte angenommen)
3) Nullstelle:	Genau eine Nullstelle, für jedes a ist x = 1 die Nullstelle.
4) Symmetrie:	Keine Symmetrie, aber $\log_a(x)$ & $\log_{\frac{1}{a}}(x)$ gehen mit Spiegelung an der x-Achse ineinander über.
5) Schnittpunkt mit y-Achse:	Keine Schnittpunkte, da x = 0 nicht im DB kann f(0) nicht gebildet werden.
6) Monotonie:	Für a > 1 streng monoton steigend, und für 0 < a < 1 streng monoton fallend.
7) Asymptote:	y-Achse ist Asymptote
8) Umkehrfunktion:	• $h(x) = a^x$ ist Umkehrfunktion von $f(x) = \log_a(x)$ • $g(x) = e^x$ ist Umkehrfunktion von $f(x) = \ln(x)$ • $i(x) = 10^x$ ist Umkehrfunktion von $f(x) = \log_{10}(x) = \lg(x)$ • $k(x) = 2^x$ ist Umkehrfunktion von $f(x) = \log_2(x)$ → generell: 1. x & y vertauschen 2. auf y auflösen.

Anwendung in der Preistheorie(Gewinn/Kosten)

Schulden-/Guthabenzuhname

f(x) = b · a^t → **b** = Anfangswert(Guthaben, Kredit/Schulden) ; **a** = Zunahme in %(1+% d.h. 50% Z. = 1.5) **t** = Zeit

Formeln

GE = Geldeinheit; **ME** = Mengeneinheit; **x** = Menge/Stückzahl

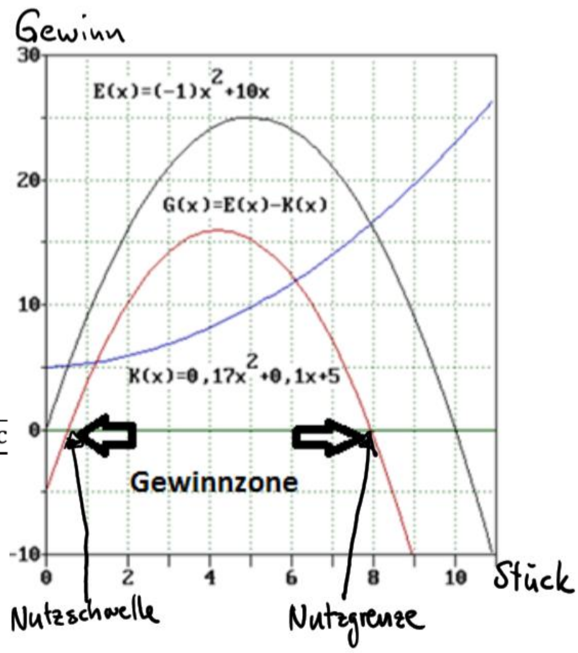
Funktion	Beschreibung in Prosa	Beschreibung in math. Form	Einheit
Erlösfunktion E(x) (Umsatzfunktion)	Erlös = Menge mal Stückpreis	$E(x) = x \cdot p(x)$ Falls der Preis p konstant ist, dann gilt: $p(x) = p$. Also: $E(x) = x \cdot p$	GE
Gewinnfunktion G(x)	Gewinn = Erlös - Kosten	$G(x) = E(x) - K(x)$	GE
Gewinn pro Menge		$g(x) = \frac{G(x)}{x} = \frac{E(x) - K(x)}{x}$	GE/ME
Kostenfunktion K(x)	Kosten = variable Kosten + fixe Kosten	$K(x) = K_v(x) + K_f$	GE
Bei quadratischer Kostenfunktion $K(x) = ax^2 + bx + c$ gilt:		$K_v(x) = ax^2 + bx$ $K_f = c$	
Variable Stückkosten $k_v(x)$	Kosten pro Mengeneinheit	$k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x}$	GE/ME
Bei quadratischer Kostenfunktion K(x) gilt:		$k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x} = \frac{ax^2 + bx}{x} = ax + b$	
Deckungsbeitrag D	Deckung = Erlös – variable Kosten	$D(x) = E(x) - K_v(x)$	GE
Durchschnittlicher Deckungsbeitrag d	Deckungsbeitrag pro Mengeneinheit	$d(x) = \frac{D(x)}{x} = \frac{E(x) - K_v(x)}{x}$	GE/ME
Nutzenschwelle, Gewinnschwelle (Break-even-Point)	Ab dieser Menge wird ein Gewinn erwirtschaftet	$G(x) = 0$ oder $E(x) = K(x)$ Erste Nullstelle der Gewinnfunktion.	ME
Nutzengrenze (Gewinnschwelle.)	Ab dieser Menge wird kein Gewinn mehr erwirtschaftet.	$G(x) = 0$ oder $E(x) = K(x)$ Zweite Nullstelle der Gewinnfunktion.	ME
Gewinnmaximale Menge	Menge bei der der Gewinn maximal wird.	x_{Gopt}	ME
Gewinnoptimale Menge bei quadratischer Gewinnfunktion (*):		x-Koordinate des Scheitelpunktes	ME
Maximaler Gewinn	Der höchstmögliche Gewinn.	$G_{max} = G(x_{Gopt})$	GE
Maximaler Gewinn bei quadratischer Gewinnfunktion (*):		y-Koordinate des Scheitelpunktes	GE
Erlösmaximal Menge	Menge bei der der Erlös maximal wird.	x_{Eopt}	ME
Erlösoptimale Menge bei quadratischer Erlösfunktion (*):		x-Koordinate des Scheitelpunktes	ME
Maximaler Erlös	Der höchstmögliche Erlös.	$E_{max} = E(x_{Eopt})$	GE
Maximaler Erlös bei quadratischer Erlösfunktion (*):		y-Koordinate des Scheitelpunktes	GE

Beispiel 1:

Ein Hersteller verkauft ein Gut zu einem Stückpreis von Fr 78.-. Bei der Herstellung ergeben sich Stückkosten von Fr 35.- und monatliche Fixkosten von Fr 980.-.

a) **Kostenfkt:** K(x)=35x + 980
b) **Erlösfkt:** E(x) = 78x
c) **Gewinnfkt:** G(x) = 78x –(35x +980) = 43x – 980)
d) **Variable Kosten/Stück:** k_v(x)= 35x/x = 35
e) **Deckungsbeitrag/Stück:** D(x) = (78x – 35x)/x = 43
f) **Break-even Point:** 0 = 78x -35x -980 → 22.8Stück/Monat
g) **Monatliche Gewinn > 1500:** G(x) = 1500 → 1500 = 78x – 35x – 980 → 57.6 Stück

Beispiel 2:
Berechnen Sie mittels Nullstellen- und Scheitelpunktberechnungen die genauen Werte.



Aufgaben:

a) Bestimmen Sie ($x_E$opt; E_{max})

b) Bestimmen Sie die Nutzenschwelle und –grenze sowie die Gewinnzone.

c) Bestimmen Sie (x_{Gopt}; G_{max})

Formeln:

I) Die Lösungsformel der quadr. Gl. $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$ lautet $X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

II) Die quadratische Funktion $\mathbf{y = f(x) = ax^2 + bx + c}$ besitzt den **Scheitelpunkt**

$$\mathbf{S}\left(-\frac{b}{2a};\frac{4ac-b^2}{4a}\right) \text{ resp. } \mathbf{S}\left(-\frac{b}{2a};c-\frac{b^2}{4a}\right)$$

Lösung:

a) Scheitelpunkt der Funktion E(x) ist S(5; 25). Somit ist die Erlösmaximale Menge 5 ME und der maximale Erlös 25 GE.

b) Es sind die Nullstellen von G(x) = E(x) - K(x) = -1.17 · x2 + 9.9 · x – 5 zu bestimmen: Also: Nutzenschwelle = 0,539 ME und Nutzengrenze = 7,922 ME. Die Gewinnzone lautet demnach]0,539; 7,922[

c) Der Scheitelpunkt der Funktion G(x) ist S(4,23; 15,94).

Somit beträgt die gewinnmaximale Menge 4,23 ME und der maximale Gewinn beträgt 15,94 GE.

Beispiel 3:
Über eine quadratische Gewinnfunktion ist Folgendes bekannt:

i) Die Nutzenschwelle beträgt 10 ME
ii) Die Nutzengrenze beträgt 90 ME
iii) Der maximale Gewinn beträgt 800 GE

Bestimmen Sie diese Gewinnfunktion und geben Sie sie in der Normalenform an.

Lösung:

Die Funktion hat die Form $G(x) = a(x-10)(x-90)$
Der maximale Gewinn beträgt 800 GE; er wird an der Stelle $x = \frac{10+90}{2} = 50$ erwirtschaftet, d.h. der Punkt (50; 800) ist ein Punkt der Gewinnfunktion:
Der Faktor a wird bestimmt durch Einsetzten von (50; 800),
also: $800 = a(50-10)(50-90) = a \cdot 40 \cdot (-40) \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$

Resultat: Die Gewinnfunktion lautet: $G(x) = -\frac{1}{2}(x-10)(x-90) = -\frac{1}{2}x^2 + 50x - 450$

Differentialrechnung

Grundlagen

Beim Differenzieren/Ableiten einer Funktion wird die Tangente an einem bestimmten Punkt der Funktion bestimmt und somit die Steigung dieses Punktes und somit der Tangente bestimmt. D.h. **erste Ableitung** der Funktion ist **gleich** der **Steigung** der Tangente **an einem bestimmten Punkt**.

Formel

Von einer Geraden ist die Steigung **m** und ein Punkt **P(x_0;y_0)** gegeben.

Gesucht ist die Geradengleichung **y = mx + b**.

Punkt-Steigungs-Formel: $m = \frac{y-y_0}{x-x_0}$

Steigung

➔ $f'(x_0) = \frac{y-y_0}{x-x_0} \Rightarrow y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \Rightarrow y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0$

Ableitungsregeln

1. **Potenzregel**: $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
2. **Konstantenregel:** $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$
3. **x^1-Regel:** $f(x) = x^1 = x \Rightarrow f'(x) = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1$
4. **x^0-Regel:** $f(x) = x^0 = 1 \Rightarrow f'(x) = 0 \cdot x^{0-1} = 0 \cdot x^{-1} = 0$
5. **x^x-Regel:** $f(x) = x^x \Rightarrow f'(x) = x^x \cdot (ln(x) + 1)$
6. **a^x-Regel:** $f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = ln(a) \cdot a^x$
7. **Faktorregel:** $f(x) = a \cdot g(x) \Rightarrow f'(x) = (a \cdot g(x))' = a \cdot g'(x)$
8. **Folgerung 1 aus Faktorregel:** $f(x) = a \cdot x^n \Rightarrow f(x) = anx^{n-1}$
9. **Folgerung 2 aus Faktorregel:** $f(x) = a \cdot x \Rightarrow f'(x) = a$
10. **Summenregel:** $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
11. **Produktregel:** $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
12. **Quotientenregel:** $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2} = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$
13. **Folgerung aus Quotientenregel:** $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{-g'(x)}{(g(x))^2}$
14. **Kettenregel:** $\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

    Immer aussen[$(x+2)^2$] · innen[x+2]

    aussen

    Bsp. $f(x) = (x+2)^2 \Rightarrow f'(x) = 2(x+2)^{2-1} \cdot 1 = (2x+4) \cdot 1 = 2x + 4$

    innen

15. **e^x-Regel:** $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

    Achtung: $f(x) = e^{ax} \Rightarrow f'(x) = e^{ax} \cdot a$ (Kettenregel)

16. **ln-Regel:** $f(x) = ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$
17. **Logarithmus-Regel 1:** $f(x) = log_a(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x\, ln(a)}$
18. **Logarithmus-Regel 2:** $f(x) = log_y(x) = \frac{(x)'}{(x) \cdot ln(y)} = \frac{1}{x \cdot ln(y)}$
19. **Logarithmus-Regel 3:** $f(x) = log_5(x+1) = \frac{(x+1)'}{(x+1) \cdot ln(5)} = \frac{1}{(x+1) \cdot ln(5)}$

→ **Generell:** Es wird immer nach der unabhängigen Variablen abgeleitet, egal wie sie heisst. Das heisst, Variablen welche nicht in der Klammer sind (x) sind die Konstanten.

Beispiel: t ist die Variable

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0$$

$$s'(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}a \cdot 2t + v_0 = at + v_0$$

$$s''(t) = \frac{d}{dt}(s'(t)) = a$$

$$s'''(t) = \frac{d}{dt}(s''(t)) = 0$$

Winkel der Tangente mit x-Achse im zusammenhang mit der Ableitung

Geradengleichung: y = mx + b

Steigung: $m = \frac{vertikale\ Differenz}{horizontale} = tan(\alpha)$

Der Winkel der Tangente zur x-Achse wäre dann der arctan(α). Oder **arctan(m)**

Beispiel:
Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = -x3 + 3x2 + 4$.
Bestimmen Sie den Winkel (in Grad) der Tangenten mit der x-Achse an der Stelle x = 0,5.

Lösung:
$$f'(x) = -3x^2 + 6x \Rightarrow f'(x = 0{,}5) = -3 \cdot 0{,}5^2 + 6 \cdot 0{,}5 = 2{,}25$$
$$\alpha = arctan(f'(0{,}5)) = arctan(2{,}25) = 66{,}04^0$$

1. , 2. , 3. Ableitung

Beispiele:

f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)
1) f(x) = a	f'(x) = 0	f''(x) = 0	f'''(x) = 0
2) f(x) = x^n	$f'(x) = nx^{n-1}$	$f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$	$f'''(x) = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$
3) f(x) = e^x	$f'(x) = e^x$	$f''(x) = e^x$	$f'''(x) = e^x$
4) f(x) = e^{ax}	$f'(x) = ae^{ax}$	$f''(x) = a^2e^{ax}$	$f'''(x) = a^3e^{ax}$
5) f(x) = ln(x)	f'(x) = 1/x	$f''(x) = -1/x^2$	$f'''(x) = 2/x^3$
6) f(x) = $\log_a(x)$	$f'(x) = \frac{1}{ln(a) \cdot x}$	$f''(x) = \frac{-1}{ln(a) \cdot x^2}$	$f'''(x) = \frac{2}{ln(a) \cdot x^3}$

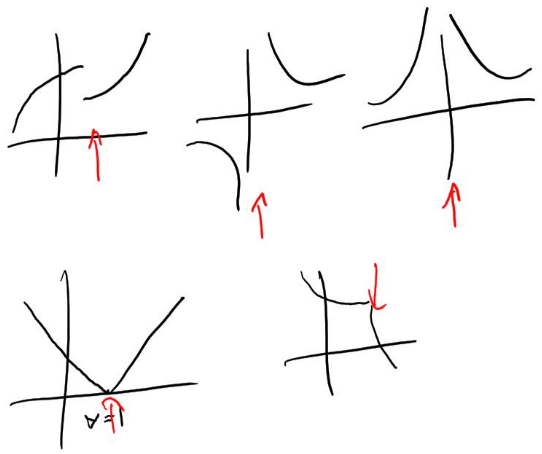
Differenzierbarkeit(Ableitbarkeit) und Stetigkeit

Gegeben die Funktion f(x). Die **Funktion** f(x) **ist an Sprüngen und Knicken nicht differenzierbar**.

Eine **differenzierbare** Funktion ist **auch stetig**.

Eine **stetige Funktion muss** aber **nicht differenzierbar sein**. Bsp. f(x) = |x|

Grafische Darstellung:



An diesen Stellen ist die Funktion nicht differenzierbar.

Wo **kein Definitionsbereich**, da ist sie **nicht differenzierbar**.

Anwendung der Differentialrechnung

Tangentengleichung mit einem Punkt bestimmen

Die Tangentengleichung im Punkt (x_0; y_0) der Kurve y = f(x) lautet

Tangentengleichung: $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0$

Zudem gilt: **Zwei Geraden** g1 und g2 stehen genau dann **senkrecht aufeinander**, wenn das **Produkt ihrer Steigungen** den **Wert -1** ergibt.

Normalengleichung: $m_1 = -\frac{1}{m_2}$

Normale: Senkrechte Gerade zur Tangente.

Linearisierung: Tangente

Linearisierung (1.Ableitung) einer Funktion

Die erste Ableitung einer Funktion kann verwendet werden, eine Funktion in einer gewissen Umgebung zu approximieren. Wir sprechen dann von der 1. Ableitung als lineare Approximation oder 1. Näherung in einer gewissen Umgebung eines Punktes.

Linearisierung = Tangente and Funktion

1. erste Ableitung bestimmen --> m
2. untenstehende Formel ausfüllen, wenn punkt (x;y) vorhanden, ansonsten:
   a. x in Funktion einsetzen und y bestimmen
   b. b bestimmen durch einsetzen von m, x und y in Geradengleichung: y = mx + b
   c. Dann b & m in Geradengleichung einsetzen.

Tangentengleichung: $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0$

Quadratische Näherung/Approximation

Mit der linearen Näherung hat man den Nachteil, dass die Krümmung nicht berücksichtigt wird. Die zweite Ableitung sagt etwas die Krümmung aus.

Quadratische Näherung:

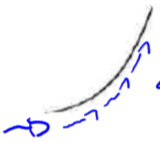
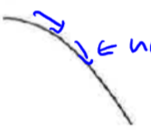
1. erste Ableitung bestimmen
2. zweite Ableitung bestimmen
3. untenstehende Formel ausfüllen

$$y = g(x) = \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

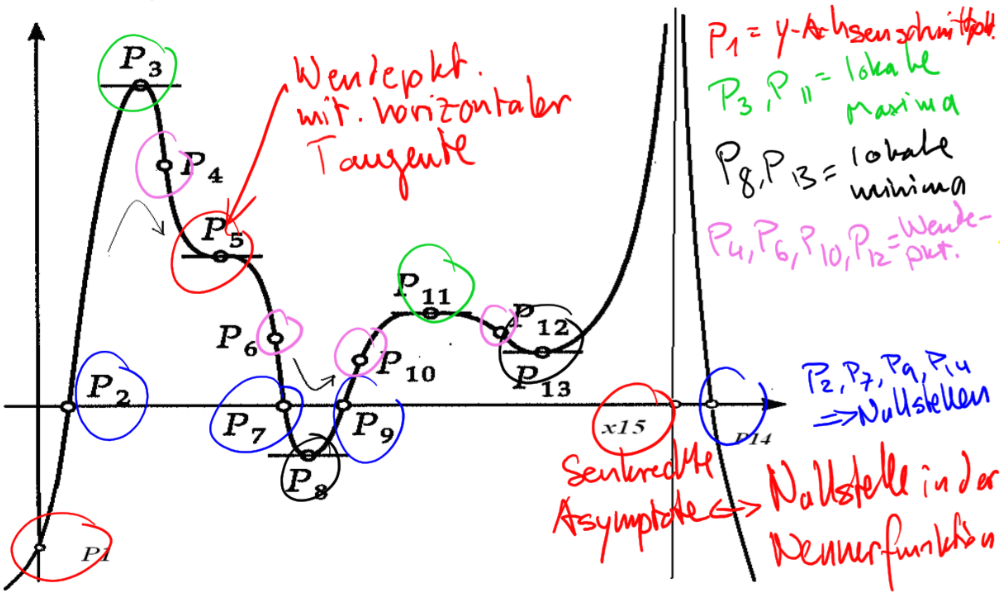
Monotonie und Krümmung (konvex & konkav)

Achtung:

Wenn eine **Ungleichung ('>' oder '<') mit** einer **negativen Zahl dividiert oder multipliziert** wird, so **ändert** sich **das Ungleichheitszeichen.** d.h. '<' wird zu '>' und '>' wird zu '<'.

	f'(x) > 0, d.h. f(x) ist monoton wachsend wenn positiv	**f'(x) < 0, d.h. f(x) ist monoton fallend** wenn negativ
f''(x) > 0, d.h. f(x) ist konvex = linksgekrümmt links	 nach links **f(x) wachsend und konvex**	 nach links **f(x) fallend und konvex**
f''(x) < 0, d.h. f(x) ist konkav = rechtsgekrümmt rechts	 nach rechts **f(x) wachsend und konkav**	 nach rechts **f(x) fallend und konkav**

Kurvendiskussion (Maxima & Minima)



Punkt	Eigenschaft	Mathematische Bedingung
P_3 & P_{11}	Lokales Maximum	• $f'(x_i) = 0$ • $f''(x_i) < 0$
P_8 & P_{13}	Lokales Minimum	• $f'(x_i) = 0$ • $f''(x_i) > 0$
P_4, P_6, P_{10} & P_{12}	Wendepunkte	• $f''(x_i) = 0$ • $f'''(x_i) \neq 0$
P_5	Terassenpunkt	• $f'(x_i) = 0$ • $f''(x_i) = 0$ • $f'''(x_i) \neq 0$

Lokale Extremwerte

Achtung:

Wenn eine **Ungleichung ('>' oder '<') mit** einer **negativen Zahl dividiert oder multipliziert** wird, so **ändert** sich **das Ungleichheitszeichen.** d.h. '<' wird zu '>' und '>' wird zu '<'.

Lokales Minimum:

- **Horizontale Tangente (1. Ableitung = Null) ← Nullstelle bestimmen**
- **auf x auflösen**
- **x in f(x) einsetzen und auf y auflösen**
- **erhaltener x & y Wert sind Koordinate des lokalen Minimum/Maximum (Scheitelpunkt)**
- **Linkskrümmung (2. Ableitung > Null) --> Minimum**

Lokales Maximum:

- **Horizontale Tangente (1. Ableitung = Null) ← Nullstelle bestimmen**
- **auf x auflösen**
- **x in f(x) einsetzen und auf y auflösen**
- **erhaltener x & y Wert sind Koordinate des lokalen Minimum/Maximum (Scheitelpunkt)**
- **Rechtskrümmung (2. Ableitung < Null) --> Maximum**

Zwei verschiedene Wendepunkte

Achtung:

Wenn eine **Ungleichung ('>' oder '<') mit** einer **negativen Zahl dividiert oder multipliziert** wird, so **ändert** sich **das Ungleichheitszeichen.** d.h. '<' wird zu '>' und '>' wird zu '<'.

Wendepunkt:

- **Ohne Krümmung (2. Ableitung = Null)**
- **3. Ableitung (x-Koordinate von Wendepunkte eingesetzt) != 0**

Terrassenpunkt:

- **Horizontale Tangente (1. Ableitung = Null) ← Nullstelle bestimmen**
- **Ohne Krümmung (2. Ableitung = Null)**
- **3. Ableitung (x-Koordinate von Terassenpunkt eingesetzt) != 0**

Newton Verfahren

Formel um **x-Achsenschnittpunkt (Nullstellen) einer Funktion** zu **bestimmen.**
Die Formel muss solange ausgeführt werden, bis zweimal das gleiche Resultat herauskommt.
Dabei gilt:
x_n = **Anfangswert** bzw. **Resultat vom letzten Ausführen** der Formel.
x_{n+1} = **Bezeichnung von x** (**erstes Mal** = x_1, da $x_n = x_0$ beim **ersten Mal**)

Nullstellenfunktion:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Beispiel: für $f(x) = x^3 + 2x - 5$

1. f'(x) bestimmen:
   $\mathbf{f'(x) = 3x^2 + 2}$
2. Startwert bestimmen für x_0:
   $\mathbf{x_0 = 2.5}$
3. Einsetzen in Formel von oben:
   $f(x_0) = 2.5^3 + 2*2.5 - 5 = \mathbf{15.625}$
   $f'(x_0) = 3*2.5^2 + 2 = \mathbf{20.75}$
   --> $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2.5 - \frac{15.625}{20.75} = \mathbf{1.747}$ ...
4. Resultat, also 1.747 als neuer Startwert nehmen und nochmals in Formel einfügen:
   $x_1 = 1.747$
   $f(x_1) = 1.747^3 + 2*1.747 - 5 = \mathbf{3.8258}$
   $f'(x_1) = 3*1.747^2 + 2 = \mathbf{11.156}$

   --> $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.747 - \frac{3.8258}{11.156} = \mathbf{1.404}$
5. usw. bis wir zweimal das gleiche Resultat bekommen.

Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen

Es müssen die folgenden Schritte ausgeführt werden: Je nach Aufgabenstellung. (Min/Max. Wert erwartet)

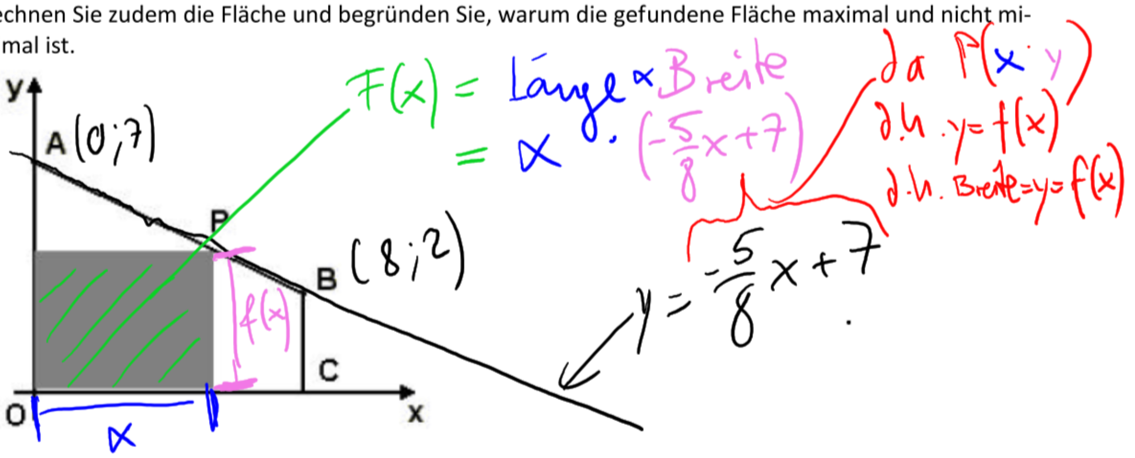
1. Bezeichnungen einführen
2. Die zu maximierende resp. minimierende Funktion F(x) herleiten.
3. F(x) ableiten, also F'(x) bilden, F'(x) = 0 setzen und auf x auflösen. Resultat: Nullstelle x_0.
4. Die 2-te Ableitung berechnen und x_0 einsetzen [also: F''(x_0) berechnen]. Für Maxima muss F''(x_0) < 0 und für Minima muss F''(x_0) > 0 sein.
5. Das Resultat erhält man durch Einsetzen von x_0 in die Funktion F(x) [also: F(x_0) berechnen].

→ Um lokales Min./Max. zu bestimmen. (Dort wo Tangentensteigung = 0 gerade)

→ um zu bestimmen ob maxima oder minima.

Beispiel:

Aus dem rechtwinkligen Trapez OABC soll ein möglichst grosses Rechteck so ausgeschnitten werden, dass P auf AB liegt (siehe Zeichnung). Berechnen Sie die Koordinaten von P aus A(0; 7) und B(8; 2). Berechnen Sie zudem die Fläche und begründen Sie, warum die gefundene Fläche maximal und nicht minimal ist.



Zweipunkte Geradengleichung

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

- erster Punkt = (x_1;y_1)
- zweiter Punkt = (x_2;y_2)
- nach y auflösen

Lösungsvariante 1: (Scheitelpunktberechnung)

1. Bestimmen der Geraden durch die Punkte A & B. Einsetzen der Pkte A(0; 7) & B(8; 2) in die 2-Punkte-Form:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\Rightarrow\frac{y-7}{x-0}=\frac{2-7}{8-0}\Leftrightarrow\frac{y-7}{x}=-\frac{5}{8}\Leftrightarrow y=-\frac{5}{8}x+7$$

2. Allgemeiner Flächeninhalt bestimmen. Angenommen Pkt. P hat die Koordinaten P(x;y), dann:

$$A(x)=x\cdot y=x\cdot\left(-\frac{5}{8}x+7\right)=-\frac{5}{8}x^2+7x$$

3. Bestimmen des Scheitelpunktes:

$$S=\left(-\frac{b}{2a};c-\frac{b^2}{4a}\right)=\left(-\frac{7}{-\frac{10}{8}};0-\frac{49}{-\frac{20}{8}}\right)=\left(\frac{56}{10};\frac{98}{5}\right)=(5{,}6/19{,}6)$$

4. Bestimmen der Koordinaten des Punktes P und bestimmen der Fläche.

$y=-\frac{5}{8}\cdot 5{,}6+7=3{,}5$ Also lautet die Fläche A=5.6 · 3.5 = 19.6 (was mit der y-Koordinate des Scheitelpunktes übereinstimmt.)

5. Resultat:

Die Koordinaten des Punktes P lauten P(5,6; 3,5), die Fläche beträgt 19,6 FE und die Fläche ist maximal, da die zugrunde gelegte quadratische Funktion nach unten geöffnet ist (a = -5/8 < 0), und der Scheitelpunkt somit ein Maximum beschreibt.

Lösungsvariante 2: (Differentialrechnung)

1. & 2. Diese Schritte bleiben gleich wie oben.

3. Erste Ableitung bestimmen und deren Nullstelle bestimmen.

$$A(x) = -\frac{5}{8}x^2 + 7x \Rightarrow A'(x) = -\frac{5}{8} \cdot 2x + 7 = -\frac{5}{4} \cdot x + 7$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{5}{4} \cdot x + 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{28}{5} = 5{,}6$$

4. Bestimmen der Koordinaten des Punktes P und bestimmen der Fläche.

$y = -\frac{5}{8} \cdot 5{,}6 + 7 = 3{,}5$ Also lautet die Fläche $A = 5{,}6 \cdot 3{,}5 = 19{,}6$

5. Verifikation, dass es sich um ein Maximum handelt.

$$A''(x) = -\frac{5}{4} \Rightarrow A''(x = 5{,}6) = -\frac{5}{4} < 0 \Rightarrow \text{rel. Max.}$$

6. Resultat:

Die Koordinaten des Punktes P lauten P(5,6; 3,5), die Fläche beträgt 19,6 FE, die Überprüfung, dass die Fläche maximal ist, wurde in Schritt 5 vollzogen.

Generell:

Parabel nach links oder rechts verschieben	$f(x) = (x-d)^2$
Parabel nach oben oder unten verschieben	$f(x) = x^2 + c$
Parabel strecken oder stauchen	$f(x) = ax^2$
Punktprobe	Liegt P auf G_f?
y-Achsenabschnitt berechnen	$x = 0$
Nullstellen berechnen	$y = 0$
Funktionsgleichung bestimmen	$f(x) = \ldots$
Quadratische Ergänzung	$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2$
Scheitelpunktform berechnen	$f(x) = a(x-d)^2 + e$
Scheitelpunkt berechnen	$S(x_s \mid y_s)$
Faktorisierte Form	$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$

Erstellen eines Polynoms (Polynom nicht bekannt)

Je nach Aufgabenstellung kennt man die Funktionsgleichung, das Polynom, nicht. Man hat lediglich ein paar Angaben dazu. Wichtig hierbei ist es alle bekannten Gleichungen aufzustellen, damit man am Ende ein Polynom erstellen kann.

Allgemeine Formeln/Hilfe

Polynom n-ten Grades

Grad	Bezeichnung	allgemeine Schreibweise
0	konstant	a_0
1	linear	$a_1 \cdot z + a_0$
2	quadratisch	$a_2 \cdot z^2 + a_1 \cdot z + a_0$
3	kubisch	$a_3 \cdot z^3 + a_2 \cdot z^2 + a_1 \cdot z + a_0$
4	quartisch	$a_4 \cdot z^4 + a_3 \cdot z^3 + a_2 \cdot z^2 + a_1 \cdot z + a_0$
5	quintisch	$a_5 \cdot z^5 + a_4 \cdot z^4 + a_3 \cdot z^3 + a_2 \cdot z^2 + a_1 \cdot z + a_0$

z kann durch **x** ersetzt werden und **a1, a2, a3** durch **a, b, c**, etc.

Eine Polynomfunktion 3-ten Grades lautet: **p(x) = ax³ + bx² + cx + d**

Gerade/Ungerade

- Eine Potenzfunktion: **$f(x) = ax^n$**
  Ist für $a \neq 0$ genau **dann** gerade, **wenn** der **Exponenten n gerade ist**, und genau **dann** **ungerade, wenn** der **Exponent n ungerade ist**.
- Eine Polynomfunktion: $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$
  Ist genau **dann** gerade, **wenn** alle **ungeradzahligen Koeffizienten a_1, a_3, a_5, . . . gleich null** sind, und genau dann **ungerade, wenn** alle **geradzahligen Koeffizienten a_0, a_2, a_4, . . . gleich null** sind.
- Eine Funktion $y = f(x)$ heisst **gerade**, wenn $\forall$ x $\in$ DB auch -x im DB liegt und **$f(x) = f(-x)$** gilt.
- Eine Funktion $y = f(x)$ heisst **ungerade**, wenn $\forall$ x $\in$ DB auch -x im DB liegt und **$f(x) = -f(-x)$** resp. **$-f(x) = f(-x)$** gilt.

Relative Extreme (Maxima/Minima/Terassenpunkt/Wendepunkt)

Punkt	Eigenschaft	Mathematische Bedingung
P_3 & P_{11}	Lokales Maximum	• $f'(x_i) = 0$ • $f''(x_i) < 0$
P_8 & P_{13}	Lokales Minimum	• $f'(x_i) = 0$ • $f''(x_i) > 0$
P_4, P_6, P_{10} & P_{12}	Wendepunkte	• $f''(x_i) = 0$ • $f'''(x_i) \neq 0$
P_5	Terassenpunkt	• $f'(x_i) = 0$ • $f''(x_i) = 0$ • $f'''(x_i) \neq 0$

y-Achsenschnittpunkt

Bedeutet Konstante des Polynoms. Bsp. y-Achsenschn.pkt.=11, bei Polynom 3. Grades: d = 11 (eine Gleichung)

x-Achsenschnittpunk

Bedeutet Nullstellen des Polynoms. $p(x)=0$

Aufgabenstellungen und Lösungstipps

1. An welcher Stelle $x > 0$ unterscheiden sich die Funktionswerte von $f(x)=x^3+1$ & $g(x)=x^2$ am wenigsten?
   a. Es ist das Minimum der Funktion $d(x)=f(x)-g(x)=x^3+1-x^2$ zu bestimmen.
2. Bei Gleichungen mit mehreren Unbekannten.
   a. Zuerst die Gleichung mit den wenigsten Unbekannten auf eine Unbekannte auflösen.
   b. Dieses Unbekannte danach mit dem Lösungswert in die Gleichung mit den zweitwenigsten Unbekannten einsetzen, usw.

Intergralrechnung

Unbestimmtes Integral

Begriffsbestimmung

Die schreibweise ist wie folgt: $F(x) = \int f(x)\, dx$

Gesprochen ist das: "F von x ist gleich dem Integral über f von x de x"

Begriffe:

- **Integrand:** Die zu integrierende Funktion f(x) (Funktion die unter dem Integral steht.
- **Integrationsvariable:** Variable x
- **Unbestimmtes Integral:** $\int f(x)\, dx$ (da es keine eindeutige Funktion ist)
- **Stammfunktion:** $F(x) + c$
- **Integrationskonstante:** c

Es gilt: Das Resultat einer Integration der Form $\int f(x)dx$ ist **nur bis auf** eine **Konstante eindeutig**, d.h. $\int f(x)dx = F(x) + c, c \in R$

Wobei **F(x) + c keine einzelne Funktion, sondern** eine **Funktionenschar ist.**

Zusammengefasst: Differentiation und Integration heben sich - je nach Reihenfolge - auf oder bis auf eine Konstante auf. Wenn man **zuerst differenziert** und dann **integriert erhält** man **bis auf** eine **Konstante die ursprüngliche Funktion**. Wenn **zuerst integriert** und **dann differenziert**, **erhält man** die **ursprüngliche Funktion**.

Integrationsregeln

Generell: Immer zuerst als Potenz schreiben und dann Integral rechnen

Bsp.:

b) $\int \frac{1}{x^3}\, dx = \int x^{-3}\, dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + c = -\frac{x^{-2}}{2} + c = \underline{\underline{-\frac{1}{2x^2} + c}}$

c) $\int \sqrt[4]{x^3}\, dx = \int x^{\frac{3}{4}} dx = \frac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1} + c = \frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} + c = \underline{\underline{\frac{4}{7} \cdot x^{\frac{7}{4}} + c}}$

Potenzfunktion

I) $\int x^k\, dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + c$ für $k \in \mathbb{R}$ und $k \neq -1$

II) $\int x^k\, dx = \int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + c$ für $k = -1$

$III) \int dx = \int 1\, dx = x + c$

$IV) \int a\, dx = ax + c$

Exponentialfunktion

I. $\int e^x\, dx = e^x + c$

II. $\int e^{ax+b}\, dx = \frac{1}{a} \cdot e^{ax+b} + c$

III. $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ für $a \in \mathbb{R}_+^*$ und $a \neq 1$

Logarithmusfunktion

I. $\int \ln x \, dx = x \cdot \ln x - x + c \quad \text{für } x \in \mathbb{R}_+^*$

II. $\int \ln(ax+b)\, dx = \frac{1}{a}[(ax+b)\cdot\ln(ax+b) - (ax+b)] + c$

III. $\int \log_a x \, dx = \frac{1}{\ln a}(x \cdot \ln x - x) + c \quad \text{für } x \in \mathbb{R}_+^*$

Faktorregel

Ein konstanter Faktor kann vor das Integralzeichen genommen werden.

Mathematisch: $\int a \cdot f(x)\, dx = a \cdot \int f(x)\, dx$

Summenregel

Das Integral aus einer Summe von Funktionen ist gleich der Summe der Integrale der einzelnen Funktionen.

Mathematisch: $\int f(x) \pm g(x)\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$

Produkteregel (ACHTUNG)

Achtung!! $\int f(x) \cdot g(x)\, dx \neq \int f(x)\, dx \cdot \int g(x)\, dx$

Bei **Produkt** einfach **beide Funktionen multiplizieren** und **dann** den **Intergral berechnen**.

$$\int f(x) \cdot g(x)\, dx = \int x^3 \cdot x^4 dx = \int x^7 \, dx = \frac{x^8}{8} + c$$

Einige Beispiele:

$$\int \frac{4-x}{x} \mathrm{d}x = \int \frac{4}{x} - \int \frac{x}{x} = \int 4 \cdot \frac{1}{x} - \int 1 = 4\, ln(|x|) - x + \mathrm{c}$$

$$\int 4x^{-2} + \frac{1}{x^3} = 4 \cdot \int \frac{x^{-1}}{-1} + \int x^{-3} = 4 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{4}{x} - \frac{1}{2x^2} + C = -\frac{8x+1}{2x^2} + C$$

$$\int \sqrt{x} - 5dx = x^{1/2} - 5x^0 = \frac{x^{3/2}}{3\,/\,2} - \frac{5 \cdot x}{1} = \frac{2}{3} x^{3/2} - 5x + c$$

$$\int e^x - 4^x dx = e^x - \frac{4^x}{ln(4)} + c$$

$\int ln\, 4 \cdot 2^x \, dx = ln\, 4 \cdot \int 2^x \, dx = ln\, 4 \cdot \frac{2^x}{ln\, 2} + C$ (Ln ist die Konstante)

Bestimmtes Integral

- Die **Differentiation dient** uns zum **Bestimmen** der **Monotonie**, **Tangenten**, **Extremwerte**, **Wendepunkte** usw**.** von Funktionen.
- Die **Integration dient** uns sehr **oft zur Bestimmung** von **Flächen**, **Schwerpunkten**, **Kurvenlängen**, **Rotationsvolumen**, **Mantelflächen**, **Oberflächen**, **Trägheitsmomente**, **physikalischer Arbeit** usw.

Berechnung des bestimmten Integrals

Formel: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Wobei F die Stammfunktion von f(x) ist und **F(a)** und **F(b) die** in diese **Stammfunktion eingesetzten Werte** bedeuten. Die **Integrationskonstante c** muss **nicht berücksichtigt** werden.

Kochrezept:

- Bestimmen der Stammfunktion F(x)
- Bilden der zwei eingesetzten Werte F(a) und F(b)
- Die Differenz F(b) - F(a) ergibt das gesuchte bestimmte Integral.

Beispiel 1: $\int_1^5 \frac{1}{5}x^2\,dx = \frac{1}{5}\int_1^5 x^2\,dx = \frac{1}{5}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_1^5 = \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{5^3}{3}-\frac{1^3}{3}\right) = \frac{1}{5}\cdot\frac{124}{3} = \frac{124}{15} = 8,2667$

Beispiel 2: $\int_0^6 -x^2+6x\,dx = \frac{-x^3}{3}+3x^2\Big|_0^6 = \frac{-6^3}{3}+3\cdot 6^2 - 0 = -72+108 = 36$

Beispiel 3: $\int_3^6 -x^2+6x\,dx = \frac{-x^3}{3}+3x^2\Big|_3^6 = \frac{-6^3}{3}+3\cdot 6^2 - \left(\frac{-3^3}{3}+3\cdot 3^2\right) = 36-18 = 18$

Bestimmtes Integral und Flächeninhalt zw. Der x-Achse & der Funktionskurve

Kochrezept:

- Berechnen der Nullstellen von f(x).
- Die Integrale einzeln rechnen.
- Die gesamte Fläche ergibt sich aus der Addition der Beträge der einzelnen bestimmten Integrale.

Betrag: Ist der positive Wert der Lösung.

Sprich für **-2** wäre es **2**.

Integrationsregeln für bestimmte Integrale

Regel 1:	Faktorregel: $\int_a^b c\cdot f(x)\,dx = c\cdot\int_a^b f(x)\,dx$
Regel 2:	Additionsregel: $\int_a^b f(x)\pm g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$
Regel 3:	Vertauschungsregel: $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
Regel 4:	$\int_a^a f(x)\,dx = 0$
Regel 5:	Zerlegungsregel: *Für $a < c < b$ gilt:* $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$
Regel 6:	Vergleichsregel Sind die beiden Funktionen f(x) und g(x) im Intervall $a \le x \le b$ stetig und gilt in diesem Intervall immer $g(x) \le f(x)$, dann ist $\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx$

Integrationsvariable ungleich «x»

Nach welchem Symbol integriert wird entscheidet allein die Variable hinter dem "d".

Beispiel 11a): Berechnen Sie nun $\int_{-1}^{2} a+z^2\,dz$

Lösung: Der Parameter a wird wie eine konstante Zahl behandelt.

$$\int_{-1}^{2} a+z^2\,dz = \left[a\cdot z+\tfrac{z^3}{3}\right]_{-1}^{2} = (2a+\tfrac{8}{3})-(-a+\tfrac{-1}{3}) = 3a+3$$

Integrierbarkeit von Funktionen

Ungleich den Funktionen sind **Sprünge und Knicke kein Problem beim Integrieren**.

1. **Differenzierbar** => **integrierbar** (immer)
2. **Nicht integrierbar**, **wenn Integritätsintervall gegen +/- unendlich geht**! (Besitzt eine **Polstelle** resp. ist **unbeschränkt**)

Technik des Integrierens

Wenn die zu **integrierende Funktion** nur schon ein wenig **von** der **Grundfunktion abweicht**, **müssen wir** eine **Integrationstechnik anwenden**.

Substitutionsmethoden

Lineare Substitution unbestimmte Integrale

Schritte	Ausführung
0) Zu berechnendes Integral	$\int (6x-1)^7 dx$
1) Substitution	$z = 6x - 1$ ← Term durch z ersetzen
2) Berechnung von z'(x)	$z'(x) = \frac{dz}{dx} = 6$ (Ableitung von 6x + 1 = **6**)
3) Auflösen nach dx	$dx = \frac{dz}{6} = \frac{1}{6} \cdot dz$
4) Integral neu schreiben	$\int \frac{1}{6} z^7 dz = \frac{1}{6} \int z^7 dz$
5) Integral berechnen	$\frac{1}{6} \int z^7 dz = \frac{1}{6} \cdot \frac{z^8}{8} + c = \frac{1}{48} z^8 + c$
6) Zurücksubstituieren	$\frac{1}{48} z^8 + c = \frac{1}{48}(6x-1)^8 + c$
7) Probe	$(\frac{1}{48}(6x-1)^8 + c)' = \frac{1}{48}(6x-1)^7 \cdot 8 \cdot 6 = (6x-1)^7$

Kettenregel:
äussere x innerer Ableitung

Logarithmische Integration

Falls die Substitution z von der Form $z = \frac{1}{g(x)}$ ist, oder gleichbedeutend, wenn der Integrand die Form $\frac{g'(x)}{g(x)}$ hat, ergibt sich für die Lösung eine allgemeine Formel.

Formel: $\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln|g(x)| + c$

Allgemeine Regeln:

- $\int (ax+b)^n \, dx = \frac{1}{a \cdot (n+1)} (ax+b)^{n+1} + c$
- $\int \sqrt{ax+b} \, dx = \frac{2}{3a} (ax+b)^{\frac{3}{2}} + c$
- $\int e^{ax+b} \, dx = \frac{1}{a} \cdot e^{ax+b} + c$
- $\int \frac{c}{ax+b} \, dx = \frac{c}{a} \ln(ax+b) + c$
- $\int \ln(ax+b) dx = \frac{1}{a} [(ax+b) \cdot \ln(ax+b) - (ax+b)] + c$
- $\int \cos(ax+b) \, dx = \frac{1}{a} \cdot \sin(ax+b) + c$

Lineare Substitution bestimmte Integrale

Schritte	Ausführung
0) Zu berechnendes Integral	$\int_1^2 (6x-1)^7\,dx$
1) Substitution	z = 6x - 1
2) Berechnung von z'(x)	$z'(z) = \frac{dx}{dz} = 6$
3) Auflösen nach dx	$dx = \frac{dz}{6} = \frac{1}{6} \cdot dz$
4) Integral neu schreiben	$\int \frac{1}{6} z^7\,dz = \frac{1}{6} \int z^7 dz$
5) Integral berechnen	$\frac{1}{6} \int z^7 dz = \frac{1}{6} \cdot \frac{z^8}{8} + c = \frac{1}{48} z^8 + c$
6.1) Grenzen substituieren	$x = 1 \Rightarrow z = 5$; $x = 2 \Rightarrow z = 11$; da z = 6x - 1
6.2) Die Grenzen einsetzen	$\frac{1}{48} \cdot z^8 \Big\vert_5^{11} = \frac{1}{48} \cdot 11^8 - \frac{1}{48} \cdot 5^8 = 4'457'672$

Partielle Integration (Bei Funktionen mit mehreren Faktoren, Multiplikation)

Wird angewendet, wenn wir das Integral aus einem Produkt berechnen müssen.

Formel: $\int f(x) \cdot g'(x)\,dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\,dx$

Kochrezept:

Beispiel für Integral: $I = \int x \cdot e^x\,dx$

Schritte	Ausführung
1) Festlegen von f(x) und g'(x)	$f(x) = x$ $g'(x) = e^x$
2) Berechnen von f'(x) und g(x)	$f'(x) = 1$ $g(x) = \int e^x\,dx = e^x$
3) Einsetzen	$I = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x dx$
4) Fertig rechnen	$I = x \cdot e^x - e^x + C$
5) Kontrolle	$(x \cdot e^x - e^x)' = e^x + x \cdot e^x - e^x = x \cdot e^x$ ✓

Bestimmtes Integral

Einfach Grenzen in die Lösung von oben eingeben.

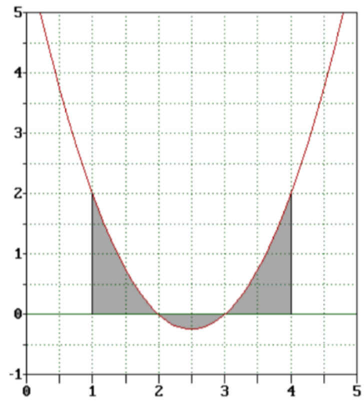
$$I = \int_0^1 x \cdot e^x\,dx = (x \cdot e^x - e^x) \Big\vert_0^1 = (1 \cdot e^1 - e^1) - (0 \cdot e^0 - e^0) = 1$$

Facetten der Integralrechnung

Das Berechnen eines **bestimmten Integrals** ist **nur dann gleich** der zu **bestimmenden Fläche**, **wenn**:

1. Funktion nur **positive y-Werte** hat (ansonsten mit Betrag rechnen)
2. Die zu bestimmende Fläche zwischen Funktionskurve und x-Achse liegt.

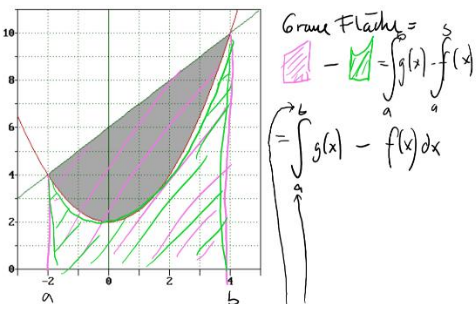
Fläche zwischen Funktionskurve und x-Achse



1. Bestimmen der Nullstellen
   a. f(x) = 0 --> x_1,x_2
2. Stammfunktion bestimmen
   a. Integral von f(x)
3. Die einzelnen Integrale bestimmen
   a. I_1= Integral von Anfang Bereich bis x_1 (bez. x_1 - Anfang Bereich)
   b. I_2= Integral von x_1 bis x_2 (bez. x_2 - x_1)
   c. I_3= Integral von x_2 bis Ende Bereich (bez. Ende Bereich - x_2)
4. Bestimmen der Fläche durch Addition der Beträge
   a. Resultat von I_1-I_3 positiv machen und zusammenzählen

Fläche zwischen zwei Kurven

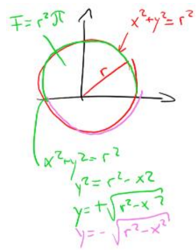
Generell muss die Fläche zwischen der einen Funktion und der x-Achse minus die Fläche der zweiten Funktion und der x-Achse gerechnet werden.



1. Bestimmen der x-Koordinaten der Schnittpunkte der beiden Funktionen
   a. f(x) = g(x) --> x_1,x_2 --> Anfang- und Endbereich (a,b)
2. Fläche A bestimmen
   a. Bestimmtes Integral a bis b von f(x) --> Fläche A
3. Fläche B bestimmen
   a. Bestimmtes Integral a bis b von g(x) --> Fläche B
4. Flächen subtrahieren um gewünschte Fläche zu bekommen
   a. A - B resp. B - A, sodass Resultat positiv wird.

Volumen eines Rotationskörpers (Rotation um x-Achse)

Generell gilt:



Fläche eines Kreises: $r^2 \cdot \pi$

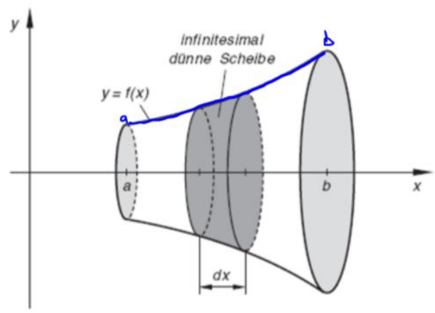
Volumen einer Kugel: $\frac{4}{3}r^3 \cdot \pi$

Volumen Kegel: $\frac{1}{3} \cdot G\mathrm{h} = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot \mathrm{h}$

Funktion Halbkreis: $y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$

Formel Volumen Rotationskörper um x-Achse

Formel: $V_x = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx$



Für f(x) einfach Funktion für die Gerade a→b einsetzen.

Beispiel:

Wir berechnen nun das Volumen des Rotationskörpers des Halbkreises mit Radius 3, der um die x-Achse rotiert, also das Volumen einer Kugel mit Radius 3.
Formel der Funktion für ein Halbkreis: $y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$

$$V_{Kugel} = \pi \cdot \int_{-3}^{3} \left[\sqrt{3^2 - x^2}\,\right]^2 dx = \pi \cdot \int_{-3}^{3} 3^2 - x^2 dx = \pi \cdot \left(9x - \tfrac{x^3}{3}\right)\Big|_{-3}^{3} =$$

$$= \pi \cdot \left[\left(9 \cdot 3 - \tfrac{3^3}{3}\right) - \left(9 \cdot (-3) - \tfrac{(-3)^3}{3}\right)\right] = \pi \cdot [(27-9) - (-27+9)] = (54-18)\pi = 36\pi$$

Formel Volumen Rotationskörper um y-Achse

Formel: $V_y = \pi \cdot \int_c^d [g(y)]^2 dy$

WICHTIG:

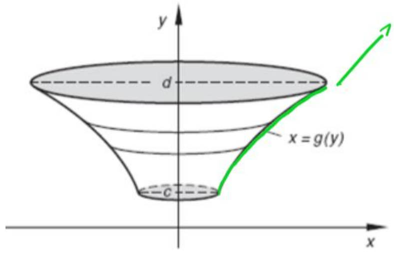
Zuerst muss die Funktion y = f(x) auf x = g(y) umgewandelt werden. Also Funktion auf x auflösen.

Bsp.:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \Rightarrow y^2 = r^2 - x^2 \Rightarrow x^2 = r^2 - y^2 \Rightarrow x = g(y) = \sqrt{r^2 - y^2}$$

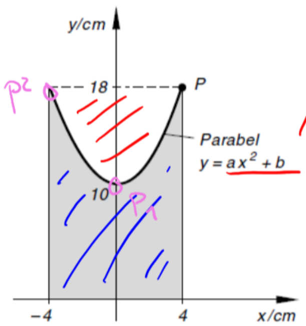
Kochrezept:

1. Grenzen berechnen, also a und b
2. x = g(y) bestimmen (Umrechnen)
3. Integral rechnen



Beispiel:

a) Welchen Rauminhalt gibt es, wenn die untenstehende Parabel um die y-Achse rotiert wird?
b) Welchen Rauminhalt besitzt der Körper, der durch Drehung der grau schraffierten Fläche um die y-Achse entsteht?



y=f(x) in x=g(y) umwandeln

V = G·h → – Resultat von a = Resultat von b

18 bzw. 10 müssen nicht gegeben sein. Dann errechnen

$P_1 = f(-4)$ $P_2 = f(0)$

<u>Lösung</u>

Zunächst bestimmen wir die Gleichung der Parabel. Da der Scheitelpunkt auf der y-Achse liegt, lautet die Grundgleichung: $y = f(x) = ax^2 + c$

Der Scheitelpunkt lautet (0; 10), damit folgt c = 10, also: $y = f(x) = ax^2 + 10$.

Der Parameter a wird ermittelt durch einsetzen eines weiteren bekannten Punktes, z.B. (4; 18)

Also: $18 = a \cdot 4^2 + 10 \Rightarrow 16a = 8 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

somit lautet die Parabelgleichung: $y = f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 10$

a) Somit ist nun $x = g(y)$, resp. $x^2 = [g(y)]^2$ zu rechnen.

$$y = f(x) = \tfrac{1}{2}x^2 + 10 \Rightarrow x^2 = 2(y - 10) = 2y - 20 = [g(y)]^2$$

$$V_{Paraboloid} = \pi \cdot \int_{10}^{18} [g(y)]^2 dy = \pi \cdot \int_{10}^{18} 2y - 20\, dy = \pi[y^2 - 20y]\Big|_{10}^{18} = \ldots = 64\pi$$

b) Das gesuchte Rotationsvolumen V berechnet sich mit:

$$V = V_{Zylinder} - V_{Paraboloid} = r^2\pi \cdot h - \pi \cdot \int_{10}^{18} [g(y)]^2 dy = 4^2\pi \cdot 18 - \pi \cdot \int_{10}^{18} [g(y)]^2 dy$$

Also: $V = V_{Zylinder} - V_{Paraboloid} = 288\pi - 64\pi = 224\pi \approx 703,73\ cm^3$

Taschenrechner bedienen

1. Resultat speichern:
   a. SHIFT + RCL(STO) + (Eine der Tasten mit den Roten Buchstaben)
2. Gespeichertes Resultat abrufen:
   a. ALPHA + (Eine der Tasten mit den Roten Buchstaben)
      → **WICHTIG:** **nicht Enter drücken** sondern einfach Rechnung weiterfahren.
      Also bsp. ALPHA + A + 17 + = → Das würde das Resultat anzeigen.
3. Gespeicherte Resultate löschen:
   a. SHIFT + MODE(CLR) + 1 + = → oder Rechner aus- und einschalten.
4. «ANS» ist das Resultat der letzten Rechnung.
5.