Lucerne University of
Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE
LUZERN
Informatik
FH Zentralschweiz

Modul BA_DMATH
Zwischentest FS 2020

Prof. Dr. Josef F. Bürgler

Studierende(r):			
Anzahl Punkte:			

Dienstag, 14. April 2020

Wichtige Hinweise (README):

- Bitte legen Sie sämtliche elektronischen Geräte (wie iPod(s), Mobile(s), etc.) ausser ein Taschenrechner (siehe unten) und die HSLU-Card oben rechts auf den Tisch.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Taschenrechner (z.B. TI nSpire CX, CAS), Vorlesungsunterlagen, Lehrbuch von Kenneth Rosen, eine eigene und zwei gekaufte Formelsammlung(en) und die im Rahmen des Unterrichts gelösten Aufgaben.
- Alle Aufgaben zusammen mit dem **vollständigen Lösungsweg** (inkl. allfälliger CAS-Kommandos) darstellen. Numerische Resultate auf 4 Stellen genau angeben. Skizzen sind qualitativ richtig zu erstellen. **Verwenden Sie** zur Verbesserung der Übersicht **Farben**!
- Lesen Sie die Fragen genau durch. Da während der Prüfung keine Fragen beantwortet werden, müssen Sie bei Unklarheiten eine Annahme treffen und diese vor der Lösung notieren.
- **Falls der für die Lösung vorgesehene, karierte Platz nicht ausreicht, verwenden Sie bitte pro Aufgabe ein oder mehrere Zusatzblätter, die Sie an der jeweiligen Stelle in den Prüfungsbogen legen.**
- **Bewertung:** Jede vollständig und richtig gelöste Aufgabe gibt fünf Punkte. Teilweise richtig gelöste Aufgaben ergeben Teilpunkte. Für die Bewertung werden die vier Aufgaben mit der höchsten Punktzahl berücksichtigt.
- **Für die Zwischenprüfung sollen nur die ersten drei Aufgaben gelöst werden. Die restlichen zwei Aufgaben betreffen Stoff, der ab 20. April behandelt wird!**

1 Logik und big-$\mathcal{O}$ Notation

Diese Aufgabe besteht aus zwei, voneinander unabhängigen Teilaufgaben.

1. Teil (3 Punkte)

(a) Zeigen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstabelle, dass

$$(p \vee q) \wedge (r \vee p) \wedge [(q \wedge r) \to p] \equiv p$$

gilt. Ergänzen Sie dazu die nachfolgende Tabelle (0.5 Punkte):

p	q	r	$q \wedge r$	A $p \vee q$	B $r \vee p$	C $(q \wedge r) \to p$	$A \wedge B \wedge C$
T	T	T					
T	T	F					
T	F	T					
T	F	F					
F	T	T					
F	T	F					
F	F	T					

(b) Zeigen Sie dasselbe auch durch Anwenden der Rechenregeln (logische Äquivalenzen) **ohne Verwendung der Inferenzregeln** (2.5 Punkte).

2. Teil (2 Punkte)

Geben Sie **detailliert und Schritt für Schritt** eine möglichst gute big-$\mathcal{O}$ Abschätzung für die Funktion

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ n \mapsto f(n) = (n! + 3^n)\left(n^3 + n\log(n^2+1)\right).$$

Aus der Herleitung muss ersichtlich sein, wie Sie zu den Zeugen k und C kommen.

Lösung 1. Teil (3 Punkte)

Mit der Wahrheitstabelle:

p	q	r	$q \wedge r$	A $p \vee q$	B $r \vee p$	C $(q \wedge r) \to p$	$A \wedge B \wedge C$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	F	F
F	T	F	F	T	F	T	F
F	F	T	F	F	T	T	F
F	F	F	F	F	F	T	F

Hier steht T für wahr und F für falsch. Für alle Belegungen von p, q und r liefert die rechte Seite $A \wedge B \wedge C$ die gleichen Wahrheitswerte wie p. Somit sind die beiden Ausdrücke äquivalent.

Auf analytischem Wege erhält wegen

$$(p \vee q) \wedge (r \vee p) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \ \equiv \ p \vee (q \wedge r)$$

und

$$(q \wedge r) \to p \equiv \neg (q \wedge r) \vee p \ \equiv \ p \vee \neg (q \wedge r)$$

nacheinander:

$$\begin{aligned}
(p \vee q) \wedge (r \vee p) \wedge [(q \wedge r) \to p] &\equiv [p \vee (q \wedge r)] \wedge [p \vee \neg (q \wedge r)] \\
&\equiv [p \vee s] \wedge [p \vee \neg s] \\
&\equiv p \vee (s \wedge \neg s) \\
&\equiv p \vee F \\
&\equiv p
\end{aligned}$$

wobei wir kurzfristing $s = q \wedge r$ gesetzt haben.

Lösung 2. Teil (2 Punkte)

Man hat nacheinander

$$
\begin{aligned}
|f(n)| &= (n! + 3^n)\left(n^3 + n\log(n^2+1)\right) && \text{für } n > 0,\\
&\le (n^n + 3^n)\left(n^3 + n\log(n^2+1)\right) && \text{da } n! < n^n \text{ für } n > 1,\\
&\le 2n^n\left(n^3 + n\log(n^2+1)\right) && \text{da } 3^n < n^n \text{ für } n > 3,\\
&\le 2n^n\left(n^3 + n\log(n^3)\right) && \text{da } n^2+1 < n^3 \text{ für } n > 2,\\
&\le 2n^n\left(n^3 + 3n^2\right) && \text{da } \log(n) < n \text{ für } n > 0,\\
&\le 4n^n n^3 && \text{da } 3n^2 < n^3 \text{ für } n > 3,\\
&\le 4n^{n+3}.
\end{aligned}
$$

Zusammengefasst hat man

$$|f(n)| \le 4n^{n+3} \qquad \text{für } n > 3.$$

Somit ist $f(n) \in \mathcal{O}\left(n^{n+3}\right)$ mit den Zeugen $k = 3$ und $C = 4$.

2 Kombinatorik und (fortgeschrittenes) Zählen

Diese Aufgabe besteht aus zwei, voneinander unabhängigen Teilaufgaben. Die Lösung zu den Aufgaben kann Fakultäten, Binomialkoeffizienten oder Potenzen enthalten. Lassen Sie diese Ausdrücke unbedingt stehen, denn es muss klar sein, wie Sie zu den jeweiligen Resultaten gekommen sind!

1. Teil (2.5 Punkte)

Bei einer Hochzeit will der Fotograph mit der Braut, dem Bräutigam und 4 weiteren Personen ein Foto machen. Auf wie viele Arten kann der Fotograph diese 6 Personen nebeneinander, d.h. in einer Reihe anordnen, falls

(a) Braut und Bräutigam nebeneinander stehen (1 Punkt),

(b) Braut und Bräutigam nicht nebeneinander stehen (1 Punkt),

(c) die Braut irgendwo links vom Bräutigam steht (0.5 Punkte).

2. Teil (2.5 Punkte)

Ein echter Zufalls-Bitgenerator erzeugt mit der selben Wahrscheinlichkeit eine Null oder eine Eins. Mit diesem Zufalls-Bitgenerator werden nun Bitstrings erzeugt, die mit 0, 1, 2, 3, allgemein k Nullen beginnen und mit einer Eins enden. Die erzeugten Bitstrings sind also `1`, `01`, `001`, `0001`, `00001` und so weiter.

Berechnen Sie die erwartete Länge (Erwartungswert der Länge) dieser Bitstrings. Wählen Sie die Zufallsvariablen und berechnen Sie deren Erwartungwert.

Lösung 1. Teil (2.5 Punkte)

(a) Stehen Braut und Bräutigam nebeneinander, können sie an 5 Stellen stehen: jeweils auf drei Arten zwischen den verbleibenden vier Personen oder ganz aussen links oder rechts. Braut und Bräutigam können den Platz wechseln was nochmals zwei Möglichkeiten ergibt und die vier Personen können auf $4!$ Arten angeordnet werden. Dies ergibt

$$5 \cdot 2 \cdot 4! = 240$$

mögliche Anordnungen.

(b) Insgesamt kann man die sechs Personen auf $6! = 720$ Arten anordnen. Davon gibt es 240 bei denen Braut und Bräutigam nebeneinander stehen und

$$6! - 5 \cdot 2 \cdot 4! = 720 - 240 = 480$$

Anordnungen, bei denen Braut und Bräutigam nicht neben einander stehen.

(c) In der Hälfte der $6!$ Fälle steht die Braut links vom Bräutigam und in der anderen Hälfte rechts vom Bräutigam (vertausche Braut und Bräutigam!). Somit ist die gesucht Anzahl Möglichkeiten

$$\frac{1}{2}6! = 360.$$

Lösung 2. Teil (2.5 Punkte)

Für die Wahrscheinlichkeiten der Bitstrings findet man

$$\begin{aligned}
P(\mathtt{1}) &= \frac{1}{2} \\
P(\mathtt{01}) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\
P(\mathtt{001}) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 \\
P(\mathtt{0001}) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} &= \left(\frac{1}{2}\right)^4
\end{aligned}$$

Als Zufallsvariable X wählen wir die Länge k des Bitstrings und erhalten für den Erwartungswert

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P(k)$$

wobei wir für $P(k)$ die Wahrscheinlichkeit für einen Bitstring der Länge k setzen welcher mit $k-1$ Nullen beginnt und mit einer 1 endet, d.h.

$$P(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k .$$

Dann hat man nacheinander

$$E(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^k \; = \; \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \left(\frac{1}{2}\right)^k \; = \; \frac{1}{2} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} \; = \; 2.$$

3 Wahrscheinlichkeitsrechnung

Diese Aufgabe besteht aus drei, voneinander unabhängigen Teilaufgaben.

1. Teil (0.5 Punkte)

Wenn Sie mit einem fairen "*Zwölfer-Würfel*" (siehe Abbildung) würfeln, erhalten Sie eine Zahl zwischen 1 und 12 und zwar jede mit der gleichen Wahrscheinlichkeit.
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zahl gewürfelt wird, d.h. oben aufliegt, die mindestens einmal die Ziffer Eins (1) enthält?

2. Teil (2 Punkte)

In einer Urne hat es 4 gelbe, 3 weisse, 2 schwarze und eine rote Kugel. Beim Ziehen einer Kugel kommt folgende Gewinn/Verlusttabelle zum Einsatz. Bei "*Gewinn*" erhalten Sie diesen Betrag, bei "*Verlust*" müssen Sie diesen Betrag bezahlen.

Farbe der Kugel	**Gewinn ($+$) resp. Verlust ($-$) in CHF**
Gelb	-50.00
Weiss	-40.00
Schwarz	+60.00
Rot	+100.00

(a) Sei X die Zufallsvariable, die den Gewinn/Verlust beim **zufälligen Ziehen einer Kugel** beschreibt. Bestimmen Sie den erwarteten Gewinn/Verlust pro Ziehen einer Kugel, wenn Sie sehr oft spielen würden (1 Punkt).

(b) Berechnen Sie $E(X^2)$ direkt oder mit dem Wissen, dass $\mathrm{Var}(X) = 3'100$ beträgt (1 Punkt).

3. Teil (2.5 Punkte)

Die Produktion von Motherboards läuft über drei parallele Fertigungsstrassen. Die fertigen Motherboards werden im Lager gesammelt. Für die drei Fertigungsstrassen gelten die folgende Werte:

Strasse 1**:** 1000 Motherboards pro Stunde von denen $80\,\%$ einwandfrei sind.

Strasse 2**:** 600 Motherboards pro Stunde von denen $85\,\%$ einwandfrei sind.

Strasse 3**:** 400 Motherboards pro Stunde von denen $65\,\%$ einwandfrei sind.

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein im Lager zufällig ausgewähltes Motherboard einwandfrei ist (1.5 Punkte).

(b) Ein gewähltes Motherboard sei nun einwandfrei. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Motherboard von der ersten Fertigungsstrasse stammt? Konnten Sie die Aufgabe (a) nicht lösen, so dürfen Sie annehmen, dass in der Aufgabe (a) der Wert $75\,\%$ erhalten wurde (1 Punkt).

Lösung 1. Teil (0.5 Punkte)

Für das Ereignis $A = \{1,\ 10,\ 11,\ 12\}$ gilt wegen Laplace (Gleichwahrscheinlichkeit):

$$p(A) = \frac{\text{Anzahl günstige Fälle}}{\text{Anzahl mögliche Fälle}} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

Lösung 2. Teil (2 Punkte)

Man hat

(a) Der erwartete Gewinn/Verlust pro Ziehen beträgt:

$$E(X) = -0.4 \cdot 50 - 0.3 \cdot 40 + 0.2 \cdot 60 + 0.1 \cdot 100 \ = \ -20 - 12 + 12 + 10 \ = \ -10$$

Somit erwarten wir im Schnitt pro Ziehen einen Verlust von 10 CHF.

(b) Die Varianz von X kann wie folgt berechnet werden:

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Daraus folgt

$$E(X^2) = \mathrm{Var}(X) + (E(X))^2 \ = \ 3'100 + (-10)^2 \ = \ 3'100 + 100 \ = \ 3'200.$$

Alternativ hätte man auch so rechnen können:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 0.4 \cdot (-50)^2 + 0.3 \cdot (-40)^2 + 0.2 \cdot 60^2 + 0.1 \cdot 100^2 \\ &= 1'000 + 480 + 720 + 1'000 \ = \ 3'200. \end{aligned}$$

Lösung 3. Teil (2.5 Punkte)

Wir verwenden folgende Ereignisse:

S_i: das Motherboard wurde auf Fertigungsstrasse i produziert, $i = 1, 2, 3$

E: das Motherboard ist einwandfrei

Dann hat man

(a)

$$\begin{aligned} p(S_1) &= \frac{1'000}{1'000 + 600 + 400} = \frac{1'000}{2'000} = \frac{1}{2} = 0.5 \\ p(S_2) &= \frac{600}{2'000} = \frac{3}{10} = 0.3 \\ p(S_3) &= \frac{400}{2'000} = \frac{2}{10} = 0.2 \end{aligned}$$

Nach dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit hat man somit:

$$\begin{aligned} p(E) &= p(E|S_1)p(S_1) + p(E|S_2)p(S_2) + p(E|S_3)p(S_3) \\ &= 0.8 \cdot 0.5 + 0.85 \cdot 0.3 + 0.65 \cdot 0.2 \\ &= 0.4 + 0.255 + 0.13 \;=\; 0.785. \end{aligned}$$

Dabei haben wir die gegeben bedingten Wahrscheinlichkeiten $p(E|S_1) = 0.8$, $p(E|S_2) = 0.85$ und $p(E|S_3) = 0.65$ verwendet.

(b) Nach dem Satz von Bayes hat man dann

$$p(S_1|E) = \frac{P(E|S_1)P(S_1)}{P(E)} \;=\; \frac{0.8 \cdot 0.5}{0.785} \;=\; 0.50955$$

d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass ein einwandfreies Motherboard aus der Fertigungsstrasse stammt, beträgt ca. $51\,\%$.

Alternativ hätte man mit $p(E) = 0.75$ erhalten:

$$p(S_1|E) = \frac{P(E|S_1)P(S_1)}{P(E)} \;=\; \frac{0.8 \cdot 0.5}{0.75} \;=\; 0.53333$$

also ca. $53\,\%$.

4 Zahlentheorie

Diese Aufgabe besteht aus vier, voneinander unabhängigen Teilaufgaben.

1. Teil ($0.5 + 1$ Punkte):

(a) Bestimmen Sie **Schritt für Schritt** eine Lösung x der Kongruenz $25 \cdot x \equiv 1 \pmod{43}$.

(b) Bestimmen Sie **Schritt für Schritt** möglichst viele (modulo 93 verschiedene) Lösungen x der Kongruenz $42 \cdot x \equiv 3 \pmod{93}$

2. Teil (1.5 Punkte):

Wir betrachten die folgenden drei Systeme von jeweils 2 simultanen Kongruenzen. Durch m sei das Produkt der jeweiligen Moduln bezeichnet, d.h. $m = m_1 \cdot m_2$.

(a)	(b)	(c)
$x \equiv 1 \pmod 2$	$x \equiv 1 \pmod 2$	$x \equiv 1 \pmod 2$
$x \equiv 2 \pmod 5$	$x \equiv 2 \pmod 4$	$x \equiv 3 \pmod 4$

Untersuchen Sie zunächst die drei Systeme auf ihr Lösungsverhalten und bestimmen Sie **alle** Lösungen modulo m (falls sie existieren).

3. Teil ($0.5 + 1$ Punkte):

Gegeben sei die Klartextmenge $\mathcal{M} = \{a, b, c\}$, die Geheimtextmenge $\mathcal{C} = \{A, B, C\}$ und die Schlüsselmenge $\mathcal{K} = \{0, 1\}$, sowie die Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf der Klartextmenge $p(a) = 1/4$, $p(b) = 1/2$, $p(c) = 1/4$ und auf der Schlüsselmenge $p(0) = 1/3$, $p(1) = 2/3$.

Die Verschlüsselungsfunktion f sei wie folgt definiert:

$$\begin{array}{lll} f(0,a) = A & f(0,b) = B & f(0,c) = C \\ f(1,a) = B & f(1,b) = C & f(1,c) = A \end{array}$$

(a) Berechnen Sie $p(A)$, $p(B)$ und $p(C)$.

(b) Berechnen Sie $p(a|A)$, $p(a|B)$ und $p(a|C)$. Ist das System perfekt sicher? Begründen Sie Ihre Aussage.

4. Teil (0.5 Punkte):

Begründen Sie kurz, warum man bei der Implementierung des RSA für das Modul n keine Primzahl wählen sollte.

Lösung 1. Teil ($0.5 + 1$ Punkte):

(a) Wir berechnen die Lösung von $25 \cdot x \equiv 1 \pmod{43}$ mit Hilfe des gelernten Schemas des erweiterten Euklid'schen Algorithmus:

43	-	1	0
25	1	0	1
18	1	1	-1
7	2	-1	2
4	1	3	-5
3	1	-4	7
1		7	-12

und somit $7 \cdot 43 - 12 \cdot 25 = 301 - 300 = 1$, d.h. wenn wir beide Seiten modulo 43 nehmen erhalten wir $-12 \cdot 25 \equiv 1 \bmod 43$. Somit ist -12 bzw. $-12 + 43 = 31$ eine Lösung der Kongruenz.

(b) $42 \cdot x \equiv 3 \pmod{93}$

<u>1. Variante</u>:

Es gilt zunächst:

$$\begin{aligned} 93 &= 2 \cdot 42 + 9 \\ 42 &= 4 \cdot 9 + 6 \\ 9 &= 1 \cdot 6 + 3 \end{aligned}$$

und dann

$$\begin{aligned} 3 &= 1 \cdot 9 - 1 \cdot 6 \\ &= 1 \cdot 9 - 1 \cdot (42 - 4 \cdot 9) \;=\; -1 \cdot 42 + 5 \cdot 9 \\ &= -1 \cdot 42 + 5 \cdot (93 - 2 \cdot 42) \;=\; -11 \cdot 42 + 5 \cdot 93 \end{aligned}$$

Somit ist -11 bzw. 82 eine Lösung der Kongruenz.

<u>2. Variante</u>:

$42 \cdot x \equiv 3 \pmod{93} \longleftrightarrow 14 \cdot x \equiv 1 \pmod{31}$

Es gilt zunächst:

$$\begin{aligned} 31 &= 2 \cdot 14 + 3 \\ 14 &= 4 \cdot 3 + 2 \\ 3 &= 1 \cdot 2 + 1 \end{aligned}$$

und dann

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 \\ &= 1 \cdot 3 - 1 \cdot (14 - 4 \cdot 3) \;=\; -1 \cdot 14 + 5 \cdot 3 \\ &= -1 \cdot 14 + 5 \cdot (31 - 2 \cdot 14) \;=\; 5 \cdot 31 - 11 \cdot 14 \end{aligned}$$

Somit ist -11 bzw. 20 eine Lösung der Kongruenz.

Lösung 2. Teil (1.5 Punkte):

(a) Nach dem Chinesischen Restsatz hat das System (a) genau eine Lösung modulo $m = 2 \cdot 5 = 10$. Mit Hilfe des Euklidschen Algorithmus (oder durch Probieren) findet man dann $x = 7$.

(b) Der Chinesische Restsatz ist hier nicht anwendbar, denn die Module sind nicht teilerfremd. Falls es eine Lösung der beiden Kongruenzen x geben sollte, müsste einerseits $x = 2 \cdot k + 1$ und andererseits $x = 4 \cdot l + 2$ mit $k, l \in \mathbb{Z}$ gelten. Kombinieren wir diese beiden Gleichungen erhalten wir $2(k - 2l) = 1$ und das ist unmöglich. Dieses System besitzt also keine Lösung.

(c) Der Chinesische Restsatz ist hier nicht anwendbar, denn die Module sind nicht teilerfremd. Durch Probieren findet man hier die beiden Lösungen $x = 3$ und $x = 7$ modulo 8.

Lösung 3. Teil (0.5 + 1 Punkte):

(a)

$$
\begin{aligned}
p(A) &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} &= \frac{3}{12} &= \frac{1}{4} \\
p(B) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} &= \frac{4}{12} &= \frac{1}{3} \\
p(C) &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} &= \frac{5}{12} &
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
p(a|A) &= \frac{p(A|a) \cdot p(a)}{p(A)} &= \frac{1/3 \cdot 1/4}{1/4} &= \frac{1}{3} \\
p(a|B) &= \frac{p(B|a) \cdot p(a)}{p(B)} &= \frac{2/3 \cdot 1/4}{1/3} &= \frac{1}{2} \\
p(a|C) &= \frac{p(C|a) \cdot p(a)}{p(C)} &= \frac{0 \cdot 1/4}{5/12} &= 0
\end{aligned}
$$

Das System ist nicht perfekt sicher, denn z.B. gilt $p(a|C) = 0 \neq p(a) = 1/4$.

Lösung 4. Teil (0.5 Punkte):

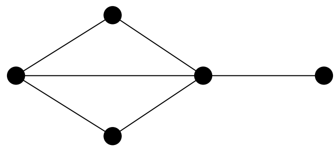
Würden wir eine Primzahl n wählen, so könnte daraus leicht $\phi(n) = n - 1$ und damit auch schnell der private Schlüssel mittels des erweiterten Euklidschen Algorithmus berechnet werden.

5 Graphentheorie

Diese Aufgabe besteht aus drei, voneinander unabhängigen Teilaufgaben.

1. Teil ($1.5 + 0.5$ Punkte):

Wir betrachten den folgenden Graphen G:



(a) Bestimmen Sie **Schritt für Schritt mit Hilfe des rekursiven Algorithmus** das chromatische Polynom des Graphen G.

(b) Wieviele (reguläre) Färbungen mit höchstens 5 Farben besitzt G?

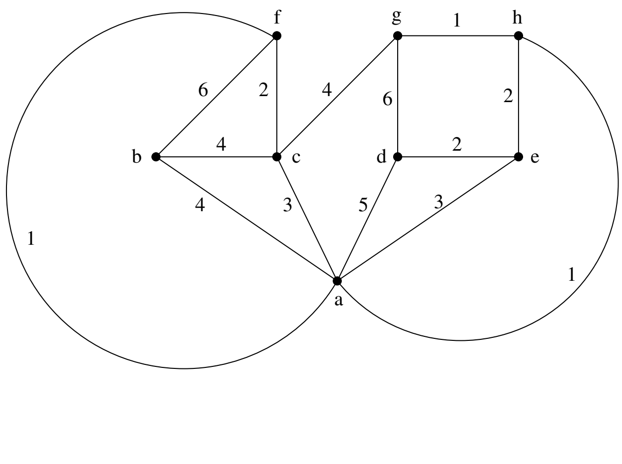
2. Teil ($1 + 0.5$ Punkte):

(a) Wieviele Kanten muss man aus dem vollständigen Graphen K_5 mindestens entfernen, damit ein planarer Graph G entsteht? Begründen Sie Ihre Aussage und zeichnen Sie den entstehenden planaren Graphen.

(b) Stellen Sie die Adjazenzmatrix $A(G)$ des Graphen G auf, den Sie im Aufgabenteil (a) konstruiert haben. Sollten Sie den Graphen G nicht konstruieren können, stellen Sie die Matrix $A(K_5)$ auf.

3. Teil (1.5 Punkte):

Bestimmen Sie **detailliert und per Hand** mit Hilfe des Algorithmus von Dijkstra die Länge eines kürzesten Weges von a zu jedem Knoten des folgenden gewichteten Graphen.

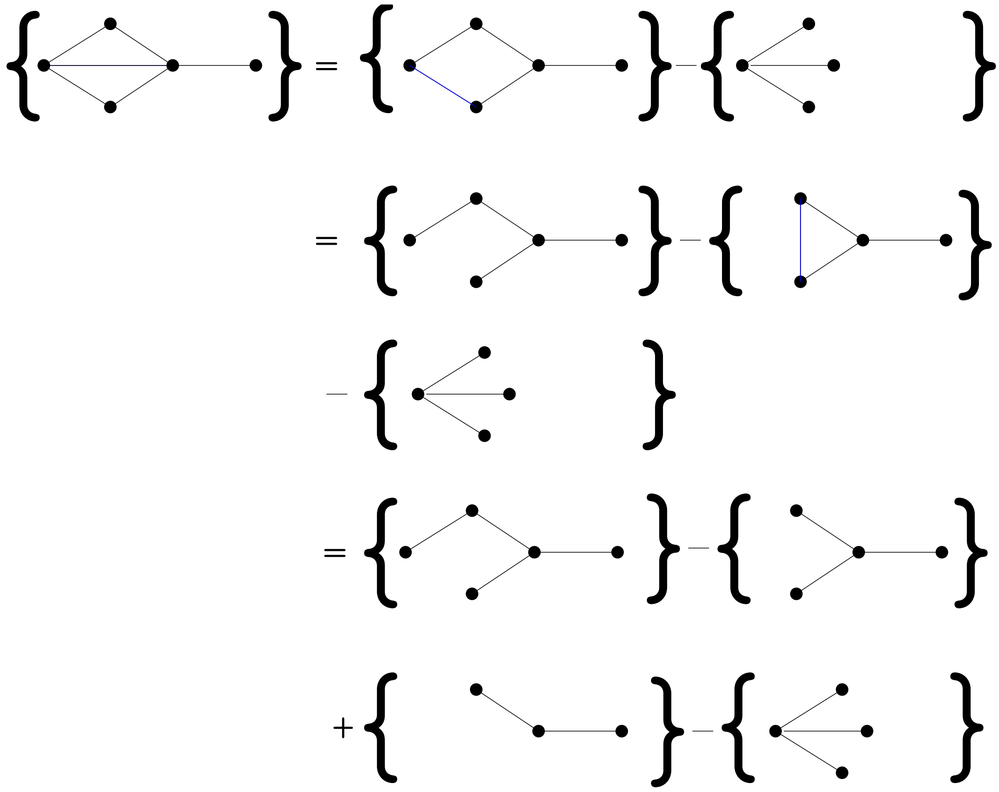


Schreiben Sie hier Ihre Lösung auf:

L(a)										
L(b)										
L(c)										
L(d)										
L(e)										
L(f)										
L(g)										
L(h)										
S										

Lösung 1. Teil ($1.5 + 0.5$ Punkte):

(a) Zunächst können wir das chromatische Polynom mit Hilfe des rekursiven Algorithmus so lange zerlegen, bis nur noch Bäume resultieren:



Damit gilt dann

$$P(G,x) = x(x-4)^4 - x(x-1)^3 + x(x-1)^2 - x(x-1)^3 \;=\; x(x-1)^2(x-2)^2$$

(b) Es gibt

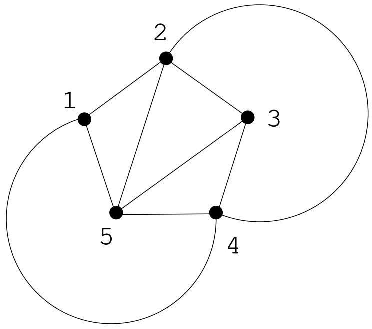
$$P(G,5) = 5 \cdot (5-1)^2 \cdot (5-2)^2 \;=\; 720$$

Färbungen mit höchstens 5 Farben.

Lösung 2. Teil ($1 + 0.5$ Punkte):

(a) Aus dem vollständigen Graphen K_5 muss nur (irgend) eine Kante entfernt werden, um einen planaren Graphen zu erzeugen. Wir bezeichnen diesen Graphen mit G. Es ist leicht einzusehen, dass alle Graphen die aus K_5 durch das Entfernen einer Kante hervorgehen, isomorph sein müssen. Nach dem Satz von Kuratovski ist ein Graph genau dann planar, wenn er K_5 oder $K_{3,3}$ als Teilgraph enthält und sicher kann G weder K_5 (eine Kante zu wenig) noch $K_{3,3}$ (einen Knoten zu wenig) als Teilgraph enthalten.

Eine mögliche graphische Darstellung von G:



(b)

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A(K_5) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung 3. Teil (1.5 **Punkte):**

L(a)	0									
L(b)	∞	4 a	4 a	4 a	4 a	4 a	4 a			
L(c)	∞	3 a	3 a	3 a	3 a					
L(d)	∞	5 a	5 a	5 a	5 a	5 a	5 a	5 a		
L(e)	∞	3 a	3 a	3 a	3 a	3 a				
L(f)	∞	1 a								
L(g)	∞	∞	∞	2 h						
L(h)	∞	1 a	1 a							
S	a	f	h	g	c	e	b	d		