

Identification des systèmes linéaires

Polytech'Tours Département Productique

Novembre 2004

1 Introduction

Un système linéaire a une fonction de transfert qui peut se calculer en établissant les équations différentielles qui relient entrée et sortie. Ces équations théoriques sont parfois difficiles à écrire car on n'a pas forcément toute la connaissance du système nécessaire : valeurs numériques, processus mis en jeu, non linéarité... Souvent, un modèle dont le comportement ressemble à celui du système à étudier est suffisant pour élaborer une loi de commande adaptée.

Ce document présente différentes méthodes pour obtenir un modèle sous forme de fonction de transfert équivalente en terme de réponse à un système dont on ne sait pas modéliser le comportement. Ces méthodes NE donnent donc PAS LA fonction de transfert du système mais en donnent UNE dont la réponse ressemble à celle du système.

Toutes les courbes de ce polycopié ont été obtenues avec Matlab. Le fichier (identif.m) qui permet de les tracer et qui contient toutes ces méthodes programmées est disponible sur le site web de l'automatique : <http://auto.polytech.univ-tours.fr/> dans la rubrique automatique continue, documents du cours.

2 Identification en Boucle Ouverte

On identifie la réponse indicielle en BO du système à celle d'un modèle dont la forme est pré-définie avec certains paramètres. La méthode consiste à calculer les meilleurs paramètres en fonction de la forme de la réponse réelle.

2.1 Méthode de Strejc

2.1.1 Le modèle

Cette méthode peut s'appliquer aux systèmes dont la réponse indicielle ne présente pas de dépassement. On identifie à une fonction de la forme :

$$T(p) = \frac{K.e^{-r.p}}{(1 + \tau.p)^n}$$

Les paramètres à identifier sont donc :

- le gain statique K ,
- le retard r ,
- la constante de temps τ
- et l'ordre n .

La figure 1 représente les réponses indicielles pour plusieurs jeux de paramètres.

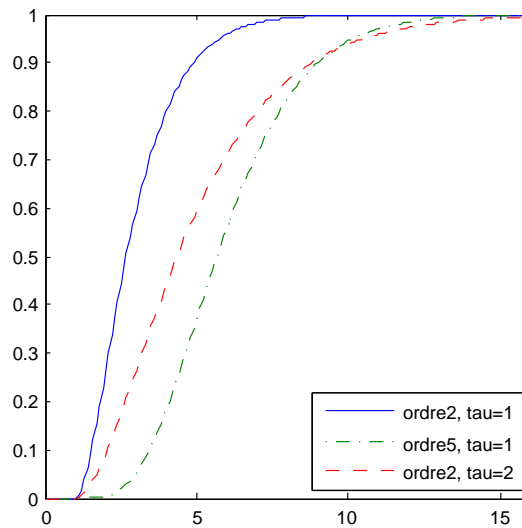


Figure 1: Réponses de modèles de Strejc pour $K = 1$, $r = 1$

2.1.2 La méthode

Pour identifier le système, la méthode peut se décomposer en :

- Le gain statique est mesuré directement par la valeur finale de la sortie. Celle-ci vaut $K.E_0$ où E_0 est l'amplitude de l'échelon d'entrée.

- On trace la tangente au point d'inflexion I pour déterminer deux valeurs : T_1 et T_2 . Voir figure 2 pour la mesure de ces deux temps.
- Relever T_1 et T_2 en déduire l'ordre n en utilisant le tableau 1. Entre deux lignes du tableau, on choisit la valeur de n la plus petite.
- Déterminer la constante de temps τ à partir de $\frac{T_2}{\tau}$ du tableau.
- Déterminer le retard r quand il existe à partir de la différence entre la valeur de T_1 mesurée et celle donnée par la colonne $\frac{T_1}{T_2}$ du tableau.

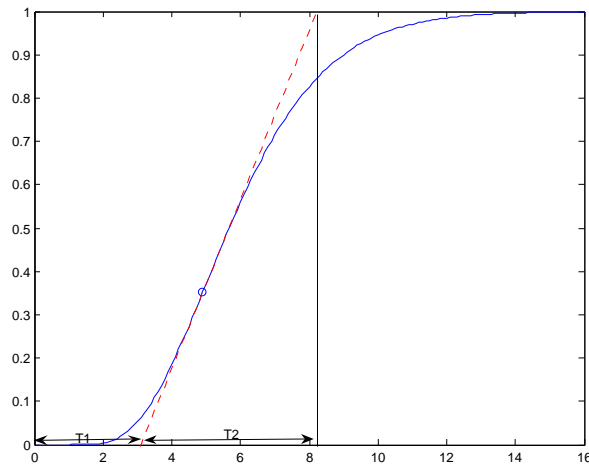


Figure 2: Méthode pour obtenir T_1 et T_2

Table 1: Tableau pour estimer l'ordre, la constante de temps et le retard du modèle de Strejc

n	$\frac{T_1}{\tau}$	$\frac{T_2}{\tau}$	$\frac{T_1}{T_2}$
1	0	1	0
2	0,28	2,72	0,1
3	0,8	3,7	0,22
4	1,42	4,46	0,32
5	2,10	5,12	0,41
6	2,81	5,70	0,49

2.1.3 Exemple

Pour tester cette méthode, nous partons d'un système dont la fonction de transfert est :

$$T(p) = \frac{100}{(p+4)(p+5)(p+1)}$$

Sa réponse indicielle est sur la figure 3 en trait plein.

- Le gain statique est mesuré directement par la valeur finale de la sortie : $K = 5$
- On trace la tangente au point d'inflexion I et on mesure : $T_1 = 0,27$ et $T_2 = 1,76$
- D'après le tableau, avec $\frac{T_1}{T_2} = 0,15$, un ordre $n = 2$ semble convenir.
- La constante de temps τ est évaluée à partir de $\frac{T_2}{\tau} = 2,72$ au tableau. Cela donne $\tau = 0,65$.
- D'après le tableau, $\frac{T_1}{\tau} = 0,28$, ce qui donnerait une valeur de $T_1 = 0,18$. Or on mesure $T_1 = 0,27$. On peut en déduire un retard $r = 0,09$

La méthode identifie la réponse indicielle comme étant proche de celle du système suivant :

$$\hat{T}(p) = \frac{5.e^{-0,09p}}{(1+0,65p)^2}$$

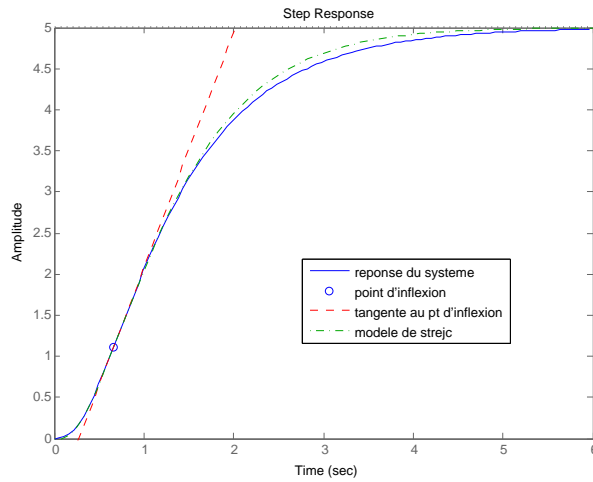


Figure 3: Réponses du système de départ et du système identifié

La réponse de ce système est tracé dans la figure 3 en trait pointillé. On peut noter la grande ressemblance avec celle du système de départ alors qu'on a identifié un deuxième ordre avec retard au lieu d'un troisième ordre.

2.2 Méthode de Broïda

Le modèle proposé pour approcher le comportement du système est un premier ordre avec un retard pur. Sa fonction de transfert est :

$$T(p) = \frac{K.e^{-r.p}}{1 + \tau.p}$$

Le principe n'est pas de faire coïncider la tangente au point d'inflexion (souvent imprécis) mais d'ajuster les paramètres τ et r pour que les courbes de réponse du modèle et du processus aient deux points communs judicieusement choisis. Les points communs C_1 et C_2 habituellement utilisés correspondent respectivement à 28% et 40% de la valeur finale. Le modèle de Broïda donne les points C_1 et C_2 pour les dates suivantes :

- $\frac{s(t)}{K.E_0} = 0,28 \Rightarrow \frac{t-r}{\tau} = 0,328$
- $\frac{s(t)}{K.E_0} = 0,40 \Rightarrow \frac{t-r}{\tau} = 0,510$

La méthode d'identification s'appuie sur les résultats précédents. Soient t_1 et t_2 les temps au bout desquels la réponse expérimentale atteint respectivement 28% et 40% de la valeur finale. On va simplement résoudre le système donné par :

$$\begin{aligned} \frac{t_1 - r}{\tau} = 0,328 & \Rightarrow t_1 - r = 0,328\tau \\ \frac{t_2 - r}{\tau} = 0,510 & \Rightarrow t_2 - r = 0,510\tau \end{aligned}$$

La résolution de ces équations donne :

$$\tau = 5,5(t_2 - t_1) \quad r = 2,8t_1 - 1,8t_2$$

Le gain K est déterminé comme dans la méthode de Strejc avec la valeur finale de la sortie.

Pour l'exemple précédent, la méthode de Broïda donne le modèle suivant :

$$T(p) = \frac{5.e^{-0,375p}}{(1 + 1,12p)}$$

La figure 4 donne les courbes de réponse du système réel et du modèle de Broïda. La concordance des deux points C_1 et C_2 est bien vérifiée.

2.3 Processus intégrateur

Les systèmes contenant un intégrateur ont une réponse indicielle en rampe, en régime permanent. L'asymptote de cette réponse est une droite d'équation $y = a(t - t_1)$ de pente a et qui coupe l'axe des abscisses pour $t = t_1$ (voir figure 5).

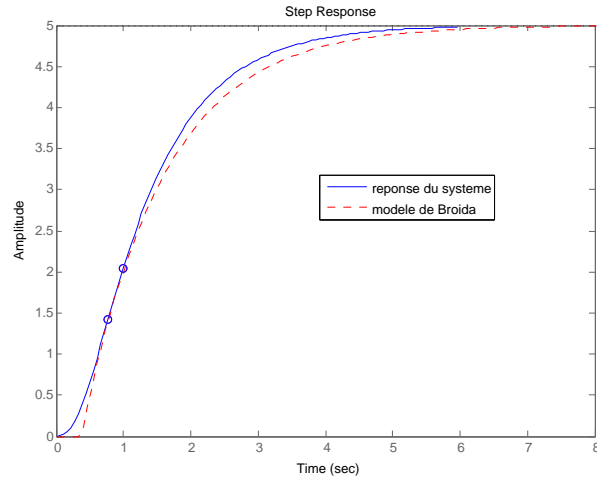


Figure 4: Courbe réelle approchée par un modèle de Broïda

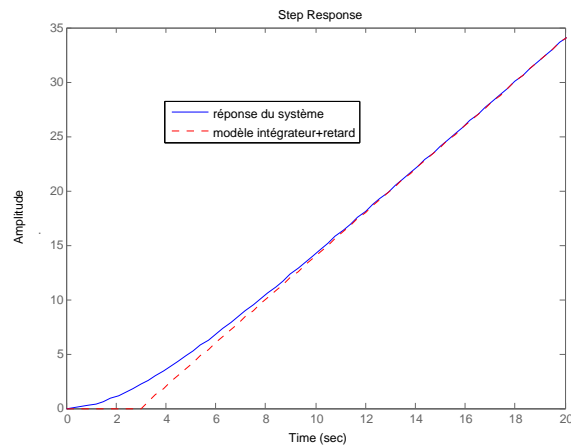


Figure 5: Courbe réelle approchée par un intégrateur retardé

On identifie la réponse du système réel à la réponse d'un système intégrateur pur avec retard c'est à dire avec la fonction de transfert suivante :

$$T(p) = \frac{K.e^{-r.p}}{p}$$

Les paramètres de ce système sont donnés par :

$$K = \frac{a}{E_0} \quad r = t_1$$

où E_0 est l'amplitude de l'échelon appliqué en entrée.

3 Identification en boucle fermée

Cette méthode d'identification s'applique aux processus stables, d'ordre supérieur à 2 et s'appuie sur une étude fréquentielle du processus asservi.

3.1 Principe

Le système à identifier (de fonction de transfert $K.G(p)$) est asservi par une boucle de régulation munie d'un correcteur proportionnel de gain K_r (voir figure 6).

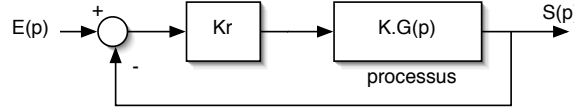


Figure 6: identification en BF avec un correcteur proportionnel

La fonction de transfert en BO de ce système est :

$$T(p) = K_r.K.G(p)$$

Pour une certaine valeur du gain $K_r = K_o$, on peut mettre le système en limite de stabilité. C'est à dire que ce système va osciller continûment tout seul. On appelle ceci le pompage. La pulsation de ces oscillations de pompage ω_o correspond à la pulsation pour laquelle $T(j\omega_o) = -1$.

$$K_o.K.|G(j\omega_o)| = 1 \quad \varphi(\omega_o) = -\pi$$

3.1.1 Modèle de Strejc

Par commodité, on prend le modèle de Strejc sans retard ($r = 0$).

$$K.G(p) = \frac{K}{(1 + \tau.p)^n} \quad \Rightarrow \quad T(j\omega) = \frac{K_r.K}{(1 + j\tau\omega)^n}$$

En BF, on cherche le pompage (obtenu pour $K_r = K_o$) et on mesure à partir de la période des oscillations $\omega = \omega_o$. L'identification consiste à résoudre le système

$$\frac{K_o.K}{(\sqrt{1+\omega_o^2.\tau^2})^n} = 1$$

$$\varphi = -n.\arctan(\omega_o.\tau) = -\pi$$

Le gain statique K est déterminé par une réponse indicielle en BO ou en BF. La résolution des équations donne l'ordre n par :

$$K_o.K = \left(\frac{1}{\cos(\pi/n)} \right)^n$$

Et la constante de temps par :

$$\tau = \frac{1}{\omega_o} \cdot \tan(\pi/n)$$

3.1.2 Modèle de Broïda

Le modèle de Broïda est le suivant :

$$K.G(p) = \frac{K.e^{-r.p}}{1 + \tau.p} \Rightarrow T(j\omega) = \frac{K_r.K.e^{-jr\omega}}{1 + j\omega\tau}$$

Pour identifier ce modèle, on doit déterminer les paramètres K , τ et r . En BF, on cherche le pompage (obtenu pour $K_r = K_o$) et on mesure à partir de la période des oscillations $\omega = \omega_o$. L'identification consiste à résoudre le système

$$\begin{aligned} \frac{K_o.K}{\sqrt{1+\omega_o^2.\tau^2}} &= 1 \\ \varphi = -\omega_o.r - \arctan(\omega_o.\tau) &= -\pi \end{aligned}$$

Le gain statique K est déterminé par une réponse indicielle en BO ou en BF. La résolution des équations donne la constante de temps par :

$$\tau = \frac{1}{\omega_o} \cdot \sqrt{(K_o.K)^2 - 1}$$

Le retard est calculé à partir de :

$$r = \frac{1}{\omega_o} \left[\pi - \arctan(\sqrt{(K_o.K)^2 - 1}) \right]$$

4 Méthodes de Ziegler Nichols

C'est une méthode empirique qui permet d'ajuster les paramètres d'un régulateur P.I.D. pour commander un processus à partir de mesures sur sa réponse indicielle.

4.1 Mesures sur la réponse en BO

La réponse à un échelon d'amplitude E_o , sans oscillations, sera assimilée à celle d'un premier ordre avec retard. On devra mesurer la pente de la tangente au point d'inflexion a , la valeur finale M et le retard r (voir figure 7). La tangente au point d'inflexion est assimilée à la tangente à l'origine du système du premier ordre sans retard. Si τ est la constante de temps du premier ordre, on a : $a = \frac{M}{\tau}$.

Ziegler Nichols propose des réglages de correcteur P, PI ou PID pour avoir une réponse en boucle fermée satisfaisante. Le critère utilisé pour

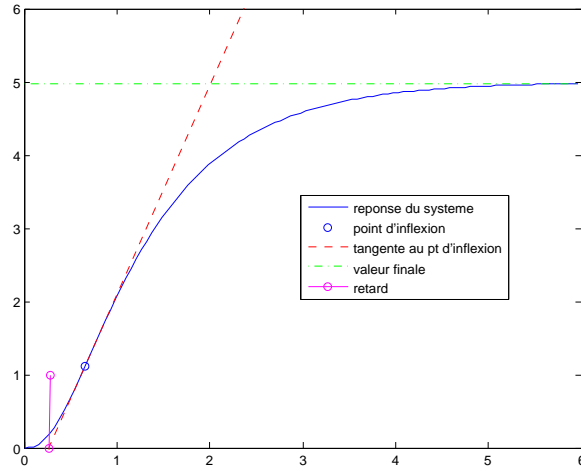


Figure 7: Identification pour Ziegler Nichols

savoir si une réponse est satisfaisante est que le rapport entre les deux premiers dépassements (positifs) est de 0,25. Un correcteur PID a comme fonction de transfert :

$$C(p) = K_r \cdot \left(1 + \frac{1}{\tau_i \cdot p} + \tau_d \cdot p\right)$$

Table 2: Réglage d'un correcteur P, PI ou PID selon Ziegler Nichols en BO

Type de correcteur	Gain K_r	τ_i	τ_d
Proportionnel	$\frac{E_o}{a.r} = \frac{E_o \cdot \tau}{M \cdot r}$		
PI	$\frac{0,9E_o}{a.r} = \frac{0,9E_o \cdot \tau}{M \cdot r}$	$3, 3r$	
PID	$\frac{1,2E_o}{a.r} = \frac{1,2E_o \cdot \tau}{M \cdot r}$	$2r$	$0, 5r$

Pour l'exemple utilisé pour la figure 7, les réponses corrigées sont en figure 8. Dans cet exemple, on peut noter que le correcteur proportionnel laisse une erreur statique, que le correcteur PI est sans erreur statique mais est plus long à stabiliser. Le correcteur PID rend le système relativement stable et sans erreur statique.

4.2 Mesure sur la réponse en BF

Dans le cas où il est impossible d'ouvrir la boucle de régulation pour obtenir la réponse indicielle, une seconde méthode de Ziegler Nichols permet de

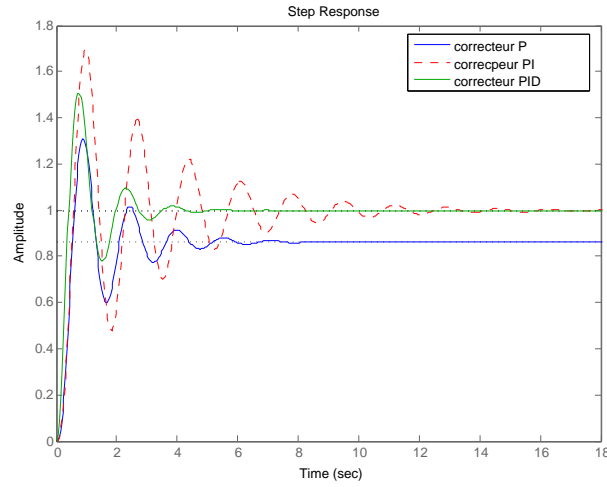


Figure 8: Comparaison des correcteurs de Ziegler Nichols

régler un correcteur à partir d'un essai en *limite de pompage*.

Pour obtenir la limite de pompage, on place un correcteur proportionnel dans la boucle fermée et on augmente doucement le gain de ce correcteur jusqu'à obtenir des oscillations auto-entretenues (phénomène de pompage). On note le gain K_o qui a amené le système en limite de stabilité et la période T_o des oscillations obtenues. Les paramètres de régulation pour que la réponse du système bouclé soit satisfaisante sont donnés par le tableau suivant.

Table 3: Réglage d'un correcteur P, PI ou PID selon Ziegler Nichols avec les mesures en BF

Type de correcteur	Gain K_r	τ_i	τ_d
Proportionnel	$0,5.K_o$		
PI	$0,45.K_o$	$0,83.T_o$	
PID	$0,6.K_o$	$0,5.T_o$	$0,125T_o$

Pour l'exemple utilisé précédemment, les réponses du système corrigé sont très ressemblantes à celles obtenues par la méthode de Ziegler Nichols en BO.