Análises de Π através de Monte Carlo

Samuel Correia Rodrigues
Bacharelado em Física
Instituto de Física
Universidade de Brasília
Email: 202049249@aluno.unb.br

***Resumo*—As aplicações práticas e teóricas do número π tanto em elementos do nosso dia-a-dia quanto em ambientes acadêmicos e científicos é interminável, apesar de sua complexidade de determinação. O objetivo deste trabalho é realizar análises voltadas exclusivamente ao número π e algumas alternativas para obter aproximações de seu valor. Isso será feito a partir de recursos computacionais e estatísticos, mais especificamente com o método de Monte Carlo, por sua versatilidade em estudos estatísticos. As simulações terão o objetivo de explorar os fatores determinantes do experimento a fim de ser possível realizar comparações e análises acerca dos elementos envolvidos na execução e sua relação com os valores estimados.**

I. INTRODUÇÃO

O número π é objeto de estudo de matemáticos de todo o mundo há séculos por razão de suas importantes propriedades e diversas aplicações. Por meio de cálculos a partir de circunferências e polígonos regulares de muitos lados, estudiosos da antiguidade estimavam algumas casas decimais deste número. Com a ascenção da tecnologia, computadores modernos foram capazes de estimar mais milhares de casas de π a partir de métodos estatísticos. Um destes métodos, o "Monte Carlo", pode ser uma poderosa ferramenta para obter-se aproximações de números irracionais e funções complexas. Seu funcionamento se baseia na utilização de uma quantidade massiva de amostras aleatórias para, a partir destas, criar uma relação entre os pontos sorteados e estimar as medidas desejadas dentro do campo amostral.

Este trabalho tem o objetivo de encontrar relações entre valores estimados de π e as condições predefinidas de funcionamento do experimento. As aproximações e os cálculos serão feitos a partir do método de Monte Carlo, responsável pela geração aleatórias de valores, e um ambiente computacional baseado na linguagem de programação "Fortran". A partir da análise de resultados e construção de gráficos, espera-se ser possível encontrar as correspondências principais entre os valores escolhidos para as condições do sistema e a precisão dos resultados.

Propriedades como valores médios para π em função da quantidade de amostras definidas no programa, bem como os desvios padrão entre esses valores, estão entre os objetos de estudo deste projeto. Condições como a repetição de uma mesma tarefa e a mudança gradual das condições iniciais dentro do mesmo experimento também serão levadas em consideração. Serão realizadas diversas análises para diferentes situações de um mesmo problema para a partir disso tentar reconhecer os métodos mais eficazes para estimar valores aproximados de π.

II. METODOLOGIA

A versão do método de Monte Carlo utilizada neste trabalho baseia-se no sorteio de uma quantidade N_p de pontos que serão posicionados aleatoriamente em alguma posição dentro de um quadrado com 5 centímetros de lado, que possui em seu interior um círculo com inicialmente 1 centímetro de raio centrado no ponto (2,3). Além disso, inclui-se na rotina um número N_r que representa quantas vezes o processo de sorteios de pontos se repetirá em uma mesma execução do programa. O valor de π será estimado a partir da relação entre os pontos que forem posicionados dentro e fora do círculo.

Como N_p representa o número total de pontos dentro do quadrado, pode-se estabelecer uma proporção entre este número e a área total do sistema. Sendo assim, os pontos de estiverem dentro do círculo serão considerados não só parte de N_p, mas também como equivalentes à área do círculo, como é possível ver na representação:

$$\frac{N_p}{N_{cir}} = \frac{A_Q}{A_C} \tag{1}$$

Em que N_p é o número total de pontos, N_{cir} é o número de pontos que encontram-se dentro do círculo, A_Q é a área do quadrado e A_C é a área do círculo. Considerando $A_Q = l^2$, sendo l o lado do quadrado, e $A_C = \pi.r^2$, sendo r o raio do círculo, é possível relacionar o valor de π com a expressão:

$$\pi \approx \frac{l^2.N_{cir}}{r^2.N_p} \tag{2}$$

A partir dessa expressão serão calculados valores médios de π em função do número total de pontos sorteados. Após todas as repetições terem sido realizadas, será observado como o desvio padrão da média π varia em função de N_p, a partir da seguinte expressão:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N_r} - \overline{x}^2} \tag{3}$$

Em que σ é o desvio padrão da média, x_i é um elemento do conjunto de valores estimados de π e $\overline{x}$ é a média simples de todos os valores estimados. Os parâmetros definidos para esta primeira parte do experimento foram de um número N_r igual a 200, permanecendo constante nesta execução, com um número N_p inicial de 100, que a cada ciclo era adicionado em 100, resultando em um número final de 20 mil pontos.

Após as operações anteriores, serão realizadas simulações alterando outros aspectos iniciais além de N_p. O objetivo é, primeiramente, observar como os valores médios de π sofrerão alteração em função de um N_r variável do tamanho definido para o raio do círculo inserido no quadrado, e qual é a tendência da curva do desvio padrão nessa situação. Para isso será considerado o raio máximo igual a 2 centímetros, para que este não ultrapasse os limites do sistema e cause interferências nos cálculos, e serão usadas as mesmas expressões da etapa anterior. As condições inicialmente definidas nesta etapa foram de um N_p constante igual a 1000, um N_r também constante de valor igual a 200 e um raio inicial de 0,1 centímetros, que era adicionado de 0,1 centímetros a cada ciclo até totalizar 2 centímetros, a fim de observar o valor médio de π em função do crescimento do raio.

Utilizando ainda variações de raio, o número N_r será variado para que seja possível observar como o desvio padrão de π se comporta em função do número de repetições utilizado, sempre considerando o tamanho máximo de raio igual a 2 centímetros para que o círculo permaneça sempre inteiramente dentro do quadrado. Para esta etapa foram utilizados os parâmetros de N_p constante igual a 100, N_r inicialmente igual a 100, com uma adição de 100 a seu valor em cada ciclo, em que este processo se repetiu 200 vezes, totalizando em um N_r igual a 20 mil. Essa operação foi repetida 4 vezes, em que cada vez o raio, com um valor inicial de 0,5 centímetros, era acrescido de 0,5 centímetros em cada execução. É importante lembrar que o círculo estará centrado no ponto (2,3) durante todo o experimento e o quadrado terá sempre lado igual a 5 centímetros.

Como parte do experimento será criada uma situação em que o círculo não reside inteiramente no quadrado, especificamente quando seu raio é igual a 2,3 centímetros. Essa parte do projeto tem o objetivo de estimar a área da intersecção entre o quadrado e o círculo, e para tal será utilizada uma expressão similar à equação 2:

$$A_{int} = \frac{l^2.N_{cir}}{N_p} \tag{4}$$

Sendo que as outras condições utilizadas para esta etapa foram de um N_p igual a 1000, N_r igual a 200.

III. Resultados e Discussão

A figura 1 representa visualmente o resultado posterior à execução do programa assumindo um círculo de raio igual a 1 centímetro. Os pontos que foram posicionados dentro da área do círculo estão representados em roxo, e em azul pode-se observar os pontos que se encontram ao longo da área do quadrado que não coincide com o círculo. Partindo-se dessa situação, foram estimados os valores para π em função do número de pontos a serem sorteados.

Para fins de análise, na figura 2 foi posicionada uma reta no valor de π dado pelo software de construção de gráficos, para que assim fosse possível observar mais claramente se os

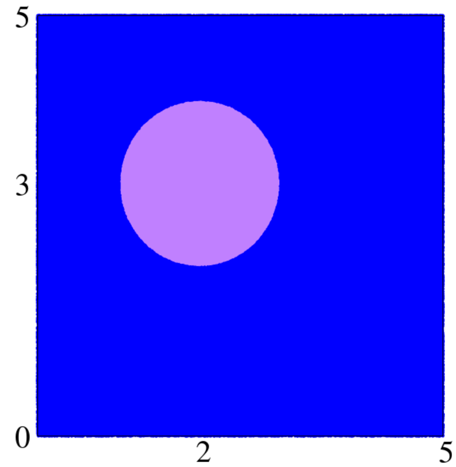

Figura 1: Quadrado com 5cm de lado contendo um círculo de 1cm de raio centrado em (2,3).

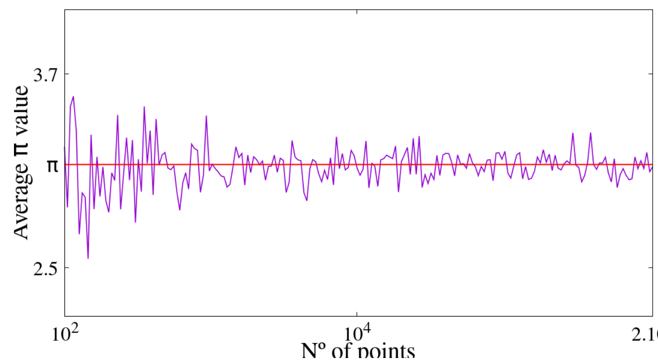

Figura 2: Valores médios de π em função do número de pontos sorteados.

valores médios de π se aproximavam a um valor mais preciso pré-definido. Ao analisar o gráfico, nota-se claramente como os valores se convergem gradualmente em função do aumento do número de pontos que são sorteados na execução do teste. Os valores se aproximam entre si e também se direcionam ao valor da reta adicionada na análise. Em questões técnicas, como um número maior de pontos definidos resulta em uma porção maior da área desejada preenchida de forma uniforme, a relação matemática terá resultados mais concisos, ou com maior confiabilidade, já que pode-se diminuir a margem de erro causada pelo mal preenchimento da área pelos pontos. Sendo assim, quanto maior o número de pontos usados na simulação, mais confiáveis serão os resultados obtidos.

A partir da mesma situação, pode-se observar na figura 3 o comportamento do desvio padrão à medida que o número de pontos sorteados cresce. Como foi discutido anteriormente, os valores médios possuem uma tendência de convergirem-se a um valor mais confiável de π, resultando assim em uma discrepância menor entre os valores. Isso resulta em desvios padrão cada vez mais próximos de zero, como é possível observar no gráfico, ou seja, valores tendencialmente mais próximos.

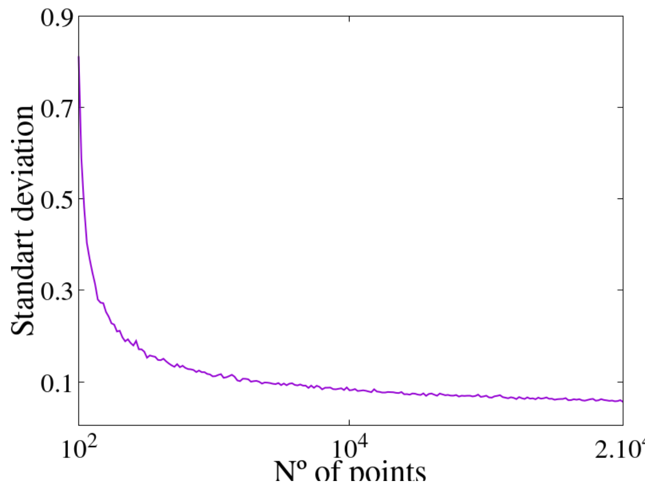

Figura 3: Desvio padrão em função do número de pontos sorteados.

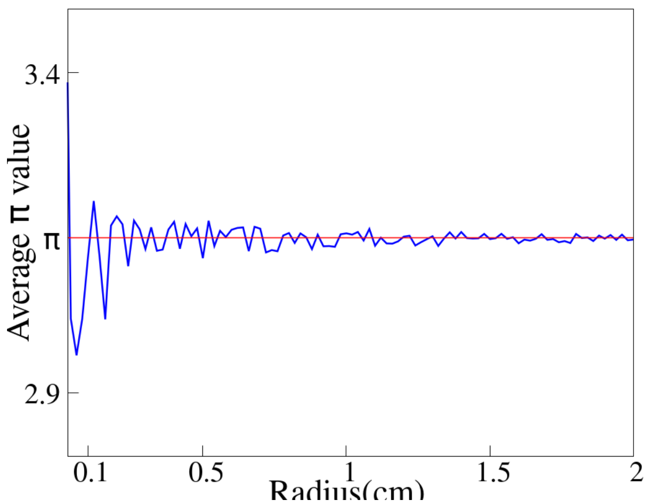

Figura 4: Valores médios de π em função do crescimento do raio do círculo.

Feita a análise do comportamento do sistema para diferentes valores de N_p, pode-se direcionar o experimento à variação de outros elementos. Neste caso o elemento variável foi o raio do círculo, que crescia uniformemente a cada ciclo de execução e, a partir disso, foram calculados os valores médios para π. Como nota-se pela figura 4, o comportamento apresentado é similar ao que foi observado na situação em que N_p era crescente. Dessa forma, quanto maior o espaço ocupado pelo círculo dentro da área do quadrado, mais os valores calculados para π convergem-se a um valor em comum, representado pela reta no gráfico. Isso se dá pela proporção ocupada pelo círculo. Um valor de raio menor ocasiona em um número menor de pontos que serão sorteados dentro do círculo, tornando o cálculo de sua área mais impreciso. Com sua área proporcionalmente maior, a relação é mais facilmente estimada e assim encontram-se valores mais confiáveis, concisos e com uma discrepância menor entre si. O desvio padrão nessa situação também apresenta comportamento similar à situação anterior, com o número de pontos variável. Isso já é de se esperar pela forma que os valores convergem gradativamente e se tornam mais lineares de certa forma.

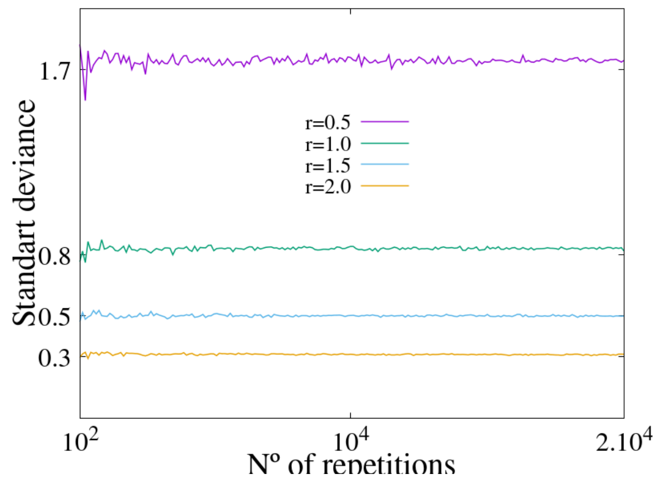

Figura 5: Desvio padrão em função da variação de número de repetições para 4 valores distintos de raio.

A partir dos resultados da variação de N_r, observou-se que os valores para o desvio padrão não apresentavam um comportamento decrescente como nas situações anteriores, mas uma tendência constante. Na figura 5 é possível notar que os desvios padrão mantém-se próximos de um valor específico, convergindo-se a ele à medida que o número de repetições é aumentado. A provável razão para esse comportamento é o fato de o número de pontos sorteados se manter constante em todas as repetições. Sendo assim, a precisão e a confiabilidade dos resultados estimados ficarão sempre em volta de um valor específico, com sua precisão sendo de certa forma conservada. Como na situação anterior, é possível notar a influência da magnitude do raio no resultado dos desvios padrão. As execuções com raios de maior tamanho apresentam um desvio padrão menor, ou seja, resultados com menos discrepância.

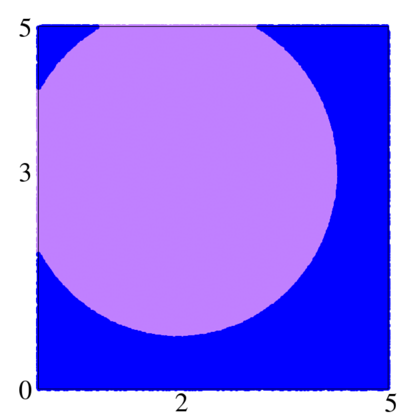

Figura 6: Quadrado com 5cm de lado e, em roxo, intersecção entre o quadrado e um círculo de raio de 2,3 cm centrado em (2,3).

Pode-se observar na figura 6 uma representação visual da situação em que foi considerado um círculo de raio de valor 2,3 centímetros. Com o objetivo de estimar a área, foi utilizada a equação 4. Já que o programa apenas contabiliza pontos no quadrado, a área exterior a ele não será considerada no cálculo da área e assim é possível obter a intersecção. O valor encontrado para essa área foi de aproximadamente 15,7cm^2. A partir de cálculos utilizando uma calculadora foi estimada a área total do círculo com o valor aproximado de 16,6cm^2. Sendo assim, a porção do círculo que não está inserida no quadrado possui uma área aproximada de 0,9cm^2.

IV. Conclusão

Ao observar os resultados obtidos pela execução deste trabalho, pode-se estimar quais seriam as melhores condições, entre as apresentadas, para o estudo do número π. Fatores como um valor alto de número de pontos a serem sorteados e um raio proporcionalmente maior ao sistema mostraram-se ser os mais expressivos nas análises do que foi obtido. É possível afirmar que, considerando em especial estes dois elementos, serão obtidos valores mais concisos com uma menor discrepância entre si, sendo assim mais confiáveis. O número de repetições não demonstrou-se tão significante quando analisado isoladamente dos outros fatores, tornando-se apenas uma ferramenta menos expressiva para a obtenção de resultados mais precisos.

O método de Monte Carlo mostrou-se bastante competente para o tipo de ação explorada neste projeto, sendo possível com ele explorar diversas áreas de um mesmo problema. Partindo-se da modificação de fatores e manipulação de condições estatísticas para o sorteio, as possibilidades de análise permitidas pelo método são de grande valor prático e experimental. Assim, é possível imaginar incontáveis aplicações para este método para problemas nas mais diversas áreas do conhecimento por sua natureza relativamente simples e simultaneamente eficiente.