Movimento Browniano Unidimensional

Samuel Correia Rodrigues
Bacharelado em Física
Instituto de Física
Universidade de Brasília
Email: 202049249@aluno.unb.br

***Resumo*—O Movimento Browniano é um fenômeno bastante encontrado em sistemas físicos e seu estudo é de extrema importância. Este projeto tem como objetivo principal simular e analisar o movimento aleatório de partículas em um movimento unidimensional a partir da utilização do método de Monte Carlo. Desta forma, será possível averiguar algumas características intrínsecas ligadas ao funcionamento de sistemas difusivos. A partir de observações e análises, é possível determinar fatores comuns a qualquer sistema deste mesmo contexto e assim entender certas tendências e estimar alguns tipos de comportamentos. Assim, pode-se finalmente encontrar proporcionalidades comuns aos sistemas difusivos.**

I. Introdução

No ano de 1827, o biólogo Robert Brown observou partículas de grãos de pólen na água através de um microscópio, e notou um movimento aparentemente aleatório sem conseguir determinar as causas dessa trajetória caótica. Diversos experimentos foram feitos posteriormente a fim de estudar e entender o misterioso fenômeno que se manifestava em tantas ocasiões e meios diferentes, porém foi clarificado mais precisamente apenas no século seguinte por Albert Einsten. O físico afirmou que o movimento era produto da interação do grão de pólen com as moléculas de água. Sendo atribuído ao nome de Movimento Browniano, este pode ser observado em diversos fenômenos físicos e se baseia no movimento aleatório que um corpo faz em reação a diversas forças sendo aplicadas de formas e direções diferentes.

Este projeto tem objetivo de simular, demonstrar e analisar o movimento aleatório unidimensional, ou seja, em que o corpo pode apenas se mover para um lado ou para o outro, de um conjunto de partículas. Essas simulações serão realizadas a partir do método de Monte Carlo, uma ferramenta estatística que se baseia em estimar as diversas possibilidades de um mesmo sistema inicial, e possui alta eficiência para o estudo de sistemas que envolvem amostras aleatórias. Por meio de repetições e observações, será possível estimar as principais peculiaridades desse fenômeno e buscar por correspondências interessantes em seus resultados e fatores.

Serão estudadas as propriedades de difusão normal, o comportamento do grupo amostral ao serem diferidas as condições iniciais da simulação, estimar a natureza de elementos como a variância da posição das amostras no tempo, a média temporal das trajetórias das partículas, a velocidade de drift e o coeficiente de difusividade. Além disso, tentaremos observar certas correlações entre estes fatores que podem auxiliar na compreensão do movimento, e assim desenvolver um melhor entendimento acerca da proposta apresentada.

II. Metodologia

A partir de simulações computacionais utilizando a linguagem Fortran 90, assumiu-se inicialmente uma mesma probabilidade da partícula ir para a direita e para esquerda para assim observarmos o processo de difusividade normal, ou seja, que possui uma tendência de dispersão semelhante para qualquer sentido. Foi gerado um conjunto de 1000 partículas, cada uma com uma trajetória individual, com a possibilidade de realizarem um movimento de 1 metro, para a direita ou para a esquerda, a cada segundo, em um período total de 500 segundos. Com os resultados, pode-se estimar a variância da posição dos elementos do conjunto em função do tempo e observar seu comportamento. No programa, a variância foi calculada a partir de uma manipulação da equação mais popular, dada pela seguinte expressão:

$$\sigma^2 = \sum \frac{x_i^2}{N} - \overline{x}^2 \tag{1}$$

Em que σ^2 é a variância, x_i é a posição de uma partícula i em determinado tempo, $\overline{x}$ é a média das posições de todas as partículas em um mesmo tempo e N é o número total de partículas.

A fim de comparar os resultados com os de difusão normal, e utilizando os mesmos parâmetros de tempo do caso anterior, foram feitas simulações com diferentes probabilidades de a partícula ir para cada lado, mais especificamente, com uma probabilidade de setenta por cento para a amostra mover-se para um lado, e de trinta por cento para ir ao lado oposto. Assim espera-se ser possível observar uma mudança na direção em que o conjunto se move em razão da alteração dessa condição básica do experimento, e consequentemente uma velocidade de drift diferente para cada probabilidade individual. Já alterando a quantidade de espaço que cada amostra pode se mover por período de tempo, espera-se ser possível observar outras mudanças na relação total do conjunto, como a forma de dispersão das amostras.

Com os resultados das etapas anteriores, pode-se estimar a velocidade de drift a partir de uma análise do coeficiente angular da reta formada pelos valores de velocidade média do conjunto de amostras. O desvio para um lado específico do circuito gera uma inclinação na reta, definindo assim a velocidade de drift. Durante a análise de tal fator, tem-se o objetivo de observar a seguinte propriedade:

$$v_{drift} = (2q-1)\frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{2}$$

Em que q representa a probabilidade de ir para um lado e Δx é a distância percorrida em cada intervalo de tempo Δt.

Além disso, será analisada a natureza do coeficiente de difusão de cada contexto, ou seja, uma constante que representa a facilidade de espalhamento das amostras no meio. Esse coeficiente está presente em qualquer processo difusivo e será estimado a partir da variância calculada com as trajetórias das partículas após ser testado o comportamento linear da variância. A relação a ser observada pode ser expressada da seguinte forma:

$$\delta^2 = 2Dt \tag{3}$$

Em que δ^2 é a variância, D é o Coeficiente de Difusão e t é o tempo. Utilizando diversos valores para o tempo e o deslocamento, a relação entre estes e o coeficiente de difusão pode ficar mais clara.

Espera-se também, a partir de análises envolvendo o coeficiente de difusão, observar sua relação com as condições iniciais da simulação. Para isso, serão realizadas várias simulações alterando-se essas condições em cada uma, a fim de observar uma propriedade representada pela seguinte equação:

$$2D = \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} \tag{4}$$

Sendo Δx a distância percorrida em metros a cada intervalo Δt em segundos.

III. Resultados e Discussão

A partir das simulações com probabilidades tanto iguais quanto distintas de movimentação para cada lado foi possível obter os seguintes resultados:

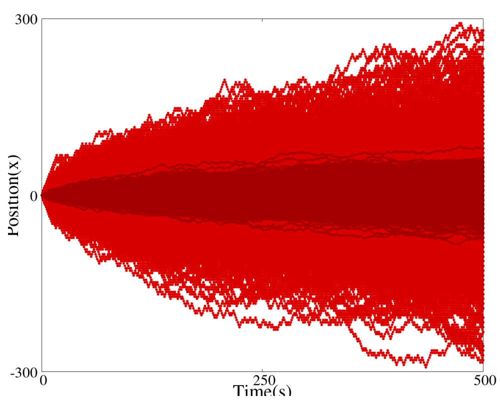

Figura 1: Trajetórias de dois conjuntos diferentes em difusão normal. Em marrom, conjunto com movimentação de 1 metro por segundo; em vermelho, conjunto com movimentação de 4 metros por segundo.

Pode-se observar na Figura 1 a dispersão das partículas em função do tempo. É notável que à medida em que o tempo progride a discrepância entre a distância relativa das partículas aumenta gradativamente, de maneira que suas trajetórias se distanciam umas das outras gerando a forma do gráfico. Note que podemos encontrar uma simetria entre a área do gráfico que se encontra abaixo de zero com a área acima de zero, que significa que a média total da posição das partículas em relação ao tempo sempre oscilará em torno de zero em casos que a probabilidade de ir para cada lado é idêntica. Além disso, é possível observar como a diferença da quantidade de movimento por segundo de cada amostra influencia diretamente na difusão total do conjunto.

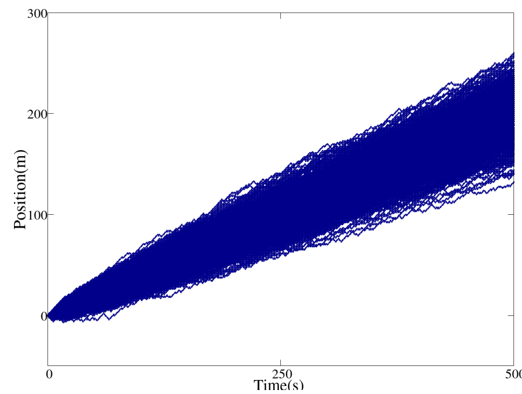

Figura 2: Trajetória de um conjunto com probabilidade de setenta por cento de mover-se para a esquerda

Já quando as condições iniciais são alteradas, pode-se notar comportamentos similares ao da Figura 2, em que é claro o desvio total do conjunto em direção ao lado que possuía uma tendência maior ao movimento. Em casos semelhantes a esse, é possível encontrar a velocidade de drift, que possui uma relação direta com a distribuição das probabilidades, ou seja, quanto maior a discrepância entre as chances de ir para cada sentido, maior será a velocidade de drift e mais o sistema se desviará para um lado específico.

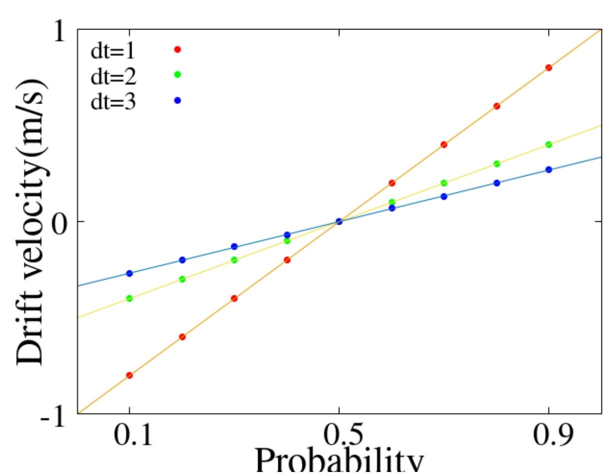

Figura 3: Demonstração do comportamento linear da variação da velocidade de drift para 3 intervalos de tempo em relação ao desequilíbrio de probabilidades

Ao observar a Figura 3, que apresenta valores de velocidade de drift baseados na inclinação da reta formada pela velocidade média para cada probabilidade por intervalo de tempo, é possível notar que quanto maior a discrepância entre as probabilidades de ir para cada lado, maior se torna a velocidade de drift. Além disso, existe uma correspondência inversamente proporcional da velocidade de drift em relação ao intervalo de tempo entre cada movimentação. A partir desses pressupostos, é possível inferir uma relação entre a velocidade média do conjunto e a probabilidade de movimentação existente, dada pela Equação 2. Isso se dá pelo fato de a velocidade de drift depender intimamente da influência da probabilidade e da influência dela sobre a velocidade média. Vale notar que, na expressão apresentada, a equação se iguala a zero caso a probabilidade seja de 0,5.

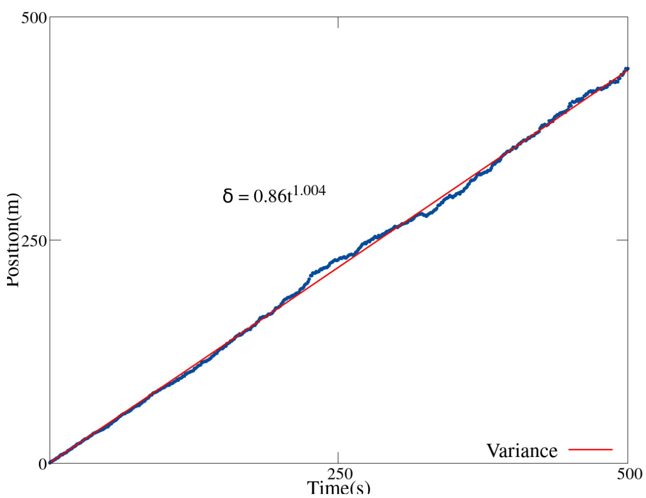

Figura 4: Ajuste linear da variância em cada posição no tempo

A variância do sistema apresenta sempre um comportamento linear, como é possível observar na Figura 4. Com o ajuste, foi possível realizar o teste de linearidade a partir da verificação do grau de t, que apresentou grau bem próximo a 1. Pode-se observar uma reta, que é crescente por conta do distanciamento progressivo entre as amostras como foi possível observar nas Figuras 1 e 2, causando assim o ganho na variância. Também é possível observar uma constante no coeficiente de t. Esse elemento, por ser constante, representa o coeficiente angular, ou seja, a taxa de crescimento da variância. Em outras palavras, temos a partir dessa constante o coeficiente de difusão. Já que as amostras se espalham de maneira bilateral, o coeficiente pode ser estimado dividindo a constante na relação pela metade, como é possível observar na Equação 3. Portanto, a variância entre as amostras será sempre diretamente proporcional à constante difusiva, e quanto maior a distância que cada amostra pode percorrer a cada intervalo de tempo, maior será também essa constante.

Ao ser analisado em diversos cenários das simulações realizadas, o coeficiente de difusão pode apresentar propriedades interessantes. À medida em que é alterada a distância a ser percorrida (Δx) por intervalo de tempo (Δt), pode ser

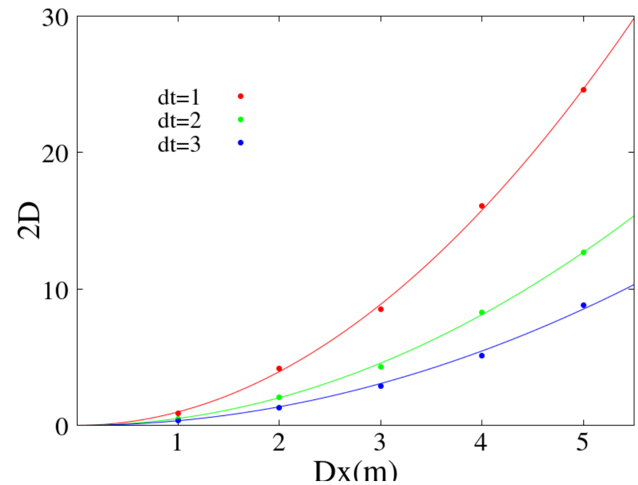

Figura 5: Valores de $2D$ em função de Δx para 3 Δt's diferentes

observado um comportamento exponencial com os valores de $2D$, enquanto a alteração de Δt implica na magnitude da abertura da curva formada. É importante observar que todas as linhas coincidem-se em zero quando a distância a ser percorrida é nula, e voltam a crescer exponencialmente à medida que distanciam-se da origem. A partir dessa análise, pode-se inferir uma relação entre o coeficiente e as medidas de tempo e espaço do sistema. Já que a função apresenta um comportamento parabólico, $2D$ seria proporcional ao quadrado da distância, e por outro lado, inversamente proporcional ao intervalo de tempo, como é possível observar na Equação 4. Isso define também o coeficiente de difusividade como uma propriedade fortemente ligada à liberdade e rapidez de movimento do grupo amostral.

IV. Conclusão

A partir deste trabalho, foi possível estimar diversas grandezas pertencentes aos sistemas difusivos e observar as relações formadas entre si, de forma que a partir de um fragmento do sistema pode-se estimar várias outras características tanto de um mesmo sistema, quanto de qualquer outro em um contexto difusivo.

Os sistemas de difusividade ainda são grandes objetos de estudo e pesquisa nos dias de hoje. As propriedades observadas são de enorme importância para o entendimento dos movimentos Brownianos. Com a compreensão desses conceitos, é possível observar e analisar as correspondências entre os diferentes tipos de difusão e tendências de movimentos difusivos, tornando-nos capazes de estimar com mais discernimento esse fenômeno nos inúmeros contextos em que se é encontrado. As aplicações de tais conceitos são e ainda serão de grande utilidade para as mais vastas áreas da ciência e da tecnologia.