Spesifikasi Tugas Besar 1

IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

Sistem Persamaan Linier, Determinan, dan Penerapannya

Semester I Tahun 2025/2026

`v1.1`
`DEADLINE: JUMAT, 2025/10/10 23:59 WIB`

Laboratorium Ilmu dan Rekayasa Komputasi
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung

Dokumen spesifikasi tugas besar ini disusun oleh asisten Laboratorium Ilmu dan Rekayasa Komputasi dari mahasiswa Teknik Informatika angkatan 2023. Untuk berjaga-jaga dengan adanya revisi, salinan terbaru dari dokumen ini selalu dapat diakses di sini.

0 Daftar Revisi

- `v1.0` — [2025/09/17 13.00] — Versi rilis awal.
- `v1.1` — [2025/10/05 01.00] —Penambahan dasar teori untuk regresi polinomial, batasan untuk menangani input dalam notasi pecahan, cara penulisan variabel parametrik untuk SPL dengan banyak solusi, serta meringankan batasan untuk regresi.

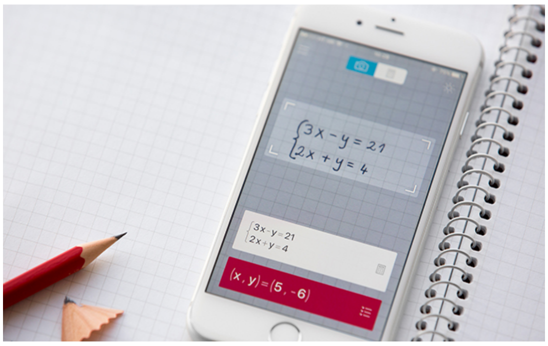
Daftar Isi

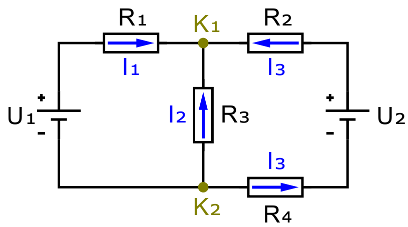
1 Pendahuluan

Aplikasi seperti Photomath telah menjadi solusi populer dalam membantu menyelesaikan berbagai permasalahan matematika, termasuk soal matriks dan sistem persamaan linier yang kompleks. Kemampuan aplikasi tersebut dalam memberikan langkah-langkah penyelesaian secara otomatis tidak terlepas dari penerapan algoritma dan konsep matematika yang kuat, khususnya aljabar linier.

Aljabar linier merupakan salah satu cabang matematika yang sangat penting dalam pengembangan ilmu komputer, teknik, fisika, ekonomi, dan berbagai bidang lainnya. Dalam kehidupan sehari-hari, konsep matriks, dan sistem persamaan linier sering kali diaplikasikan untuk menyelesaikan berbagai persoalan nyata, mulai dari pemodelan data, analisis statistik, hingga simulasi sistem dinamis.

Pada tugas besar ini, Anda akan mengimplementasikan berbagai metode penyelesaian sistem persamaan linier, perhitungan determinan, pencarian invers matriks, interpolasi polinomial, interpolasi kurva Bézier kubik, dan regresi polinomial menggunakan bahasa pemrograman Java dalam bentuk pustaka (*library*) yang dapat digunakan secara modular dan terdokumentasi dengan baik.





Gambar 1: Aplikasi Photomath (kiri) dan diagram rangkaian listrik (kanan) . (sumber 1 2)

Penyelesaian sistem persamaan linier, misalnya, sangat krusial dalam pemodelan sirkuit listrik, analisis struktur bangunan, hingga pemrosesan citra digital. Sementara itu, interpolasi dan regresi polinomial digunakan untuk memperkirakan nilai di antara data yang tersedia atau memprediksi tren data di masa depan.

Melalui tugas besar ini, diharapkan Anda tidak hanya memahami teori di balik metode-metode tersebut, tetapi juga mampu mengimplementasikannya secara nyata yang dapat digunakan untuk menyelesaikan berbagai kasus uji (*test cases*) yang telah disediakan.

Secara formal, tujuan dari tugas besar ini adalah:

- Mengimplementasikan berbagai metode penyelesaian sistem persamaan linier, perhitungan determinan, invers matriks, interpolasi, dan regresi polinomial secara mandiri dalam bahasa Java.
- Membuat pustaka (*library*) yang dapat digunakan secara modular dan terdokumentasi dengan baik.
- Mengintegrasikan pustaka yang dibuat ke dalam sebuah program yang dapat menerima masukan dari pengguna dan menampilkan hasilnya dengan format yang jelas.
- Menguji pustaka yang dibuat pada berbagai kasus uji dan menganalisis hasilnya.

Dengan demikian, tugas besar ini diharapkan dapat menjadi sarana pembelajaran yang efektif dalam memahami dan mengaplikasikan konsep-konsep aljabar linier secara komputasional, serta membekali Anda dengan keterampilan praktis yang sangat dibutuhkan di dunia profesional.

2 Dasar Teori

2.1 Sistem Persamaan Linear

Sistem Persamaan Linear (SPL) adalah himpunan berhingga dari persamaan-persamaan linear dengan variabel-variabel yang sama. Bentuk umum dari SPL dengan m persamaan dan n variabel adalah

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

atau, dalam bentuk perkalian matriks (kiri) dan matriks *augmented* (kanan),

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{b} \quad \longrightarrow \quad \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{array}\right].$$

Solusi dari SPL dapat berupa solusi tunggal, banyak solusi, atau tidak ada solusi. Metode penyelesaian yang umum digunakan antara lain eliminasi Gauss, eliminasi Gauss-Jordan, kaidah Cramer, dan metode matriks balikan.

2.2 Determinan Matriks

Determinan adalah sebuah nilai skalar khusus yang dapat dihitung dari elemen-elemen sebuah matriks persegi. Determinan dari matriks A dinotasikan sebagai $\det(A)$ atau $|A|$. Nilai determinan sangat krusial karena dapat mengindikasikan apakah matriks tersebut memiliki invers. Beberapa metode untuk menghitung determinan matriks mencakup metode ekspansi kofaktor dan metode reduksi baris.

2.3 Invers Matriks

Invers dari sebuah matriks persegi A adalah matriks A^{-1} yang memenuhi properti $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, di mana I adalah matriks identitas. Sebuah matriks hanya memiliki invers jika dan hanya jika determinannya tidak nol ($\det(A) \neq 0$). Matriks yang memiliki invers disebut matriks *invertible* atau non-singular. Perhitungan invers dari suatu matriks dapat dilakukan dengan metode matriks adjoin maupun metode eliminasi Gauss-Jordan.

2.4 Interpolasi Polinomial

Interpolasi polinomial adalah metode untuk menentukan suatu polinomial $P_n(x)$ berderajat n yang melalui $n+1$ titik data $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, x_i diurutkan dengan x_0 terkecil dan x_n terbesar. Secara umum, polinomial tersebut dapat dituliskan sebagai:

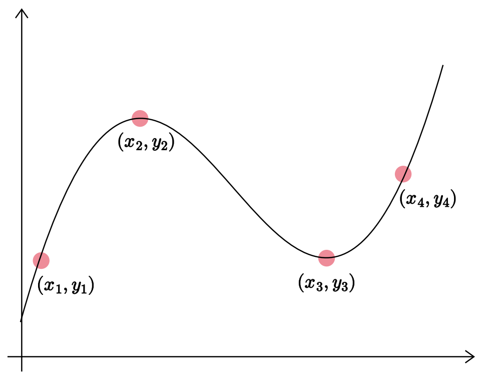
$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

dengan koefisien $a_0, a_1, \ldots, a_n$ yang ditentukan sedemikian rupa sehingga $P_n(x_{\text{perkiraan}}) = y_{\text{perkiraan}}$ untuk semua nilai $x_0 < x_{\text{perkiraan}} < x_n$. Derajat persamaan polinom ditentukan oleh jumlah titik data yang diberikan dikurangi satu.

Koefisien polinomial dapat dicari dengan menyulihkan titik-titik data ke dalam persamaan polinomial dan menyelesaikan sistem persamaan linear yang dihasilkan dengan metode eliminasi Gauss yang dijelaskan sebelumnya. Kita dapat menyusun sistem persamaan linear sebagai berikut.

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \cdots + a_nx_0^n & = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \cdots + a_nx_1^n & = y_1 \\ \vdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \cdots + a_nx_n^n & = y_n \end{cases}$$

Persamaan-persamaan di atas dapat dipetakan menjadi sebuah permasalahan sistem persamaan linear, sehingga dapat diselesaikan dengan menggunakan metode eliminasi Gauss untuk menyelesaikan



Gambar 2: Contoh interpolasi polinomial melalui empat titik data.

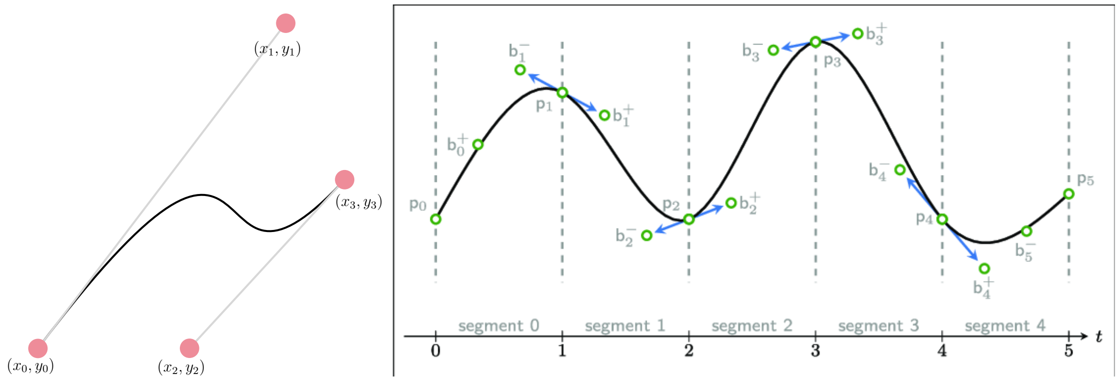
sistem tersebut dan menemukan koefisien polinomial $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Dari polinom $P_n(x)$ yang dibentuk dengan koefisien tersebut, kita dapat memperkirakan nilai y untuk nilai x yang berada di antara titik-titik data yang diberikan (interpolasi) maupun di luar titik-titik data tersebut (ekstrapolasi).

2.5 Interpolasi Splina Bézier Kubik

Ketika menggunakan *pen tool* di Adobe Photoshop/Illustrator, kita akan berhadapan dengan kurva Bézier, atau lebih spesifiknya kurva Bézier kubik. Kurva ini sangat berguna untuk menggambar bentuk-bentuk halus dan kompleks dengan kontrol yang presisi.

Kurva Bézier kubik adalah kurva parametrik yang didefinisikan oleh empat titik kontrol yang mempengaruhi bentuk kurva tersebut. Titik kontrol pertama (P_0) dan terakhir (P_3) adalah titik awal dan akhir kurva, sedangkan titik-titik kontrol lainnya (P_1 dan P_2) menentukan arah dan kelengkungan kurva. Secara matematis, kurva Bézier kubik dapat ditulis sebagai persamaan parametrik

$$B(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3 P_3, \qquad 0 \le t \le 1.$$



Gambar 3: Kurva Bézier kubik dengan empat titik kontrol (kiri) dan kurva komposit yang tersusun atas banyak splina Bézier kubik (kanan, sumber).

Misalkan kita diberikan titik-titik interpolasi $S_0, S_1, \ldots, S_n$ dan kita perlu menemukan titik-titik kontrol $B_0, B_1, \ldots, B_n$ yang sesuai untuk membangun kurva halus[1] yang melewati semua titik S_i. Kita dapat membangun kurvanya dari **splina Bézier kubik**, yakni himpunan kurva Bézier kubik.

Masalah ini dapat direduksi menjadi penyelesaian sistem persamaan linear[2] yang didapatkan dari hubungan antara titik-titik S_i dan titik-titik kontrol B_i (silakan baca referensi). Sistem persamaan

[1] Pada *paper* referensi kita, "halus" maksudnya adalah memenuhi kontinuitas C^2, yakni turunan keduanya selalu kontinu di mana-mana.

[2] Dari mana asal SPL ini? Coba baca referensi hehe :D

tersebut adalah

$$\begin{cases} 4\mathbf{b_1} + \mathbf{b_2} & = 6\mathbf{s_1} - \mathbf{s_0} \\ \mathbf{b_1} + 4\mathbf{b_2} + \mathbf{b_3} & = 6\mathbf{s_2} \\ \mathbf{b_2} + 4\mathbf{b_3} + \mathbf{b_4} & = 6\mathbf{s_3} \\ \dots \\ \mathbf{b_{n-2}} + 4\mathbf{b_{n-1}} & = 6\mathbf{s_{n-1}} - \mathbf{s_n} \end{cases},$$

dengan $\mathbf{b_k}$ dan $\mathbf{s_k}$ adalah vektor posisi dari titik-titik kontrol B_k dan titik-titik interpolasi S_k, atau dapat dinyatakan dalam bentuk perkalian matriks,

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & 1 & 4 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b_1} \\ \mathbf{b_2} \\ \mathbf{b_3} \\ \vdots \\ \mathbf{b_{n-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6\mathbf{s_1} - \mathbf{s_0} \\ 6\mathbf{s_2} \\ 6\mathbf{s_3} \\ \vdots \\ 6\mathbf{s_{n-1}} - \mathbf{s_n} \end{bmatrix}.$$

Karena vektor posisi $\mathbf{b_k}$ dan $\mathbf{s_k}$ memiliki dua komponen (koordinat x dan y), kita dapat memisahkan sistem persamaan di atas menjadi dua sistem persamaan linear yang terpisah, satu untuk komponen x dan satu untuk komponen y. Dengan menyelesaikan kedua sistem persamaan tersebut, kita dapat menentukan posisi titik-titik kontrol B_k yang diperlukan untuk membentuk kurva Bézier kubik yang halus dan sesuai dengan titik-titik interpolasi yang diberikan.

2.6 Regresi Polinomial Berganda (*Multivariate Polynomial Regression*)

Diberikan n titik data $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ dengan x_i adalah variabel dan y_i adalah hasil pengukuran ke-i $(1 \leq i \leq n)$, regresi linear sederhana[3] bertujuan untuk menemukan garis lurus

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \epsilon$$

yang paling sesuai dengan data tersebut dengan ϵ adalah galatnya.[4] Namun, dalam banyak kasus, besaran yang kita amati bisa dipengaruhi oleh lebih dari satu variabel. Untuk mengatasi hal ini, kita dapat menggunakan **regresi linier berganda** (*multivariate linear regression*).

Misalnya, jika y dipengaruhi oleh tiga variabel independen[5] x_1, x_2, dan x_3, kita dapat memodelkan hubungan tersebut dengan persamaan linier berganda

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \epsilon,$$

dengan ϵ adalah galat (error) yang mengikuti distribusi normal dengan rata-rata nol dan varians konstan. Tugas kita adalah mengestimasi nilai koefisien $\beta_0, \beta_1, \beta_2$, dan β_3 berdasarkan data yang diberikan. Secara umum, andaikata ada n variabel independen $x_1, x_2, \dots, x_n$, maka persamaan regresi linier berganda dapat dituliskan sebagai

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n + \epsilon,$$

sehingga jika kita memiliki m titik data dan x_{ij} adalah nilai dari variabel x_j pada titik data ke-i serta y_i dan ϵ_i adalah nilai hasil pengukuran dan galatnya pada titik data ke-i, kita dapat menuliskan sistem persamaan linear berikut untuk m titik data,

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}_{m \times 1} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}_{m \times (n+1)} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}_{(n+1) \times 1} + \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_m \end{bmatrix}_{m \times 1},$$

atau

$$Y = X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon},$$

dengan matriks Y adalah vektor hasil pengukuran, X adalah matriks desain, $\boldsymbol{\beta}$ adalah vektor koefisien, dan $\boldsymbol{\epsilon}$ adalah vektor galat.

[3] Anda sudah pernah berurusan dengan regresi linear sederhana pada praktikum Fisika Dasar semasa TPB.
[4] *Best-fit line.* β_0 adalah titik potong dengan sumbu-y dan β_1 adalah gradien garis.
[5] Maksudnya adalah independen secara linear, yakni tidak ada satupun variabel yang merupakan kombinasi linear dari variabel-variabel lainnya.

Tugas kita pada dasarnya adalah mengestimasi nilai vektor koefisien[6] $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ seakurat mungkin, atau dengan kata lain, dengan galat sekecil mungkin. Metode umum yang digunakan adalah metode kuadrat terkecil (*least squares*) yang meminimalkan jumlah kuadrat galat, yaitu $\|\boldsymbol{\epsilon}\|^2 = \|\mathbf{y} - X\boldsymbol{\beta}\|^2$. Dengan metode ini, kita dapat menemukan solusi untuk $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ dengan menyelesaikan persamaan normal berikut:[7]

$$X^T X\hat{\boldsymbol{\beta}} = X^T\mathbf{y},$$

atau

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (X^T X)^{-1} X^T\mathbf{y}. \tag{1}$$

Sekarang, bagaimana jika hubungan antara y dan variabel-variabel independennya tidak linier? Salah satu pendekatan yang dapat kita gunakan adalah **regresi polinomial berganda** (*multivariate polynomial regression*). Idenya masih mirip: mencari fungsi polinomial yang kurvanya paling sesuai dengan data yang diberikan.[8] Namun, kali ini akan terdapat variabel interaksi, yakni variabel yang merupakan hasil kali dari beberapa variabel independen. Misalnya, untuk tiga variabel independen x_1, x_2, dan x_3 dan derajat 3, fungsi polinomial yang kita hasilkan bisa saja berbentuk

$$\begin{aligned} y =& \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_1^2 + \beta_5 x_1 x_2 + \beta_6 x_1 x_3 + \beta_7 x_2^2 + \beta_8 x_2 x_3 + \beta_9 x_3^2 + \beta_{10} x_1^3 \\ &+ \beta_{11} x_1^2 x_2 + \beta_{12} x_1^2 x_3 + \beta_{13} x_1 x_2^2 + \beta_{14} x_1 x_2 x_3 + \beta_{15} x_1 x_3^2 + \beta_{16} x_2^3 + \beta_{17} x_2^2 x_3 + \beta_{18} x_2 x_3^2 + \beta_{19} x_3^3 + \epsilon. \end{aligned}$$

Secara umum, jika kita memiliki k variabel independen dan ingin membuat polinomial dengan derajat d, jumlah total suku dalam polinomial tersebut adalah $p = \begin{pmatrix} d+k \\ k \end{pmatrix}$. Lantas, bagaimana cara kita menemukan seluruh koefisien $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p$?

Kita bisa mengadopsi pendekatan serupa dengan yang kita gunakan pada regresi linier berganda. Kali ini, variabel-variabel seperti x_1^2, $x_1 x_2$, x_1^3, dan sebagainya akan dianggap sebagai variabel independen yang berbeda.[9] Dengan demikian, kita dapat menyusun sistem persamaan linear yang mirip dengan yang sebelumnya, tetapi dengan lebih banyak kolom pada matriks desain X untuk mengakomodasi semua suku dalam polinomial. Setelah itu, kita dapat menggunakan metode kuadrat terkecil untuk menemukan estimasi koefisien $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ (persamaannya sama persis seperti pada regresi linier berganda).

Misalnya, jika kita memiliki lima sampel data dan tiga variabel independen ($k = 3$) dan ingin membuat polinomial dengan derajat dua ($d = 2$), maka jumlah total suku dalam polinomial tersebut adalah $\binom{2+3}{3} = 10$ dan matriks desain X akan berbentuk seperti ini:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{11}^2 & x_{11}x_{12} & x_{11}x_{13} & x_{12}^2 & x_{12}x_{13} & x_{13}^2 \\ 1 & x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{21}^2 & x_{21}x_{22} & x_{21}x_{23} & x_{22}^2 & x_{22}x_{23} & x_{23}^2 \\ 1 & x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{31}^2 & x_{31}x_{32} & x_{31}x_{33} & x_{32}^2 & x_{32}x_{33} & x_{33}^2 \\ 1 & x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{41}^2 & x_{41}x_{42} & x_{41}x_{43} & x_{42}^2 & x_{42}x_{43} & x_{43}^2 \\ 1 & x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{51}^2 & x_{51}x_{52} & x_{51}x_{53} & x_{52}^2 & x_{52}x_{53} & x_{53}^2 \end{bmatrix},$$

yang sebenarnya analog dengan matriks desain untuk regresi linier berganda

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} & x_{17} & x_{18} & x_{19} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} & x_{26} & x_{27} & x_{28} & x_{29} \\ 1 & x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} & x_{36} & x_{37} & x_{38} & x_{39} \\ 1 & x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} & x_{46} & x_{47} & x_{48} & x_{49} \\ 1 & x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} & x_{56} & x_{57} & x_{58} & x_{59} \end{bmatrix},$$

dengan x_{ij} adalah nilai dari suku ke-j pada titik data ke-i. Pada intinya, cukup gunakan persamaan (1) untuk menemukan estimasi koefisien $\hat{\boldsymbol{\beta}}$.

[6] Tanda ˆ menunjukkan bahwa ini adalah estimasi dari nilai sebenarnya.

[7] Silakan baca referensi yang dicantumkan pada bab Referensi untuk memahami dari mana asalnya persamaan ini.

[8] Namun, kali ini, fungsi tersebut dapat melibatkan lebih dari satu variabel dan memiliki derajat yang lebih tinggi dengan derajatnya ditentukan oleh kita sendiri.

[9] Meskipun x_1^3 jelas bergantung pada x_1, x_1^3 bukanlah kombinasi linier dari variabel-variabel lainnya, sehingga sesuai dengan definisi variabel independen dalam lingkup ini.

3 Spesifikasi

3.1 Spesifikasi Wajib Program

Secara ringkas, luaran minimum yang diharapkan pada tugas besar ini terdapat tiga:

1. Buatlah pustaka (*library* atau *package*) dalam bahasa Java untuk segala perhitungan matriks, regresi, dan interpolasi yang disebut di bagian 2. Bentuk dari pustaka ini adalah file `.jar` yang dapat digunakan pada program Java lainnya.
2. Gunakan pustaka yang dibuat pada poin 1 untuk membuat program berbasis **antarmuka baris perintah** (*command line interface*, CLI) atau **antarmuka pengguna grafis** (*graphical user interface*, GUI) yang memperlihatkan fungsionalitas dari pustaka tersebut disertai dengan dokumentasi `README` pada repository GitHub. Untuk setiap fitur wajib, program dapat menerima masukan secara manual (input keyboard) maupun dari berkas `.txt` dengan format yang ditentukan.
3. Laporan mengenai pustaka dan program yang dibuat.

3.1.1 Batasan Umum Tugas Besar

1. Bahasa program yang digunakan adalah **Java**. Anda bebas untuk menggunakan versi Java apapun di atas Java versi 8.
2. Build tool yang digunakan untuk membuat program adalah `Maven` yang sudah disediakan pada repositori template yang disediakan asisten.
3. Semua pustaka Java diperbolehkan **kecuali** segala pustaka yang membantu implementasi perhitungan matriks, regresi, dan interpolasi.
   (a) Seluruh perhitungan tersebut, termasuk implementasi kelas dasar seperti matriks, harus dibuat dan diimplementasikan sendiri dalam pustaka yang dikembangkan.
   (b) Untuk perhitungan dasar matematika, hanya diperbolehkan menggunakan `java.lang.Math`.
   (c) Silakan konfirmasi di *sheets* QnA jika ada keraguan mengenai pustaka yang boleh digunakan.
4. Untuk program akhir, **error handling** untuk setiap tahapan program adalah **kewajiban**.[10] Harus dipastikan program tidak mungkin crash atau berhenti akibat suatu input, proses, atau output yang membuat program error. Satu cara umum yang direkomendasi untuk error handling adalah `Java Exception (try & catch)`.
5. Tanda desimal yang digunakan pada tugas besar ini dibebaskan untuk menggunakan koma `(,)` atau titik `(.)`. Untuk membatasi jumlah angka di belakang desimal pada penampilan, setiap bilangan dibulatkan hingga maksimal 3 angka setelah desimal. Input dari file ataupun manual harus dapat mendukung kedua pembatas koma atau titik. *Diasumsikan bilangan input tidak menggunakan pemisah ribuan.*

   Contoh bilangan valid:
   - 124320,42353
   - -42354.2354
   - 0.343
   - -79.323434
6. Program harus dapat menangani input entri matriks dalam notasi pecahan (misal: `3/4`, `-2/5`, `7/1`, dll).
7. Matriks yang diinput secara manual dapat dipastikan dimensinya **tidak lebih dari** 11×11. Sementara itu, matriks yang diinput melalui file `.txt` dapat dipastikan dimensinya **tidak lebih dari** 1001×1001. Tambahan +1 pada batasan input memperhitungkan kolom konstanta pada sistem persamaan linier.

   Catatan: Batasan input ini tidak melingkupi augmentasi yang mungkin dilakukan pada tahap perhitungan. Sebagai contoh, pada pencarian invers dengan augmentasi bisa jadi input adalah matriks 1000×1000, sehingga pada proses perhitungan invers digunakan matriks 1000×2000.

[10] Siapkan program Anda untuk beragam kemungkinan kesalahan format input! :D

8. Untuk interpolasi, dipastikan **jumlah sampel tidak lebih dari 10** baik untuk input manual maupun input file. Sementara itu, untuk regresi polinomial, dipastikan **jumlah peubah tidak lebih dari 3** dan **derajat polinom tidak lebih dari 4** baik untuk input manual maupun input file.

3.1.2 Rincian Pustaka

Secara garis besar, pustaka minimal mempunyai modul sebagai berikut:

a. Penyelesaian Sistem Persamaan Linier
   - a.1. Eliminasi Gauss
   - a.2. Eliminasi Gauss-Jordan
   - a.3. Kaidah Cramer
   - a.4. Metode Matriks Balikan

b. Mencari Determinan Matriks
   - b.1. Metode Ekspansi Kofaktor
   - b.2. Metode Reduksi Baris (OBE)

c. Mencari Invers Matriks
   - c.1. Metode Augment
   - c.2. Metode Adjoin

d. Interpolasi
   - d.1. Interpolasi Polinomial
   - d.2. Interpolasi splina Bézier kubik

e. Regresi Polinomial Berganda

3.1.3 Rincian Umum Program

Program dapat dibuat dengan pilihan menu. Urutan menu dan isinya dipersilakan dirancang masing-masing. Sebagai contoh (boleh berbeda), menu utama dapat terlihat seperti ini:

```
1.  Sistem Persamaan Linier
2.  Determinan
3.  Matriks Balikan
4.  Interpolasi
5.  Regresi Polinomial
```

Ada submenu pada tiap fitur untuk menentukan metode sesuai dengan isi pustaka pada bagian 3.1.2. Sebagai contoh setelah memilih opsi 1 pada menu utama, muncul menu untuk memilih metode sebelum input matriks:

```
1.  Eliminasi Gauss
2.  Eliminasi Gauss-Jordan
3.  Kaidah Cramer
4.  Metode Invers
```

Rincian dari submenu untuk tiap menu dapat disesuaikan dengan isi pustaka pada bagian 3.1.2.

3.1.4 Rincian Input dan Output Program

Untuk semua modul, jika format file input tidak sesuai, wajib dilakukan *error handling*. Format penamaan file input hanya untuk memperjelas isi dari file tanpa perlu membuka file. Nama file tidak boleh digunakan untuk pengecekan input.

A. **Sistem Persamaan Linier (SPL)**

Input:

- Sistem persamaan linier yang dimasukkan secara manual (diketik) atau melalui satu file `.txt` dengan format tertera di bawah. (setiap bilangan dipisahkan oleh spasi).
- Metode penyelesaian SPL, sesuai daftar pada Bagian 3.1.2.

Format Input File SPL:

Nama file: `spl_xxx.txt`
Keterangan: `xxx` adalah deskripsi bebas dari isi file.

Format isi file (matriks augmented):

```
x11   x12   ...   x1n   y1
x21   x22   ...   x2n   y2
...   ...   ...   ...   ...
xm1   xm2   ...   xmn   ym
```

Contoh:

```
3     4.5   2.8   10    12
-3    7     8.3   11    -4
0.5   -10   -9    12    0
```

Output:

- Solusi SPL:
  - Jika solusi tunggal: tampilkan nilainya.
  - Jika tidak ada solusi: tampilkan *solusi tidak ada*.
  - Jika tak hingga solusi: tampilkan dalam bentuk parametrik dengan pemilihan simbol untuk variabel parametrik dibebaskan. Contoh:

$$x_4 = -2, \quad x_3 = 2s - t, \quad x_2 = s, \quad x_1 = t.$$

    Untuk menangani kasus jika variabel parametrik terlalu banyak sehingga kita tidak punya cukup huruf untuk mengcover semuanya, boleh menggunakan notasi s_i (atau pilih sembarang huruf lainnya) sebagai variabel parametrik. Contoh: $x_3 = 2s_5 - s_6$.
- Langkah-langkah proses sesuai metode.
- Output dapat disimpan dalam file `.txt`, berisi:
  - Metode penyelesaian SPL
  - Input yang digunakan
  - Hasil SPL

B. **Determinan**

Input:

- Matriks yang dimasukkan secara manual (diketik) atau melalui satu file `.txt` dengan format tertera di bawah (setiap bilangan dipisahkan oleh spasi).
- Metode pencarian determinan, sesuai daftar pada Bagian 3.1.2.

Format Input File Determinan:

Nama file: `determinan_xxx.txt`
Keterangan: `xxx` adalah deskripsi bebas dari isi file.

Format isi file (matriks):

```
x11   x12   ...   x1n
x21   x22   ...   x2n
...   ...   ...   ...
xn1   xn2   ...   xnn
```

Contoh:

```
3     4.5   2.8
-3    7     8.3
0.5   -10   -9
```

Output:

- Nilai determinan matriks.
- Langkah-langkah perhitungan sesuai metode.
- Output dapat disimpan dalam file `.txt`, berisi:
  - Metode pencarian determinan
  - Input yang digunakan
  - Hasil determinan

C. **Matriks Balikan (Invers)**

Input:

- Matriks yang dimasukkan secara manual (diketik) atau melalui satu file `.txt` dengan format tertera di bawah (setiap bilangan dipisahkan oleh spasi).
- Metode pencarian matriks balikan, sesuai daftar pada Bagian 3.1.2.

Format Input File Matriks Balikan:

Nama file: `inverse_xxx.txt`
Keterangan: `xxx` adalah deskripsi bebas dari isi file.

Format isi file (matriks):

```
x11   x12   ...   x1n
x21   x22   ...   x2n
...   ...   ...   ...
xn1   xn2   ...   xnn
```

Contoh:

```
3     4.5   2.8
-3    7     8.3
0.5   -10   -9
```

Output:

- Matriks balikan hasil.
- Langkah-langkah perhitungan sesuai metode.
- Output dapat disimpan dalam file `.txt`, berisi:

- Metode pencarian matriks balikan
- Input yang digunakan
- Matriks balikan hasil

—

D. **Interpolasi**

Input:

- Jumlah titik sampel n.
- Data titik sampel $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, dimasukkan secara manual atau melalui satu file `.txt` dengan format tertera di bawah.
- Metode interpolasi, sesuai daftar pada Bagian 3.1.2.

Format Input File Interpolasi:

Nama file: `interpolasi_xxx.txt`
Keterangan: `xxx` adalah deskripsi bebas dari isi file.

Format isi file (titik sampel):

```
x1   y1
x2   y2
...   ...
xn   yn
```

Contoh (3 titik sampel):

```
3    4.5
-3   7
0.5  -10
```

Output (interpolasi polinomial):

- Persamaan interpolasi $y(x)$.
- Dari persamaan yang dibentuk, program dapat menerima input nilai-nilai x_t tertentu dalam domain interpolasi untuk mengevaluasi nilai y_t.
- Output dapat disimpan dalam file `.txt`, berisi:
  - Metode interpolasi
  - Input yang digunakan
  - Domain interpolasi
  - Persamaan hasil

Output (interpolasi splina Bézier kubik):

- Titik kontrol untuk setiap segmen kurva Bézier kubik.

E. **Regresi Polinomial Berganda Input:**

- Jumlah titik sampel n.
- Derajat regresi m.
- Data titik sampel $(x_{1,1}, x_{1,2}, \ldots, x_{1,k}, y_1), (x_{2,1}, x_{2,2}, \ldots, x_{2,k}, y_2), \ldots, (x_{n,1}, x_{n,2}, \ldots, x_{n,k}, y_n)$, di mana k adalah jumlah peubah (variabel independen) pada regresi, $k \leq 5$, dimasukkan secara manual atau melalui satu file `.txt` dengan format tertera di bawah.

Format Input File Regresi:

Nama file: `regresi_xxx.txt`
Keterangan: `xxx` adalah deskripsi bebas dari isi file.

Format isi file (titik sampel dan derajat pangkat):

```
x_11 x_12 ... y_1
x_21 x_22 ... y_2
...   ...   ...
x_n1 x_n2 ... y_n
m
```

Contoh (6 titik sampel, dengan jumlah peubah = 2, dan derajat pangkat = 5):

```
3    4.5
-3   7
0.5  -10
9    3.4
-8   7.9
10   20
5
```

Output:

- Persamaan regresi $y(x)$.[11]
- Dari persamaan yang dibentuk, program dapat menerima input nilai-nilai $x_{t,1}, x_{t,2}, \ldots, x_{t,k}$ tertentu dalam domain regresi untuk mengevaluasi nilai y_t.
- Output dapat disimpan dalam file `.txt`, berisi:
  - Input yang digunakan
  - Persamaan hasil

3.2 Spesifikasi Bonus

3.2.1 Antarmuka Pengguna Grafis (APG/GUI)

Silahkan gunakan GUI jika ingin membuat aplikasi yang lebih interaktif. Perlu diingat bahwa tugas besar ini menggunakan Java, sehingga kakas yang digunakan dalam membuat GUI haruslah berasal dari bahasa Java. Anda juga hanya diperbolehkan untuk membuat Desktop App dari tugas besar ini sehingga **tidak diperbolehkan untuk membuat aplikasi web**.

Kakas GUI yang boleh digunakan pada tugas besar ini adalah JavaFX.[12] IDE yang digunakan dibebaskan (Contoh: IntelliJ IDEA, NetBeans, dll). Untuk mempermudah, asisten telah memberikan build tool beserta file GUI yang bisa kalian modifikasi di repositori kalian. Semua fitur wajib harus dapat dijalankan dengan GUI jika anda membuat bonus ini.

3.2.2 Seamless Cloning dengan Persamaan Poisson

Ini adalah penerapan dari penyelesaian SPL yang bisa menanam suatu gambar pada gambar lain dengan seamless (terpadu). Berikut adalah contoh hasilnya,

[11] Variabel x_1^2 dapat dituliskan sebagai `x_1^2`.
[12] Gunakan Scene Builder untuk membantu merancang desain GUI secara interaktif (*drag-and-drop*).

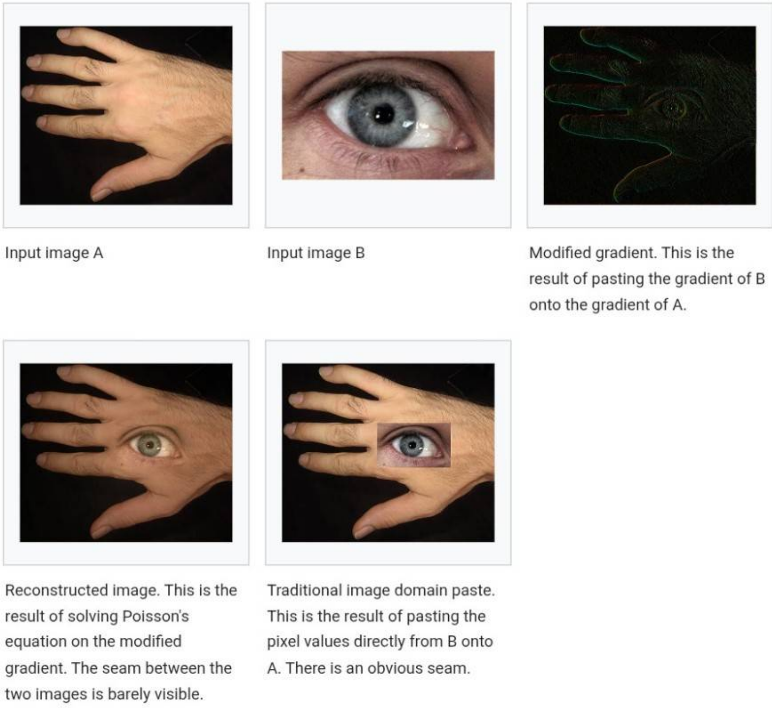


Image B ditanam pada Image A secara seamless.

Biarkan gambar A sebagai gambar dasar dan gambar B sebagai gambar yang akan ditanam pada A. Untuk bonus ini, berbeda dengan gambar di atas, gambar yang hanya perlu diubah adalah gambar B sehingga hanya gambar B yang akan menyesuaikan diri di gambar A. Selain itu, gambar B yang valid adalah gambar B yang lebih kecil di A dan *offset*-nya sedemikian rupa sehingga masih dalam range gambar A. Jika tidak valid, harus ditolak program menggunakan *error handling*.

Poisson Image Editing dapat dicapai dengan memperhitungkan nilai intensitas pada suatu pixel yang ditinjau menggunakan pixel-pixel tetangganya. Selengkapnya dapat dibaca dari artikel berikut: Poisson Image Editing Persamaannya sebagai berikut yang diterapkan pada gambar B:

$$4f(c) - f(r) - f(l) - f(u) - f(d) = g(r) + g(l) + g(u) + g(d)$$

- c (current): pixel yang dicari pada gambar B.
- r, l, u, d (right, left, up, down): tetangga dari pixel yang dicari.
- $f(x)$: fungsi intensitas[13] dari setiap pixel.
- $g(x)$: fungsi gradien[14] dari suatu tetangga pixel yang dicari.

Operasi matriks untuk bonus ini cukup intensif. Dengan gambar B berdimensi $m \times n$, jumlah variabel yang perlu dicari juga pada SPL $m \times n$ juga. Ini akan terlalu besar untuk dicari dengan eliminasi Gauss-Jordan karena memerlukan matriks $m^2 \times n^2$.

Oleh karena itu, untuk menyelesaikan bonus ini, harus diselesaikan SPL-nya dengan metode lain, yakni **Metode Jacobi**. Metode Jacobi cocok untuk SPL yang *sparse*, yakni SPL yang memiliki banyak varaibel, tetapi untuk satu persamaannya tidak menggunakan banyak variable dibanding sistemnya secara keseluruhan. Jadi, untuk kasus Poisson Image Editing yang hanya menggunakan tidak lebih dari 5 variabel untuk setiap persamaan, metode ini sangat cocok.

Metode tersebut merupakan cara untuk mengaproksimasi nilai dari SPL secara iteratif. Metode ini dapat dibaca lebih lanjut berikut: Iterative methods for sparse linear systems.

[13]Intensitas pada pixel gambar berupa nilai R, G, B, A. Ingat bahwa intensitas tetangga yang juga termasuk gambar B belum diketahui sehingga merupakan variabel yang harus dicari pada SPL

[14]Tujuan dari fungsi gradien ini adalah untuk memperoleh mask/bentuk dari gambar B. Dari itu, seandainya tetangga adalah pixel gambar A, nilainya akan nol. Gradien dari pixel tetangga adalah intensitas pixel dicari dikurang intensitas pixel tetangga

Input untuk bonus ini adalah:

- **Gambar A**: gambar dasar
- **Gambar B**: gambar yang ingin ditempelkan
- *Offset* lokasi gambar B pada gambar A: (x, y) dengan origin pada atas kiri gambar A

Output dari bonus adalah gambar gabungan A dan B yang dapat disimpan.

3.2.3 Menggunakan LaTeX dalam Penulisan Laporan

LaTeX adalah sistem penyusunan dokumen yang sering digunakan di ranah ilmiah, khususnya yang membutuhkan penulisan rumus matematika secara intensif, tetapi tidak hanya terbatas pada itu. Bahkan dokumen spesifikasi yang super rapi ini pun ditulis menggunakan LaTeX.

Salah satu keuntungan utama LaTeX adalah dapat menghasilkan berkas dalam format teks biasa (.tex), sehingga sangat cocok digunakan secara kolaboratif lewat Git untuk *version control*. Untuk mendapatkan bonus ini, buatlah dokumen menggunakan LaTeX lalu export ke format .pdf. Pastikan file mentah (.tex) juga disertakan dalam folder yang sama dengan laporan sebagai bukti penggunaan LaTeX.

3.2.4 Video Pengenalan Program

Terdapat banyak cara untuk menjelaskan cara kerja sebuah program. Namun penjelasan secara visual dan kreatif adalah teknik penjelasan yang sangat menarik perhatian orang-orang. Oleh karena itu, anda diperbolehkan membuat sebuah video penjelasan tentang program yang dibuat dengan durasi maksimal 15 menit. Buatlah video ini sekreatif mungkin (Jangan hanya menjelaskan program saja, tunjukkan skill acting kalian :D). Untuk referensi, silakan cek tautan ini.

3.3 Prosedur Pengerjaan

1. Tugas dikerjakan secara berkelompok dengan anggota sebanyak **3 orang** (boleh lintas kelas maupun lintas kampus) yang **dipilih sendiri**. Buka *sheets* pendataan kelompok untuk mendaftarkan kelompok Anda dan memilih asisten sebelum **19 September 2025 pukul 23:59 WIB** karena peserta mata kuliah yang tidak terdata akan dipasangkan secara acak.
2. Masuk ke GitHub Classroom Algeo25 dan buat kelompok menggunakan nama yang **sama persis dengan yang didaftarkan di *sheets***.[15] Kerjakan tugas besar di repositori kelompok Anda (`https://github.com/IRK-23/algeo1-<namakelompok>`).
3. Anda dapat mengajukan pertanyaan kepada asisten melalui *sheets* QnA.
4. Ajukan asistensi kepada asisten jika dibutuhkan. Asisten kelompok Anda juga akan menjadi penguji saat demo.
5. Setelah tenggat pengumpulan tugas besar ini, jadwal dan teknis demo akan diumumkan melalui milis.
6. **DILARANG** menyontek pekerjaan orang lain atau menggunakan bantuan *generative AI* seperti ChatGPT, DeepSeek, Claude, dan Gemini (tetapi tidak terbatas pada itu). Segala bentuk kecurangan akan ditindaklanjuti sesuai dengan sanksi akademik yang ada.

3.4 Spesifikasi Laporan

1. **Sampul**: mirip seperti sampul dokumen ini[16] tetapi ganti logo IRK dengan foto kalian bertiga bersama-sama dan tulisan "Spesifikasi" menjadi "Laporan".
2. **Bab 1 (Pendahuluan)**: deskripsi persoalan; boleh menyalin bab pendahuluan dari dokumen ini.
3. **Bab 2 (Dasar Teori)**: teori singkat mengenai sistem persamaan linier, eliminasi Gauss dan Gauss-Jordan, matriks kofaktor, matriks adjoin, determinan, matriks invers, kaidah Cramer, interpolasi polinomial, interpolasi splina Bézier kubik, dan regresi polinomial berganda. Jika mengerjakan bonus, tambahkan juga teori mengenai metode iteratif Jacobi dan Poisson *image editing*.[17]

[15] Atau bergabung dengan tim Anda jika sudah ada anggota kelompok yang membuatnya lebih dahulu.
[16] Tidak harus dalam *dark mode* dan tanpa keterangan tenggat (DL).
[17] Untuk determinan dan invers, sertakan pembahasan untuk kedua metode yang ada.

4. **Bab 3 (Implementasi)**: penjelasan implementasi pustaka dan program dalam Java, meliputi struktur program dan kelas-kelas penting serta cara kerja dan alur program.
5. **Bab 4 (Eksperimen)**: Hasil eksekusi program terhadap seluruh kasus uji pada Bab 5 **beserta** analisisnya.[18]
6. **Bab 5 (Penutup)**: kesimpulan dari seluruh pengerjaan tugas besar, saran kepada asisten, dan komentar tiap anggota kelompok terhadap tugas besar.
7. **Daftar Pustaka**: seluruh referensi yang Anda gunakan untuk bagian dasar teori maupun keseluruhan pengerjaan tugas besar ini. Gunakan format sitasi IEEE.[19]
8. **Lampiran**: tautan menuju repositori GitHub dan video (jika mengerjakan bonus tersebut) kelompok Anda.

3.5 Kriteria Penilaian

Penilaian tugas besar ini dirincikan pada tabel di bawah. Nilai terdiri atas tiga komponen utama, yaitu implementasi dan demo program (80 poin), laporan (20 poin), dan bonus. Total poin pada kolom bonus memang berjumlah 30, tetapi skor bonus yang dihitung maksimal 20 poin. Artinya, jika kalian mengerjakan semua bonus dan memperoleh nilai lebih dari 20, maka skor bonus akan tetap dicatat sebagai 20 (tidak bisa melebihi 20 poin).

Tabel 1: Rincian Skor Maksimum untuk Tiap Komponen Penilaian

Komponen	**Skor**
Implementasi dan Demo	80
Dokumentasi	20
(Bonus) Antarmuka Pengguna Grafis (GUI)	15
(Bonus) Seamless Cloning dengan Persamaan Poisson	10
(Bonus) Menggunakan LaTeX dalam Penulisan Laporan	5
(Bonus) Video Pengenalan Program	3
Total	120

[18] Untuk interpolasi polinomial, cantumkan juga plot titik dan persamaan garis pada aplikasi visualisasi grafik seperti Geogebra, Desmos, dan lain sebagainya.
[19] Kalian seharusnya sudah pernah menjumpai ini ketika mengerjakan makalah IF1220 Matematika Diskrit. :D

4 Pengumpulan

4.1 *Deliverables*

Berkas yang perlu dikumpulkan tiap kelompok untuk tugas besar ini adalah **kode sumber** (*source code*) dan **laporan** sesuai spesifikasi dengan rincian sebagai berikut.

1. Program dan laporan disimpan di dalam repositori GitHub yang otomatis dibuat ketika bergabung ke dalam GitHub Classroom `Algeo25`.
2. Seminimalnya terdapat empat folder berikut di dalam repositori:
   (a) Folder `docs` yang berisi *softcopy* laporan dalam bentuk PDF dengan nama file <nama_kelompok>.pdf.
   (b) Folder `bin` yang berisi file JAR dari program yang bisa dijalankan.
   (c) Folder `src` yang berisi kode sumber dari program.
   (d) Folder `test` yang berisi data kasus uji dalam file `txt`.
3. Pastikan menggunakan *semantic commit message* yang sesuai pada repositori Anda.
4. Sertakan juga README yang dibuat sejelas mungkin. README minimal memuat penjelasan singkat program, alur program, dan tata cara menjalankan program. Gunakan README ini sebagai contoh.
5. Pastikan repositori bersifat *private*[20] selama pengerjaan tugas besar.
6. Pastikan *bytecode* Java di dalam folder `bin` dapat dijalankan.
7. Selain dijalankan saat demo, program akan dicoba dijalankan asisten di luar waktu demo untuk salah satu aspek penilaian. Asisten pemeriksa tidak akan melakukan pengaturan atau kompilasi lagi agar program dapat berjalan. Program yang tidak dapat dijalankan tidak akan diberi nilai.

4.2 Teknis Pengumpulan

1. Program dan laporan dikumpulkan dengan membuat rilis pada repositori GitHub untuk tiap kelompok. Selagi belum mencapai tenggat pengumpulan, Anda boleh memperbaiki pengerjaan Anda dan mengumpulkannya kembali sebagai revisi.
2. Untuk rilis, gunakan tag berformat `v1.x` dengan x adalah nomor revisi ($x = 0$ untuk pengumpulan pertama).
3. Versi yang digunakan untuk penilaian adalah revisi terakhir. Catat bahwa ini berarti jika Anda sudah selesai mengerjakan sebelum tenggat lalu membuat revisi dan mengumpulkannya setelah tenggat, pekerjaan Anda dianggap terlambat. [21]
4. Tenggat pengumpulan tugas besar[22] adalah hari **Rabu, 8 Oktober 2025 pukul 21:23 WIB**.
5. Terdapat penalti 1 poin untuk tiap 6 menit keterlambatan. Keterlambatan dihitung dari selisih (dibulatkan ke kelipatan 6 di atasnya[23]) antara tenggat pengerjaan tugas besar dengan waktu ketika rilis terbaru dibuat di repositori GitHub.

[20] Boleh diubah ke *public* setelah tenggat pengumpulan tugas besar berlalu.
[21] Anda boleh saja meminta kepada asisten untuk menggunakan revisi sebelumnya yang tidak melewati tenggat, tetapi ini berarti perbaikan pada revisi terakhir Anda tidak dianggap. :D
[22] Waktu paling lambat untuk membuat rilis di repositori GitHub.
[23] Misalnya, keterlambatan 3 menit maupun 6 menit sama-sama menghasilkan penalti 1 poin.

5 Studi dan Kasus Uji

Untuk menguji program yang telah dibuat, tes dengan beberapa SPL, persoalan interpolasi polinom, dan matriks-matriks sebagai berikut:

5.1 Determinan Matriks

Tentukan nilai determinan dari matriks-matriks berikut. Uji masing-masing kasus dengan dua metode yang terdapat di rincian pustaka 3.1.2.

5.1.1 Kasus Uji 1

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 & 11 \\ 10 & 14 & 18 & 22 \\ 15 & 21 & 27 & 33 \\ 20 & 28 & 36 & 44 \end{bmatrix}$$

5.1.2 Kasus Uji 2

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

5.2 Invers Matriks

Tentukan invers dari matriks-matriks berikut. Uji masing-masing kasus dengan dua metode yang terdapat di rincian pustaka 3.1.2.

5.2.1 Kasus Uji 1

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & 7 & 8 & -9 \\ 12 & 13 & 2 & 14 \\ 17 & 18 & 19 & 4 \end{bmatrix}$$

5.2.2 Kasus Uji 2

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 \\ 10 & 14 & 18 & 22 & 26 & 30 \\ 15 & 21 & 27 & 33 & 39 & 45 \\ 20 & 28 & 36 & 44 & 52 & 60 \\ 25 & 35 & 45 & 55 & 65 & 75 \\ 30 & 42 & 54 & 66 & 78 & 90 \end{bmatrix}$$

5.3 Sistem Persamaan Linear $Ax = b$

Tentukan solusi SPL $Ax = b$ berikut. Uji masing-masing kasus dengan empat metode yang terdapat di rincian pustaka 3.1.2.

5.3.1 Kasus Uji 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & -7 & -5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

5.3.2 Kasus Uji 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

5.3.3 Kasus Uji 3

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

5.3.4 Kasus Uji 4

$$A = H = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

H adalah matriks Hilbert. Coba uji untuk nilai $n = 6$ dan $n = 10$.

5.4 Sistem Persamaan Linear Berbentuk Matriks *Augmented*

Tentukan solusi SPL berbentuk matriks *augmented* berikut. Uji masing-masing kasus dengan empat metode yang terdapat di rincian pustaka 3.1.2.

5.4.1 Kasus Uji 1

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

5.4.2 Kasus Uji 2

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ -4 & 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

5.5 Sistem Persamaan Linier Berbentuk Umum

Tentukan solusi SPL berbentuk umum berikut. Uji masing-masing kasus dengan empat metode yang terdapat di rincian pustaka 3.1.2.

5.5.1 Kasus Uji 1

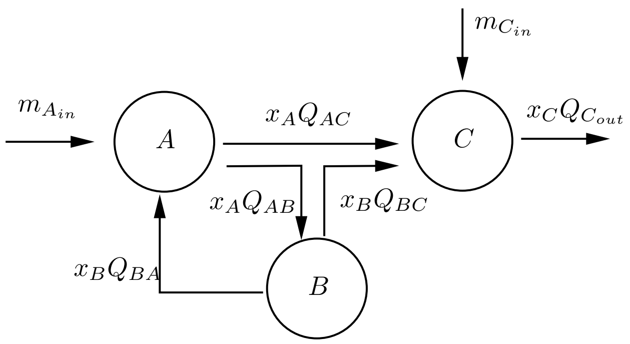
$$\begin{aligned}
8x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 0 \\
2x_1 + 9x_2 - x_3 - 2x_4 &= 1 \\
x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 &= 2 \\
x_1 + 6x_3 + 4x_4 &= 3
\end{aligned}$$

5.5.2 Kasus Uji 2

$$\begin{aligned}
x_7 + x_8 + x_9 &= 13.00 \\
x_4 + x_5 + x_6 &= 15.00 \\
x_1 + x_2 + x_3 &= 8.00 \\
0.04289(x_3 + x_5 + x_7) + 0.75(x_6 + x_8) + 0.61396x_9 &= 14.79 \\
0.91421(x_3 + x_5 + x_7) + 0.25(x_2 + x_4 + x_6 + x_8) &= 14.31 \\
0.04289(x_3 + x_5 + x_7) + 0.75(x_2 + x_4) + 0.61396x_1 &= 3.81 \\
x_3 + x_6 + x_9 &= 18.00 \\
x_2 + x_5 + x_8 &= 12.00 \\
x_1 + x_4 + x_7 &= 6.00 \\
0.04289(x_1 + x_5 + x_9) + 0.75(x_2 + x_6) + 0.61396x_3 &= 10.51 \\
0.91421(x_1 + x_5 + x_9) + 0.25(x_2 + x_4 + x_6 + x_8) &= 16.13 \\
0.04289(x_1 + x_5 + x_9) + 0.75(x_4 + x_8) + 0.61396x_7 &= 7.04
\end{aligned}$$

5.6 Aplikasi Sistem Persamaan Linier

Lihatlah sistem reaktor pada gambar berikut:



Gambar 4: Model rangkaian reaktor

Dengan laju volume Q dalam m^3/s dan input massa min dalam mg/s. Konservasi massa pada tiap inti reaktor adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
&\text{A:} \quad m_{A_{in}} + Q_{BA}x_B - Q_{AB}x_A - Q_{AC}x_A = 0 \\
&\text{B:} \quad Q_{AB}x_A - Q_{BA}x_B - Q_{BC}x_B = 0 \\
&\text{C:} \quad m_{C_{in}} + Q_{AC}x_A + Q_{BC}x_B - Q_{C_{out}}x_C = 0
\end{aligned}$$

Tentukan solusi x_A, x_B, x_C dengan menggunakan parameter berikut:
$Q_{AB} = 40$, $Q_{AC} = 80$, $Q_{BA} = 60$, $Q_{BC} = 20$, $Q_{C_{out}} = 150\ m^3/s$, $m_{A_{in}} = 1300$ dan $m_{C_{in}} = 200\ mg/s$.

5.7 Studi Kasus Interpolasi Polinomial

a. Studi Kasus 1

Gunakan tabel di bawah ini untuk mencari polinom interpolasi dari pasangan titik-titik yang terdapat dalam tabel. Program menerima masukan nilai x yang akan dicari nilai fungsi $f(x)$.

x	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3
$f(x)$	0.003	0.067	0.148	0.248	0.370	0.518	0.697

Lakukan pengujian pada nilai-nilai berikut:

$x = 0.2 \quad f(x) = ?$

$x = 0.55 \quad f(x) = ?$

$x = 0.85 \quad f(x) = ?$

$x = 1.28 \quad f(x) = ?$

b. Studi Kasus 2

Jumlah kasus positif baru Covid-19 di Indonesia semakin fluktuatif dari hari ke hari. Di bawah ini diperlihatkan jumlah kasus baru Covid-19 di Indonesia mulai dari tanggal 17 Juni 2022 hingga 31 Agustus 2022:

Tanggal	Tanggal (desimal)	Jumlah Kasus Baru
17/06/2022	6.567	12.624
30/06/2022	6.967	21.807
08/07/2022	7.258	38.391
14/07/2022	7.451	19.541
21/07/2022	7.548	19.582
01/08/2022	8.032	28.935
08/08/2022	8.258	25.854
15/08/2022	8.484	20.935
22/08/2022	8.709	12.408
31/08/2022	8.997	10.534

Tanggal (desimal) adalah tanggal yang sudah diolah ke dalam bentuk desimal 3 angka di belakang koma dengan memanfaatkan perhitungan sebagai berikut:

> Tanggal (desimal) = bulan + (tanggal / jumlah hari pada bulan tersebut)

Sebagai contoh, untuk tanggal 17/06/2022 (dibaca: 17 Juni 2022) diperoleh tanggal (desimal) sebagai berikut:

$$\text{Tanggal (desimal)} = 6 + \frac{17}{30} = 6.567$$

Gunakan data di atas dengan memanfaatkan **interpolasi polinomial** untuk melakukan prediksi jumlah kasus baru Covid-19 pada tanggal-tanggal berikut:

a. 16/07/2022

b. 10/08/2022

c. 05/09/2022

d. Masukan user lainnya berupa *tanggal (desimal)* yang sudah diolah dengan asumsi prediksi selalu dilakukan untuk tahun 2022.

5.8 Studi Kasus Interpolasi Splina Bézier Kubik

Tentukan titik kontrol dari tiap segmen kurva splina Bézier kubik yang melalui titik-titik berikut ini:

$$(0,0),(3,11),(6,-4),(8,0),(11,-10),(17,0).$$

5.9 Studi Kasus Regresi Polinomial Berganda

Wak Rusdi sedang meneliti pertumbuhan alga berdasarkan faktor cahaya, suhu, dan pH. Ia meneliti 50 sampel yang hasilnya dapat dilihat di sini.

Silakan proses data tersebut menjadi file `txt` sesuai dengan format input yang telah dijelaskan sebelumnya lalu tentukan persamaan regresi polinomial berganda yang sesuai dengan data tersebut menggunakan polinomial kubik (derajat 3).

6 Referensi

6.1 SPL, Determinan, dan Matriks

- H. Anton, *Elementary Linear Algebra*, 10th ed. Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, 2010. [Online]. Available: https://archive.org/details/ElementryLinearAlgebraByHowardAnton10thEdition

6.2 Interpolasi Polinomial

- G. Muntingh, *Topics in Polynomial Interpolation Theory*, Ph.D. dissertation, Centre of Mathematics for Applications, University of Oslo, Oslo, Norway, Dec. 2010. [Online]. Available: https://www.researchgate.net/publication/265819309_Topics_in_Polynomial_Interpolation_Theory.

6.3 Interpolasi Splina Bézier Kubik

- L. P. Quan and T. A. Nhan, "A closed-form solution to the inverse problem in interpolation by a Bézier-spline curve," *Arabian Journal of Mathematics*, vol. 9, pp. 155–165, 2020. [Online]. Available: https://doi.org/10.1007/s40065-019-0241-0

6.4 Regresi Polinomial Berganda

- M. Rosenfeld, *Matrix Formulation of OLS: Notes for SOC Methods Project 3.* Stanford, CA, USA: Stanford University. [Online]. Available: https://web.stanford.edu/~mrosenfe/soc_meth_proj3/matrix_OLS_NYU_notes.pdf.
- A. B. Kashlak, 2022, *Applied Regression Analysis: Course Notes for STAT 378/502.* Edmonton, AB, Canada: University of Alberta, Dept. of Mathematical & Statistical Sciences. [Online]. Available: https://sites.ualberta.ca/~kashlak/data/stat378.pdf.
- S. Weisberg, *Applied Linear Regression*, 4th ed. Hoboken, NJ, USA: Wiley-Blackwell, 2013. [Online]. Available: https://www.stat.purdue.edu/~qfsong/teaching/525/book/Weisberg-Applied-Linear-Regression-Wiley.pdf

7 Surat Cinta dari Asisten

Komentar 7.1: Nayaka

[illegible]

Komentar 7.2: Fayadh

Ada orang pernah bilang, "kenapa tubes itu menyenangkan?" Kadang ia penuh error, bikin pusing kepala. Kadang ia lancar, bikin hati lega dan bahagia. Tapi asisten selalu menerima hasil tubes apa adanya.

Komentar 7.3: Weka

Pemanasan

Komentar 7.4: Hakim

Semangat gess ngerjainnya, jangan lupa touch grass yak :3

Komentar 7.5: Orvin

Kerjakanlah dengan sungguh-sungguh, karena Bayu Sang Pahlawan akan melakukan hal yang sama

Komentar 7.6: Aryo

Spek tubes 1 algeo dirombak ulang setelah sekian lama ges! Ditunggu kerjaan tubesnya juga yang gk kalah gacor `(-> U <-)`