Exercício de simulação 1 - Controle Digital

September 7, 2020

Samuel Venzi Lima Monteiro de Oliveira - 14/0162241

Texto do exercício

Considere um sistema de controle a tempo discreto com realimentação unitária e período de amostragem $T = 1s$ cuja função de transferência a malha aberta é dada por

$G(z) = \frac{K(0{,}3679z+0{,}2642)}{(z-1)(z-0{,}3679)}$

Primeiramente vamos achar a equação de malha fechada do sistema:

$$G(z) = \frac{K(0{,}3679z + 0.2642)}{(z-1)(z-0{,}3679)} = \frac{K0.3679z + K0.2642}{z^2 - 1.368z + 0.3679}$$

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{K \times 0.3679z + K \times 0.2642}{z^2 - 1.3679z + 0.3679 + K \times 0.3679z + K \times 0.2642}$$

1) Usando o critério de Jury, determine o valor para qual o sistema a malha fechada é estável;

$P(z) = z^2 + z(0.3679K - 1.3679) + 0.2642K + 0.3679$

Critério de Jury

1) $|a_2| < a_0$

$|0.2642K + 0.3679| < 1$

$-1 < 0{,}2642K + 0{,}3679 < 1$

$-1{,}3679 < 0{,}2642K < 0{,}6321 \Rightarrow -5{,}17 < K < 2{,}39$

2) $P(1) > 0$

$0{,}6321K > 0 \quad K > 0$

3) $P(-1) > 0$

$-0.1037K + 2{,}736 > 0$

$-0{,}1037K > -2{,}736$

$K < 26{,}38$

$$\boxed{\begin{array}{l} K > 0 \\ K < 2{,}39 \end{array}}$$

2) Repita o item anterior usando o critério de Routh modificado;

Critério de Routh

$$P(z) = z^2 + z(0.3679k - 1.3679) + 0.2642k + 0.3679$$

$$P(s) = P(z)\Big|_{z=\frac{s+1}{s-1}}$$

$$\left(\frac{s+1}{s-1}\right)^2 + \left(\frac{s+1}{s-1}\right)(0.3679k - 1.3679) + 0.2642k + 0.3679$$

$$\frac{s^2+2s+1}{(s-1)^2} + \frac{0.3679ks + 0{,}3679k - 1.3679s - 1{,}3679}{s-1} + 0{,}2642k + 0{,}3679$$

$$\frac{s^2+2s+1 + (s-1)(0.3679ks + 0{,}3679k - 1.3679s - 1{,}3679) + (s-1)^2(0{,}2642k + 0{,}3679)}{(s-1)^2}$$

$$\begin{aligned} s^2+2s+1 &+ 0{,}3679ks^2 - \cancel{0{,}3679ks} \\ &+ \cancel{0{,}3679ks} - 0{,}3679k \\ &- 1{,}3679s^2 + \cancel{1{,}3679s} \\ &- \cancel{1{,}3679s} + 1{,}3679 + (s^2-2s+1)(0{,}2642k + 0{,}3679) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &0{,}2642ks^2 - 0{,}5284ks + 0{,}2642k \\ + &0{,}3679s^2 - 0{,}7358s + 0{,}3679 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &s^2(\cancel{1} + 0{,}3679k - \cancel{1{,}3679} + 0{,}2642k + \cancel{0{,}3679}) + \\ &s(2 - 0{,}5284k - 0{,}7358) + \\ &1 - 0{,}3679k + 1{,}3679 + 0{,}2642k + 0{,}3679 \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$s^2(+0{,}6321k) + s(-0{,}5284k + 1{,}2642) + 2{,}7358 - 0{,}1037k$$

Tabela Routh

$0{,}6321k$	$2{,}7358 - 0{,}1037k$
$-0{,}5284k + 1{,}2642$	0

$$\frac{0{,}0548k^2 - 1{,}5768k + 3{,}4629}{-0{,}5284k + 1{,}2642}$$

- $6321k > 0 \Rightarrow k > 0$
- $-0{,}5284k + 1{,}2642 > 0 \Rightarrow k < 2{,}39$

$$\frac{0{,}0928k^2 + 2{,}4414k - 0{,}2837}{0{,}8963k - 0{,}1037} > 0$$

• $\dfrac{0{,}0548k^2 - 1{,}5768k + 3{,}4629}{-0{,}5284k + 1{,}2642} > 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} K > 0 \\ K < 2{,}39 \end{array}}$$

$0{,}0548k^2 - 1{,}5768k + 3{,}4629 > 0$

$K > 26.37$
$k < 2.39$

3) Determine o valor de K para o qual o sistema a malha fechada apresenta resposta ao degrau oscilatória com amplitude constante. Determine também a frequência de oscilação correspondente;

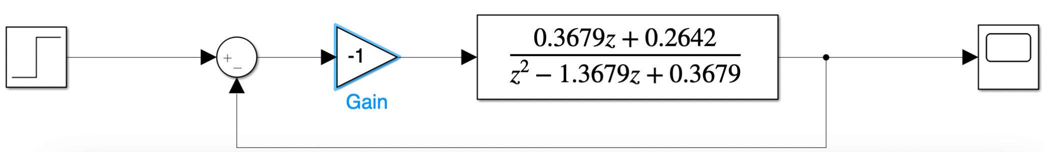
Como visto anteriormente, se usarmos $K = 2.39$ teremos as raízes do sistema no círculo de raio unitário (CRU) o que configura um sistema marginalmente estável, com oscilações de amplitude constante (como será observado a seguir nas simulações).

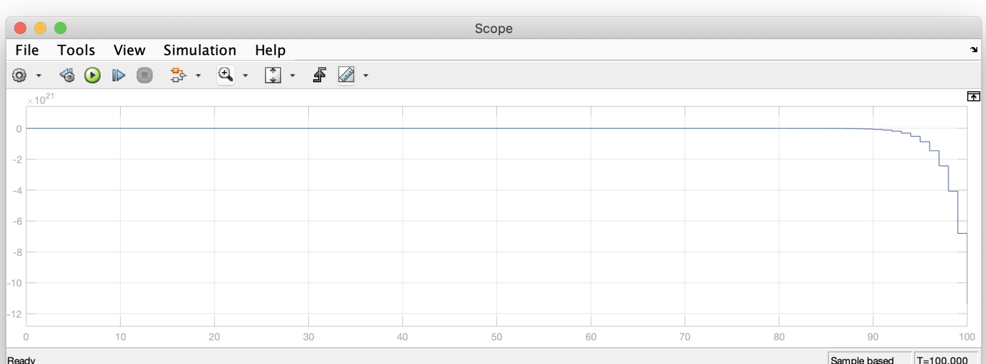
Se substituirmos $K = 2.39$ na equação característica $P(z) = z^2 + z(0.3679K - 1.3679) + 0.2642K + 0.3679$ teremos $P(z) = z^2 + 0.5186z + 1$ cujo as raízes são $z_1 = 0.244309 - 0.969356j$ e $z_2 = 0.244309 + 0.969356j$. Portando, podemos fazer $tan^{-1}(0.9693/0.2443) = 1.3239$ para achar o ω_n.

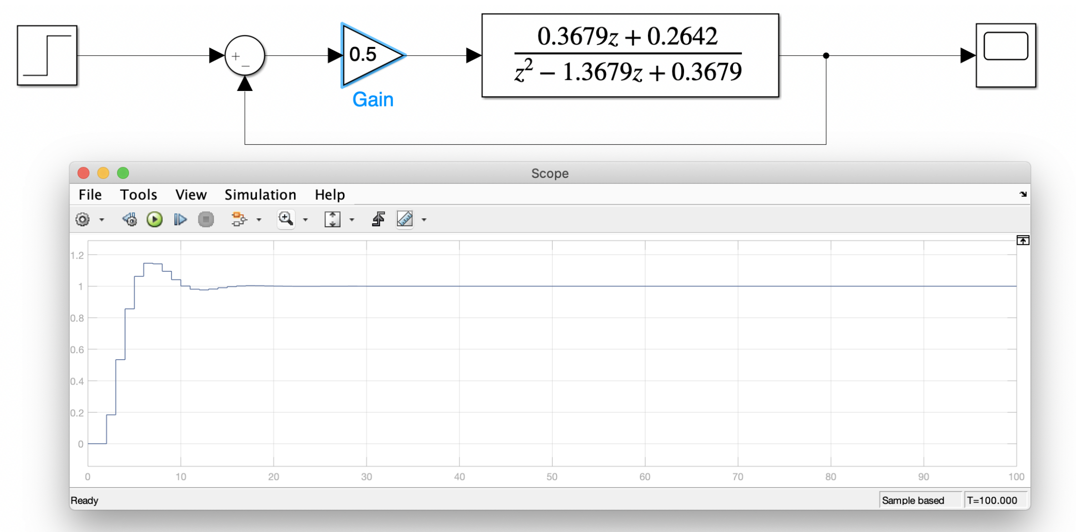
4) Simule o sistema no Simulink (ou software similar) usando o bloco de função de transferência discreta para referência degrau unitário. Escolha valores de K de modo que a resposta do sistema seja estável, instável e marginalmente estável. Verifique se a frequência de oscilação da resposta marginalmente estável é igual a calculada no item anterior. Apresente o diagrama de simulação e os gráficos das respostas obtidas.

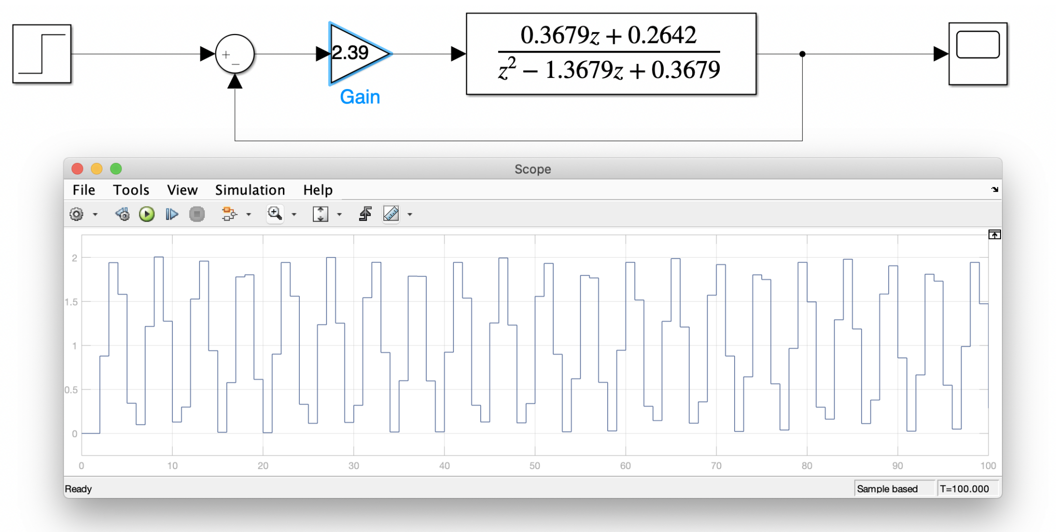
A simulação foi realizada com o Simulink e também fui utilizada a biblioteca *open source* `control` disponível para Python para conferência das simulações.

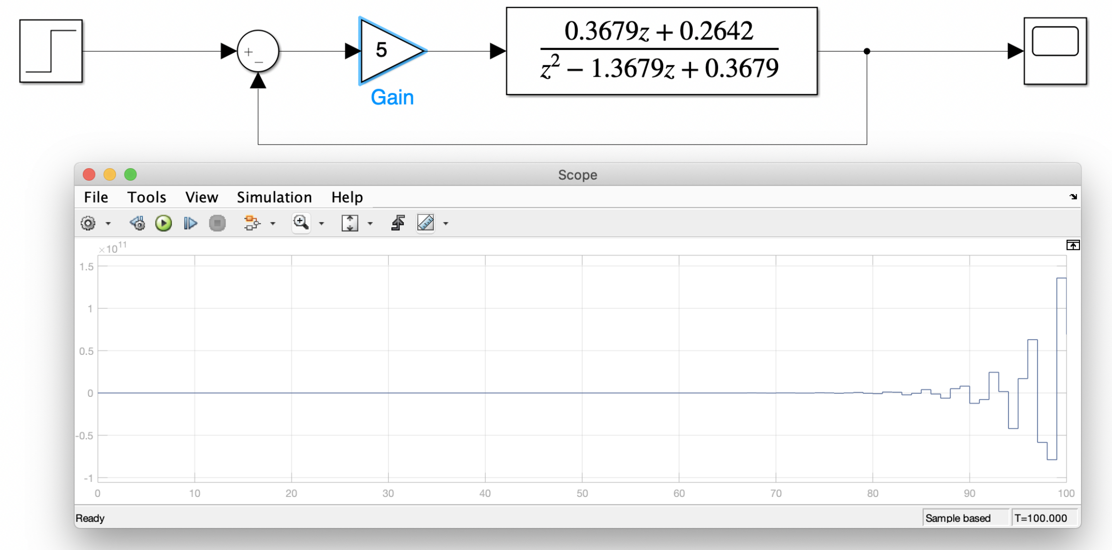
Foi realizada a simulação da resposta ao degrau unitário para `K =-1, 0.5, 2.39, 5` e é possível observar o mesmo que os critérios de Juri e de Routh modificado mostraram. O sistema é marginalmente estável para $K = 2.39$ e estável para $0 < K < 2.39$.





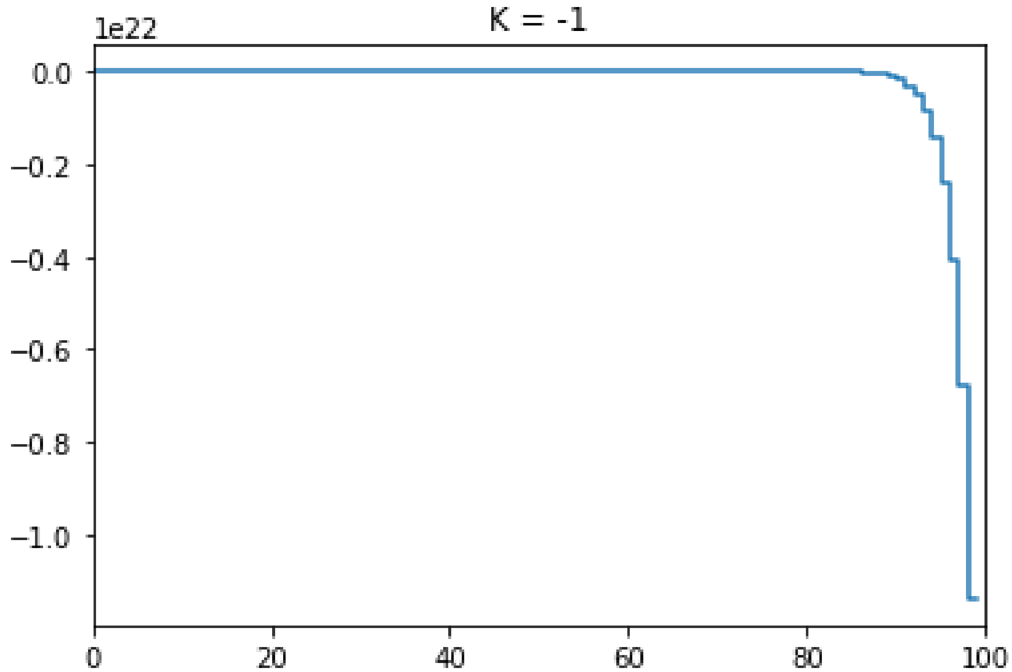

0.5
Gain
$\frac{0.3679z + 0.2642}{z^2 - 1.3679z + 0.3679}$
Scope
File Tools View Simulation Help
Ready
Sample based
T=100.000


2.39
Gain
$\frac{0.3679z + 0.2642}{z^2 - 1.3679z + 0.3679}$
Scope
File Tools View Simulation Help
Ready
Sample based
T=100.000

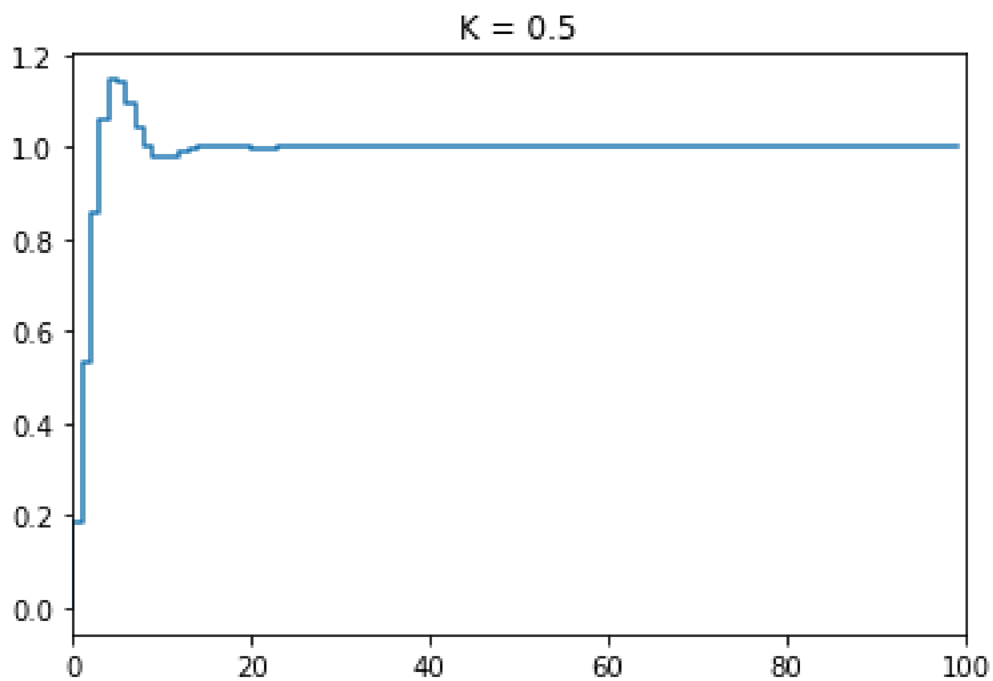


Anexo abaixo está o código e as simulações extras feitas com a biblioteca de controle para Python. Também é possível observar abaixo de cada gráfico, a localização dos polos e o valores de ω_n. Quando o sistema é marginalmente estável, o valor de $\omega_n = 1.32 rad/s$ como calculado no item anterior.

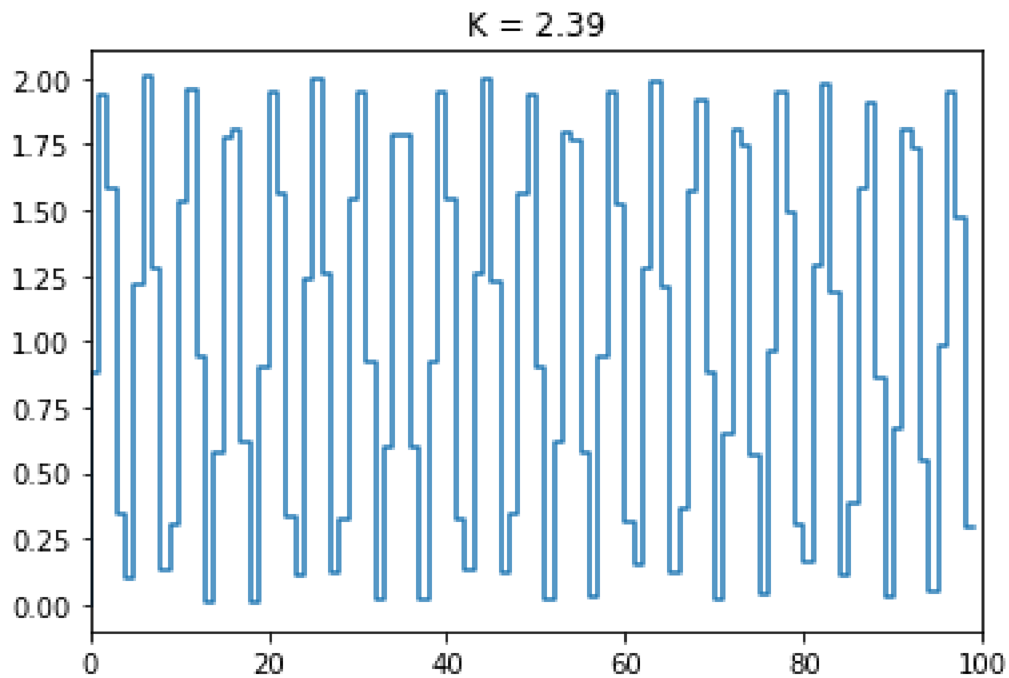
[2]:
```
# Determinando a FT em malha fechada
z = control.TransferFunction.z
k_values = [-1, 0.1, 0.2, 0.3 , 0.4, 0.5, 1, 2.39, 5]

for k in k_values:
    tf = (k*(0.3679*z + 0.2642))/((z-1)*(z-0.3679))
    tf = control.TransferFunction.feedback(tf)

    # Mostrar gráfico
    plt.figure(1)
    title = "K = " + str(k)
    plt.title(title)
    plt.xlim(0, 100)
    T, yout = control.step_response(tf, range(0, 100))
    plt.plot(T.T, yout.T)
    plt.show(block=False)
    control.damp(tf, True)
```



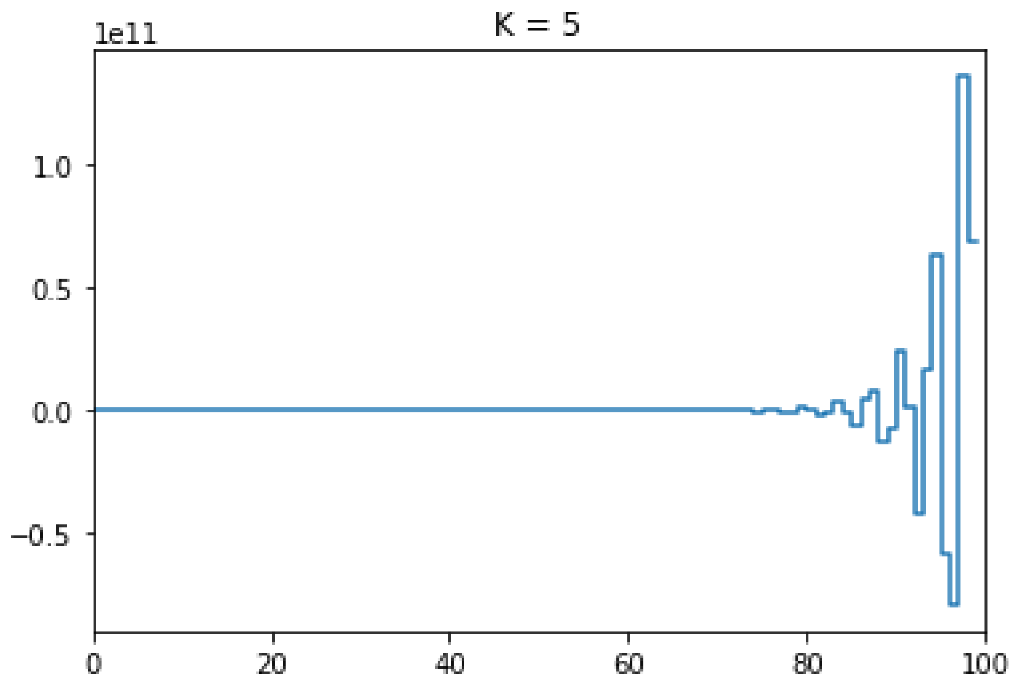

```
_____Eigenvalue______ Damping___ Frequency_
      1.674                    1      -1.674
    0.06195                    1    -0.06195
```



```
_____Eigenvalue______ Damping___ Frequency_
      0.592   +0.3867j     0.5138     0.6745
      0.592   -0.3867j     0.5138     0.6745
```




```
_____Eigenvalue______ Damping___ Frequency_
     0.2443   +0.9694j  0.0002501      1.324
     0.2443   -0.9694j  0.0002501      1.324
```




```
_____Eigenvalue______ Damping___ Frequency_
   -0.2358     +1.278j     -0.1478       1.773
   -0.2358     -1.278j     -0.1478       1.773
```