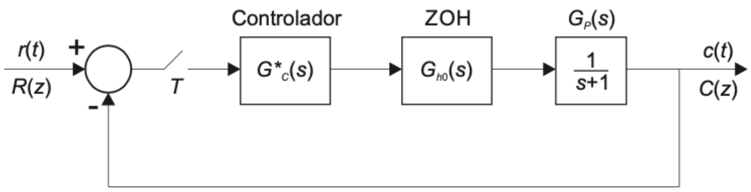
Exercício de Simulação 3

Samuel Venzi Lima Monteiro de Oliveira - 14/0162241

Questão 1

$$G_C(z) = \frac{K}{1 - z^{-1}} = K\frac{z}{z-1}.$$



Primeiramente, vamos discretizar a planta $G_P(s)$ com o método do segurador de ordem zero (ZOH):

1-

$$G_C(z) = \frac{K}{1 - z^{-1}} = K\frac{z}{z-1}$$

$$G_P(s) = \frac{1}{s+1}$$

Discretizar a planta pelo método do ZOH

$$G_P(z) = (1 - z^{-1})\,\mathcal{Z}\left[\frac{G_P(s)}{s}\right]$$

$$\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s(s+1)}\right] = \mathcal{Z}\left[\frac{A}{s} + \frac{B}{s+1}\right] = \mathcal{Z}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s-1}\right]$$

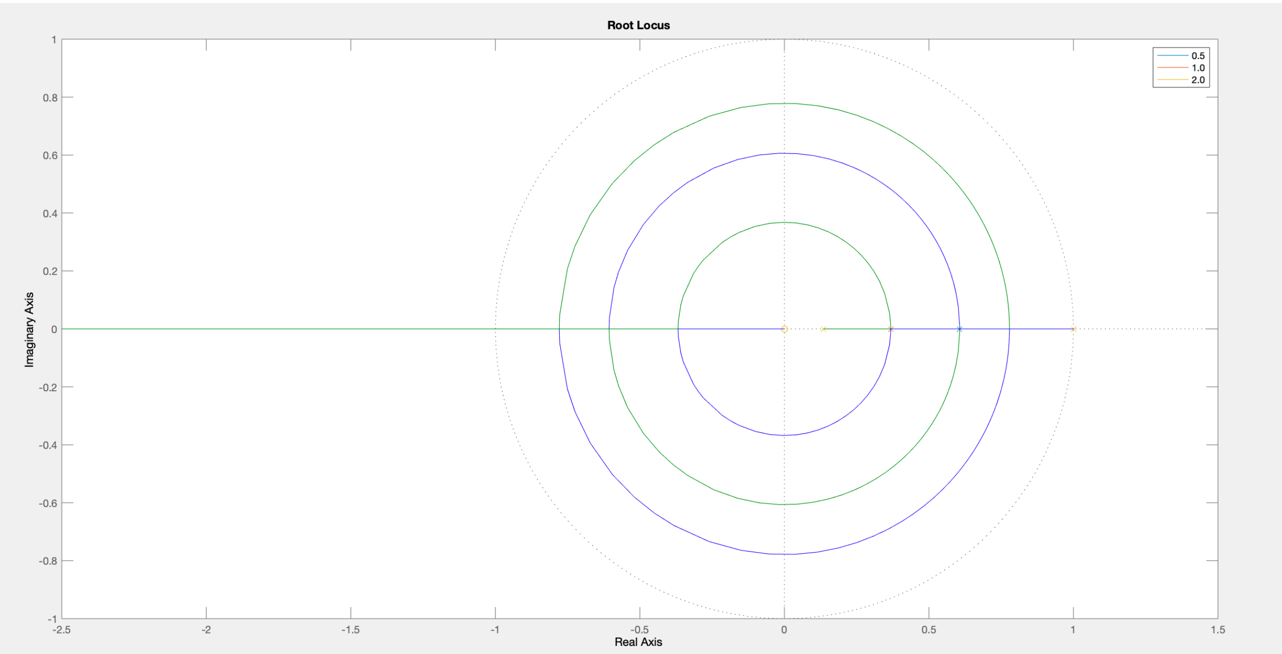
$$G_P(z) = \frac{z-1}{z}\left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-T}}\right) = 1 - \frac{z-1}{z - e^{-T}}$$

$$= \frac{z - e^{-T} - z + 1}{z - e^{-T}} = \boxed{\frac{1 - e^{-T}}{z - e^{-T}} = G_P(z)}$$

a)
Com a ajuda do MATLAB podemos plotar o LGR para templo de amostragem T = 0.5, 1.0 e 2.0 utilizando o seguinte script:

```
for T = [0.5, 1.0, 2.0]
    z = tf('z', T);

    Gc = (z)/(z-1);
    Gp = (1-exp(-T))/(z-exp(-T));

    Geq = Gc*Gp;

    rlocus(Geq);

    hold on
end

legend('0.5', '1.0', '2.0');
```

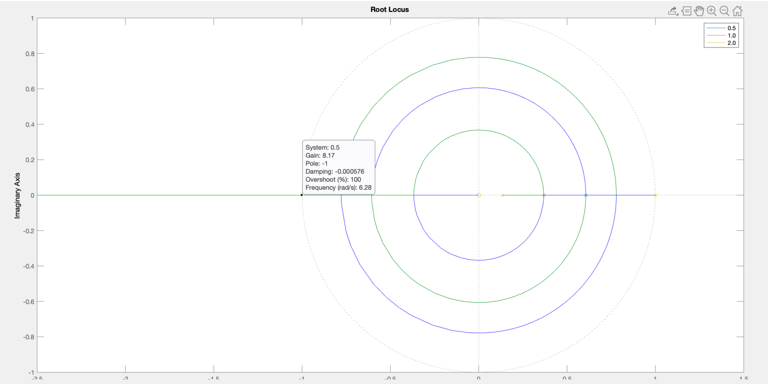
Produzindo o resultado abaixo.

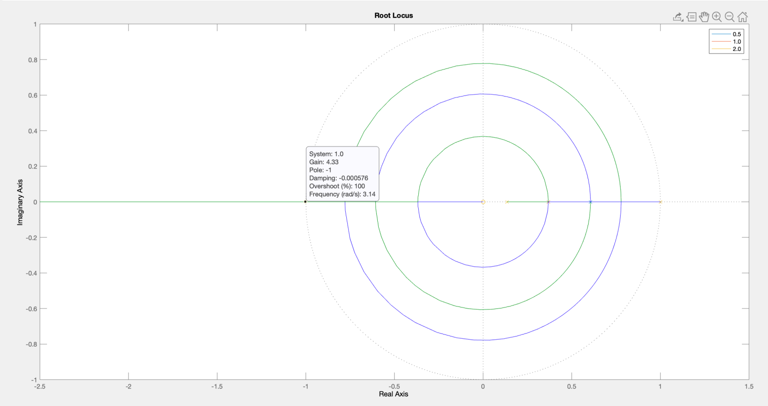


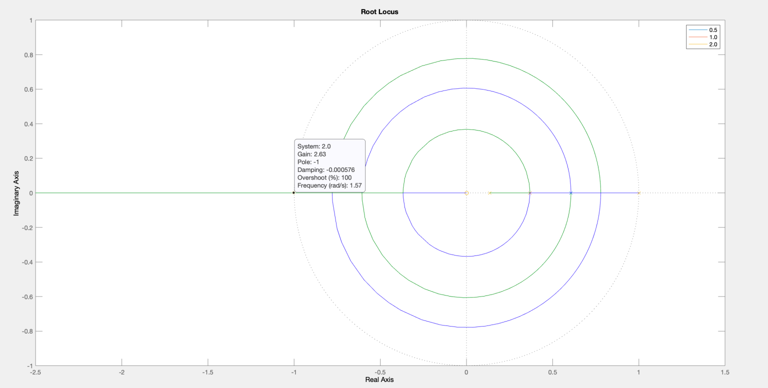
b)
Ainda com o gráfico produzido no item anterior, é possível, clicando e arrastando o mouse, descobrir o K crítico do sistema para cada tempo de amostragem, de modo que teremos:

- K = 8.17 para T = 0.5s
- K = 4.33 para T = 1.0s
- K = 2.63 para T = 2.0s

Como pode ser visto abaixo:





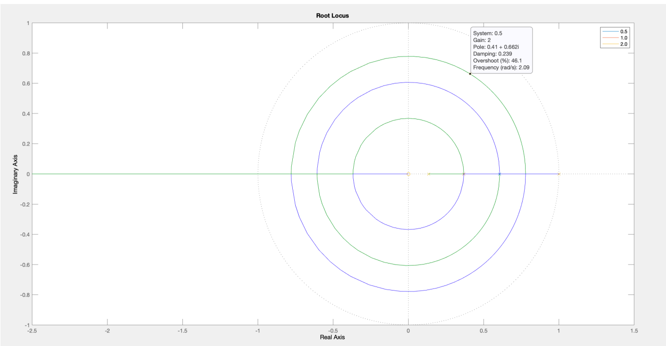


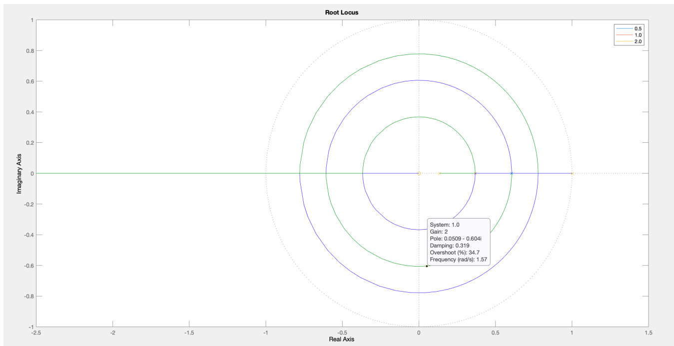
C)

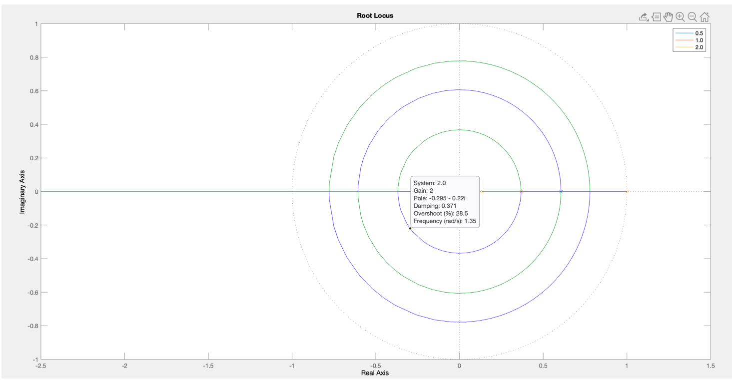
Ainda utilizando o gráfico do LGR encontrado podemos achar os pólos dominantes em

- 0.41 ± 0.662j para T = 0.5s
- 0.0509 ± 0.604j para T = 1.0s
- 0.295 ± 0.22j para T = 2.0s

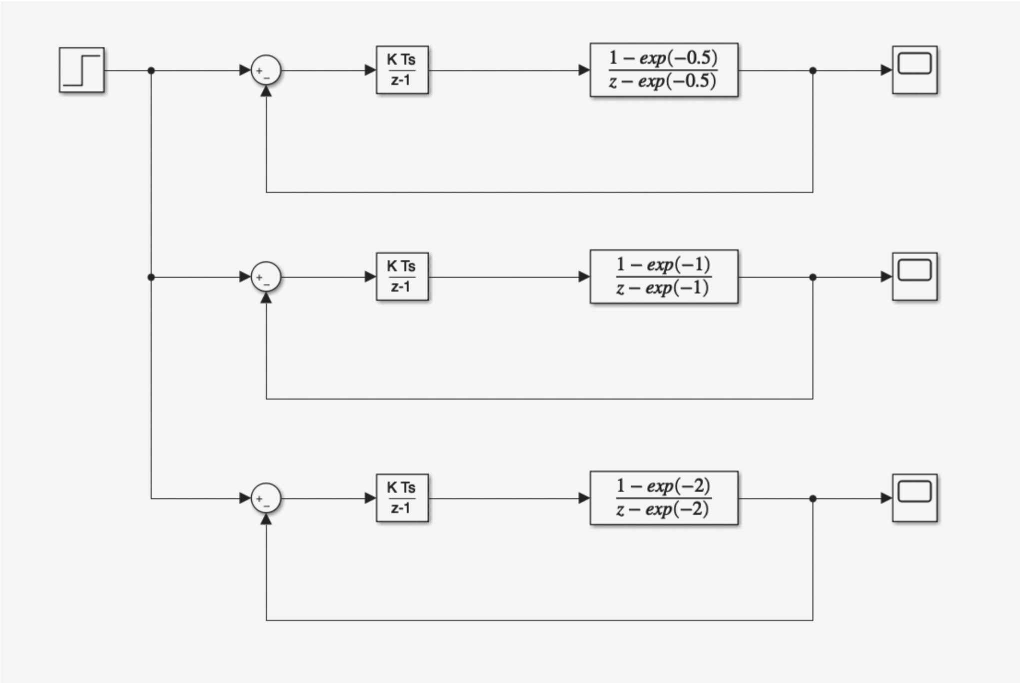
Como pode ser visto abaixo.



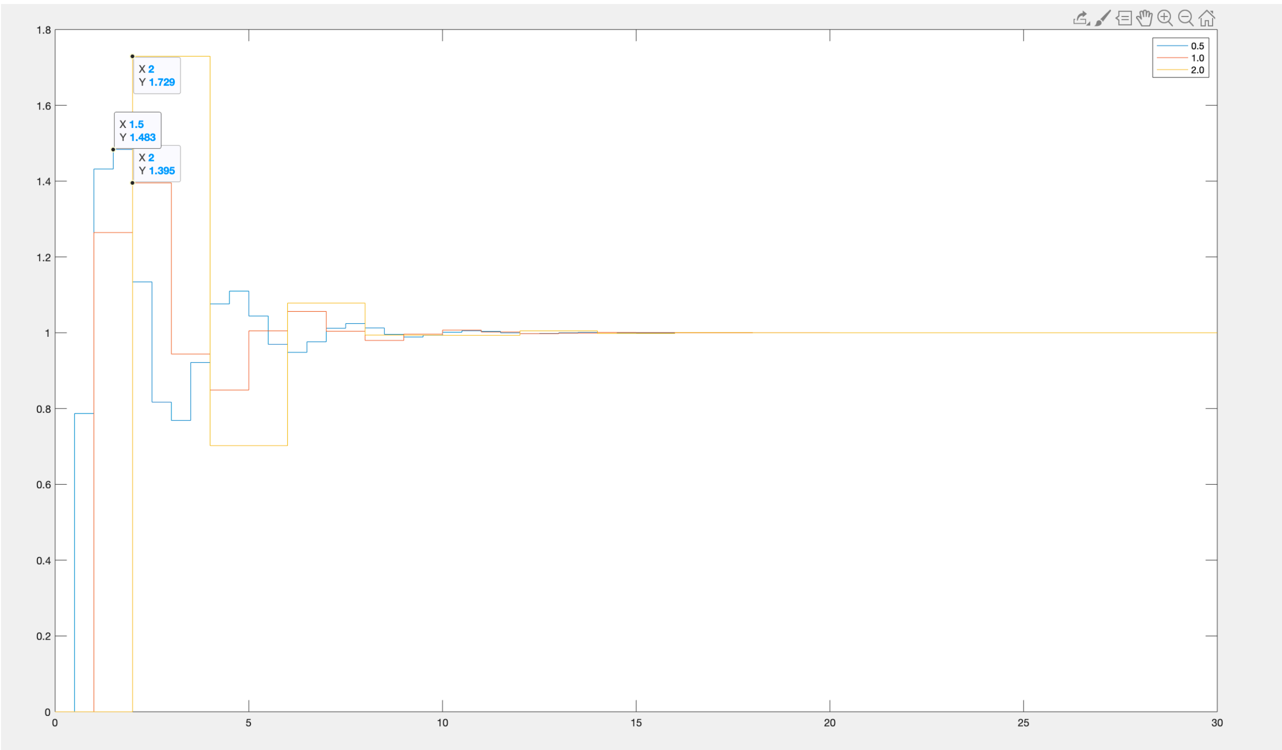




D)
Construção dos sistemas no Simulink:



Simulações:



Sobressinal:

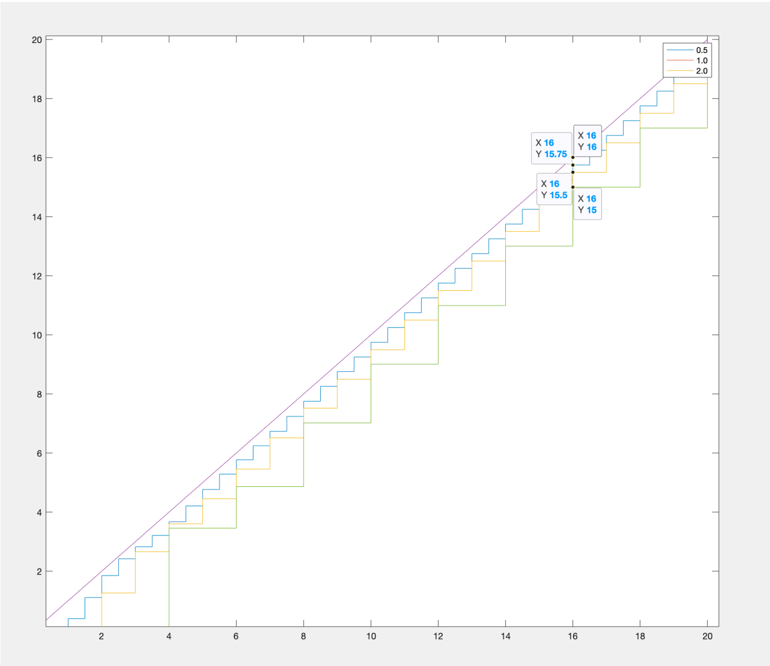
- Para T = 0.5s - 48,3% de sobressinal
- Para T = 1s - 39,5% de sobressinal
- Para T = 2s = 72,9% de sobressinal

O tempo de acomodação (5%) pode ser descoberto com a função `stepinfo(y, t)` disponível no MATLAB:

- Para T = 0.5s - 7.6813s
- Para T = 1.0s - 8.0148s
- Para T = 2.0s - 7.3801s

E)

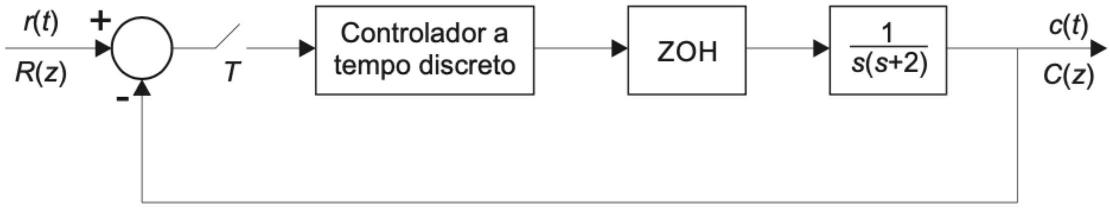
O erro para rampa estacionária pode ser encontrado fazendo a subtração do valor da saída em regime permanente do sistema discreto pelo valor da rampa no mesmo instante de tempo. Dessa forma o gráfico seguinte mostra os valores usados:



E os valores encontrados foram:

- Para T = 0.5s - $E_{ss} = 15{,}75 - 16 = 0.25$
- Para T = 1.0s - $E_{ss} = 15{,}5 - 16 = 0.5$
- Para T = 2.0s - $E_{ss} = 15 - 16 = 1$

Questão 2



Discretizando usando o método do segurador de ordem zero:

2.

a) Discretizando a planta com o método ZOH

$T = 0{,}2\ s$

$$G(z) = (1 - z^{-1})\, \mathcal{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right] = \frac{z-1}{z}\, \mathcal{Z}\left[\frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s+2}\right]$$

$$\frac{A(s+2) + Bs(s+2) + Cs^2}{s^2(s+2)} = \frac{1}{s^2(s+2)}$$

$$As + 2A + Bs^2 + 2Bs + Cs^2 = 1$$

$$s^2(B+C) + s(A+2B) + 2A = 1$$

$$\begin{cases} B + C = 0 \\ A + 2B = 0 \\ 2A = 1 \end{cases} \qquad \begin{aligned} C &= 1/4 \\ B &= -1/4 \\ A &= 1/2 \end{aligned}$$

Portanto

$$G(z) = \frac{z-1}{z}\, \mathcal{Z}\left[\frac{1}{2s^2} - \frac{1}{4s} + \frac{1}{2(s+2)}\right]$$

$$G(z) = \frac{z-1}{z}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2} - \frac{1}{4}\,\frac{1}{(1-z^{-1})} + 1\cdot\frac{1}{1-e^{-2T}z^{-1}}\right)$$

$$= \frac{z-1}{z}\left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{(1-z^{-1})}\cdot\frac{1}{z}\cdot\frac{T}{1-z^{-1}} - \frac{1}{4}\cdot\frac{z}{z-1} + 1\,\frac{z}{z-e^{-2T}}\right)$$

$$= \frac{z-1}{z}\left(\frac{1}{2}\,\frac{\cancel{z}}{z-1}\cdot\frac{1}{\cancel{z}}\cdot\frac{Tz}{z-1} - \frac{1}{4}\,\frac{z}{z-1} + \frac{1}{4}\,\frac{z}{z-e^{-2T}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{T}{z-1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\,\frac{z-1}{z-e^{-2T}}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{2T(z-e^{-2T}) - (z-1)(z-e^{-2T}) + (z-1)^2}{(z-1)(z-e^{-2T})}\right)$$

$T = 0{,}2$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{0{,}4(z-0{,}6703) - (z-1)(z-0{,}6703) + (z-1)^2}{(z-1)(z-0{,}6703)}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{0{,}4z - 0{,}2681 - z^2 + 0{,}6703z + z - 0{,}6703 + z^2 - 2z + 1}{z^2 - 0{,}6703z - z + 0{,}6703}\right)$$

$$= \left(\frac{-0{,}01758z + 0{,}0154}{z^2 - 1{,}6703z + 0{,}6703}\right) =$$

$$G(z) = \left(\frac{-0{,}0175z + 0{,}0154}{z^2 - 1{,}6703z + 0{,}6703}\right)$$

A)

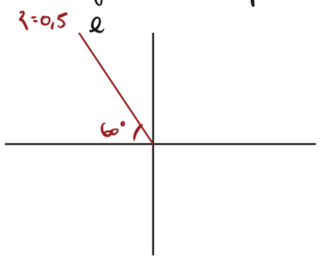
Para obtermos $t_s = 2s$, a parte imaginária do polo dominante deve ser $w_d = 3{,}464$

$$t_s = \frac{4}{\xi w_n} = 2s$$

$$w_n = \frac{4}{0.5 \times 2} = 4$$

$$w_d = 4\sqrt{1 - 0{,}5^2}$$
$$w_d = 3{,}464$$

Para que o coeficiente de amortecimento seja $\xi = 0{,}5$



o polo deve se encontrar na linha l.

Portanto os polos dominantes podem ser encontrados:

$$\tan 60 = \frac{w_d}{\sigma} \Rightarrow \tan 60 = \frac{3{,}464}{\sigma} \rightarrow \sigma = 2$$

Localização dos polos desejados:

$$p = -2 \pm 3{,}464j$$

Mapear para o plano Z

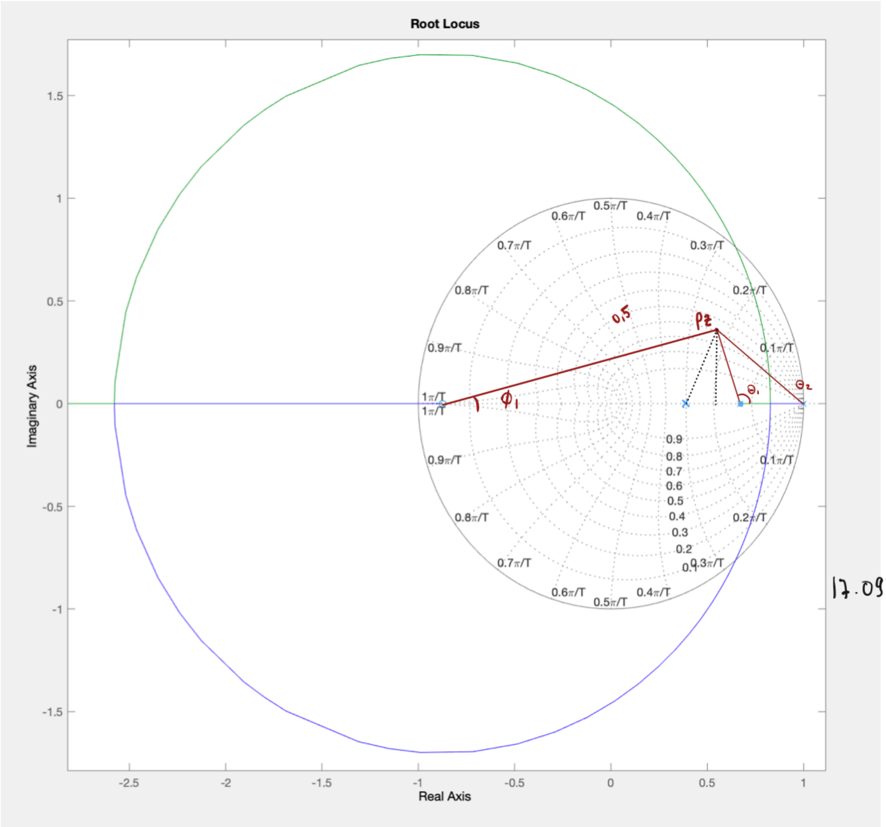
$$z = e^{T\sigma} e^{jT\omega}$$

$$|p_z| = e^{T\sigma} = e^{0{,}2(-2)} = 0{,}6703$$

$$\angle p_z = \omega T = \pm 3{,}464 \cdot 0{,}2 = \pm 0{,}6928$$

$$p_z = 0{,}6703 \angle \pm 39{,}69°$$

$$p_z = 0{,}5158 \pm 0{,}4281j$$



$$\theta_1 = 180° - \tan^{-1}\left(\frac{0,4281}{0,6703 - 0,5158}\right)$$
$$= 109,84°$$

$$\theta_2 = 180° - \tan^{-1}\left(\frac{0,4281}{1 - 0,5158}\right)$$
$$= 138,51°$$

$$\phi_1 = \tan^{-1}\left(\frac{0,4281}{0,8760 + 0,5158}\right)$$
$$= 17.097°$$

$$17.097° - 109,84° - 138,51° = -231,26°$$

Não passa pelo LGR.

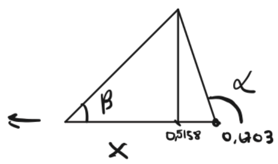
$$\angle Gc(z) - 231,26 = 180° \pm 360° i$$
$$\angle Gc(z) = 51,26°$$

$$Gc(z) = Kc\,\frac{(z + a)}{(z + b)}$$

Vamos escolher 'a' de modo a cancelar o polo em 0,6703 então $a = -0,6703$.

Para encontrar b, vamos usar a condição de fase

$$\alpha - \beta = 51.26$$
$$\beta = 58,58°$$



$$x = 0,2615$$

$$\frac{0,4281}{x} = 1,6369$$

$$-|0,5158 - 0,2615| = b \qquad \boxed{-0,2543 = b}$$

$$Gc(z) = Kc\,\frac{z - 0,6703}{z - 0,2543}$$

$$Gc(z)G(z) = K\,\frac{z - 0,6703}{z - 0,2543} \cdot \frac{-0,0175z + 0,0154}{z^2 - 1,6703z + 0,6703}$$

$$= \frac{K\,(-0,0175z + 0,0154)}{(z - 0,2543)(z - 1)}$$

$$|G_c(z)G(z)|_{z=0,5158+j0,4281} = 1$$

$$\left| K \frac{(-0,0175z+0,0154)}{(z-0,2543)(z-1)} \right|_{z=0,5158+j0,4281} = 1$$

Resolvendo para k com a ajuda do MATLAB

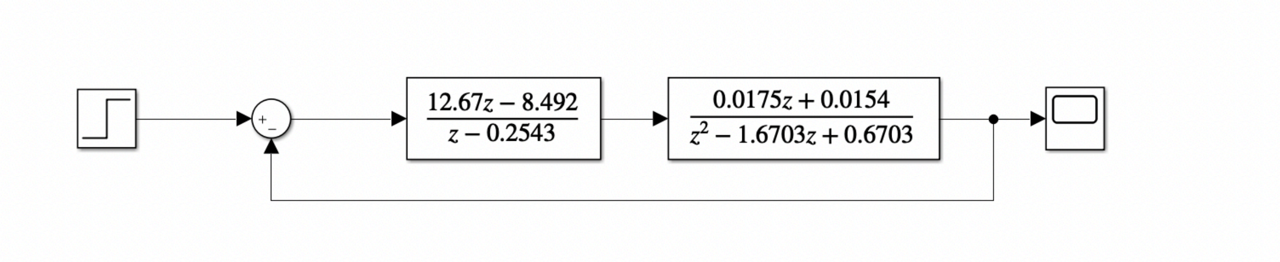
$$k = 12,67$$

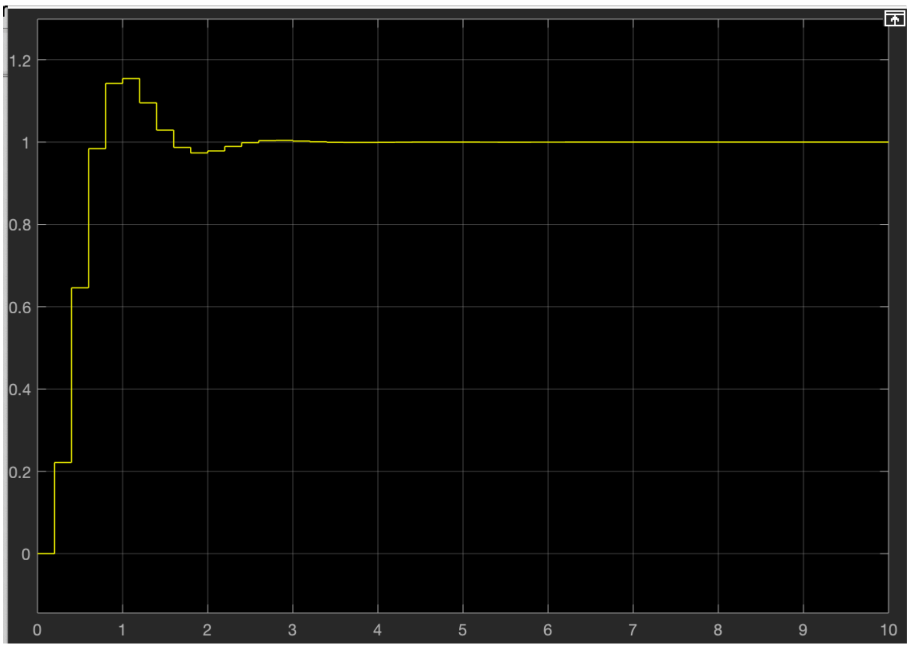
Finalmente, nosso controlador é dado por:

$$G_c(z) = 12,67 \frac{z-0,6703}{z-0,2543}$$

B)

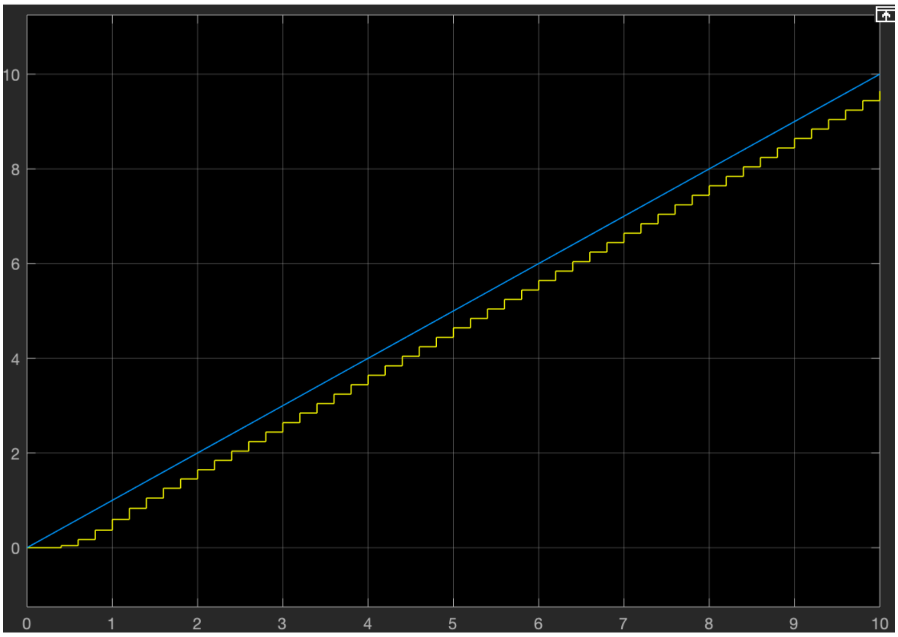
Montando o sistema Simulink, obtemos o seguinte diagrama de blocos





É possível observar que os requisitos do sistemas são satisfeitos. Um sobressinal de 16.3% (equivalente a um coeficiente de amortecimento de 0.5) e tempo de assentamento de 2s.

C)
Para a rampa é possível observar um erro finito.



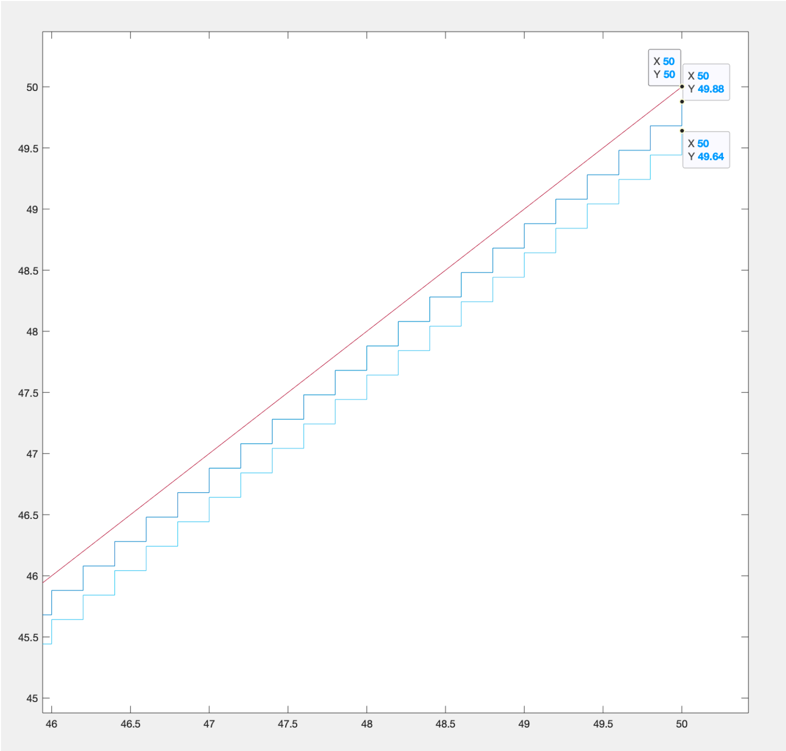
A análise do gráfico permite achar um erro constante de 0.36 para a rampa.

D)

d) É possível acoplar um compensador para reduzir o erro para a rampa para $\frac{1}{3}$ do original

$$G_p(z) = \frac{(z - 0{,}97)}{(z - 0{,}99)} \rightarrow \text{aumento de 3 em } K_v$$

Dessa forma é possível verificar que o erro estacionário diminui para 0.120 (um terço do original), porém com piora nos requisitos transitórios.



É possível observar que o sobressinal atingiu quase 20%, acima dos 16,3% previstos, porém o tempo de acomodação se mostrou ainda dentro do desejável.