Exercício de Simulação 2

Samuel Venzi Lima Monteiro de Oliveira - 14/0162241

1) Discretize a função de transferência

$$G(s) = Y(s)/U(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)}$$

(a) Segurador de ordem zero

ZOH

$$Z\{G_{ho}(s)\,G(s)\} = (1-z^{-1})\,Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

$$Z\left\{\frac{1}{s(s+2)(s+3)}\right\} = Z\left\{\frac{A}{s} + \frac{B}{(s+2)} + \frac{C}{(s+3)}\right\}$$

Achar A, B e C:

$$\frac{A(s+2)(s+3) + Bs(s+3) + Cs(s+2)}{s(s+2)(s+3)}$$

$$A(s+2)(s+3) + Bs(s+3) + Cs(s+2) = 1$$

$$As^2 + A5s + 6A + Bs^2 + B3s + Cs^2 + C2s = 1$$

$$s^2(A+B+C) + s(5A+3B+2C) + 6A = 1$$

$$\begin{cases} A+B+C = 0 \longrightarrow B+C = -1/6 \rightarrow B = -1/6 - C \\ 5A+3B+2C = 0 \longrightarrow 5/6 - 3/6 - 3C + 2C = 0 \\ 6A = 1 \end{cases}$$

$$\frac{2}{6} = C = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\begin{aligned} A &= 1/6 \\ B &= -1/2 \\ C &= 1/3 \end{aligned}}$$

$$1/6 + B + 1/3 = 0$$

$$B = -1/6 - 2/6 = -1/2$$

Portanto:

$$\frac{1}{s(s+2)(s+3)} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(s+2)} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{(s+3)}$$

$$Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = Z\left\{\frac{1}{6s} - \frac{1}{2(s+2)} + \frac{1}{3(s+3)}\right\}$$

$$Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(1-z^{-1})} - \frac{1}{2}\frac{1}{(1-e^{-2T}z^{-1})} + \frac{1}{3}\frac{1}{(1-e^{-3T}z^{-1})}$$

$$G(z) = \left(\frac{z-1}{z}\right)\left(\frac{1}{6}\frac{z}{z-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{z}{z-e^{-2T}} + \frac{1}{3}\frac{z}{z-e^{-3T}}\right)$$

$$G(z) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\frac{z-1}{z-e^{-2T}} + \frac{1}{3}\frac{z-1}{z-e^{-3T}}$$

Para $T = 0,1\,s$

$$G(z) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\frac{z-1}{z-0,8187} + \frac{1}{3}\frac{z-1}{z-0,7408}$$

$$G(z) = \frac{0,025442z + 0,02154}{6z^2 - 9,357 + 3,639}\cdot\frac{1/6}{1/6} = \boxed{\frac{0.004241z + 0,00359}{z^2 - 1,56z + 0,6065}}$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0,004421z + 0,00359}{z^2 - 1,56z + 0,6065}$$

(b) Retangular para frente

Retangular para frente

$$G(z) = G(s)\Big|_{s=\frac{z-1}{T}}$$

$$G(z) = \frac{1}{(s+2)(s+3)}\Big|_{s=\frac{z-1}{T}} = \frac{1}{\left(\frac{z-1}{T}+2\right)\left(\frac{z-1}{T}+3\right)}$$

$$G(z) = \frac{T}{z-1+2T}\cdot\frac{T}{z-1+3T} = \frac{T^2}{(z-1+2T)(z-1+3T)}$$

$$= \frac{T^2}{z^2 + (-1+3T)z + (-1+2T)z + (-1+2T)(-1+3T)}$$

Para $T = 0,1\,s$

$$\boxed{G(z) = \frac{0.01}{z^2 - 1,5z - 0,56}}$$

(c) Retangular para trás

Retangular para trás

$$G(z) = G(s)\Big|_{s=\frac{z-1}{Tz}}$$

$$G(z) = \frac{1}{(s+2)(s+3)}\Big|_{s=\frac{z-1}{Tz}} = \frac{1}{\left(\frac{z-1}{Tz}+2\right)\left(\frac{z-1}{Tz}+3\right)}$$

$$G(z) = \frac{Tz}{z-1+2Tz}\cdot\frac{Tz}{z-1+3Tz} = \frac{T^2 z^2}{(z-1+2Tz)(z-1+3Tz)}$$

$$= \frac{T^2 z^2}{z^2+(-1+3Tz)z+(-1+2Tz)z+(-1+2Tz)(-1+3Tz)}$$

$$G(z) = \frac{0.01z^2}{1{,}56z^2-2{,}5z+1} = \boxed{\frac{0{,}00641\ z^2}{z^2-1{,}6z+0{,}641}}$$

(d) Trapezoidal

Trapezoidal

$$G(z) = G(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\cdot\frac{z-1}{z+1}}$$

$$G(z) = \frac{1}{(s+2)(s+3)}\Big|_{s=\frac{2}{T}\cdot\left(\frac{z-1}{z+1}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)+2\right)\left(\frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)+3\right)}$$

$$\frac{T(z+1)}{2(z-1)+2T(z+1)}\cdot\frac{T(z+1)}{2(z-1)+3T(z+1)}$$

$$\frac{T^2(z+1)^2}{(2(z-1)+2T(z+1))\ (2(z-1)+3T(z+1))}$$

$$G(z) = \frac{z^2+2z+1}{506z^2-488z+306} = \boxed{\frac{0{,}00197z^2+0{,}00395z+0{,}00197}{z^2-1{,}55z+0{,}6047}}$$

(e) Mapeamento de polos e zeros

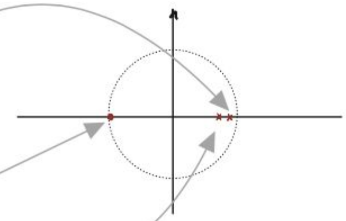
Mapeamento de polos e zeros

$$G(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)}$$

- mapeamento dos polos

$p_1 \rightarrow z = e^{-2T} = 0{,}8187$

$p_2 \rightarrow z = e^{-3T} = 0{,}7408$



- mapeamento dos zeros

$z_1 \Rightarrow z = -1$ (no infinito)

$$G(z) = \frac{K\,(z-1)}{(z-0{,}8187)(z-0{,}7408)} = \boxed{\frac{0{,}00391\,z - 0{,}00391}{z^2 - 1{,}56\,z + 0{,}6065}}$$

$$|G(s)|_{s=0} = |G(z)|_{z=1} \qquad \frac{1}{6} = \frac{2K}{0{,}0469} \qquad K = 3{,}91 \times 10^{-3}$$

Para cada caso, calcule a solução para u(t) = 0, ∀t ≥ 0, y(0) = 100, y'(0) = 0, usando período de amostragem T = 0,1s.

Primeiramente foi encontrada, no domínio da frequência, Y(s) com as condições iniciais. Após isso, com a ajuda do MATLAB foi calculada a Transformada de Z Inversa para ter y(t) e então verificar a saída.

ZOH

$\mathcal{Z}\{x(kT+2T)\} = z^2X(z) - z^2x(0) - zx(T)$

$\mathcal{Z}\{x(kT+T)\} = zX(z) - zx(0)$

$(z^2 - 1{,}56z + 0{,}6065)\,Y(s) = 0$

$z^2Y(z) - 1{,}56\,z\,Y(z) + 0{,}6065\,Y(s) = 0$

Z^{-1}

$Z^{-1}\{z^2Y(z)\} - 1{,}56\,Z^{-1}\{zY(z)\} + 0{,}6065\,Z^{-1}\{Y(s)\} = 0$

$y(kT+2T) - 1{,}56\,y(kT+T) + 0{,}6065\,y(t) = 0$

Z

Sabemos que

$y(0) = 100 \quad \dot{y}(0) = 0$

$\dot{y}(0) = \dfrac{y(T) - y(0)}{T} \Rightarrow -100 + y(T) = 0 \quad y(T) = +100$

$z^2Y(z) - z^2\cancelto{100}{y(0)} - z\cancelto{+100}{y(T)}$

$- 1{,}56\,(zY(z) - z\cancelto{100}{y(0)}) + 0{,}6065\,Y(z) = 0$

$Y(z)(z^2 - 1{,}56z + 0{,}6065) + (-100z^2 - 100z + 156z) = 0$

$Y(z)(z^2 - 1{,}56z + 0{,}6065) = +100z^2 - 56z$

$Y(z) = \dfrac{100z^2 - 56z}{z^2 - 1{,}56z + 0{,}6065}$

Ret Frente

$(z^2 - 1{,}5z + 0{,}56)\,Y(z) = 0$

$z^2Y(z) - z^2\cancelto{100}{y(0)} - z\cancelto{100}{y(T)} - 1{,}5\,(zY(z) - z\cancelto{100}{y(0)}) + 0{,}56\,Y(z) = 0$

$Y(z)(z^2 - 1{,}5z + 0{,}56) + (-100z^2 - 100z + 150z) = 0$

$Y(z) = \dfrac{100z^2 - 50z}{z^2 - 1{,}5z + 0{,}56}$

Ret Trás

$(z^2 - 1{,}6z - 0{,}641)\,Y(z) = 0$

$z^2Y(z) - z^2\cancelto{100}{y(0)} - z\cancelto{100}{y(T)} - 1{,}6\,(zY(z) - z\cancelto{100}{y(0)}) - 0{,}641\,Y(z) = 0$

$Y(z)(z^2 - 1{,}6z - 0{,}641) + (-100z^2 - 100z + 160z)$

$Y(z) = \dfrac{100z^2 - 60z}{z^2 - 1{,}6z - 0{,}641}$

Trapezoidal

$$(z^2 - 1{,}55z - 0{,}6047)\,Y(z) = 0$$

$$z^2Y(z) - z^2y(0) - zy(T) - 1{,}55\,(zY(z) - zy(0)) - 0{,}6047\,Y(z) = 0$$

$$Y(z)\,(z^2 - 1{,}55z - 0{,}6047) + (-100z^2 - 100z + 155z) = 0$$

$$Y(z) = \frac{100z^2 - 55z}{z^2 - 1{,}55z - 0{,}6047}$$

Mapeamento

$$(z^2 - 1{,}56z + 0{,}6065)\,Y(s) = 0$$

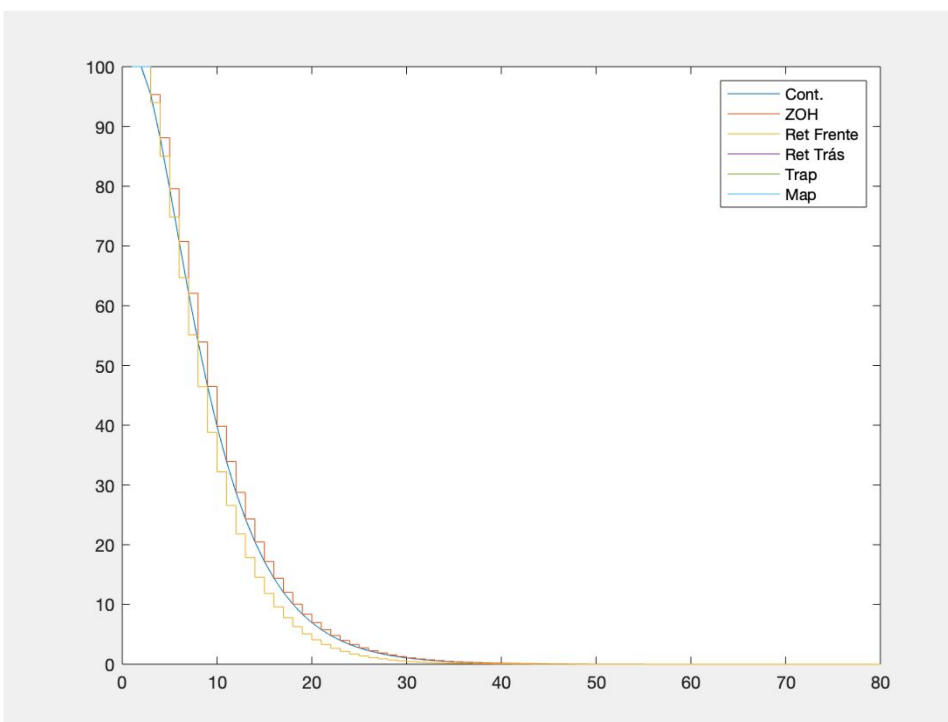
$$z^2Y(z) - z^2\overset{100}{y(0)} - z\overset{+100}{y(T)} - 1{,}56\,(zY(z) - z\overset{100}{y(0)}) + 0{,}6065\,Y(z) = 0$$

$$Y(z)\,(z^2 - 1{,}56z + 0{,}6065) + (-100z^2 - 100z + 156z) = 0$$

$$Y(z)\,(z^2 - 1{,}56z + 0{,}6065) = +100z^2 - 56z$$

$$Y(z) = \frac{100z^2 - 56z}{z^2 - 1{,}56z + 0{,}6065}$$

Resultados achados com simulação do MATLAB, produzida pelo script a seguir.



```
syms z s
F_zoh = (100*z^2 - 56*z)/(z^2 - 1.56*z + 0.6065);
F_ret_f = (100*z^2 - 50*z)/(z^2 - 1.5*z + 0.56);
F_ret_t = (100*z^2 - 60*z)/(z^2 - 1.6*z - 0.641);
F_trp = (100*z^2 - 55*z)/(z^2 - 1.55*z - 0.6047);
F_map = (100*z^2 - 56*z)/(z^2 - 1.56*z + 0.6065);
F_cont = (100*s - 500)/(s^2 + 5*s + 6);

time_F_zoh = iztrans(F_zoh);
time_F_ret_f = iztrans(F_ret_f);
time_F_ret_t = iztrans(F_ret_t);
time_F_trp = iztrans(F_trp);
time_F_map = iztrans(F_map);
time_F_cont = ilaplace(F_cont);

y_zoh = {};
y_ret_f = {};
y_ret_t = {};
y_trp = {};
y_map = {};
ys = {};

n = [0:1:100];
for v = 0:1:100
    y_zoh = [y_zoh, subs(time_F_zoh, v)];
    y_ret_f = [y_ret_f, subs(time_F_ret_f, v)];
    y_ret_t = [y_ret_t, subs(time_F_ret_t, v)];
    y_trp = [y_trp, subs(time_F_trp, v)];
    y_map = [y_trp, subs(time_F_map, v)];
    y = [y, subs(time_F_cont, v)];
end
plot(y)

figure

plot(y)
hold on
stairs(y_zoh)
hold on
stairs(y_ret_f)
hold on
stairs(y_ret_t)
hold on
stairs(y_trp)
hold on
stairs(y_map)
```

2) Considerando a planta dada:

(a) Resposta:

Q2 a)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_p}{Js^2} \qquad U(s) = \overset{A}{\frac{bK_c}{a}} U_c(s) - \overset{B}{\boxed{K_c \frac{s+b}{s+a}}} Y(s)$$

$$U(s) = A U_c(s) - B Y(s)$$

$$\frac{Y(s)}{AU_c(s) + BY(s)} = \frac{K_p}{Js^2} \rightarrow Y(s) = \left(\frac{K_p}{Js^2}\right)(AU_c(s) + BY(s))$$

$$\Rightarrow Y(s) - BY(s)\left(\frac{K_p}{Js^2}\right) = AU_c(s)\left(\frac{K_p}{Js^2}\right)$$

$$Y(s)\left(1 - B\left(\frac{K_p}{Js^2}\right)\right) = AU_c(s)\left(\frac{K_p}{Js^2}\right)$$

$$\frac{Y(s)}{U_c(s)} = \frac{A\left(\frac{K_p}{Js^2}\right)}{1 - B\left(\frac{K_p}{Js^2}\right)} = \frac{AK_p}{Js^2 - BK_p}$$

Substituindo A e B

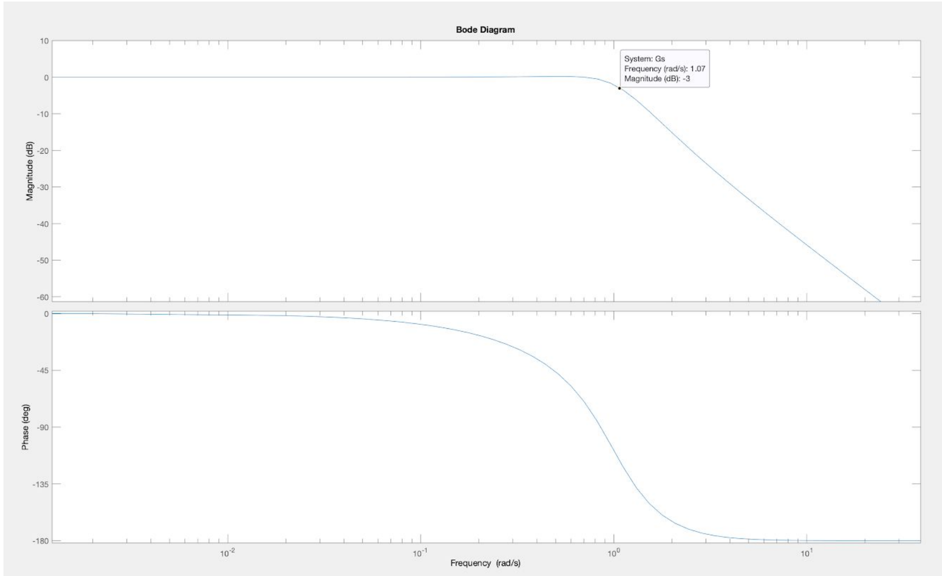
$$\frac{Y(s)}{U_c(s)} = \frac{\frac{bK_c}{a} \cdot K_p}{Js^2 - K_c\left(\frac{s+b}{s+a}\right)K_p} \qquad \begin{matrix} a = 2\omega_0 \\ b = \omega_0/2 \end{matrix} \qquad K_c = \frac{2J\omega_0^2}{K_p}$$

$$= \frac{\frac{\cancel{\omega_0}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}J\omega_0^2}{K_p} \cdot \frac{1}{2\cancel{\omega_0}} \cdot \cancel{K_p}}{Js^2 - \frac{\cancel{2}J\omega_0^2}{\cancel{K_p}} \cdot \left(\frac{s+\omega_0/2}{s+2\omega_0}\right) \cdot \cancel{K_p}} = \frac{\frac{J\omega_0^2}{2}}{Js^2 - 2J\omega_0^2 \cdot \left(\frac{s+\omega_0/2}{s+2\omega_0}\right)}$$

$$= \frac{\cancel{J}\omega_0^2}{\cancel{J}\left(s^2 - 2\omega_0^2\left(\frac{s+\omega_0/2}{s+2\omega_0}\right)\right)} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\omega_0^2(s+2\omega_0) \cdot 1/2}{s^2(s+2\omega_0) - 2\omega_0^2(s+\omega_0/2)}$$

$$= \boxed{\frac{\omega_0^2(s+2\omega_0)\,1/2}{s^3 + 2\omega_0 s^2 - 2\omega_0^2 s - \omega_0^3}}$$

(b) Resposta



No ponto onde o ganho é -3dB é possível observar que a frequência de corte w_c é 1,07 rad/s.

$$\frac{Y(s)}{Uc(s)} = \frac{(w_o^2/2)(s + 2w_o)}{s^3 + 2w_o s^2 + 2w_o^2 s + w_o^3}$$

$$\left| \frac{Y(jw_c)}{Uc(jw_c)} \right| = 0{,}707$$

$$\left| \frac{(w_o^2/2)(jw_c + 2w_o)}{(jw_c)^3 + 2w_o (jw_c)^2 + 2w_o^2 (jw_c) + w_o^3} \right| = 0{,}707$$

Usando $w_o = 1$

$$\left| \frac{1/2 \; (jw_c + 2)}{(jw_c)^3 + 2(jw_c)^2 + 2(jw_c) + 1} \right| = 0{,}707$$

$$\left| \frac{jw_c/2 + 1}{-jw_c^3 - 2w_c^2 + 2jw_c + 1} \right| = 0{,}707$$

$$\left| \frac{1 + j\,\frac{w_c}{2}}{(-2w_c^2 + 1) + j(2w_c - w_c^3)} \right| = 0{,}707$$

Com a ajuda do MATLAB para a resolver a equação para w_c obtemos w_c = 1.0796 rad/s. Isso pode ser verificado no diagrama de Bode da função de transferência.

(c) Resposta

Q2 c)

$$U(s) = \frac{bK_c}{a} U_c(s) - K_c \frac{s+b}{s+a} Y(s)$$

$$U(s) = K_c \left(\frac{b}{a} U_c(s) - \frac{s+b}{s+a} Y(s) \right)$$

Se: $-\frac{s+b}{s+a} Y(s) = -Y(s) + X(s)$

$$Y(s) \left(1 - \frac{s+b}{s+a} \right) = X(s)$$

$$Y(s) \left(\frac{s+a-\cancel{s}-b}{s+a} \right) = X(s) \rightarrow \underbrace{Y(s) \left(\frac{a-b}{s+a} \right) = X(s)}_{\text{CQD}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} U(s) &= K_c \left(\frac{b}{a} U_c(s) - Y(s) + X(s) \right) \\ X(s) &= \left(\frac{a-b}{s+a} \right) Y(s) \end{aligned}}$$

Passando para o domínio do tempo

$$u(t) = K_c \left(\frac{b}{a} u_c(t) - y(t) + x(t) \right) \quad \text{(I)}$$

$$x(t) = (a-b) e^{-at} y(t) \quad \text{(II)}$$

Discretizando (I) e (II)

$$u[k] = K_c \left(\frac{b}{a} u_c[k] - y[k] + x[k] \right)$$

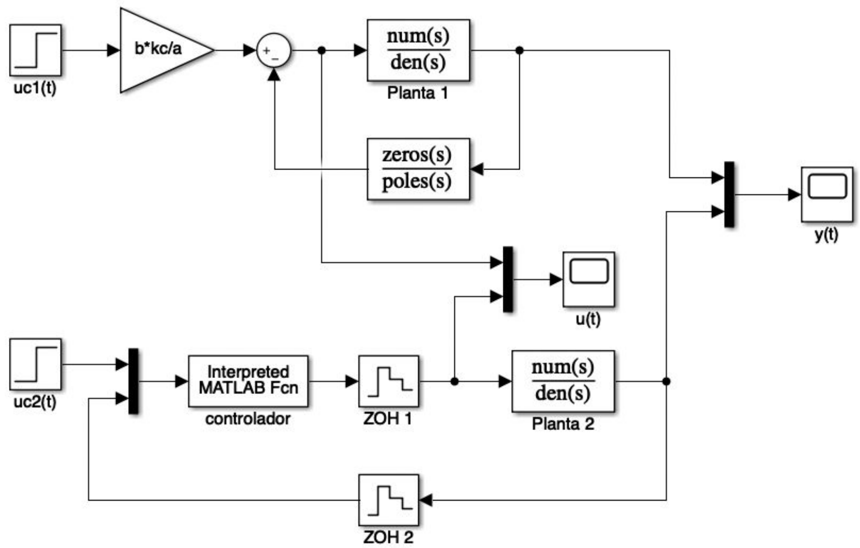
?

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{(a-b) e^{-a(t+T)} y(t+T) - (a-b) e^{-at} y(t)}{T}$$

$$= \frac{(a-b) e^{-at} e^{-aT} y(t+T) - (a-b) e^{-at} y(t)}{T}$$

$$= \frac{(a-b) e^{-at} \left(e^{-aT} y(t+T) - y(t) \right)}{T}$$

(d) Resposta



(e) Resposta

Q2 c)

$\frac{\omega_s}{\omega_c}$ $\omega_c = 1{,}0796$ rad/s como mostrado no item b)

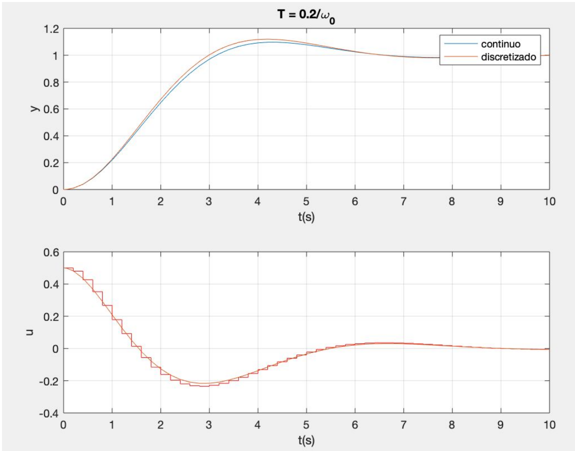
$\omega_s = \frac{1}{T}$ → $T_1 = \frac{0{,}2}{\cancel{\omega_0^{-1}}}$ $T_2 = \frac{0{,}5}{\cancel{\omega_0^{-1}}}$ $T_3 = \frac{1{,}08}{\cancel{\omega_0^{-1}}}$

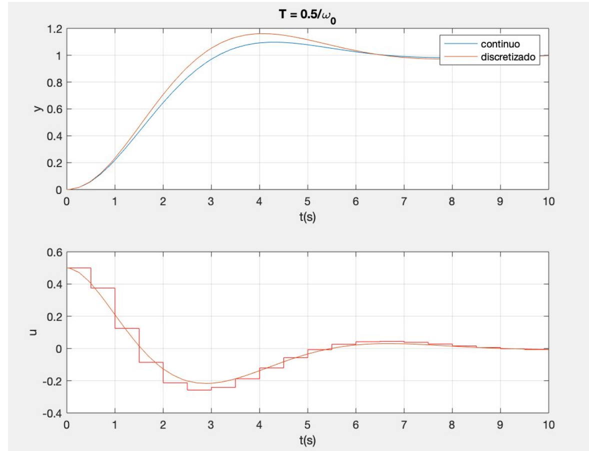
$\omega_{s_1} = \frac{1}{0{,}2}$ $\omega_{s_2} = \frac{1}{0{,}5}$ $\omega_{s_3} = \frac{1}{1{,}08}$

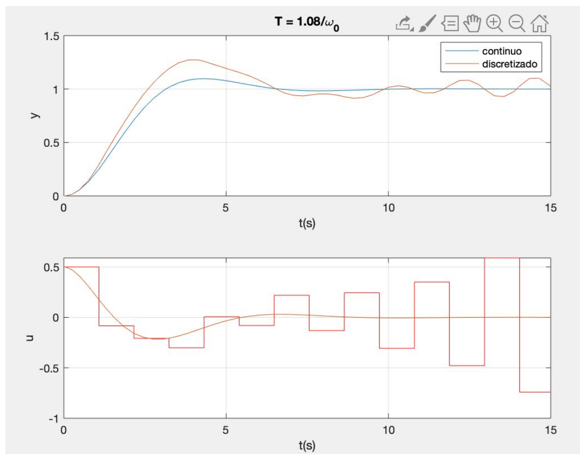
$\omega_{s_1} = 5$ $\omega_{s_2} = 2$ $\omega_{s_3} = 0{,}925$

$\frac{\omega_{s_1}}{\omega_c} = 4{,}63$ $\frac{\omega_{s_2}}{\omega_c} = 1{,}85$ $\frac{\omega_{s_3}}{\omega_c} = 0{,}856$

(f) Resposta







É possível afirmar que quanto maior o período de amostragem, ou seja menor frequência de amostragem, maior é o tempo de assentamento. O sistemas com períodos altos se mostram menos eficientes e até instáveis, como observado no gráfico com T = 1,08/w_0. Conforme o período diminui a resposta se aproxima do sistema em tempo contínuo.

(g) Resposta

Observando os gráficos mostrados no item anterior é possível ver que a ação de controle tenta se aproximar da ação de controle contínuo, porém com um T muito alto, a ação de controle não se mostra suficiente e torna o sistema instável.

(h) Resposta

Algo que já se mostrava intuitivo mas que é confirmado pela simulação é que que quanto mais a frequência de amostragem, mais a resposta se aproxima de uma planta contínua e se mostra mais eficiente em relação aos requisitos de tempo. Também é possível concluir que a frequência de amostragem deve ser maior que a frequência de corte. De forma que a razão calculada no item e) seja maior que 1.