

Exercício de simulação 1 - Controle Digital

September 3, 2020

Samuel Venzi Lima Monteiro de Oliveira - 14/0162241

Texto do exercício

Considere um sistema de controle a tempo discreto com realimentação unitária e período de amostragem $T = 1s$ cuja função de transferência a malha aberta é dada por

$$G(z) = \frac{K(0,3679z + 0,2642)}{(z-1)(z-0,3679)}$$

Primeiramente vamos achar a equação de malha fechada do sistema:

$$G(z) = \frac{K(0,3679z + 0,2642)}{(z-1)(z-0,3679)} = \frac{K0,3679z + K0,2642}{z^2 - 1,3679z + 0,3679}$$

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{K \times 0,3679z + K \times 0,2642}{z^2 - 1,3679z + 0,3679 + K \times 0,3679z + K \times 0,2642}$$

1) Usando o critério de Jury, determine o valor para qual o sistema a malha fechada é estável;

$$P(z) = z^2 + z(0,3679K - 1,3679) + 0,2642K + 0,3679$$

Critério de Jury

$$1) |a_2| < \infty$$

$$|0,2642K + 0,3679| < 1$$

$$-1 < 0,2642K + 0,3679 < 1$$

$$-1,3679 < 0,2642K < 0,6321 \quad \rightarrow \quad -5,17 < K < 2,39$$

$$2) P(1) > 0$$

$$0,6321K > 0 \quad K > 0$$

$$3) P(-1) > 0$$

$$-0,1037K + 2,736 > 0$$

$$-0,1037K > -2,736$$

$$K < 26,38$$

$K > 0$ $K < 2,39$

2) Repita o item anterior usando o critério de Routh modificado;

Critério de Routh

$$P(z) = z^2 + z(0.3679k - 1.3679) + 0.2642k + 0.3679$$

$$P(s) = P(z) \Big|_{z = \frac{s+1}{s-1}}$$

$$\left(\frac{s+1}{s-1}\right)^2 + \left(\frac{s+1}{s-1}\right)(0.3679k - 1.3679) + 0.2642k + 0.3679$$

$$\frac{s^2 + 2s + 1}{(s-1)^2} + \frac{0.3679ks + 0.3679k - 1.3679s - 1.3679}{s-1} + 0.2642k + 0.3679$$

$$\frac{s^2 + 2s + 1 + (s-1)(0.3679ks + 0.3679k - 1.3679s - 1.3679) + (s-1)^2(0.2642k + 0.3679)}{(s-1)^2}$$

$$\begin{array}{r} s^2 + 2s + 1 + 0.3679ks^2 - 0.3679ks \\ + 0.3679ks - 0.3679k \\ - 1.3679s^2 + 1.3679s \\ - 1.3679s + 1.3679 \end{array} + (s^2 - 2s + 1)(0.2642k + 0.3679)$$

$$\begin{array}{r} 0.2642ks^2 - 0.5284ks + 0.2642k \\ + 0.3679s^2 - 0.7358s + 0.3679 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} s^2(1 + 0.3679k - 1.3679) + 0.2642k + 0.3679 \\ s(2 - 0.5284k - 0.7358) \\ 1 - 0.3679k + 1.3679 + 0.2642k + 0.3679 \end{array}$$

↓

$$s^2(0.6321k) + s(-0.5284k + 1.2642) + 2.7358 - 0.1037k$$

Tabela Routh

0.6321k	2.7358 - 0.1037k
-0.5284k + 1.2642	0

$$\frac{0.0548k^2 - 1.5768k + 3.4629}{-0.5284k + 1.2642}$$

$$\bullet 0.6321k > 0 \Rightarrow k > 0$$

$$\frac{0.0548k^2 - 1.5768k + 3.4629}{-0.5284k + 1.2642} > 0$$

$$\bullet -0.5284k + 1.2642 > 0 \Rightarrow k < 2.39$$

$$\bullet \frac{0,0548k^2 - 1,5768k + 3,4629}{-0,5284k + 1,2642} > 0$$

$$\boxed{\begin{matrix} k > 0 \\ k < 2,39 \end{matrix}}$$

$$0,0548k^2 - 1,5768k + 3,4629 > 0$$

$$\begin{matrix} k > 26,37 \\ k < 2,39 \end{matrix}$$

3) Determine o valor de K para o qual o sistema a malha fechada apresenta resposta ao degrau oscilatória com amplitude constante. Determine também a frequência de oscilação correspondente;

Como visto anteriormente, se usarmos $K = 2.39$ teremos as raízes do sistema no círculo de raio unitário (CRU) o que configura um sistema marginalmente estável, com oscilações de amplitude constante (como será observado a seguir nas simulações).

Se substituirmos $K = 2.39$ na equação característica $P(z) = z^2 + z(0.3679K - 1.3679) + 0.2642K + 0.3679$ teremos $P(z) = z^2 + 0.5186z + 1$ cujo as raízes são $z_1 = 0.244309 - 0.969356j$ e $z_2 = 0.244309 + 0.969356j$. Portanto, podemos fazer $\tan^{-1}(0.9693/0.2443) = 1.3239$ para achar o ω_n .

4) Simule o sistema no Simulink (ou software similar) usando o bloco de função de transferência discreta para referência degrau unitário. Escolha valores de K de modo que a resposta do sistema seja estável, instável e marginalmente estável. Verifique se a frequência de oscilação da resposta marginalmente estável é igual a calculada no item anterior. Apresente o diagrama de simulação e os gráficos das respostas obtidas.

A simulação foi realizada com a biblioteca *open source control* disponível para Python pela indisponibilidade do MATLAB no momento.

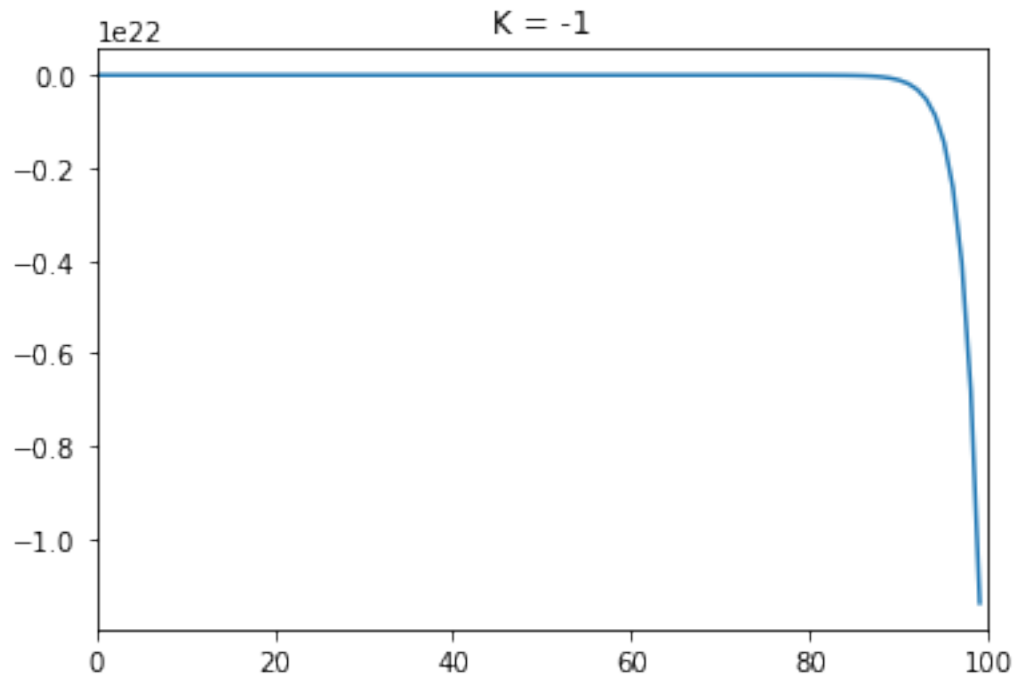
Foi realizada a simulação da resposta ao degrau unitário para $K = -1, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 1, 2.39, 5$ e é possível observar o mesmo que os critérios de Juri e de Routh modificado mostraram. O sistema é marginalmente estável para $K = 2.39$ e estável para $0 < K < 2.39$. Também é possível observar abaixo de cada gráfico, a localização dos polos e o valores de ω_n . Quando o sistema é marginalmente estável, o valor de $\omega_n = 1.32 \text{ rad/s}$ como calculado no item anterior.

```
[2]: # Determinando a FT em malha fechada
z = control.TransferFunction.z
k_values = [-1, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 1, 2.39, 5]

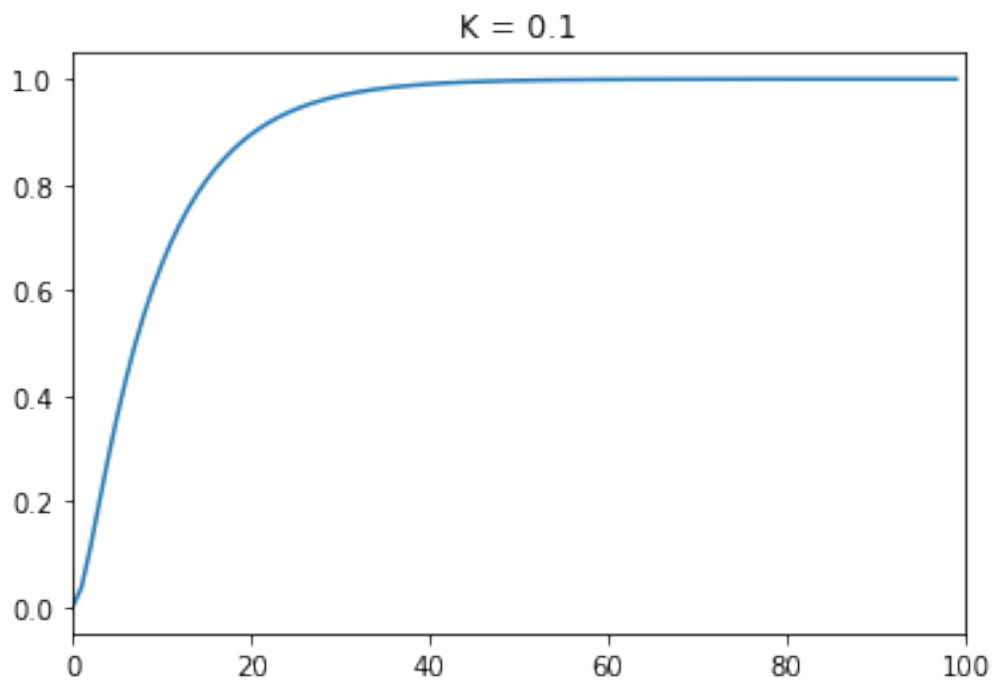
for k in k_values:
    tf = (k*(0.3679*z + 0.2642))/((z-1)*(z-0.3679))
    tf = control.TransferFunction.feedback(tf)

    # Mostrar gráfico
    plt.figure(1)
    title = "K = " + str(k)
    plt.title(title)
    plt.xlim(0, 100)
```

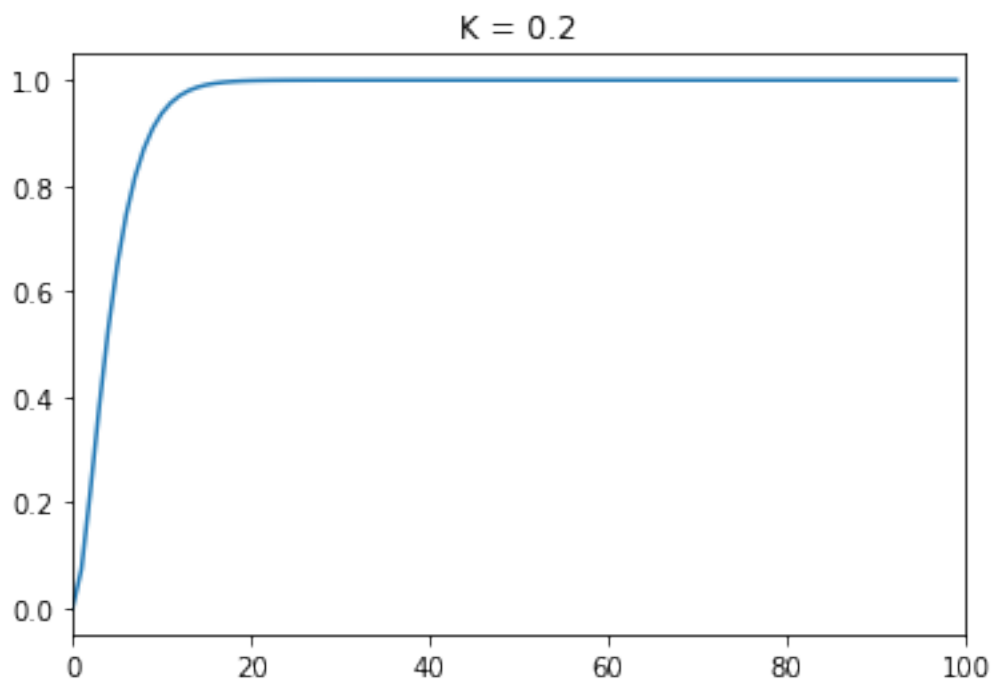
```
T, yout = control.step_response(tf, range(0, 100))
plt.plot(T.T, yout.T)
plt.show(block=False)
control.damp(tf, True)
```



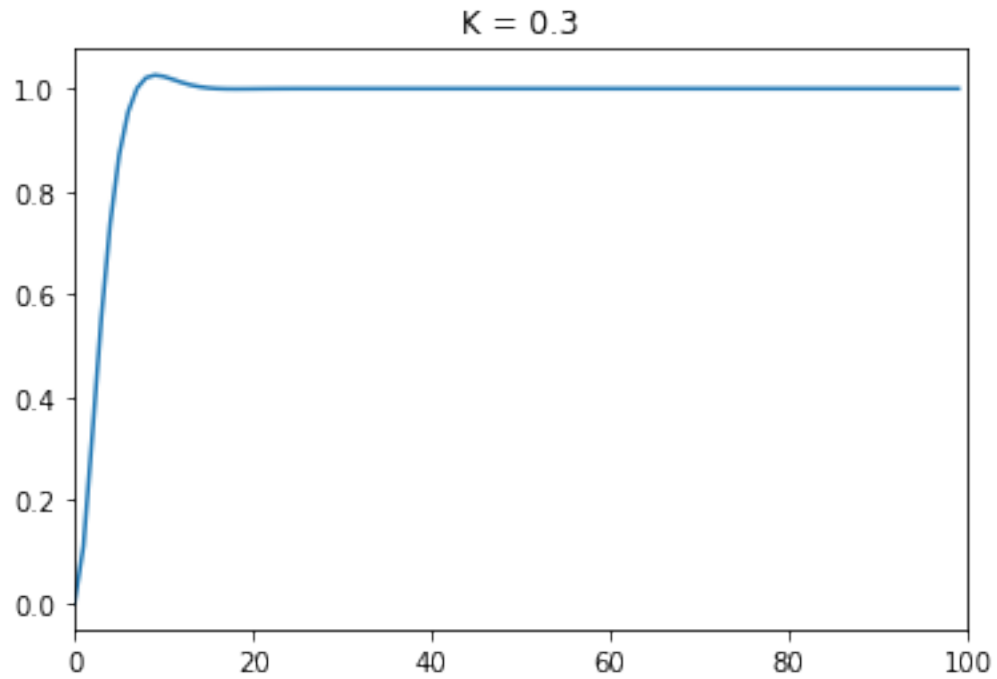
-----Eigenvalue-----	Damping---	Frequency_
1.674	1	-1.674
0.06195	1	-0.06195



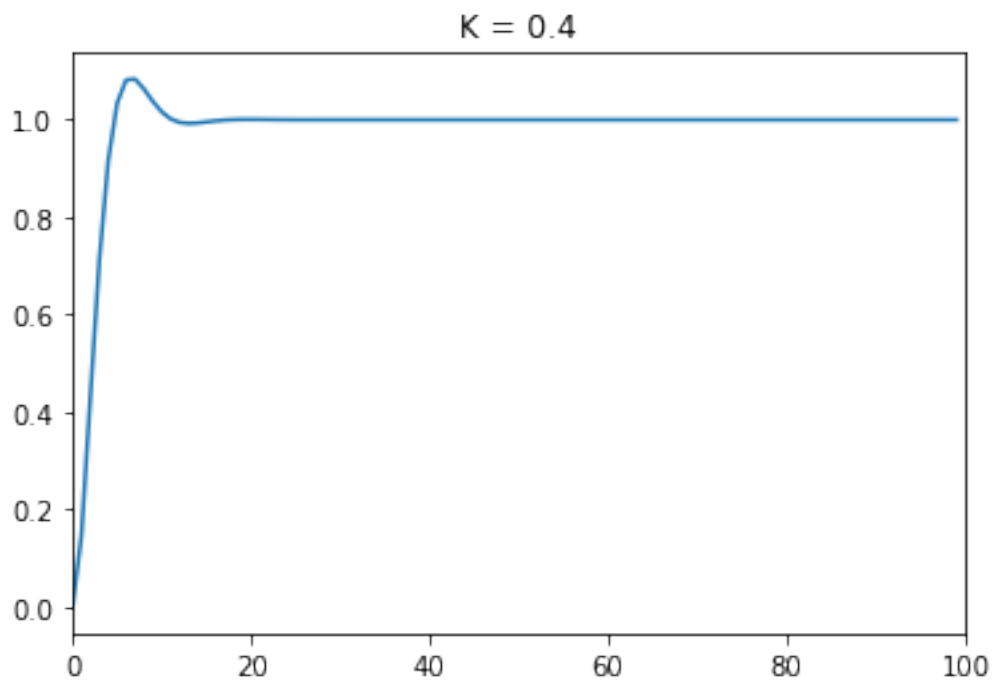
-----Eigenvalue-----	Damping---	Frequency_
0.8861	1	-0.8861
0.445	1	-0.445



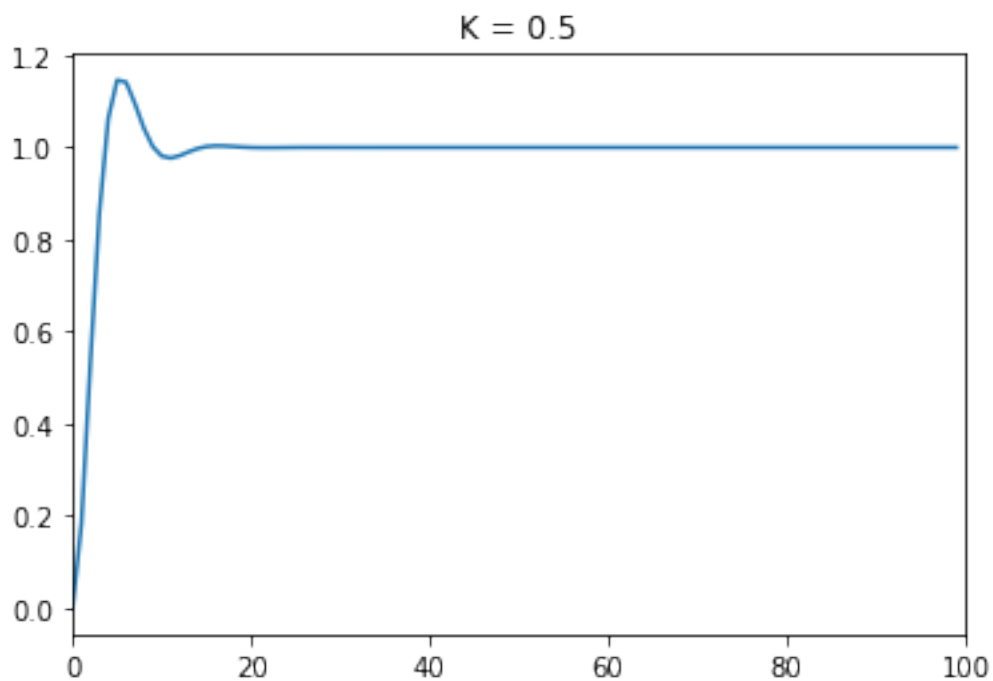
-----Eigenvalue-----	Damping---	Frequency_
0.6472 +0.04386j	0.988	0.4381
0.6472 -0.04386j	0.988	0.4381



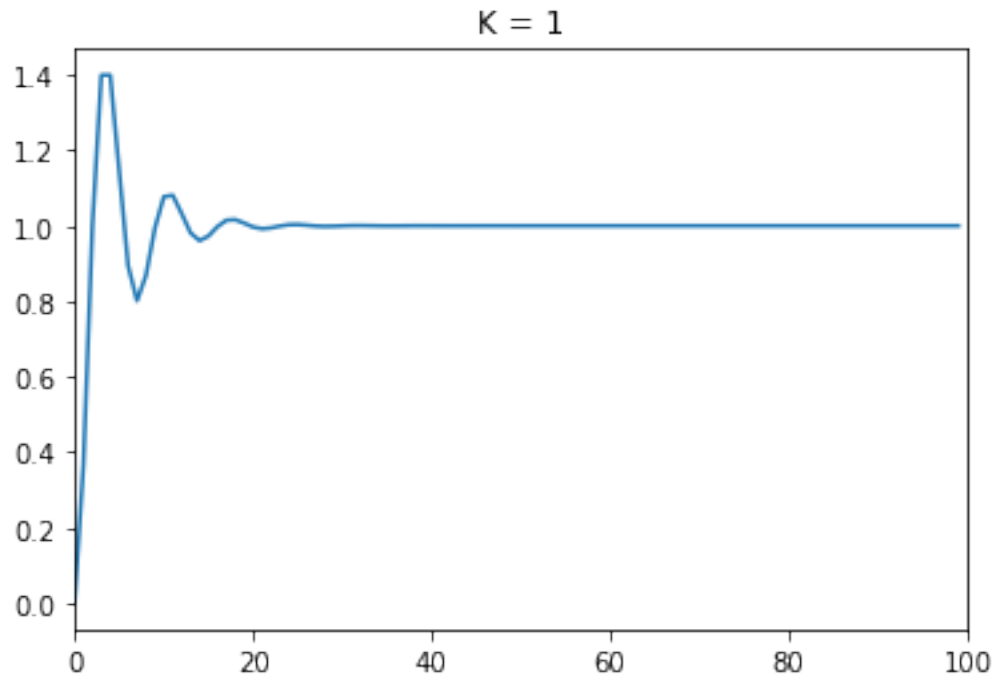
-----Eigenvalue-----	Damping---	Frequency_
0.6288 +0.2276j	0.757	0.5316
0.6288 -0.2276j	0.757	0.5316



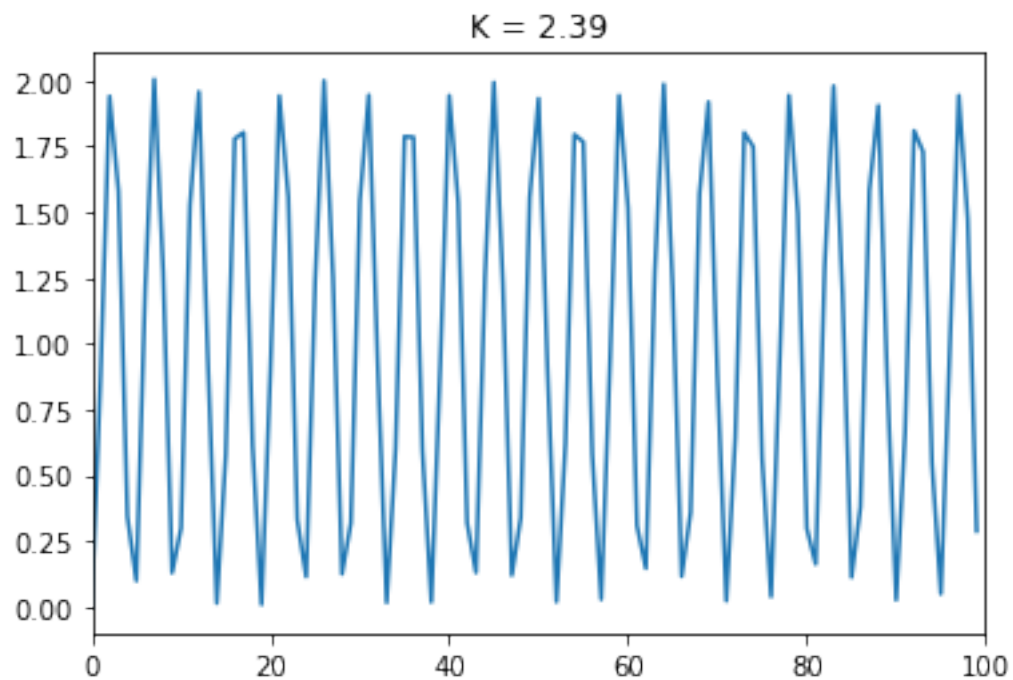
-----Eigenvalue-----	Damping---	Frequency_
0.6104 +0.3178j	0.6142	0.6084
0.6104 -0.3178j	0.6142	0.6084



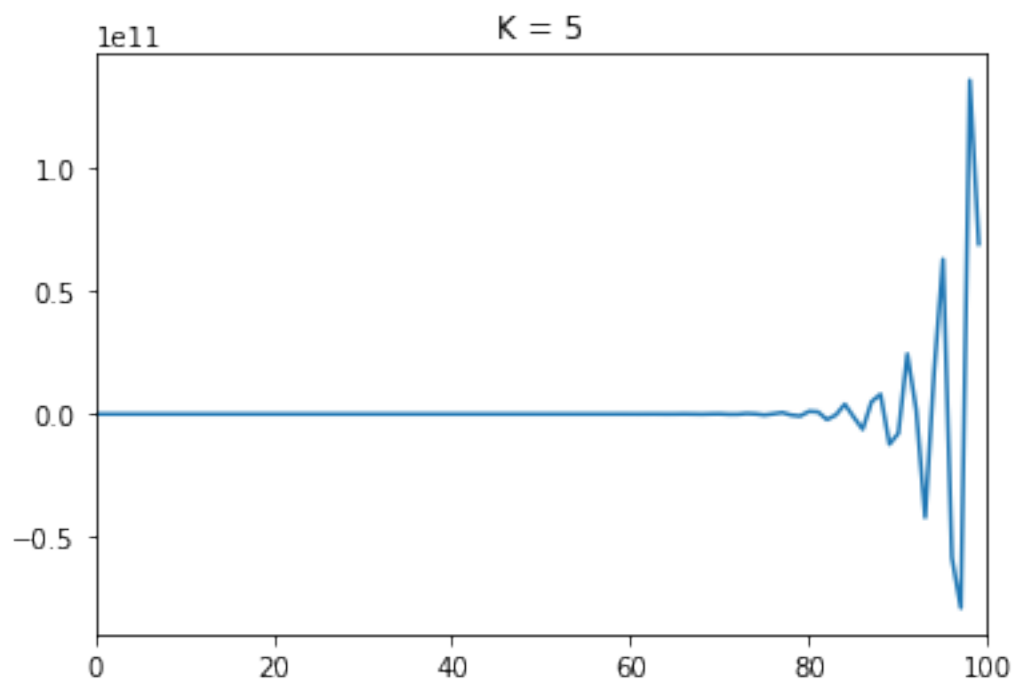
-----Eigenvalue-----	Damping---	Frequency_
0.592 +0.3867j	0.5138	0.6745
0.592 -0.3867j	0.5138	0.6745



-----Eigenvalue-----	Damping---	Frequency_
0.5 +0.6181j	0.2494	0.9197
0.5 -0.6181j	0.2494	0.9197



-----Eigenvalue-----	Damping---	Frequency_
0.2443 +0.9694j	0.0002501	1.324
0.2443 -0.9694j	0.0002501	1.324



-----Eigenvalue-----	Damping---	Frequency_
-0.2358 +1.278j	-0.1478	1.773
-0.2358 -1.278j	-0.1478	1.773