14.正交向量和子空间

1. 正交

i. 向量的正交

设有 x, y 两个列向量，其正交时满足：

$$x^T y = 0$$

或者可以表示成：

$$||x||^2 + ||y||^2 = ||x+y||^2$$

而因为：$||x||^2 = x^T x$, 所以可以得到：

$$x^T x + y^T y = (x+y)^T (x+y)$$

ii.子空间的正交

设有一个向量空间 V, 其下有两个子空间V_1, V_2，如果对于 $\forall$ 向量$\alpha \in V_1, \beta \in V_2$,
都有 $\alpha^T \beta = 0$, 那就称两个子空间正交。

零空间的维数是由 $AX = O$ 得出的。
我们假设有矩阵 A,

$$A = \begin{bmatrix} row\ 1 & of & A \\ row\ 2 & of & A \\ & \vdots & \\ row\ m & of & A \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

如果满足上面那个矩阵等式 $AX = O$, 也就意味着，A 中每一行都与 X 正交。
而 X 正是 矩阵 A 的零空间。

而因为 $(row\ x\ \ of\ \ A)X = 0$, 所以行的所有线性组合与 X 相乘：

$$\sum_{k=1}^{m} k_i (row\ i\ \ of\ \ A) X = 0$$

也是显然成立的。

2. 正交的子空间们

由上文中的子空间的正交，我们可以得到：

1. 行空间会与其零空间正交
2. 列空间会与其转置的零空间正交

先说（1.）行空间与零空间正交：

i. dim行空间 + dim零空间 = n

我们知道什么是行空间。

行空间就是一个**矩阵的行**的所有线性组合组成的向量总体。
比如

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

这个矩阵是一个 2 * 3 的矩阵，每行都可以看作**一个向量**，进一步说，是一个 **3 维行向量**。那么这些行向量（虽然此处矩阵中只有两行，两个行向量）的**所有线性组合**，也就是**行空间**可以表示为：

$$x = k \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

虽然说是 **3 维行向量**组成的向量空间。
但是向量空间的维数却不会一定是 3, 其极大线性无关组所表示的向量空间的维数却不一定是 3。
在这里，行向量的维数是 1 , 就是一条直线。

其零空间维数就是基础解系的维数 $dimV = dim(N(A)) = 2$

并且还是由那个公式：$dim(N(A)) = n - R(A)$, 我们可以说是在一开始就知道了，对应矩阵 A，在三维情况下，零空间维数与行空间维数只可能是：

1. (3,0)　$dim(N(A)) = 3,\ R(A) = 0$
2. (2,1)　$dim(N(A)) = 2,\ R(A) = 1$
3. (1,2)　$dim(N(A)) = 1,\ R(A) = 2$
4. (0,3)　$dim(N(A)) = 0,\ R(A) = 3$

（另外，有**行秩 = 列秩 = 秩**；$R(A) = R(A^T)$ 两个等式）

所以，除此之外的情况都是绝对不可能的，比如：
在矩阵 A 下，其**零空间和行空间**均可表示为一条直线。（因为 $1+1=2 \neq 3$）

ii. 正交补

教授把零空间称作行空间的正交补。
这个概念要求，一个空间包含**所有**与另外一个空间正交的向量。

3. “求解”无解方程

i. 降维的思路

假如有一个 $m*n\ (m>n)$ 的矩阵 A,

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 2\\1 & 5\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}4\\0\\5\end{bmatrix},$$

那么方程 $AX=b$ 就算是一个无解的方程了。

```
AX = b 这个方程有解，当且仅当： 向量 b 在 A 的行空间中。
```

教授举了很多例子，比如采样 1000 个数据，但是用于确定某信息的参数只有 7 个，也就是说有 1000 个方程，但是只需要确定 7 个未知数。

这个情况也就是等同于 **存在一个 1000 * 7 的矩阵**， 由于存在一些噪声，这个矩阵的**秩**不能很好地等于 7。

所以教授给出的方法就是**将矩阵 A 的转置** 乘上 A 本身。

ii. A^T A的一些性质

a. 对称阵

首先， $A^TA=(A^TA)^T$,
这使得在计算过程当中只需要计算 $\frac{n(n+1)}{2}$ 次。

b. 可逆性

α. 一个重要的公式

对于我上面的矩阵 A,

$$A^TA=\begin{bmatrix}3 & 8\\8 & 30\end{bmatrix}$$

在此处，这个矩阵结果是可逆的，但 A^TA 不总是可逆的。如果 $A=O$, 自然就不是可逆的了。
但实际上，还有一个公式：

$$R(A^TA)=R(A)$$

由此也可以推出：

$$\begin{cases}N(A^TA)=N(A)\\ \\ dim(N(A^TA))=dim(N(A))\end{cases}$$

β. 是否可逆的情况

设 A 为 $m*n$ 矩阵，那么 $R(A^TA)$ 就是一个 $n*n$ 矩阵：

1. 如果 $R(A)<n$, $R(A^TA)<n$, 方阵也就不可逆。
2. 如果 $R(A)=n$, $R(A^TA)=n$，此时方阵才是可逆的。

所以说最后得到的方阵可逆的情况还是比较少的。
当且仅当 $dim(N(A^TA))=dim(N(A))=0$ 时，也就是说，A 的**零空间维数为 0** 时，也就是说，A 的**零空间只包含原点**时，最后得到的方阵 A^TA 才可逆。