19. 行列式和代数余子式

有一说一，我是第一次看到这么证明行列式计算公式的……
当然，也是我见识短浅了。

1. 行列式计算公式

i. 由浅入深的 2 阶行列式

对于一个二阶行列式，其一般形式为：

$$det\ A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

还记得上一节对行列式探索出来的 十条性质 。
而自 **性质四** 开始，又都是通过前三个性质一点一点得出的。不得不说，最前面的三个性质，可以得到很多结论。

这里使用 **性质三**，有关线性运算的性质，可以将上述行列式转化为:

$$det\ A = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

再由 **性质二** 和 **性质十**。
前者有关行列式行交换的性质，而后者代表行列变换等价。
进一步得到：（**对加号前的行列式进行行列变换，对加号后的行列式进行行变换**）

$$det\ A = (-1)^2 \begin{vmatrix} d & c \\ 0 & a \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} c & d \\ 0 & b \end{vmatrix}$$

再由 **性质七**，这个性质描述了上三角阵行列式的计算方法，可以化简行列式为：

$$det\ A = ad - bc$$

这就是二阶行列式的计算公式。
而教授的方式是在拆分成两个行列式相加的基础上，继续进行行列式的拆分，使得整个行列式被拆分成 4 个行列式。
从而直接得出原行列式的值。
这种思想直接将所有的行列式，任意阶行列式的计算，统合在了一起：

$$det\ A = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} = (\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix}) + (\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix}) = ad - bc$$

ii. 任意阶行列式的计算方法

a. 承上

首先，我们可以像教授的方法一样。
将 n 阶行列式拆分成 n^n 个不同的行列式。
其中有很多行列式值为 0，当然也有很多行列式的值是复杂的表达式。

具体到那些行列式为 0，这个我们可以利用上一节的 **性质六**：只要存在一行（由 **性质十**：或者一列）全部为 0，那么行列式就是 0 了。

我们再来看看三阶行列式的情况：

$$det\ A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

这个行列式可以被拆分成下面 6 个式子：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 \end{vmatrix},$$

b. 启下

这 6 个式子有一个共同点，正如之前所说的：

> 它们每行每列都有且仅有一个非零元素。

我们还可以看出，根据 **性质二**，进行交换后，三阶行列式的结果：

$$det\ A = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

这里有 6 项。
有 6 项的原因就是，如果我在第一行选择某一列，那么在第二行，能够选择的列数就只有 2 列了。（这是因为 **每列有且仅有** 一个元素可以选择。）

于是整个行列式的表达式中，多项式的项数只有 $\prod_{i=1}^{n} i = n!$
所以可以得到关于行列式计算的一般公式：

$$det\ A = \sum a_{1\alpha}a_{2\beta}\cdots a_{n\omega}$$

其中，$(\alpha\beta\cdots\omega)$ 是 (1, 2, ..., n) 的一个排列。

有了这个公式，我们可以对之前的定义和性质进行一些验证。

比如单位阵的行列式为 1 这件事。是很好证明的。
再比如上一节写在靠后位置的各种行列式之间的关系，也是可以很好说明的。

2. 代数余子式

i. 代数余子式表达的行列式

为了让行列式的表示更加简单，所以才引入了代数余子式这个概念。

对于一个 n 阶，并且其表达式项数也和 n 有关，（$n!$）的东西，我们即使不容易想到数学归纳法，也会感觉到可能有一种递归表达式存在。

代数余子式就是这么一个东西，可以把计算 n 阶行列式转化为计算 $n-1$ 阶行列式。

对于上面的那个三阶行列式 $det\ A$：

$$det\ A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

我们可以利用 **乘法分配律** 进行结合：

$$det\ A = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

如果我们令：

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, A_{12} = \begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix}, A_{13} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$det\ A = a_{11}det\ A_{11} + a_{12}det\ A_{12} + a_{13}det\ A_{13}$$

我们称 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式。
很明显可以得到代数余子式的定义和表达：

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}det(\text{除去第}i\text{行第}j\text{列之外的元素组成的行列式})$$

所以行列式可以这样表达：

$$det\ A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad (i \in [1, n])$$

ii. 一个练习

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

可以利用 **性质五** 先进行一下化简：

$$B \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, (r_2 - r_1)$$

那么求此行列式就按 b_{23} 展开，转而计算下列行列式的值：

$$B = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

继续按上面这个行列式的 $b_{33}^{'}$ 展开：

$$B = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

已经可以计算了！这个行列式的值就是 -1。