21. 特征值和特征向量

1. 特征向量

i. 看待矩阵乘法的新视角

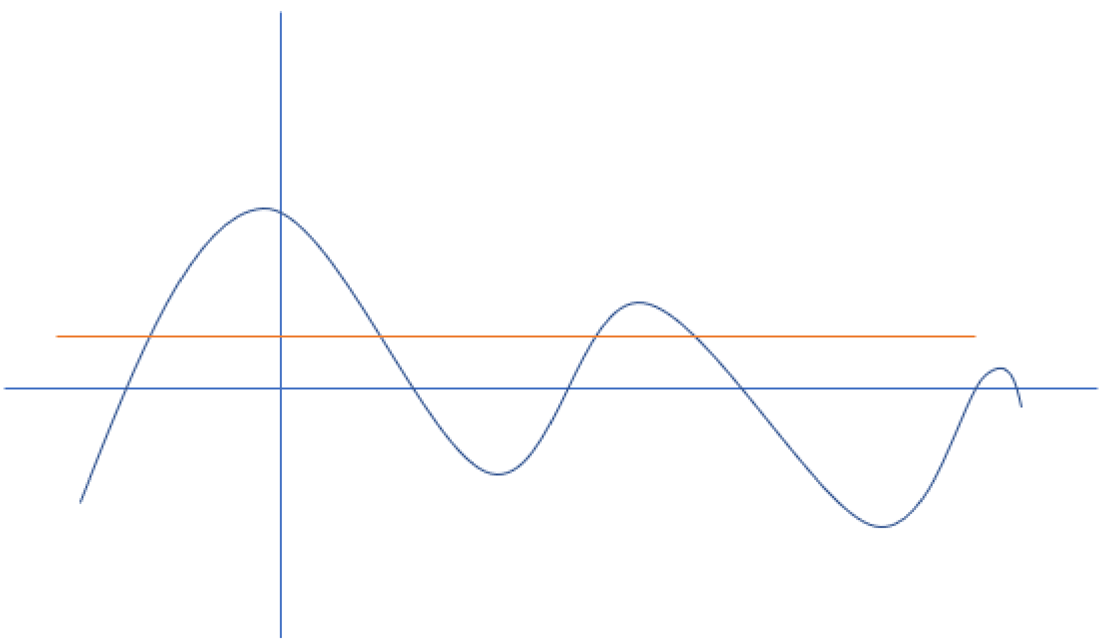
在这里，由之前的小节，我们可以知道：

> 一个矩阵，左乘另一个矩阵，相当于对原矩阵进行行变换。

那么我们其实可以将这个过程看作一个函数的映射：

1. 首先，对于任意一个矩阵，左乘任意一个矩阵，得到的结果是唯一的。
2. 其次，相同的结果，可能是由不同的矩阵乘法得到。

所以我们看出，这是一个 **多对一** 的关系。
好似：



如果可以这么看的话，那么给定一个矩阵 A，令其左乘一个矩阵（向量） X, 就好比于将 矩阵（向量） X 输入至矩阵 A 中。

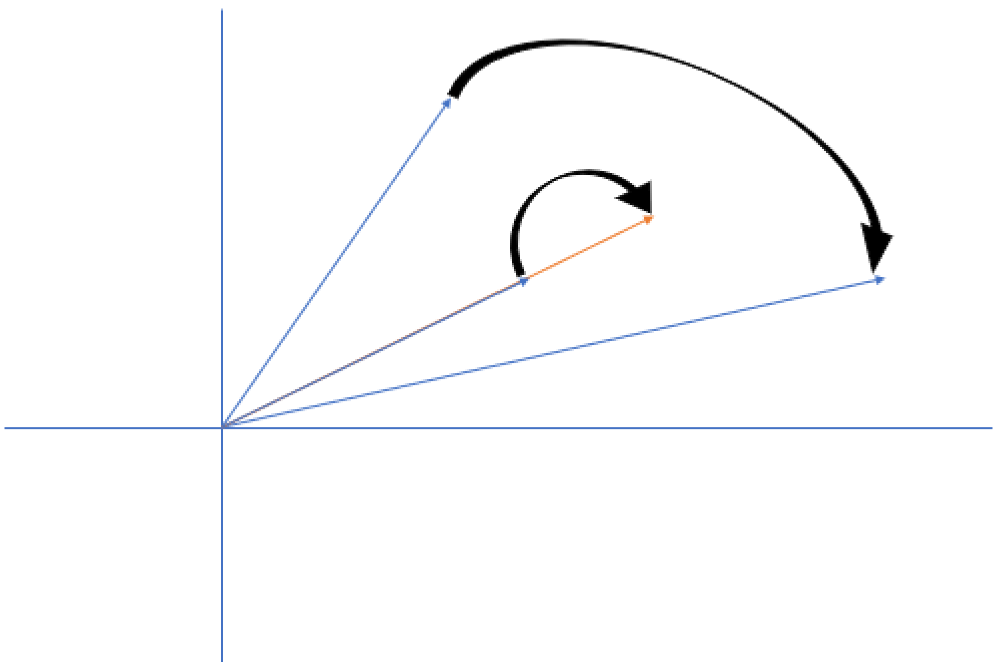
（由此可以联想到 **离散数学** 中的复合函数）

ii. 特征向量是什么

现在，我们关注 AX 这个矩阵乘法的结果。
我们由前面向量空间的知识，可以得知：**AX 落在 A 的列空间中**。
如果 X 恰好就在 A 的列空间中，那岂不是 AX 平行 X？
这样的平行关系就可以表示成：

$$AX = \lambda X \qquad (\lambda\text{为系数})$$

在这里，X 被称作特征向量，λ 就是对应的特征值。



（注：矩阵对有些向量的改变是巨大的，**而对有些向量的改变只在一条直线上。**）

2. 特征值

i. 经验上的情况（子空间解释）

如果对书本上的 特征值和特征向量 的例题还有些印象。是大概能想到：**奇异矩阵（不可逆矩阵）一定存在至少一个特征值为 0**。

这个或许可以通过前面关于 **子空间** 的理论解释：

如果一个矩阵 A 是不可逆的，那么就表明以下事实：

- $R(A) < n$
- $dim(N(A)) > 0, \quad (\text{因为 } dim(N(A)) = n - R(A))$
- $det\ A = 0$

我们先只看前面两个事实。
由于矩阵 A 零空间维数不为 0，所以**一定存在**一系列的**非零向量** X, 使得 $AX=O$。

而我们都知道：

- 零向量和任意向量垂直；
- 零向量和任意向量平行。

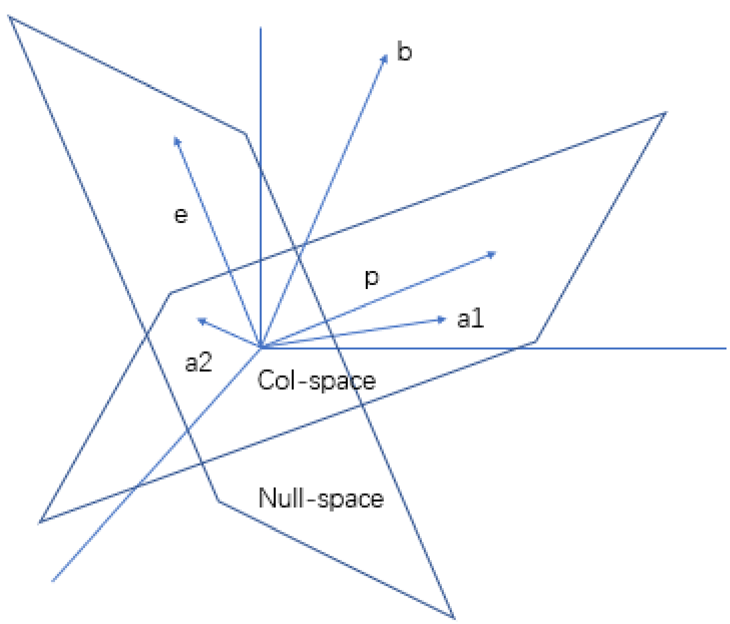
所以处于 A 零空间中的向量 X, 其本身就是 A 的特征向量，且对应的特征值 $\lambda=0$。

（注：在这里，零空间维数不一定是 1，只要其维数 $dim(N(A))>0$，那么一定会有为 0 的特征值）

ii. 求解 AX = lambda X

对于这个方程，如果不进行任何处理直接求解，应该是有些困难的。

a. 投影矩阵的特征向量和特征值



回顾第 16 节的投影矩阵，我们考虑它的特征向量和特征值，之后再说原因。

看到这个图，我们重新列出曾经的公式：

$$P=A(A^TA)^{-1}A^T$$

1. 如果矩阵 b 在列空间中，那么 $Pb=b$;
2. 如果矩阵 b 垂直于列空间，那么 $Pb=O$;

3. 如果矩阵 b 既不在列空间，也不垂直于列空间，那么其投影位于列空间中，且长度非零，即 $Pb = xa$, (x 为常数)。

α. 特征值为 1

发现什么奥秘了？
好像投影矩阵的 **性质1**，正好就 **对应着特征向量与特征值的定义**。

证明略掉，就简单说一嘴，如果 b 在列空间中，而等式左边，b 左乘矩阵 P, 显然 Pb 位于 P 的列空间中。
（将**三维空间中的球体投影到二维空间**，得到的是**圆形**。但是**三维空间中的球体投影到三维空间**，那不是**原地tp**吗? 得到的还是那个球体）

由此可以发现，投影矩阵的特征值为 1，特征向量可以是 列空间中的任意向量。

进一步说，利用投影矩阵的性质：$P^n = P$,

$$P^{n-1}Pb = Pb$$

看，矩阵 P^{n-1} 的特征值也为 1，特征向量为 Pb。

β. 特征值为 0

如果可能的话，我们还可以利用投影矩阵的 **性质2**。

试想，如果存在垂直于列空间，即位于转置矩阵的零空间中的向量。（此处，必须说明，转置矩阵指的是 A^T，$P = A(A^TA)^{-1}A^T$）
那么 $Pb = O, \ (A^Tb = O)$。

所以不难看出，投影矩阵的特征值为 0，且对应的特征向量可以是 转置矩阵零空间 中的任意向量。

b. 置换矩阵的特征向量和特征值

α. 两个特征值

还记得上一节的置换矩阵，在行列式中，可以看作两行（两列）进行交换；在空间坐标系中，可以看作两条棱的交换。

在这里，给出一个 2 阶的置换矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

我们其实不难想到，如果要满足特征值和特征向量成立的式子，一个两行相同的向量是个不错的选择：$x_1 = (1,1)^T$。这样的话，特征值为 1。

如果我们努力地想一想，还可以想到两行互为相反数的向量也可以满足等式：$x_2 = (1, -1)^T$, 此时特征值为 -1。

β. 迹

教授在知道其中一个特征值为 1 的情况下，立刻就得出了另外一个特征值。
这是因为教授的脑子里面有一个 **迹** 的概念。

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum \lambda$$

c. 求解 AX = lambda X

对于这个方程，由于 λ 是一个系数，并非矩阵，所以我们自然而然想到将其移至左侧，得到等价的方程：

$$(A - \lambda I)X = O$$

如果要让这个方程有非零解，也就是说左侧 $A - \lambda I$ 的零空间维数不为 0。（$dim(N(A - \lambda I)) \neq 0$）

由前面三节的内容，我们知道这意味着 $det(A - \lambda I) = 0$。

那么求解一个未知 λ, X 的方程，转化成了**通过行列式单单**求解 λ 的等式。

这个等式有其名号：本征方程。
左侧的式子，我们称之为 **特征多项式**。

d. 特征多项式

我们尝试来解一个不是那么显然的题目。

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

求其特征向量和特征值。
那么我们直接使用特征多项式, 设特征值为 λ：

$$det(A - \lambda I) = det(\begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix}) = (3-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8$$

根据因式分解，或者在第三步就平方差公式，可以看出特征值是 2 或 4。

另外，还可以发现，最高次项的系数要么为 1，要么为 -1。事实上，最高次项系数为 $(-1)^n$，其中 n 为矩阵 A 的阶数。

除此之外，可以发现，次高项系数为 $-Tr(A)$。
最后，还可以看出常数项为：$(-1)^n det\ A$。

总结一下，对于**特征多项式**：

1. 最高次项系数为：$(-1)^n$；
2. 次高项系数为：$-Tr(A)$；
3. 常数项为：$(-1)^n det\ A$。

3. 求解特征向量

i. 对于上面的矩阵

现在特征值已经求出来了，就可以通过 $(A-\lambda I)X=O$, 求解特征向量。

对于第一个特征值 4，我们有：

$$A-\lambda_1 I=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

为了检验特征值是否求错，我们只需要看得到的矩阵是不是奇异矩阵。
经检验，矩阵行列式为 0。说明没求错。

这下子，X 就在矩阵 $A-\lambda I$ 的零空间当中，求 X 也就等同于求 $A-\lambda I$ 的零空间。

$X_1=(1,1)^T$, 同理，$X_2=(-1,1)^T$

ii. 第一个惊人的发现 —— 特征多项式性质

这个发现就是，两个完全不一样的矩阵：

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

它们居然有**相同**的特征向量：

$$x_1=(1,1)^T,\quad x_2=(-1,1)^T$$

但是它们的特征值却**不相同**：

$$\begin{cases}\lambda_1=1\\ \lambda_2=-1\end{cases},\qquad \begin{cases}\lambda_1=4\\ \lambda_2=2\end{cases}$$

但我们却可以发现，对应的特征值之间相差 3 。
除此之外，如果二矩阵作差，得到新的矩阵：

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3 & 0\\0 & -3\end{bmatrix}$$

我们惊讶地发现这个新矩阵的 **2 个特征值**都是 -3。

看似特征值之间有着奇妙的联系。

iii. 对于发现的简短证明

我们可以假设，如果有两个矩阵，它们的特征向量对应相等。同时，其中一个矩阵肯定满足：$AX = \lambda X$

如果等式两边同时加上 λI, 那么：

$$AX + nIX = \lambda X + nIX = (A + nI)X$$

而 $\lambda + nI$ 刚好是另一个矩阵 $A + nI$ 的特征值。（注：它们的特征向量 X **必须对应相等**）

a. 一般情况不成立

如果对应的特征向量不相等，那么就好似：

$$\begin{cases}AX = \lambda X\\BY = \mu Y\end{cases}$$

这两个是不可以相加的。

b. 任意向量都是单位阵特征向量

但是单位阵就是可以，而且对谁都可以直接加，这是因为：
单位阵被称作“单位”，有一层意思就是这个矩阵对各个方向的变换都是相同的。
无论我是加，还是乘，它对每一个维度都是同等待遇。

对于一个单位阵 I：

$$I = \begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\0 & 1 & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

设其特征值为 λ, 令其特征多项式为 0 ：

$$det(A-\lambda I)=(1-\lambda)^n=0$$

得到 n 重根：$\lambda_{1,2,3,\cdots,n}=1$
同时，由于 $A-\lambda I$ 为 $O \Rightarrow R(A-\lambda I)=0 \Rightarrow dim(N(A-\lambda I))=n$。

岂不是得到了**零空间维数为 n**。

n 维空间（零空间）包含所有的 n 维向量；
而**零空间中向量都是原矩阵的特征向量**。

这句话等价于：**任何 n 维向量都是 n 维单位阵的特征向量**。

iv. 第二个惊人的发现 —— 复数特征值

还记得前面正交矩阵那一节的矩阵 Q：

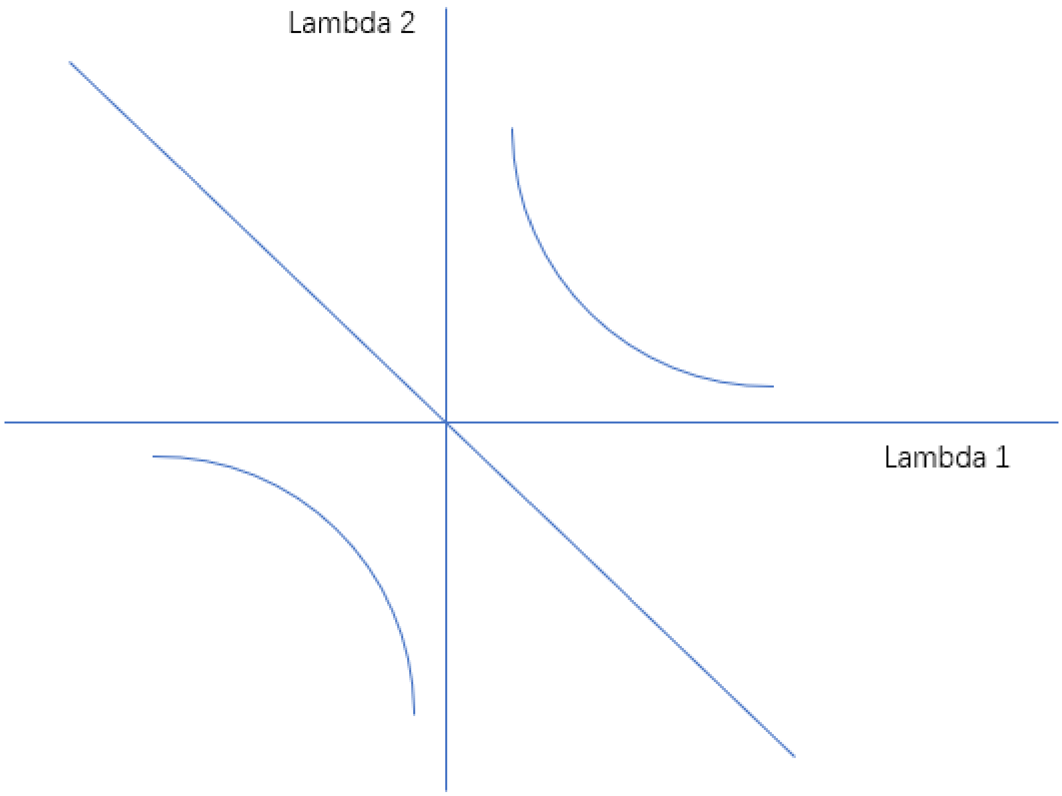
$$Q=\begin{bmatrix} cos(\frac{\pi}{2}) & -sin(\frac{\pi}{2}) \\ \\ sin(\frac{\pi}{2}) & cos(\frac{\pi}{2}) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

应用之前的性质：

1. 最高次项系数为：$(-1)^n$；
2. 次高项系数为：$-Tr(A)=-\sum_{i=0}^{n}\lambda_i$；
3. 常数项为：$(-1)^n det\ A=(-1)^n\prod_{i=0}^{n}\lambda_i$。

得出方程式：$\lambda_1\lambda_2=1,\quad \lambda_1+\lambda_2=0$。

但是这个方程组不用解就能看出来，**在实数域无解**。



即使不使用特征多项式的性质，写出 $Q-\lambda I$ 的行列式也能看出来：

$$det(Q-\lambda I)=\begin{bmatrix}-\lambda & -1\\ 1 & -\lambda\end{bmatrix}=\lambda^2+1=0$$

此处：

$$\lambda_1=i, \qquad \lambda_2=-i$$

这不由得让我想起线代课上的一个结论：**对称阵的特征值均为实数**，
同时：**非对称阵的特征值不一定都是实数**。

对于这个，教授给出了一个解释。

比如这个矩阵 Q，发现 $QQ^T=-I$, 两边取行列式，又由行列式的**性质十**：$det\ A=det\ A^T$, 所以 $|Q|^2=-|I|$

也就是说，一个矩阵越是不对称，越是朝相反的方向对称，就越会出现复数的特征值。

v. 第三个惊人的发现 —— 多重特征值

对于一个矩阵 A,

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix}$$

我们可以一眼看出这个行列式的特征值是 3 和 3。
这么一下子就说出来可能显得我太聪明了。

其实是这么想的：
如果要写出这个矩阵的特征多项式，矩阵表示法是“$|A-\lambda I|$”, 其实可以直接看作，在对角线上减去某个值 λ。

由于**对角线上元素相等**，所以**减去的一定就是那个数字 3**。
因此 3 绝对是一个特征值。

再根据：$-Tr(A)=-\sum_{i=0}^{n}$, 另外一个特征值也是 3。

即使对角线上各行元素不相同，由于 $det\ A=\prod_{i=0}^{n}a_{ii}=\prod_{i=0}^{n}\lambda_i$, 只要**对角线上有元素为 0，那么这个矩阵的行列式一定会为 0**。
（只有三角阵才满足这个性质）

> 直接得出特征值是很舒服的。
> 但是多重特征值对应的特征向量却不那么乐观。

如果特征值多重，意味着我在对原矩阵 A 减去 λI 之后，得到的新矩阵，**必定存在至少两行，在化简至行阶梯形矩阵后为全零行**。

这意味着 $R(A-\lambda I)<n-1$, 进而 $dim(N(A-\lambda I))\geq 2$

如果零空间维数大于 2，说明一个特征值对应的特征向量存于 k 维空间中，其中 $k>2$。那么 **零空间就*最多*需要 k 个基来表示** 。

（加上 ***最多*** 两个字是因为在这里还有另外两个概念，曰：**代数重数 m，几何重数 a**, 恒有 $m\geq a$ ）
（$m=$ 特征值的重数， $a=$ 特征值对于零空间的维数）

在这里：

$$A-\lambda I=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$$

对于这个矩阵，我们找不到第二个与 $x_1=(1,0)^T$ 线性无关的向量。
（在这里，代数重数 $m=2$, 几何重数 $a=1$）

vi. 第四个惊人的发现 —— 线性无关的特征向量

> 不同特征值对应的特征向量线性无关。

a. 数字论证

数学上的证明，需要假设两个特征向量，先假定它们线性相关，然后根据线性相关的性质写出：
$k_1x_1 + k_2x_2 = O$，之后利用 $Ax_1 = \lambda_1 x_1, Ax_2 = \lambda_2 x_2$，综合得到：

$$k_1Ax_1 + k_2Ax_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1\lambda_1x_1 + k_2\lambda_2x_2 = 0$$

所以，必有 $\lambda_1 = \lambda_2$，但是这与假设矛盾了。

b. 几何论证

而几何上面只需要想一想：
不同的特征值只是表示了不同方向上的伸缩而已。（如上图 21_2）
如果线性相关的特征向量可对应两个不同的特征值，那么说明矩阵作用同一向量，在同一方向有两个伸缩结果。

岂不是矩阵乘法有了二义性。这是不可能的。