11 矩阵空间，秩

1. 矩阵空间

i. 基的个数

要用一组基来表示**所有的 3 * 3 矩阵** M, 若不加任何限制，则其**基**中矩阵的个数为9 （维度为9）

这组基可以为：

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\dots\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

但如果要添加一些限制，比如使得这所有的 3 * 3 矩阵并非无限制，而是对称阵，那么决定这些矩阵的基中的矩阵个数就要少一些。
由于对称，对角线上为 1 的基仍在，而由于需要保持对称，上三角位置一旦非零，则其对称的下三角位置必定非零，并且相等。

ii. S+U

以下谈论的均为 3 * 3 矩阵。
将 S 看作所有对称阵的集合，而把 U 看作所有的上三角阵的集合。

$S \cap U = S$, 其 $dim(S \cap U) = 3.$

不考虑 $S \cup U$, （为什么）而考虑 $S + U$, 将此处的加法定义为：**集合中任意挑出两个元素进行加法运算。**

还记得任何一个矩阵都可以被拆分成**一个对称阵和一个反对称阵的和的形式。**
这是因为对称阵对应元素加和以及某一个矩阵一旦被确定，那么另外一个矩阵也可以被确定。

于此同理：**任何一个矩阵都可以被拆分成一个对称阵和一个上三角阵的和的形式。**

正是由于得到了所有的矩阵，所以 $dim(S + U) = 9$

iii. 神奇的等式

$$dimS + dimU = dim(S \cap U) + dim(S + U)$$

iv. ode（

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

其通解为：

$$y = C_1cosx + C_2sinx$$

对于一个二阶微分方程的解，其解集所表示的空间的基正是：

$$\begin{bmatrix} cosx \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ sinx \end{bmatrix}$$

（由于这一组基已经可以表示所有的解，所有的解可以表示成这一组基的线性组合。$dim = 2$）

2. 矩阵的秩

1. 关于 R(A) = 1

当满足小标题条件时：
列空间维度 = R(A) = 行空间维数，比如：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 8 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

所有的**秩 1 矩阵**都可以表示为 **列向量乘上一个行向量** 的形式。

而**所有的秩 n 矩阵**都可以表示为 n 个**秩 1 矩阵**的加和形式。

但是，只是说可以被这么表示出来，并不是说，n 个秩 1 矩阵加和一定就是秩 n 矩阵。
（因为那个不等式： $R(A) + R(B) \leq R(A + B)$）
（正是因为两个不同的矩阵相加时，有些维度是重叠的，是共有的）

2. 一个转化思路

如果一个子空间正是某一个矩阵的零空间，就可以通过找到那个矩阵，并求解 $AX = 0$ 来得到子空间。

而关于零空间，一个 $m * n$ 的秩 r 矩阵的零空间的维数 $dim = n - r$

如：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

行空间维数为 1 ，零空间维数为 3 。
那么零空间的一组基就是：

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

列空间的维数为 1 。
其基本子空间，就是其转置的零空间，但是那就是 0 。
这其实也是上面那个公式：$dim = n - r$