27. 复数矩阵和快速傅里叶变换

1. 复数矩阵

i. 求模长

假设一个复列向量为 $z = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_n \end{bmatrix}^T$，其中每一个元素都可以表示为：$z_i = a_i + b_i i$。

由前面两节的内容，我们知道利用简单的内积（$z^T z$）是求不出复数向量的模长的。（$a_i^2 - b_i^2 \neq ||z_i||^2$）
但是可以通过左乘复列向量的 **共轭转置** 来得到模长：

$$z = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 i \\ a_2 + b_2 i \\ \vdots \\ a_n + b_n i \end{bmatrix}$$

其对应的共轭矩阵的转置为：

$$\bar{z}^T = \begin{bmatrix} a_1 - b_1 i & a_2 - b_2 i & \cdots & a_n - b_n i \end{bmatrix}$$

由此可以得到：

$$||z_i||^2 = \bar{z}^T z = z^H z = \sum_{i=1}^{n} (a_i^2 + b_i^2)$$

（H 是一种记号，来自于艾尔米特的首字母）

ii. 其余一切性质

既然像第 26 节所讲的那样：艾尔米特矩阵也拥有 n **个实特征值**以及 n **个两两正交的特征向量**，那么这些性质也可以表示为：

$$A^H = A$$

对于两两正交的向量（$q_1, q_2, \cdots, q_n$），有：

$$q_i^H q_j = \begin{cases} 0 & if\ i \neq j \\ 1 & if\ i = j \end{cases}$$

两两正交 是以下结论的源头：

$$Q^H Q = I, \quad (Q = \left[q_1, q_2, \cdots, q_n \right])$$

因此艾尔米特矩阵可以被分解为：

$$A = Q^{-1} \Lambda Q = Q^H \Lambda Q$$

2. 傅里叶变换

i. 傅里叶矩阵

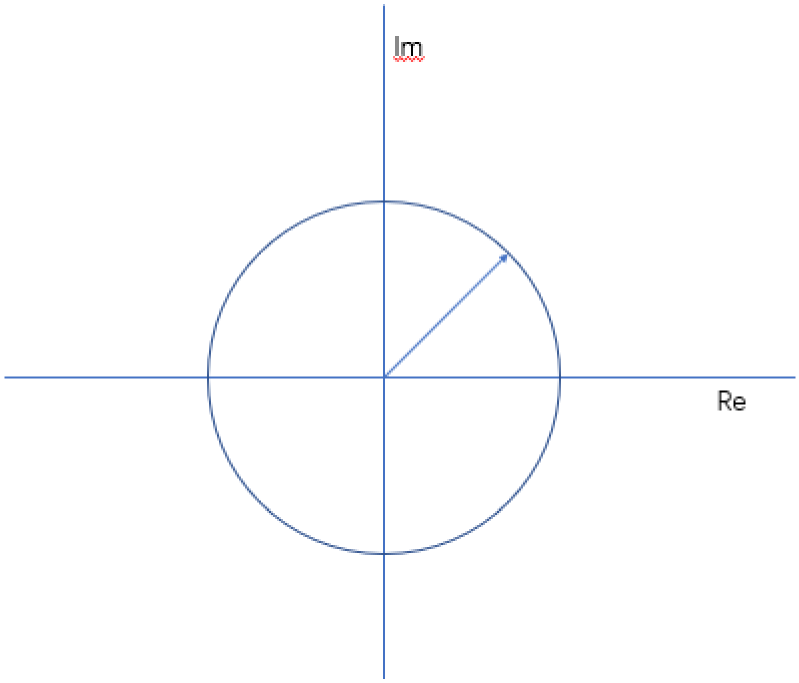
在傅里叶矩阵中，不使用首行序号为 1 的约定，首行序号为 0。

$$F_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{(n-1)} & \cdots & \cdots & \omega^{(n-1)^2} \end{bmatrix}$$

这个矩阵是通过对称阵性质得出的。
对于矩阵中元素：$(F_n)_{ij} = \omega^{ij}$。

矩阵中的 ω 不是一般的常数，有其特定的取值：$\omega_n^n = 1$
在复数域中：

$$\omega_n = e^{\frac{2\pi i}{n}} = cos(\frac{2\pi}{n}) + isin(\frac{2\pi}{n})$$



（至于为什么 $\omega^n = 1$ 在这个取值下成立，因为：$e^{\pi i} + 1 = 0$ 这个谁都知道的式子，所以自然有：$\omega_n^n = e^{2\pi i} = 1$）
（像图中，就取了 $\frac{\pi}{4}$，$\omega_4 = e^{\frac{\pi i}{4}}$， $n = 8$）

如果不信，可以算一步来求证一下：

$$(e^{\frac{2\pi i}{n}})(e^{-\frac{2\pi i}{n}}) = (cos(\frac{2\pi}{n}) + isin(\frac{2\pi}{n}))(cos(\frac{2\pi}{n}) - isin(\frac{2\pi}{n}))$$

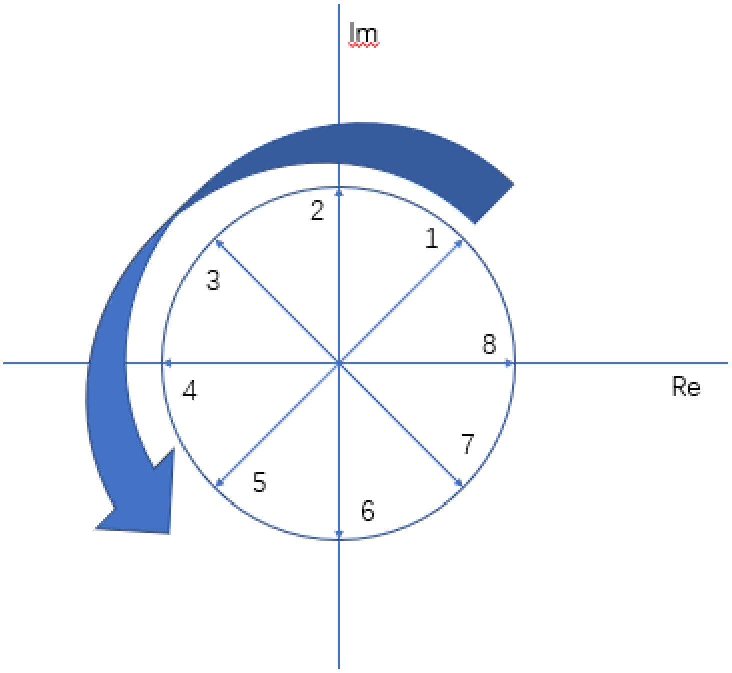
$$原式 = cos^2(\frac{2\pi}{n}) + sin^2(\frac{2\pi}{n}) = 1$$

（验证了一下原地 tp）

$$(e^{\frac{2\pi i}{n}})(e^{\frac{2\pi i}{n}}) = (cos(\frac{2\pi}{n}) + isin(\frac{2\pi}{n}))(cos(\frac{2\pi}{n}) + isin(\frac{2\pi}{n}))$$

$$原式 = cos^2(\frac{2\pi}{n}) - sin^2(\frac{2\pi}{n}) + 2isin(\frac{2\pi}{n})cos(\frac{2\pi}{n}) = cos(\frac{4\pi}{n}) + isin(\frac{4\pi}{n})$$

（这个是走了一步）
只要我们不停下脚步，道路就会继续延伸，直到再次回到起点：



（可以看到乘了一圈又乘回来了）

比较特别的，我们关注 $n=4$，

$$\omega_4^4=1$$

解得：$\omega_4=1,i,-1,-i$。

对应的傅里叶矩阵为：

$$F_4=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&i&-1&-i\\1&-1&1&-1\\1&-i&-1&i\end{bmatrix}$$

ii. 算法探索

无论是 4 阶的还是 n 阶的，傅里叶矩阵都是正交矩阵。
如果不相信的话，就应该对傅里叶矩阵求逆，比如上面的 F_4，其对应逆矩阵应该是：

$$F_4^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-i&-1&i\\1&-1&1&-1\\1&i&-1&-i\end{bmatrix}$$

（前面有系数的原因是：可以看到列向量模长不为 1）
但是也还能得出：

$$2F_4^{-1}=F_4^H$$

根据辐角和 ω （可以看成角速度来想）之间的关系，被分割的一份辐角越大，ω 越小。由计算 ω 的公式，可得：

$$(\omega_k)^{\frac{k}{m}} = \omega_m$$

比如 64 阶傅里叶矩阵和 32 阶傅里叶矩阵：

$$(\omega_{64})^2 = \omega_{32}$$

但是，64 阶矩阵有 64 行 64 列，32 阶矩阵只有 32 行 32 列。
不能说把 64 阶矩阵中的 ω 直接替换就完事儿了，需要进行变换：

$$\begin{bmatrix} & & \\ & F_{64} & \\ & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{32} & O \\ O & F_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ & & \end{bmatrix}$$

如果直接计算 F_{64} ，总共需要计算 64^2 个元素，但是转换过后，在知道变换矩阵的前提下，计算 2 个 F_{32} 只需要 2×32^2 个元素。

（当然，傅里叶变换和快速傅里叶变换我并没有任何了解。如果曾经学习过，那肯定换一个角度理解可以瞬间悟出。但可惜了。下面只是复述老爷子的话了。）

对于右边，注意要生成 F_{64}，那也就是需要将 2 个 F_{32} 进行重新排列，奇偶要分开，再重新组合在一起：

$$\text{右侧} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & & 1 & \\ & 1 & & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

不一定是这样的阶数，但意思到了就行。

左侧矩阵比较特别：

$$\text{左侧} = \begin{bmatrix} I & D \\ I & -D \end{bmatrix}, \text{其中} D = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \omega & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega^n \end{bmatrix}$$

以此类推，既然可以把 64 维矩阵降到 32 维矩阵，那么就可以继续降阶，直到把矩阵降到 2 维甚至 1 维。

以 64 维矩阵为例，需要计算的元素个数是：

$$a_{n+1} = 2a_n + 2^n, a_n = 1$$

利用初中就学过的数列知识，两边同乘 $\frac{1}{2^{n+1}}$ 就可以转化为等差数列计算：

$$a_n = 2^{n-1}n$$

$$2(2(2(2(2(2(1) + 2) + 4) + 8) + 16) + 32 = 192, (n = 7)$$

所以时间复杂度从 $n^2 \rightarrow nlgn$。