31. 线性变换及对应矩阵

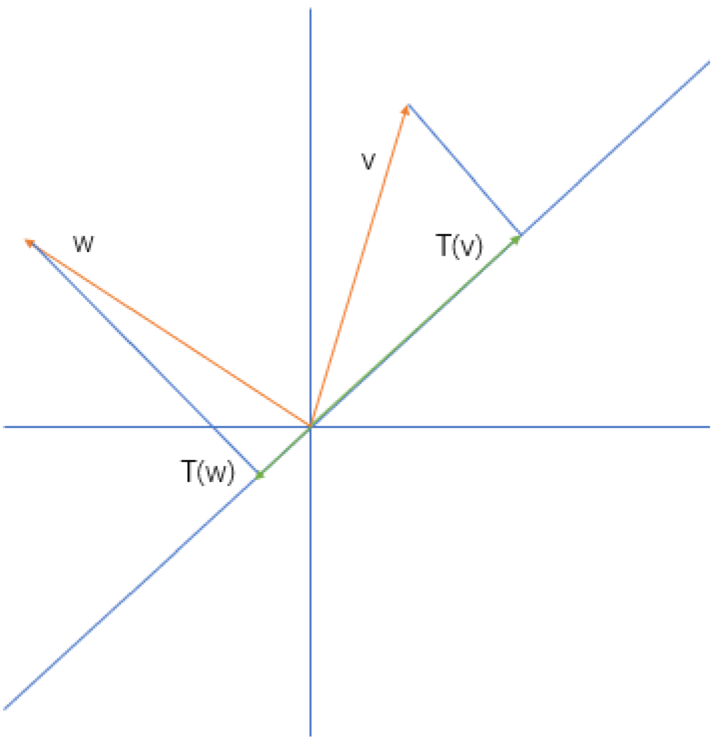
教授的课是从这里开始的。
无论是 **第 1 节** 对 **方程组进行几何解释** 时，还是 **第 3 节** 利用不同角度看待 **矩阵乘法** 。到后面 **第 10 节** 开始用变换的思想考虑 **四个子空间**，甚至 **第 16 节** 的投影矩阵推导，教授讲述的内容都脱离不了 **线性变换** 这几个字。

换句话说。
如果矩阵不能够表示线性变换，那么矩阵不会有这么多性质和用途，很多数学问题，诸如提过的 **空间中体积求解**，**微分方程稳态**，**多元函数极值**，**傅里叶变换** 等等，都不能 凭借 **矩阵** 这个工具 完成几何上的 **形象解释。**
如果线性变换不能被矩阵表示，那么相信数学家们会找到其他办法。**特征值和特征向量**，**变换的各种分解** 依然会被提出。因为这些的概念的由来，是对线性变换作解释，而不是因为矩阵是矩阵。

线性变换才是重要的地方。

1. 线性变换

i. 线性变换的直观感受



投影 是一种特殊的线性变换。
给定一个空间，令 **大于或等于给定空间维度** 的空间矩阵对其投影，可以得到一个新的矩阵。

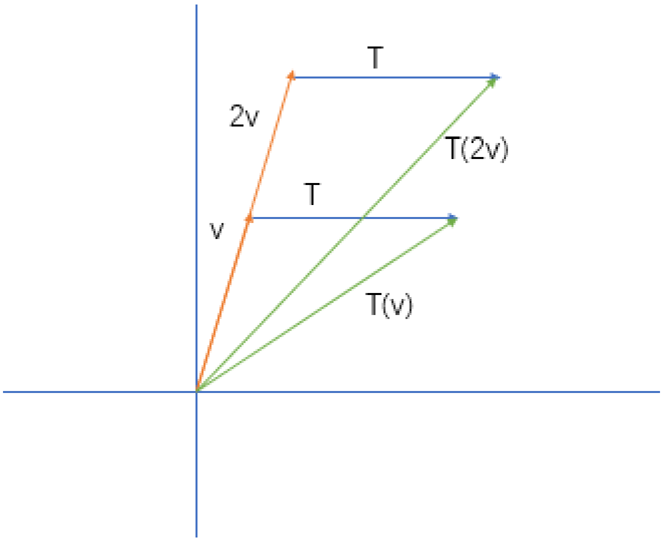
在上图中，即是：给定一条平面上的直线，令一 2 维向量对其投影，得到一起点、终点皆在直线上的平面向量。

对于变换，还有一类叫做 **非线性变换。**
对于上面的投影，的的确确是线性变换，因为它满足：

1. 投影前后坐标原点不改变；
2. 投影前后直线仍为直线。

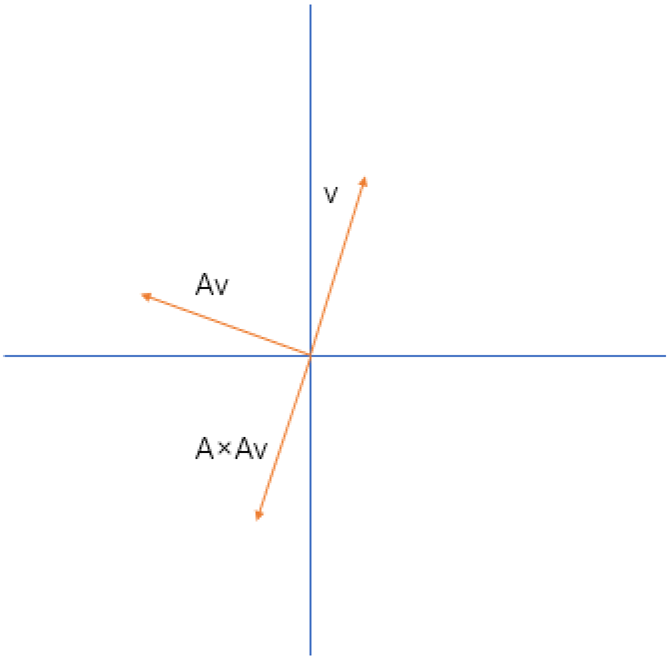
但是有的变换却不能满足这两条性质。
的的确确存在一类变换，能将直线变成曲线，能将坏的（不方便分类的）变成好的（容易用直线分类的），能将起点变为曾经的终点。

比如下面的平移变换：

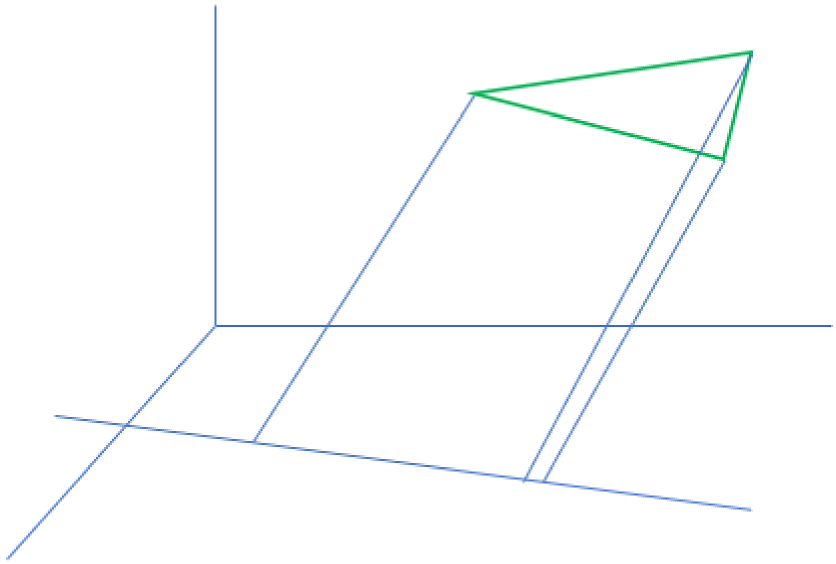


由于这个变换 T 不是 **根据不同输入值而有不同的线性输出**。（这里的变换，无论对于任何输入向量，**都是变换相同的程度**）所以看起来没有 “中位线” 相关图形的感觉。

要否定它不是一个线性变换，这里只需要看 $T(0)$，发现其输出并不是坐标原点，那还谈何线性。



但是旋转就是一个线性变换。



降维是一个线性变换。

它们这些线性变换，每一种都一定可以被矩阵描述，无论是方阵还是其他，无论可逆还是不可逆。

ii. 线性变换的性质理解

给定一个任何线性变换 T 都需要满足下面两个性质：

1. $T(k\alpha) = kT(\alpha),\ k \in R$
2. $T(\alpha) + T(\beta) = T(\alpha + \beta)$

简单地概括就是 线性变换 满足 数乘和加法 。
但是也可以用另外一种角度解释：
第 1 条性质成立是因为 **相同的线性变换所有性质相同**；第 2 条性质成立是因为 **变换是线性的，所以因变量与不同的自变量变换 各自 成一定比例。**

每一个线性变换，对于一个特定的输入，都有一个对应的输出。尽管不同的输入可能对应相同的输出，但是对同一输入的线性变换不会有多个输出。
这其实是一种映射关系：

$$T : R^n \to R^n$$

2. 基变换

如果我现在有一个线性变换 T，其定义了从 n 维空间到 m 维空间的降维变换。可是我要求新空间中的某个向量，假使都通过线性变换来转化，那未免有些麻烦。

我们可以大胆利用线性变换的性质：$T(c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n) = \sum_{i=1}^{n} c_iT(v_i)$，来进行推导。

在这里 v_1，如果恰好是原空间的一组基向量，那么对于新空间 $T(v_i)$ 会不会也是一组基呢？

我们知道，如果 **确定了原空间中的一组基**，那么就代表原空间中 **任何** 一个向量 v 都可以表示为：

$$v = c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n$$

进行线性变换后：

$$T(v) = T(c_1v_1) + T(c_2v_2) + \cdots + T(c_nv_n) = c_1T(v_1) + c_2T(v_2) + \cdots + c_nT(v_n)$$

对于原空间来说，我们可以讲，在 v_i 这一组基下，向量的坐标为：$(c_1, c_2, \cdots, c_n)$。平常我们不会顾及到基，那是因为正常情况下，我们使用的都是 **标准正交基** $(q_1, q_2, \cdots, q_n)$。

$$v = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

i. 表示线性变换的矩阵

对于一般的线性变换，我们会用一个矩阵 A 来表示，下面就是求这个矩阵 A 的步骤：

$$\begin{cases} x = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_8 v_8 \\ \\ T(x) = c_1 T(v_1) + c_2 T(v_2) + \cdots + c_8 T(v_8) \end{cases}$$

然而线性变换 T 可以被描述为：

$$\begin{cases} T(v_1) = a_{11} v_1 + a_{12} v_2 + \cdots + a_{18} v_8 \\ T(v_2) = a_{21} v_1 + a_{22} v_2 + \cdots + a_{28} v_8 \\ \qquad \vdots \\ T(v_8) = a_{81} v_1 + a_{82} v_2 + \cdots + a_{88} v_8 \end{cases}$$

用以描述线性变换 T 的矩阵 A 可表示为：

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{18} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{81} & \cdots & a_{88} \end{bmatrix}$$

ii. 降维矩阵

对于上述的线性变换 T，令原空间的 n 个基为 $v_1, v_2, \cdots, v_n$，变换后的 m 维空间中的基为 $u_1, u_2, \cdots, u_m$。（并且 **假定前 m 个基是重合的**）

$$\begin{cases} v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n \\ \\ T(v) = c_1 T(v_1) + c_2 T(v_2) + \cdots + c_n T(v_n) \end{cases}$$

a. 方阵表示

如果进行线性变换，那么就表示，从 $m+1$ 到 n 之间的所有结果全部为 0。
假设这里讨论的每个线性变换都可以被矩阵 A 表示，那么不妨设一个 n 阶矩阵 A：
（有这个假设是因为，某些变换可能需要左右乘上不同的矩阵才可以办到）

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

在假定情况下，我们可以得知 行或列在 $m+1$ 到 n 间的元素都为 0。这样可以写出最简单的降维矩阵。
如果特别令 $n = 2, m = 1$，那么：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

（行或列在 2 到 2 间的元素都为 0。）

b. 矩阵表示

矩阵表示降维，那么其为 m 行 n 列：$U = AV$
（U, V 都为向量组）

所以得到一系列等式：

$$
\begin{cases}
T(v_1) = a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \cdots + a_{1n}u_m \\
T(v_2) = a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \cdots + a_{2n}u_m \\
\qquad \vdots \\
T(v_n) = a_{n1}u_1 + a_{n2}u_2 + \cdots + a_{nn}u_m
\end{cases}
$$