26. 对称矩阵及正定性

1. 引子

i. 对称阵二性质的验证

在前面几讲，就给出了有关对称矩阵的两点性质：

1. 实对称阵特征值均为实数；
2. 实对称阵特征向量两两正交。

拿到一个矩阵，我们希望可以求出其 **特征值以及特征向量**，因为这是我们了解它的一个重要途径，就像之前我们用 **秩、各子空间维数、行列式** 等一系列概念。

我们先拿最简单的矩阵 —— 单位阵 I 来验证这两个性质：

首先，n 阶单位阵的特征值为 n **重根**：

$$\lambda_{1,2,3,\cdots,n}=1$$

另外，n 阶单位阵的特征向量张成空间的维数为 n，特征向量张成的空间可表示为：

$$x=k_1\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}+\cdots+k_n\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$$

那么这些基就是特征向量。
好了，这是特殊情况。

ii. 对称阵的分解

对于一般的 n 阶对称阵 $A=A^T$，其拥有 n 个实特征值，并且它们对应的特征向量两两正交。

由第 22 节的内容，可以得知，矩阵 A 一定可以被分解为：

$$A=S\Lambda S^{-1}$$

由于 n 个特征向量两两正交，那么其特征向量构成的向量组 S，就是一个正交矩阵。对于正交矩阵，都有：$S^{-1}=S^T$，所以：

$$A = S\Lambda S^{-1} = S\Lambda S^T$$

由上可知，任意一个对称阵都可以被分解为以上形式。如果用正交矩阵专用的符号进行描述，就是：

$$A = Q\Lambda Q^T$$

之后教授还提及了 “谱定理” 和 “主轴定理”，这里不多说了。

2. 对称矩阵

i. 性质一的证明

在第 21 节，只是从感觉上应用了 **行列式性质十** 证明了这个性质：

> 一个矩阵越是不对称，越是朝相反的方向对称，就越会出现复数的特征值。

这样的 “证明” 不是很严谨。

对于特征值的证明，如果不使用之前投机取巧的结论，（比如迹、行列式与特征值间关系之类）那么就必须从其 **源头** 出发：

$$Ax = \lambda x$$

现在对等式两侧所有项取共轭：

$$\bar{A}\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x}$$

（这是可行的，因为取共轭在复数上可以提入 / 提出括号，可以对任意值取共轭。在这里，是对 **矩阵中所有元素取共轭** 的意思）
但由于 A 是实对称阵，所以：

$$A\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x}$$

两侧再取转置：

$$\bar{x}^T A^T = \bar{\lambda}\bar{x}^T$$

这一步我要利用对称阵的性质，上面的等式等价于：

$$\bar{x}^T A = \bar{\lambda}\bar{x}^T$$

我看中了 x 是向量，那么对其 **作内积**，就可以得到一个值而非矩阵，大大降低运算量。同时，**化共轭为模长**，右侧同乘 x：

$$\bar{x}^T A x = \bar{\lambda} \bar{x}^T x$$

然而，此时我发现，如果我将 $Ax = \lambda x$ 左右同时左乘 x^T，那么就有：

$$\bar{x}^T A x = \lambda \bar{x}^T x$$

现在我们得到的式子有：

$$\begin{cases} \bar{x}^T A x = \bar{\lambda} \bar{x}^T x \\ \\ \bar{x}^T A x = \lambda \bar{x}^T x \end{cases}$$

很明显，计算结果不会有二值性，所以：$\lambda x^T x = \bar{\lambda} x^T x$
这还没有结束，不能草率地给 $\lambda = \bar{\lambda}$ 下结论。
这其实用到了消去律，但是我们还不能保证 $\bar{x}^T x \neq 0$。

但实际上我们是可以证到的。
对于任意一个列向量 x，都可以表示为：

$$x = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 i \\ a_2 + b_2 i \\ \vdots \\ a_n + b_n i \end{bmatrix}$$

其对应的共轭矩阵的转置为：

$$\bar{x}^T = \begin{bmatrix} a_1 - b_1 i & a_2 - b_2 i & \cdots & a_n - b_n i \end{bmatrix}$$

由此可以得到：

$$\bar{x}^T x = \sum_{i=1}^{n} (a_i^2 + b_i^2)$$

而 **特征向量是特征子空间的基** ，要去表示一个空间，不可能为零向量。
（如果为零向量，那么根据定义 $Ax = \lambda x$，那特征值可以取任意数，因为无论怎样拉伸，零向量终究还是零向量）

所以 $\lambda = \bar{\lambda}$。
于是不存在 $Im(\lambda) \neq 0$ 的特征值 λ。

ii. 性质一证明的回顾

我们来回顾一下证明，究竟是哪一步令实对称阵这个条件如此重要：

1. 第一，如果没有 矩阵元素均为“实数” 这个条件，即使转置内积，也无法改变最终二等式在 A 上就不相同的事实；
2. 第二，如果没有 对称阵 的条件，取转置这一步就不可能保持 A 仍然为 A。

对于 “实矩阵” 的重要性，我们说如果没有它，证明无法继续，甚至还没开始，就已经结束了。

iii. 对于命题的回顾

a. 条件的重要性

1. 实对称阵特征值均为实数；
2. 实对称阵特征向量两两正交。

对于上方的证明，我是进行……
那么究竟满足怎样的要求，可以使得矩阵 A，具有：

1. 特征值均为实数；
2. 特征向量两两正交。

这两个性质呢？

回顾证明的这一步：

$$\bar{A}\bar{x} = A\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x}$$

$$\bar{x}^T A^T = \bar{\lambda}\bar{x}^T$$

如果 A 是一个 **复数非对称矩阵**，那么就必须有：

$$\bar{x}^T \bar{A}^T = \bar{\lambda}\bar{x}^T$$

从而综合后面的证明，得到的两个等式为：

$$\begin{cases} \bar{x}^T \bar{A}^T x = \bar{\lambda}\bar{x}^T x \\ \\ \bar{x}^T A x = \lambda \bar{x}^T x \end{cases}$$

所以，必须要有：$\bar{A}^T = A$，才可以使特征值为实数。
（由此也可以看出，**“实对称阵” 这个条件使得上述条件同样成立**）

b. 艾尔米特矩阵

满足上述性质的矩阵就被叫做艾尔米特矩阵，与此同时，这类矩阵还有其他很容易证明的性质：

1. 可逆艾尔米特矩阵的逆矩阵仍是艾尔米特矩阵；
2. 艾尔米特矩阵幂仍是艾尔米特矩阵；
3. 艾尔米特矩阵转置仍是艾尔米特矩阵。

2. 正定性

i. 实对称阵分解

对于任意一个实对称阵，其一定可以被对角化：（因为由上面的证明，n 阶实对称阵一定有 n 个两两正交的特征向量）

$$A = Q\Lambda Q^T$$

设 $Q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{bmatrix}^T$，那么上述分解可以表示为：

$$A = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i q_i q_i^T$$

ii. 正定性重要性

现在，已经厘清了特征值为虚为实的原因。

可如果利用矩阵解决微分方程组问题，虚实特征值并不是需要关心的地方，**正负特征值** 才是。

如果矩阵有一个概念可以判定 **正负特征值** 各自的数量，那么就可以在不求解 **特征多项式** 的情况下，直接判定微分方程的稳态问题。（因为由高阶微分方程化为差分式得到的矩阵可能很大，求解 **高阶方程** 是很困难的事情）

还好有这样一个性质：

> 矩阵主元的正负与特征值正负一致。

为什么说这个可以用来 **求解特征值** 呢？因为这个性质极大缩小了 **特征值范围**。

假设现在有一个矩阵主元为：

$$A \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} -3 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 9 & & \\ & & & -5 & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

那么这个矩阵有 **2 个正特征值，2 个负特征值，还有一个特征值为 0**。

如果现在令 $A - kI$，k 为常数，那么就可以通过 **计算主元 （而不是直接在原主元减去 k）** 得到 $\lambda < k,\ \lambda > k$ 的个数。

从而大大地缩小特征值取值范围。

iii. 正定矩阵

现在定义这样一类矩阵：

1. 对称阵
2. 所有特征值为正 $\Leftrightarrow$ 所有主元为正

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

由行列式和特征值的关系，得到主元为：$5, \dfrac{11}{5}$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

特征多项式：$|A - \lambda I| = \lambda^2 - 8\lambda + 11 = 0$
所以：$\lambda_{1,2} = 4 \pm \sqrt{5}$

iv. 正定性判定

如果我们要让所有的特征值都为正，假设现在有一个 n 阶对称阵，那么我们应该得到什么不等式结论呢？

$$\begin{cases} \lambda_1 > 0 \\ \lambda_1\lambda_2 > 0 \\ \qquad\vdots \\ \prod_{i=1}^{n} \lambda_i > 0 \end{cases}$$

验证一下，如果有一个 $\lambda_m < 0$，那么一定会有 **从第 m 个开始的不等式的** 一系列不等式不成立。
（每个不成立的式子之间没有 **空隙**）
那么，如果有 k 个 $\lambda < 0$，那么也可以推出一定有不等式不成立。

即使换个角度想：
要想这个有关不等式的结论错误，就利用 **反证法**：
即使不等式组成立，也有 $\lambda < 0$。

如果要满足第 1 个不等式，必须有：$\lambda_1 > 0$。
在满足第 1 个不等式的情况下，如果要满足第 2 个不等式，就应该有：$\lambda_2 > 0$。
以此类推，n 个特征值都大于 0。

而由 **行列式和特征值的关系**，得到这组不等式对应着：

```
n 阶方阵中任意阶主子式 > 0。
```