Parcial 3

domingo, 5 de noviembre de 2023 7:33 p. m.

1

$$x_{n+1} = 4x_n - x_n^2, \qquad x_0 = 4sin^2\theta,$$

Primero piense en $n=0$, entonces

$x_{n+1} = x_1 = 4x_0 - x_n^2 = 16\,sen^2\theta - 16\,(sen^2\theta)^2 = 4\,sen^2\theta\,(4 - 4\,sen^2\theta)$

$= 4\,sen^2\theta\,(4\cos^2\theta) = 16\,sen^2\theta\cos^2\theta = 4\,(2\,sen\theta\cos\theta)(2\,sen\theta\cos\theta) = 4\,sen^2(2\theta)$

$= 4\,sen^2(2^{\overset{n}{0}+1}\theta)$. Caso base $n=0$.

Hipótesis de inducción:

Suponga que funciona para $n=K$ $\left(x_{K+1} = 4\,sen^2(2^{K+1}\theta)\right)$, probar para $n=K+1$.

$x_{K+2} = 4x_{K+1} - x_{K+1}^2 = 4\left[4\,sen^2(2^{K+1}\theta)\right] - \left[4\,sen^2(2^{K+1}\theta)\right]^2 = 16\,sen^2(2^{K+1}\theta) - 16\left[sen^2(2^{K+1}\theta)\right]^2$

$= 16\,sen^2(2^{K+1}\theta)\left[1 - sen^2(2^{K+1}\theta)\right] = 16\,sen^2(2^{K+1}\theta)\left[\cos^2(2^{K+1}\theta)\right] =$

$4\left[2\,sen(2^{K+1}\theta)\cos(2^{K+1}\theta)\right]\left[2\,sen(2^{K+1}\theta)\cos(2^{K+1}\theta)\right] = 4\,sen^2\left[2(2^{K+1}\theta)\right] = 4\,sen^2(2^{K+2}\theta)$

que es justamente lo que queríamos. Luego $x_{n+1} = 4\,sen^2(2^{n+1}\theta)$ ▥

$$x_{n+1} = 4x_n - 4x_n^2, \qquad x_0 = sin^2\theta,$$

Caso base: $n=0$

$x_{n+1} = x_1 = 4\,sen^2\theta - 4\left[sen^2(\theta)\right]^2 = 4\,sen^2\theta\left[1 - sen^2\theta\right] = 4\,sen^2\theta\left[\cos^2\theta\right] =$

$(2\,sen\theta\cos\theta)(2\,sen\theta\cos\theta) = sen^2(2\theta) = sen^2(2^{\overset{n}{0}+1}\theta)$

Hipótesis de inducción

[illegible] funciona para $n=K$ $\left(x_{K+1} = 4x_K - 4x_K^2 = sen^2(2^{K+1}\theta)\right)$, probar

Sea que funcione para $n=K$ $\left(X_{K+1} = 4X_K - 4X_K^2 = sen^2(2^{K+1}\theta)\right)$, probar para $n=K+1$.

$$X_{K+2} = 4X_{K+1} - 4X_{K+1}^2 = 4\,sen^2(2^{K+1}\theta) - 4\left[sen^2(2^{K+1}\theta)\right]^2 =$$

$$4\,sen^2(2^{K+1}\theta)\left[1 - sen^2(2^{K+1}\theta)\right] = 4\,sen^2(2^{K+1}\theta)\cos^2(2^{K+1}\theta) =$$

$$\left[2\,sen(2^{K+1}\theta)\cos(2^{K+1}\theta)\right]\left[2\,sen(2^{K+1}\theta)\cos(2^{K+1}\theta)\right] = sen^2\left[2(2^{K+1}\theta)\right] = sen^2\left[2^{K+2}\theta\right]$$

que es lo que queríamos. Luego $X_{n+1} = sen^2(2^{n+1}\theta)$ ■

5

$x_i = \dfrac{b_i - \sum_{j=0}^{i-1} A_{ij}x_j}{A_{ii}}$ En $Ax=b$ $\quad x=1,\ y=2$

$$\begin{aligned} 2x + y &= 4 \\ x + 2y &= 5 \end{aligned} \quad \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{array}\right) \end{array} = \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} 0 \\ = \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{array}\right) \end{array}$$

Fue para probar. Pero lo dejo.

Suponga que $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$; también suponga que A es una matriz triangular inferior (es decir, ya está escalonada).

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} x_0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_0 \\ a_{10}x_0 & a_{11}x_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \vdots \\ a_{20}x_0 & a_{21}x_1 & a_{22}x_2 & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & \\ a_{n0}x_0 & a_{n1}x_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn}x_n & b_n \end{array}\right)$$

note que la para la primera fila ya tenemos conocimiento de la primera variable (x_0) ya está despejada. Para encontrar la siguiente variable (x_1), seguimos este argumento:

tenga la segunda ecuación:

- $a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + 0 + \cdots + 0 = b_1$ (1) $a_{11}x_1 = b_1 - a_{10}x_0$
- $x_1 = \dfrac{b_1 - a_{10}x_0}{a_{11}}$ (2) Hecho

tenga la segunda ecuación

* $a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + 0 + \dots + 0 = b_1$ (1) $a_{11}x_1 = b_1 - a_{10}x_0$

* $x_1 = \dfrac{b_1 - a_{10}x_0}{a_{11}}$ (2) Hecho

Note que para este caso, la única variable desconocida es x_1, por eso la despejamos. Para la 3ra fila tenemos:

* $a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + 0 + \dots + 0 = b_2$ (1) $a_{22}x_2 = b_2 - (a_{20}x_0 + a_{21}x_1)$

* $x_2 = \dfrac{b_2 - (a_{20}x_0 + a_{21}x_1)}{a_{22}}$ (2) Hecho

Para este caso, se nos presenta una situación idéntica que en el ejemplo anterior, la única incognita es x_2, puesto que el resto fueron obtenidas en los pasos anteriores. Si contiamos, tendrímos para la última fila lo que sigue:

* $a_{n0}x_0 + a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$ (1) $a_{nn}x_n = b_n - (a_{n0}x_0 + a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn-1}x_{n-1})$

* $x_n = \dfrac{b_n - (a_{n0}x_0 + a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn-1}x_{n-1})}{a_{nn}} = \dfrac{b_n - \sum_{j=0}^{n-1} A_{nj}x_j}{a_{nn}}$

La generalización es aplicable a cualquier fila. Luego $x_i = \dfrac{b_i - \sum_{j=0}^{n-1} A_{nj}x_i}{a_{ii}}$

(6)

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} A_{ij}x_j}{A_{ii}}$$

De nuevo, suponga que $x = \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $b = \begin{bmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ donde, a diferencia del punto anterior, A es una matriz triangular superior (es decir, tenemos el sistema reducido).

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{00}x_0 & a_{01}x_1 & a_{02}x_2 & \cdots & a_{0n}x_n & b_0 \\ 0 & a_{11}x_1 & a_{12}x_2 & \cdots & a_{1n}x_n & b_1 \\ 0 & 0 & a_{22}x_2 & \cdots & a_{2n}x_n & b_2 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n & b_n \end{array}\right)$$

Para este punto, podríamos usar el argumento exacto del punto 5, pero empezando desde abajo, donde concluiríamos que

$\left[\begin{array}{cccc|c} \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots & x_n & b_n \end{array}\right]$ abajo, donde concluimos que

- $a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + \cdots + a_{0n}x_n = b_0$ (1) $a_{00}x_0 = b_0 - (a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + \cdots + a_{0n}x_n)$

- $$x_0 = \frac{b_0 - (a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + \cdots + a_{0n}x_n)}{a_{00}} = \frac{b_0 - \sum_{j=1}^{n} A_{0j}x_j}{a_{00}}$$

y como es para cualquier fila arbitraria, concluimos que $x_i = \dfrac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} A_{ij}x_j}{A_{ii}}$

Sin embargo, se puede hacer por inducción.

Caso base $n = n-1$

- $0 + \cdots + 0 + a_{(n-1)n-1}x_{n-1} + a_{(n-1)n}x_n = b_{n-1}$ (1) $a_{(n-1)(n-1)}x_{n-1} = b_{n-1} - (a_{(n-1)(n)}x_n)$

- $$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - (a_{(n-1)(n)}x_n)}{a_{(n-1)(n-1)}} = \frac{b_{n-1} - \sum_{j=n}^{n} a_{n-1\,j}x_j}{a_{(n-1)(n-1)}}$$ ✓ cumple.

Hipótesis de inducción:

Suponga que funciona para $n = k+1$, probar para $n = k$. Entonces la k-ésima ecuación nos dice:

- $0 + 0 + \cdots + a_{kk}x_k + a_{k(k+1)}x_{k+1} + \cdots + a_{kn}x_n = b_k$

- $a_{kk}x_k = b_k - (a_{k(k+1)}x_{k+1} + \cdots + a_{kn}x_n)$ por H.I, este término está conocido y expresado en términos conocidos y:

- $$x_k = \frac{b_k - (a_{k(k+1)}x_{k+1} + \cdots + a_{kn}x_n)}{a_{kk}}$$ que es lo que

buscábamos, luego $$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} A_{ij}x_j}{A_{ii}}$$