Taller 4
Probabilidad

Para la solución de los siguientes ejercicios, cree una copia del repositorio del curso complementario utilizando **fork** con el título **MetCompCompl-202320_{APELLIDO1}_{APELLIDO1}**.En la carpeta **Taller_4**, guarde **UN ÚNICO JUPYTER NOTEBOOK** con las soluciones a los problemas.

1. Calculo de probabilidad

1. Se reparten cartas, una a la vez, de una baraja de 52 cartas.
   a) Si las primeras 2 cartas son espadas, ¿cuál es la probabilidad de que las siguientes 3 cartas también sean espadas?
   b) Si las primeras 3 cartas son todas de espadas, ¿cuál es la probabilidad de que las 2 cartas siguientes sean también espadas?
   c) Si las primeras 4 cartas son todas de espadas, ¿cuál es la probabilidad de que la siguiente carta sea también una espada?
2. Suponga que la probabilidad de exposición a la gripe durante una epidemia es .6. La experiencia ha demostrado que un suero tiene 80 % de éxito para prevenir que una persona inoculada contraiga la gripe si se expone a ella. Una persona no inoculada enfrenta una probabilidad de ,90 de contraer la gripe si se expone a ella. Dos personas, una inoculada y otra no, realizan un trabajo altamente especializado en un negocio. Suponga que no están en el mismo lugar, no están en contacto con las mismas personas y no pueden contagiarse entre sí a la gripe. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una de ellas se enferme?

2. Distribuciones de probabilidad discretas

1. El muestreo de piezas defectuosas de grandes lotes de productos manufacturados da un número de piezas defectuosas, Y, que sigue una distribución de probabilidad binomial. Un plan de muestreo consiste en especificar el número de piezas n por incluirse en una muestra y un número de aceptación a. El lote es aceptado si $Y \leq a$ y rechazado si $Y > a$. Denote con p la proporción de piezas defectuosas del lote. Un ingeniero de control de calidad desea estudiar planes de muestreo alternativos: $n = 5, a = 1$ y $n = 25, a = 5$. Construya las curvas características de operación para ambos planes, haciendo uso de probabilidades de aceptación en el rango $p \in [0, 1]$.
   a) Si usted fuera un vendedor que produce lotes con una fracción defectuosa que va de $p = 0ap = ,10$, ¿cuál de los dos planes de muestreo preferiría?
   b) Si usted fuera un comprador que desea protegerse contra la aceptación de lotes con una fracción defectuosa que exceda de $p = ,30$, ¿cuál de los dos planes de muestreo preferiría?
2. El número de desconexiones del servidor de una compañía sigue una distribución de Poisson con una tasa de una desconexión cada 4 horas.
   a) Encuentre el menor valor de n tal que la probabilidad de que haya al menos n desconexiones en menos de un período de 4 horas es menor que 0.01.
   b) Encuentre el menor valor del número de horas h tal que la probabilidad de que no haya desconexiones en h horas sea menor que 0.02.
   c) Encuentre la probabilidad de que en 3 períodos consecutivos de 4 horas, haya solamente un período de 4 horas sin desconexiones.
   d) Encuentre la probabilidad de que el número de desconexiones en 3 períodos consecutivos de 4 horas sea igual al número esperaod de desconexiones en 3 períodos consecutivos de 4 horas.

3. Distribuciones de probabilidad continuas

1. Suponga que el error en la temperatura en un experimento controlado de laboratorio es una variable aleatoria continua X, que tiene la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3} & -1 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq \text{en otro caso} & \end{cases}$$

Encuentre las probabilidades:

a) $P(0 < X \leq 1)$

b) $P(1 < X \leq 2)$

2. Se supone que las calificaciones de un examen están normalmente distribuidas con media 78 y varianza de 36.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que haga el examen alcance calificaciones mayores de 72?

   b) Suponga que los estudiantes que alcancen el 10 % más alto de esta distribución reciben una calificación de **A**. ¿Cuál es la calificación mínima que un estudiante debe recibir para ganar una calificación de A?

   c) ¿Cuál debe ser el punto límite para pasar el examen si el examinador desea pasar a sólo 28,1 % más alto de todas las calificaciones?

   d) Aproximadamente qué proporción de estudiantes tienen calificaciones de 5 o más puntos arriba de la calificación que corta al 25 % más bajo?

   e) Si se sabe que la calificación de un estudiante excede de 72, ¿cuál es la probabilidad de que su calificación exceda de 84?

4. Cadenas de Markov

Las bases nitrogenadas fundamentales que componen el ADN son: Adenina (A), Citosina (C), Guanina (G) y Timina (T). Un gen se puede representar a través de una secuencia ordenada de dichas bases. Suponga la siguiente matriz de transición entre bases:

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} & A & C & G & T \\ A & 0{,}4 & 0{,}25 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ C & 0{,}2 & 0{,}25 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ G & 0{,}2 & 0{,}25 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ T & 0{,}2 & 0{,}25 & 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$

La probabilidad a priori está dada por $\pi = [0{,}25, 0, 0{,}5, 0{,}25]$.

1. Encuentre la probabilidad de obtener el gen $g = [T, G, C, T, C, A, A, A]$.

2. Estas bases nitrogenadas pasarán por un proceso de traducción donde el objetivo es que se traduzcan $A - U, C - G, G - C, T - A$ según la siguiente matriz de emisión

$$\mathbb{E} = \begin{pmatrix} & A & C & G & T \\ U & 0{,}8 & 0 & 0 & 0{,}2 \\ G & 0{,}05 & 0{,}9 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ C & 0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}9 & 0 \\ A & 0{,}1 & 0 & 0 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$

   Si un gen traducido está dado por $g_T = [A, C, G, A, G, U, U, U]$, ¿cuál es la probabilidad de que venga del gen g anterior?