Parcial 2. Integración: 10

jueves, 28 de septiembre de 2023 3:24 p. m.

10. (**Sympy**) Muestre que el error asociado a la regla de Simpson 3/8 simple está dado por:

$$E = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\int_a^b (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)dx = -\frac{3}{80}h^5 f^{(4)}(\xi). \qquad (3.172)$$

Sea que subdividamos el intervalo y usemos la siguiente discretización $\{0, h, 2h, 3h\}$, podemos considerar la siguiente integral:

$$I = \int_0^{3h} (x)(x-h)(x-2h)(x-3h)\,dx$$

$$= \int_0^{3h} (x^2 - xh)(x-2h)(x-3h)\,dx =$$

$$= \int_0^{3h} (x^3 - 2hx^2 - x^2h + 2xh^2)(x-3h)\,dx = \int_0^{3h} (x^3 - 3hx^2 + 2xh^2)(x-3h)\,dx$$

$$= \int_0^{3h} (x^4 - 3hx^3 + 2x^2h^2 - 3hx^3 + 9h^2x^2 - 6xh^3)\,dx$$

$$= \int_0^{3h} (x^4 - 6hx^3 + 11x^2h^2 - 6xh^3)\,dx$$

$$= \left(\frac{x^5}{5} - \frac{3}{2}hx^4 + \frac{11}{3}x^3h^2 - 3x^2h^3\right)\Big|_0^{3h}$$

$$= \frac{243h^5}{5} - \frac{243h^5}{2} + \frac{297}{3}h^5 - 27h^5$$

$$= -\frac{9}{10} h^5$$

note que la discretización del intervalo $[0, 3h]$ en 4 partes $\{0, h, 2h, 3h\}$ es equivalente a la subdivisión de un intervalo $[a, b]$ en 4 partes donde cada parte es equidistante a cualquie parte adyacente; en este caso, a una distancia de $\frac{b-a}{3}$, luego discretizando $[a, b]$, tenemos:

$$\left\{a, a+\frac{b-a}{3}, a+2\frac{b-a}{3}, a+3\frac{b-a}{3}\right\}$$ donde $\frac{b-a}{3}$ es h.

Luego, el error $\mathcal{E}$ será:

$$\mathcal{E} = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\int_a^b (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\,dx = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\int_a^b (x-x_0)(x-(x_0+h))(x-(x_0+2h))$$

$(x-(x_0+3h))\,dx$ que es equivalente a tener

$$\mathcal{E} = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\int_0^{3h} x(x-h)(x-2h)(x-3h)\,dx = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\left(-\frac{9}{10}h^5\right) =$$

$$\boxed{-\frac{3}{80}h^5 f^{(4)}(\xi) = \mathcal{E}}$$