Punto i

miércoles, 6 de septiembre de 2023 8:07 p. m.

g)

$$f(x) \cong f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1).$$

$$= f(x_0) + x f[x_0, x_1] - x_0 f[x_0, x_1] + f[x_0, x_1, x_2](x^2 - x_0 x - x_1 x + x_0 x_1)$$

$$= f(x_0) + x f[x_0, x_1] - x_0 f[x_0, x_1] + x^2 f[x_0, x_1, x_2] - x_0 x f[x_0, x_1, x_2] - x_1 x f[x_0, x_1, x_2] + x_0 x_1 f[x_0, x_1, x_2]$$

$$= (f[x_0, x_1, x_2]) x^2 + (f[x_0, x_1] - x_0 f[x_0, x_1, x_2] - x_1 f[x_0, x_1, x_2]) x + (f(x_0) - x_0 f[x_0, x_1] + x_0 x_1 f[x_0, x_1, x_2])$$

$$a = f[x_0, x_1, x_2]$$

$$b = f[x_0, x_1] - f[x_0, x_1, x_2](x_0 + x_1)$$

$$c = f(x_0) - x_0 f[x_0, x_1] + x_0 x_1 f[x_0, x_1, x_2]$$

h. En primer lugar, reemplacemos x_2 en la ecuacion:

$$f(x_2) = c$$

Con eso tenemos que $c = f(x_2)$. Con ese resultado, calculemos b:

$$f(x) = a(x-x_2)^2 + b(x-x_2) + f(x_2)$$

$$f(x) - f(x_2) = (x-x_2)(a(x-x_2)+b)$$

$$\frac{f(x)-f(x_2)}{(x-x_2)} - a(x-x_2) = b$$

Si multiplicamos por $\frac{-1}{-1}$ y factorizamos:

$$\frac{f(x_2)-f(x)}{(x_2-x)} + a(x_2-x_2) = b$$

Si reemplamos $x = x_1$ obtenemos que:

$$\frac{f[x_1, x_2]}{h_2} - a h_2 = b$$

Por ultimo, quiero decir que no logré llegar al resultado, pero creo que quedé cerca:

$$f(x) = a(x-x_2)^2 + \left(\frac{f(x_2)-f(x_1)}{h_2} - ah_2\right)(x-x_2) + f(x_2)$$

$$f(x) = a(x-x_2)^2 + f[x_1, x_2](x-x_2) - ah_2(x-x_2) + f(x_2)$$

$$f(x) + \frac{f(x_1)(x-x_2)}{h_2} = a(x-x_2)^2 + \frac{f(x_2)}{h_2}(x-x_2) - ah_2(x-x_2) + f(x_2)$$

$$\frac{h_2 f(x)}{h_2} + \frac{f(x_1)(x-x_2)}{h_2} = a((x_0-x_2)^2 - h_2(x_0-x_2)) + f(x_2)\left(\frac{x-x_2+h_2}{h_2}\right)$$

Reemplacemos x por x_0:

$$f(x_0) - f(x_1) - \frac{f(x_1)h_1}{h_2} = a((x_0-x_2)^2 - h_2(x_0-x_2)) + f(x_2)\left(-\frac{h_1}{h_2}\right)$$

$$\frac{f(x_0) - f(x_1)}{h_1} - \frac{f(x_1)}{h_2} + \frac{f(x_2)}{h_2} = \frac{a((x_0-x_2)^2 - h_2(x_0-x_2))}{h_1}$$

$$f[x_0,x_1] - f[x_2,x_1] = a((x_0-x_2)^2 - h_2(x_0-x_2))/h_1$$

$$f[x_2,x_1] - f[x_0,x_1] = a((x_0-x_2)(-(x_0-x_2)+h_2))/h_1$$

$$= a((x_0-x_2)(-(-h_1-h_2)+h_2))/h_1$$

$$= a((x_0-x_2)(h_1))/h_1$$

$$= a((-h_1-h_2))$$

$$\frac{f[x_2,x_1] - f[x_0,x_1]}{(-h_1-h_2)} = a$$

(d)

Partiendo de la fórmula alterada del nuevo método:

$$x_3 = x_2 + \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2-4ac}}$$

notamos que la diferencia $x_3 - x_2$ está condicionada por $\frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2-4ac}}$ donde:

$$|x_3 - x_2| = \left| \frac{2c}{b \pm \sqrt{b^2-4ac}} \right|$$ y queremos minimizar la diferencia $|x_3 - x_2|$, luego $|b \pm \sqrt{b^2-4ac}|$ debe ser máximo.

Caso 1: $b > 0$, entonces $|b + \sqrt{b^2-4ac}| > |b - \sqrt{b^2-4ac}|$ puesto que la raíz se toma positiva

Caso 2: $b < 0$, entonces para $b = -a$ con $a \in \mathbb{R}^+$:

$$|b - \sqrt{b^2-4ac}| = |-a - \sqrt{b^2-4ac}| = |a + \sqrt{b^2-4ac}| > |a - \sqrt{b^2-4ac}| = |b + \sqrt{b^2-4ac}|$$

Luego, $|x_3 - x_2|$ es mínima cuando: para $b < 0$ usamos $-$ y cuando para $b > 0$ usamos $+$.