Сходимост на мерки

През цялото време ще работим върху топологичното пространство (E, τ), а σ-алгебрата над която са дефинирани крайните мерки е $\sigma(\tau)$.

<u>**Дефиниция**</u>**:** Нека (E, d) е метрично пространство. За редицата от мерки $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_f(E)$ казваме, че се схожда <u>слабо</u> към $\mu \overset{def}{\Leftrightarrow} \int f d\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int f d\mu$ за всяка $f \in C_b(E)$
Още записваме $\mu = \mathrm{w}-\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n$

<u>**Теорема (Portmanteau)**</u>**:** Нека (E, d) е метрично пространство и $\mu \in \mathcal{M}_{\leq 1}(E)$, $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_{\leq 1}(E)$. Тогава следните са еквивалентни:

1. $\mu = \mathrm{w}-\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n$
2. $\int f d\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int f d\mu$ за $f \in C_b(E) \cap Lip(E)$
3. $\limsup\limits_{n\to\infty} \mu_n(F) \leq \mu(F)$ и $\liminf\limits_{n\to\infty} \mu_n(E) \geq \mu(E)$ за всяко $F \subseteq E$ – затворено и измеримо
4. $\liminf\limits_{n\to\infty} \mu_n(G) \geq \mu(G)$ и $\limsup\limits_{n\to\infty} \mu_n(E) \leq \mu(E)$ за всяко $G \subseteq E$ – отворено и измеримо
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(A) = \mu(A)$ за измеримо A, т.че $\mu(\partial A) = 0$
6. $\int f d\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int f d\mu$ за всяка измерима $f \in C_b(E)$ непрекъсната μ п.н.

<u>док.</u>:

$\mathbf{(1)} \longrightarrow \mathbf{(2)}$
$Lip(E) \cap C_b(E) \subseteq C_b(E)$

$\mathbf{(2)} \longrightarrow \mathbf{(3)}$
Нека $F \subseteq E$ е затворено и измеримо множество.
Дефинираме функцията $\rho_{F,\varepsilon}: E \to [0,1]$ по следния начин:

$$\rho_{F,\varepsilon}(x) := \begin{cases} 1, & x \in F \\ 1 - \dfrac{d(x,A)}{\varepsilon}, & x \notin F \land d(x,A) < \varepsilon \\ 0, & d(x,F) \geq \varepsilon \end{cases}$$

$\rho_{F,\varepsilon}(x) \geq \mathbb{1}_F(x)$ за $\forall x \in E$.
Така получаваме $\int \rho_{F,\varepsilon} d\mu_n \geq \int \mathbb{1}_F d\mu_n = \mu_n(F)$

$\limsup\limits_{n\to\infty} \int \rho_{F,\varepsilon} d\mu_n \geq \limsup\limits_{n\to\infty} \mu_n(F)$ за $\forall \varepsilon > 0$ и понеже $\rho_{F,\varepsilon} \in Lip_{\frac{1}{\varepsilon}}(E, [0,1]) \cap C_b(E)$, то имаме

$$\lim_{n\to\infty} \int \rho_{F,\varepsilon} d\mu_n \geq \limsup_{n\to\infty} \mu_n(F) \text{ за } \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \inf_{\varepsilon>0} \lim_{n\to\infty} \int \rho_{F,\varepsilon} d\mu_n \geq \limsup_{n\to\infty} \mu_n(F)$$

Остава да забележим, че заради (2) имаме $\lim\limits_{n\to\infty} \int \rho_{F,\varepsilon} d\mu_n = \int \rho_{F,\varepsilon} d\mu$, както и че $\rho_{F,\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \mathbb{1}_F$. Така получаваме:

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(F) \leq \inf_{\varepsilon>0} \lim_{n\to\infty} \int \rho_{F,\varepsilon} d\mu_n = \inf_{\varepsilon>0} \int \rho_{F,\varepsilon} d\mu = \lim_{\varepsilon\to 0} \int \rho_{F,\varepsilon} d\mu \overset{\text{Монотонна сходимост}}{=} \int \lim_{\varepsilon\to 0} \rho_{F,\varepsilon} d\mu = \int \mathbb{1}_F d\mu = \mu(F)$$

$\mathbf{(3)} \longrightarrow \mathbf{(4)}$
Най-напред да обърнем внимание, че за произволна редица $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ имаме:

Самуил Ганев

$$-\limsup_{n\to\infty}(-a_n) = -\lim_{n\to\infty}\sup_{k\geq n}(-a_k) = -\lim_{n\to\infty}\left(-\inf_{k\geq n} a_k\right) = \lim_{n\to\infty}\inf_{k\geq n} a_k = \liminf_{n\to\infty} a_n$$

Нека $G \subseteq E$ е отворено и измеримо множество. Тогава от (3) имаме:

$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(E\backslash G) \leq \mu(E\backslash G) \;\Rightarrow\; \limsup_{n\to\infty}[\mu_n(E) - \mu_n(G)] \leq \mu(E) - \mu(G)$

$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(E) + \limsup_{n\to\infty}(-\mu_n(G)) \leq \mu(E) - \mu(G)$

$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(E) - \mu(E) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu_n(G) - \mu(G)$

Тъй като $\liminf_{n\to\infty} \mu_n(E) \geq \mu(E)$, то достигаме до:

$$0 \leq \liminf_{n\to\infty} \mu_n(E) - \mu(E) \leq \limsup_{n\to\infty} \mu_n(E) - \mu(E) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu_n(G) - \mu(G)$$

т.е. $\liminf_{n\to\infty} \mu_n(G) \geq \mu(G)$ за всяко $G \subseteq E$ – отворено и измеримо.

$\mathbf{(4) \longrightarrow (3)}$

По аналогичен начин достигаме и от (4) до (3)

$\mathbf{(3)}$ и $\mathbf{(4) \longrightarrow (5)}$

Нека A е измеримо, т.че $\mu(\partial A) = 0$. Имаме:

$$\mu(A^o) = \mu(A) = \mu(\overline{A}) \Longleftarrow \begin{cases} \mu(\overline{A}) = \mu(A^o \cup \partial A) = \mu(A^o) + \mu(\partial A) = \mu(A^o) \\ A^o \subseteq A \subseteq \overline{A} \;\Longrightarrow\; \mu(A^o) \leq \mu(A) \leq \mu(\overline{A}) \end{cases}$$

От (3) имаме $\limsup_{n\to\infty} \mu_n(\overline{A}) \leq \mu(\overline{A})$ и от (4) $\liminf_{n\to\infty} \mu_n(A^o) \geq \mu(A^o)$. Така получаваме:

$$\mu(A^o) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu_n(A^o) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu_n(A) \leq \limsup_{n\to\infty} \mu_n(A) \leq \limsup_{n\to\infty} \mu_n(\overline{A}) \leq \mu(\overline{A})$$

и тъй като $\mu(A^o) = \mu(\overline{A})$ следва $\liminf_{n\to\infty} \mu_n(A) = \limsup_{n\to\infty} \mu_n(A) = \mu(\overline{A}) = \mu(A)$. Получихме:

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(A) = \mu(A)$$

$\mathbf{(5) \longrightarrow (6)}$

$U_f \coloneqq \{x \in E \mid f - \text{прекъсната в } x\}$

Нека $f \in C_b(E)$ $\;(f: E \to \mathbb{R})$ е измерима и непрекъсната μ п.н. За всяко $D \subset \mathbb{R}$ е в сила:

$$\partial f^{-1}(D) \subset f^{-1}(\partial D) \cup U_f \quad (*)$$

f е непрекъсната в $x \in E \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \;\exists \delta_\varepsilon > 0\colon\; f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$.

И така, ако f е непрекъсната в $x \in E$, то има точки y и z, т.че: $y \in f^{-1}(D) \cap B_\delta(x)$ и $z \in f^{-1}(D^c) \cap B_\delta(x)$. Тогава $f(y) \in D \cap B_\varepsilon(f(x)) \neq \emptyset$ и $f(z) \in D^c \cap B_\varepsilon(f(x)) \neq \emptyset \Rightarrow f(x) \in \partial D$.

Нека $\varepsilon > 0$. Множеството $A \coloneqq \{y \in \mathbb{R} \mid \mu(f^{-1}(\{y\})) > 0\}$ е най-много изброимо. Понеже f е ограничена, то съществува $N \in \mathbb{N}$ и $y_0 \leq -\|f\|_\infty < y_1 < \cdots < y_{N-1} < \|f\|_\infty < y_N$, т.че:

$$y_i \in \mathbb{R}\backslash A \text{ и } |y_{i+1} - y_i| < \varepsilon \text{ за всяко } i$$

Нека $E_i \coloneqq f^{-1}([y_i, y_{i+1}])$ за $i = 0, \dots, N-1$. Тогава $E = \bigcup_{i=0}^{N-1} E_i$ и E_i са непресичащи се.

Използвайки (*), и че $y_i \notin A$ за всяко i:

$$\mu(\partial E_i) < \mu(f^{-1}(\partial E_i) \cup U_f) = \mu(f^{-1}(\partial E_i)) + \mu(U_f) = \mu(f^{-1}(y_{i+1})) + \mu(f^{-1}(y_i)) + \mu(U_f) = 0$$

така от (5) следва $\lim_{n\to\infty} \mu_n(E_i) = \mu(E_i)$

$$y_i < f(x) < y_{i+1} \;\; \forall x \in E_i$$
$$|y_i - y_{i+1}| < \varepsilon \;\Rightarrow |f(x) - y_i| \leq \varepsilon \;\text{ за } \forall x \in E_i$$
$$y_i - \varepsilon \leq f(x) \leq y_i + \varepsilon \;\text{ за } \forall x \in E_i$$

Нека $\nu \in \{\mu, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots\}$ и значи $\nu \in \mathcal{M}_{\leq 1}(E)$. Интегрирайки неравенствата върху E_i:

$$\int\limits_{E_i} (y_i - \varepsilon) d\nu \leq \int\limits_{E_i} f d\nu \leq \int\limits_{E_i} (y_i + \varepsilon)\, d\nu$$

Сумираме по i от 0 до $N-1$:

$$\sum_{i=0}^{N-1} y_i \nu(E_i) - \varepsilon\nu(E) = \sum_{i=0}^{N-1} \int\limits_{E_i} (y_i - \varepsilon) d\nu \leq \sum_{i=0}^{N-1} \int\limits_{E_i} f d\nu \leq \sum_{i=0}^{N-1} \int\limits_{E_i} (y_i + \varepsilon)\, d\nu = \sum_{i=0}^{N-1} y_i \nu(E_i) + \varepsilon\nu(E)$$

$$\sum_{i=0}^{N-1} y_i \nu(E_i) + \varepsilon \leq \sum_{i=0}^{N-1} y_i \nu(E_i) - \varepsilon\nu(E) \leq \sum_{i=0}^{N-1} \int\limits_{E_i} f d\nu \leq \sum_{i=0}^{N-1} y_i \nu(E_i) + \varepsilon\nu(E) \leq \sum_{i=0}^{N-1} y_i \nu(E_i) + \varepsilon$$

Прилагайки последното неравенство два пъти, и това че $\sum_{i=0}^{N-1} \int_{E_i} f d\nu = \int f d\nu$:

$$\limsup_{n\to\infty} \int f d\mu_n \leq \limsup_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{N-1} y_i \mu_n(E_i) + \varepsilon = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{N-1} y_i \mu_n(E_i) + \varepsilon = \sum_{i=0}^{N-1} y_i \mu\,(E_i) + \varepsilon \leq \int f d\mu + 2\varepsilon$$

за $\varepsilon \to 0$ достигаме до $\limsup\limits_{n\to\infty} \int f d\mu_n \leq \int f d\mu$

Накрая заменяйки f с $(-f)$, получаваме и обратното неравенство:

$$\liminf_{n\to\infty} \int f d\mu_n \geq \int f d\mu$$

Обединявайки двете неравенства:

$$\limsup_{n\to\infty} \int f d\mu_n \leq \int f d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f d\mu_n \leq \limsup_{n\to\infty} \int f d\mu_n$$

с което доказахме, че $\lim\limits_{n\to\infty} \int f d\mu_n = \int f d\mu$ за произволна измерима $f \in C_b(E)$ с $\mu(U_f) = 0$

$\mathbf{(6)} \to \mathbf{(1)}$

$\{f: E \to \mathbb{R} \mid f - \text{непрекъсната}\} \subset \{f: E \to \mathbb{R} \mid \mu(U_f) = 0\}$

■

<u>Дефиниция</u>: Нека $X_1, X_2, \dots$ са сл. вел., приемащи стойности в E. Казваме, че редицата от сл. вел. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ се схожда по разпределение към сл. вел. $X \overset{def}{\Longleftrightarrow} \mathbb{P}_X = \mathrm{w} - \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}_{X_n}$.

Записваме $X_n \overset{d}{\to} X$.

Тази дефиниция, благодарение на <u>Portmanteau</u>, още е еквивалентна на $X_n \overset{d}{\to} X$ $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \mathbb{E}f(X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}f(X)$ за всяка $f \in C_b(E)$.

<u>Теорема (Slutzky)</u>: Нека $X, X_1, X_2, \dots$ и $Y_1, Y_2, \dots$ са сл. вел. със стойности в E. Ако $X_n \overset{d}{\to} X$ и $d(X_n, Y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то $Y_n \overset{d}{\to} X$.

<u>док.</u>:

Ще покажем, че $\mathbb{E}f(Y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}f(X)$ за всяка $f \in C_b(E) \cap Lip(E)$, и благодарение на <u>Portmanteau</u> теоремата, ще следва $Y_n \overset{d}{\to} X$.

Нека $f: E \to \mathbb{R}$ е ограничена и непрекъсната Липшицова функция с константа K. Тогава:

$$|f(x) - f(y)| \leq \min\{K|x-y|, 2\|f\|_\infty\} \text{ за } x, y \in E$$

Така, от теоремата за монотонна сходимост получаваме $\limsup\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}|f(X_n) - f(Y_n)| =$
$\mathbb{E} \limsup\limits_{n\to\infty} |f(X_n) - f(Y_n)| = \mathbb{E} \lim\limits_{n\to\infty} |f(X_n) - f(Y_n)| = \mathbb{E}0 = 0$
$\limsup\limits_{n\to\infty} |\mathbb{E}f(Y_n) - Ef(X)| \leq \limsup\limits_{n\to\infty}|\mathbb{E}f(X) - \mathbb{E}f(X_n)| + \limsup\limits_{n\to\infty}|\mathbb{E}f(X_n) + \mathbb{E}f(Y_n)| = 0 + 0 = 0$
$\Rightarrow 0 \leq \liminf\limits_{n\to\infty}|\mathbb{E}f(Y_n) - \mathbb{E}f(X)| \leq \limsup\limits_{n\to\infty}|\mathbb{E}f(Y_n) - \mathbb{E}f(X)| \leq 0$
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}f(Y_n) = \mathbb{E}f(X) \Leftrightarrow Y_n \overset{d}{\to} X$

■

<u>**Теорема**</u>: Нека $\mathbb{P}_X, \mathbb{P}_{X_1}, \mathbb{P}_{X_2}, \dots \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ със съответно функции на разпределение $F_X, F_{X_1}, F_{X_2}, \dots$. Тогава следните са еквивалентни:

1. $\mathbb{P}_X = \mathrm{w} - \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}_{X_n}$
2. $F_{X_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} F_X$ за всички точки на непрекъснатост x на F_X

<u>***док.***</u>:
$(\mathbf{1}) \longrightarrow (\mathbf{2})$
Нека F е непрекъсната в точката x. От $\mathbb{P}(\partial(-\infty, x]) = \mathbb{P}(\{x\}) = 0$ и <u>Portmanteau</u> следва, че $F_{X_n}(x) = \mathbb{P}_{X_n}\big((-\infty, x]\big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}_X((-\infty, x]) = F_X(x)$

$(\mathbf{2}) \longrightarrow (\mathbf{1})$
Нека $f \in Lip_1(\mathbb{R}, [0,1])$. От <u>Portmanteau</u> е достатъчно да покажем $\int_{\mathbb{R}} f\, d\mathbb{P}_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} f\, d\mathbb{P}$

От $F_{X_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} F_X$ за всички точки на непрекъснатост x на F, следва:
Нека $\varepsilon > 0$. Тогава съществува $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ и точки на непрекъснатост $y_0 < y_1 < \cdots < y_N$ на F, т.че: $G(y_0) < \varepsilon,\ 1 - G(y_N) < \varepsilon$ и $y_{i+1} - y_i < \varepsilon$ за всяко i и $G \in \{F, F_1, F_2, \dots\}$. Така получаваме неравенствата:

$$\int_{-\infty}^{y_0} f\, d\mathbb{P}_{X_n} \leq \sup_{x \leq y_0} f(x) * \mathbb{P}_{X_n}\big((-\infty, y_0]\big) \leq F_{X_n}(y_0) \leq \varepsilon \quad (\mathbf{1})$$

$$\int_{y_N}^{\infty} f\, d\mathbb{P}_{X_n} \leq \sup_{x \geq y_N} f(x) * \mathbb{P}_{X_n}\big((y_N, \infty)\big) \leq 1 - F_{X_n}(y_N) \leq \varepsilon \quad (\mathbf{2})$$

$$\int_{y_i}^{y_{i+1}} f\, d\mathbb{P}_{X_n} \leq \sup_{y_i \leq x \leq y_{i+1}} f(x) * \mathbb{P}_{X_n}([y_i, y_{i+1}]) \leq (f(y_i) + \varepsilon) * (F_{X_n}(y_{i+1}) - F_{X_n}(y_i))$$

понеже $f \in Lip_1(\mathbb{R}, [0,1])$ и така $|f(x) - f(y_i)| \leq |x - y_i| \leq |y_{i+1} - y_i| < \varepsilon$ за $\forall x \in [y_i,\ y_{i+1}]$
$\Longrightarrow f(x) < f(y_i) + \varepsilon$ за $\forall x \in [y_i,\ y_{i+1}]$. Сумирайки по i последното неравенство горе, получаваме:

$$\int_{y_0}^{y_N} f\, d\mathbb{P}_{X_n} \leq \sum_{i=0}^{N-1} (f(y_i) + \varepsilon) * \Big(F_{X_n}(y_{i+1}) - F_{X_n}(y_i)\Big) \leq \varepsilon + \sum_{i=0}^{N-1} f(y_i) * \Big(F_{X_n}(y_{i+1}) - F_{X_n}(y_i)\Big) \ (\mathbf{3})$$

Обединявайки (1), (2) и (3), достигаме до:

$$\int_{\mathbb{R}} f\, d\mathbb{P}_{X_n} \leq 3\varepsilon + \sum_{i=0}^{N-1} f(y_i) * \left(F_{X_n}(y_{i+1}) - F_{X_n}(y_i)\right) \quad (*)$$

Ако повторим стъпки (1), (2) и (3), но с инфимум (спрямо $\mathbb{P}$ този път) и използваме неравенството $f(x) > f(y_i) - \varepsilon$ за $\forall x \in [y_i,\ y_{i+1}]$, ще получим и горна оценка:

$$\sum_{i=0}^{N-1} f(y_i) * \left(F_X(y_{i+1}) - F_X(y_i)\right) \leq \varepsilon + \int_{\mathbb{R}} f\, d\mathbb{P} \qquad (**)$$

Прилагаме (*) и (**):

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f\, d\mathbb{P}_{X_n} \leq 3\varepsilon + \sum_{i=0}^{N-1} f(y_i) * \limsup_{n\to\infty} \left(F_{X_n}(y_{i+1}) - F_{X_n}(y_i)\right)$$
$$= 3\varepsilon + \sum_{i=0}^{N-1} f(y_i) * \lim_{n\to\infty} \left(F_{X_n}(y_{i+1}) - F_{X_n}(y_i)\right) = 3\varepsilon + \sum_{i=0}^{N-1} f(y_i) * \left(F_X(y_{i+1}) - F_X(y_i)\right)$$
$$\leq 4\varepsilon + \int_{\mathbb{R}} f\, d\mathbb{P} \ \text{ за } \forall \varepsilon > 0$$

Тогава при $\varepsilon \longrightarrow 0$ имаме $\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f\, d\mathbb{P}_{X_n} \leq \int_{\mathbb{R}} f\, d\mathbb{P}$

Ако заменим f с $1 - f$ ще достигнем до $\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f\, d\mathbb{P}_{X_n} \geq \int_{\mathbb{R}} f\, d\mathbb{P}$, откъдето следва, че

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f\, d\mathbb{P}_{X_n} = \int_{\mathbb{R}} f\, d\mathbb{P} \iff \mathbb{P}_X = \mathrm{w} - \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{X_n}$$

■

<u>**Теорема (Continuous mapping theorem)**</u>: Нека (E_1, d_1) и (E_2, d_2) са две метрични пространства и $\varphi: E_1 \to E_2$ е измерима функция. С U_φ означаваме множеството от точки на непрекъснатост на φ. Тогава:

1. Ако $\mu, \mu_1, \mu_2, \dots \in \mathcal{M}_{\leq 1}(E_1)$ с $\mu(U_\varphi) = 0$ и $\mu = \mathrm{w} - \lim_{n\to\infty} \mu_n$, то $\mu_n \circ \varphi^{-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu \circ \varphi^{-1}$ слабо.
2. Ако $X, X_1, X_2, \dots$ са сл. вел., приемащи стойности в E_1, $\mathbb{P}_X(U_\varphi) = 0$ и $X_n \xrightarrow{d} X$, то $\varphi(X_n) \xrightarrow{d} \varphi(X)$

<u>док.</u>:

$U_\varphi \subset E_1$ е измеримо и $\mu(U_\varphi) = 0$. Нека $f \in C_b(E_2)$ е произволна. Тогава $f \circ \varphi$ е ограничена и измерима функция и $U_{f\circ\varphi} \subset U_\varphi \implies \mu(U_{f\circ\varphi}) = 0$. Използвайки <u>Portmanteau</u> и теоремата за смяна на променливата при интегриране

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_2} f\, d(\mu_n \circ \varphi^{-1}) = \lim_{n\to\infty} \int_{E_1} f \circ \varphi\, d\mu_n = \int_{E_1} f \circ \varphi\, d\mu = \int_{E_2} f\, d(\mu \circ \varphi^{-1})$$

Точка 2. се доказва чрез точка 1., използвайки $\mathbb{P}_{\varphi(X)} = \mathbb{P}_X \circ \varphi^{-1}$.

■

<u>Пример (приложение)</u>: Нека редицата $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ от сл.вел. се схожда по разпределение към $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Нека φ е функцията $\varphi(x) \coloneqq x^2$. Тогава $(\varphi(X_n))_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{d} \mathcal{X}^2_{(1)}$.

<u>Дефиниция (Стегнатост)</u>: Класът $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}_f(E)$ ще наричаме "стегнат" $\overset{def}{\iff}$ за всяко $\varepsilon > 0$ съществува компактно множество $K_\varepsilon \subset E$, такова че $\nu(E\setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$ за всяко $\nu \in \mathcal{F}$.

<u>Дефиниция (Относителна компактност)</u>: Класът $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}_1(E)$ от вероятностни мерки наричаме относително компактен $\overset{def}{\iff}$ всяка редица $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ има слабо сходяща подредица $\left(\mu_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ в $\mathcal{F}$.

<u>Дефиниция (Полско пространство)</u>: Едно топологично пространство (E,τ) наричаме Полско пространство, ако:

- (E,τ) е <u>сепарабелно</u>, т.е. съществува **изброимо гъсто** подмножество от елементи на E; Това означава, че съществува $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$, т.че всяко непразно отворено множество на τ съдържа поне един елемент на тази редица.
- Метричното пространство (E,d) е <u>банахово (пълно)</u>, т.е. всяка редица на Коши е сходяща в него.

<u>Теорема (Prokhorov)</u>: Нека (E,d) е метрично пространство и $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}_1(E)$. Тогава:

1. $\mathcal{F}$ е стегнат клас $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ е относително компактен.
2. Ако в допълнение E е Полско пространство, то от $\mathcal{F}$ е относително компактен клас $\Longrightarrow$ $\mathcal{F}$ е стегнат клас.

<u>док.</u>:
Ще докажем само втората част на теоремата (точка 2):
Най-напред искаме да покажем следното:

Ако $U_1, U_2, \ldots$ са отворени множества в E, които го покриват, то за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $N \geq 1$, т.че $\mu(\bigcup_{i=1}^N U_i) > 1 - \varepsilon$ за всяко $\mu \in \mathcal{F}$

За тази цел да допуснем противното:
Съществува $\varepsilon^* > 0$, т.че за всяко $N \geq 1$ съществува $\nu_N \in \mathcal{F}$, т.че $\nu_N(\bigcup_{i=1}^N U_i) \leq 1 - \varepsilon$

Тъй като $\mathcal{F}$ е относително компактен клас, то редицата $(\nu_N)_{N\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ има слабо сходяща подредица $\left(\nu_{N_j}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ в $\mathcal{F}$ и нека нейната граница е ν.

За всяко $N \geq 1$ $\bigcup_{i=1}^N U_i$ е отворено и от теоремата <u>Portmanteau</u> получаваме:

$$\nu\left(\bigcup_{i=1}^{N} U_i\right) \leq \liminf_{j\to\infty} \nu_{N_j}\left(\bigcup_{i=1}^{N} U_i\right) \leq \liminf_{j\to\infty} \nu_{N_j}\left(\bigcup_{i=1}^{N_j} U_i\right) \leq 1 - \varepsilon^* < 1 \text{ за } N \geq 1$$

Понеже $\bigcup_{i=1}^N U_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{N+1} U_i$ за всяко $N \geq 1$ и знаем, че $\bigcup_{i=1}^\infty U_i = E$, то като пуснем граница $N \to \infty$ на горното неравенство, получаваме:

$$1 = \lim_{N\to\infty} 1 > \lim_{N\to\infty} \nu\left(\bigcup_{i=1}^{N} U_i\right) = \nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\right) = \nu(E) = 1$$

с което стигаме до противоречие и сме доказали първата част.

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно. От това, че E е сепарабелно, знаем, че съществува изброимо гъсто подмножество от елементи на E и нека го бележим с $D = \{x_1, x_2, \dots\}$. За всяко $m \geq 1$ отворените кълба $B_{\frac{1}{m}}(x_i),\ i = 1,2, \dots$ са покритие на E. От това, което вече сме доказали, следва, че съществува $k_m \geq 1$, т.че $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{k_m} B_{\frac{1}{m}}(x_i)\right) > 1 - \varepsilon * 2^{-m}$ за всяко $\mu \in \mathcal{F}$.

Образуваме множеството:

$$K \coloneqq \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{k_m} \overline{B}_{\frac{1}{m}}(x_i)$$

Така K е <u>затворено</u> множество и за всяко $\delta > 0$ можем да вземем m, т.че $\frac{1}{m} < \delta$, откъдето

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{k_m} \overline{B}_{\delta}(x_i)$$

и това означава, че K е <u>ограничено</u>. K е затворено и ограничено $\Longrightarrow$ K е компакт. Остана да покажем, че $\mu(E \backslash K) < \varepsilon$, с което доказателството ще е завършено.

$$\mu(E \backslash K) = \mu\left(E \backslash \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{k_m} \overline{B}_{\frac{1}{m}}(x_i)\right) = \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \left[\bigcup_{i=1}^{k_m} \overline{B}_{\frac{1}{m}}(x_i)\right]^c\right) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu\left(\left[\bigcup_{i=1}^{k_m} \overline{B}_{\frac{1}{m}}(x_i)\right]^c\right) =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \left(1 - \mu\left(\bigcup_{i=1}^{k_m} \overline{B}_{\frac{1}{m}}(x_i)\right)\right) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon * 2^{-m} = \varepsilon \ \Longrightarrow\ \mathcal{F} \text{ е стегнат клас}$$

$\blacksquare$