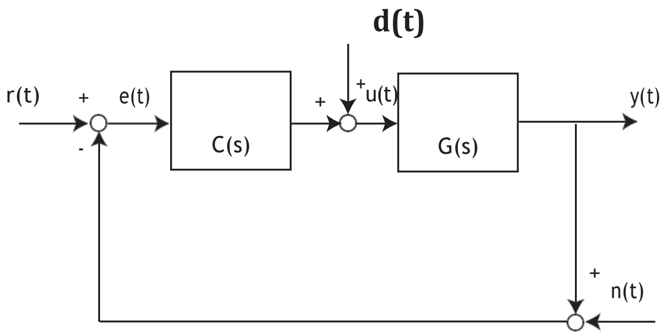
d. Si consideri il seguente schema di controllo in retroazione algebrica ed unitaria.



+

Figure 2:

dove G(s) rappresenta la f.d.t. del processo

$$\mathbf{G(s) = \frac{(s+2)}{s\left(s+\frac{1}{2}\right)^2}}$$

Si chiede di determinare un regolatore C(s) di struttura semplice che garantisca il soddisfacimento delle seguenti specifiche:

1. **errore di inseguimento alla rampa inferiore al 25 %;**
2. **massima sovraelongazione $S_{\%} \leq 25$ %, tempo di assestamento $t_s \leq 70$ sec.**

1.

Dobbiamo determinare, progettare un algoritmo di controllo di struttura semplice, che garantisca le specifiche richieste inserendo, solo se necessari, elementi dinamici, C(s).

L'errore di inseguimento è la prima specifica: è un problema legato alla precisione statica del sistema e deve essere inferiore al 25% per un riferimento a rampa. Ci troviamo nella prima parte della sintesi dell'algoritmo di controllo. In questa parte ci occupiamo di soddisfare le specifiche a transitorio esaurito.

Consideriamo la funzione di anello L(s)= C(s)·G(s) e cerchiamo di capire come si comporta il sistema retroazionato T(s) approssimativamente.

La nostra funzione di trasferimento G(s) presenta già un effetto integrale (≡ polo nell'origine), e quindi non è necessario introdurne altri: ulteriori inserimenti potrebbero causare instabilità in retroazione.

Oltre a rendere finito l'errore, il controllore deve far sì che questo si trovi al di sotto di un certo valore limite (k): il suo compito è quello di 'modulare' l'errore; diciamo che è un amplificatore.

C(s)= k

La funzione d'anello è pari alla serie tra il controllore e la funzione di trasferimento dell'impianto:

$$L(s) = C(s) \cdot G(s) = k \cdot \left[\frac{(s+2)}{s \cdot \left(s+\frac{1}{2}\right)^2} \right] = \frac{k \cdot (s+2)}{s \cdot \left(s+\frac{1}{2}\right)^2}$$

La funzione di anello è di tipo 3, con zero e poli reali.

Determiniamo il valore limite k affinché la specifica sia verificata, applicando la definizione di errore di inseguimento →

$$e_{\infty,r} = \lim_{S\to 0} \frac{1}{s \cdot L(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s \cdot \frac{k \cdot (s+2)}{s \cdot \left(s+\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{1}{8k}$$

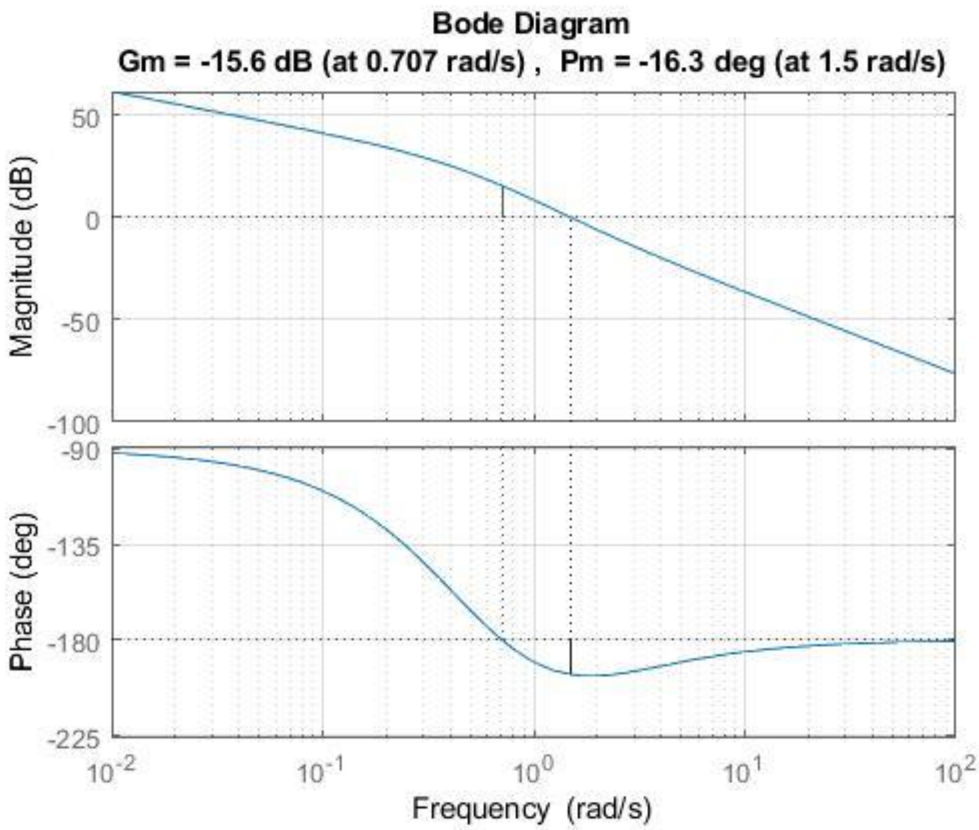
L'errore deve essere minore-uguale del 25%, quindi:

$$\frac{1}{8k} \leq \frac{1}{4} \qquad \rightarrow \qquad k \geq \frac{1}{2} = 0.5$$

Scegliamo un valore di **k= 1.5**: sceglierlo troppo grande innalzerebbe il diagramma dei moduli, e conseguentemente la pulsazione di attraversamento si sposterà verso destra e il margine di fase diminuirà dato che il diagramma delle fasi è monotono decrescente.

Valutiamo la stabilità in retroazione dello schema di controllo ottenuto: o disegniamo il diagramma di Nyquist o applichiamo il criterio di Bode (se il sistema lo consente) verificando quale sia il segno del margine di fase.

La nostra L(s) è compatibile con il criterio di Bode: infatti, escludendo i poli nell'origine, gli altri (poli) sono stabili, il diagramma dei moduli è monotono decrescente, il guadagno di Bode è non



negativo e la pulsazione di attraversamento è unica.

Notiamo che il margine di fase è negativo, -16.3°, quindi il sistema in retroazione sarà non stabile a ciclo chiuso.

2.

La seconda specifica riguarda: massima sovraelongazione e tempo di assestamento, da soddisfare durante il transitorio. Quindi sono problemi legati alla precisione dinamica del sistema.

Con una serie di approssimazioni cerchiamo di convertire le specifiche sulla massima sovraelongazione e sul tempo di assestamento in vincoli sul margine di fase garantito e sulla pulsazione di attraversamento garantita.

L'algoritmo di controllo è C(s)= k= 1.5.

Quindi il nostro sistema presenta tre poli e uno zero: sistema del terzo ordine.

Ipotizziamo che in media frequenza il sistema in retroazione possa essere approssimato con un sistema del secondo ordine con una coppia di poli complessi e coniugati:

$$T_{appr}(s) = \frac{{\omega_n}^2}{s^2 + 2\,\delta\,\omega_n s + {\omega_n}^2}$$

Il picco di sovraelongazione deve essere $S_{\%} \leq 25\%$ e il tempo di assestamento $t_s \leq 70\ sec.$.

Con le ipotesi fatte prima, possiamo mettere in relazione il picco di sovraelongazione con lo smorzamento δ dei poli complessi e coniugati:

$$S = e^{-\frac{\pi\,\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$$

Possiamo calcolare il valore dello smorzamento dei poli a ciclo chiuso, andando a sostituire ad *S* la sovraelongazione critica 0,25.

$$\delta = 0{,}4037$$

Possiamo ora calcolare il margine di fase:

$$\phi_m = \delta \cdot 100 = 40.37°$$

Quindi sulla funzione di anello compensata, il margine di fase dovrà essere maggiore di 40.37°.

Il tempo di assestamento è:

$$t_s = \frac{3}{\delta \cdot \omega_n}$$

da cui

$$\omega_n = \frac{3}{\delta \cdot t_s}$$

Andiamo a sostituire a t_s il valore critico della nostra specifica, ottenendo $\omega_n = 0.1062\ rad/sec$.

Conoscendo anche δ, possiamo ricavare il rapporto fra la pulsazione di banda passante e la pulsazione naturale:

$$\frac{\omega_{BW}}{\omega_n} = \sqrt{(1-\delta^2) + \sqrt{(1-2\delta^2)^2 + 1}} = 1.3711\ rad/sec$$

Moltiplicando il valore ottenuto per la pulsazione naturale otteniamo la pulsazione di banda passante:

$$\omega_{BW} = 1.3711 \cdot \omega_n = 0.1456$$

La pulsazione di attraversamento è un'approssimazione per difetto della pulsazione di banda passante, quindi avremo nuovi requisiti da imporre sulla funzione di anello compensata:

$$\begin{cases} \phi_m > 40.37° \\ \omega_c > 0.1456\, rad/sec \end{cases}$$

Scegliamo $\omega_{c\_new} = 0.15 \frac{rad}{sec} > 0.1456 \frac{rad}{sec}$ come pulsazione di attraversamento di progetto.

Calcoliamo il modulo della funzione di anello non compensata in corrispondenza della pulsazione di attraversamento da me scelta:

$$\left|L\left(j \cdot \omega_{c_{new}}\right)\right| = 73.6006$$

E la distanza goniometrica

$$180 - |\arg(L\left(j \cdot \omega_{c_{new}}\right))| = 60.8907$$

In corrispondenza di tale pulsazione la fase vale -119.1093.

Il modulo invece deve essere attenuato per portarlo da 73.6006 ad 1.

Abbiamo bisogno quindi di una rete correttrice che faccia in modo che ω_{c_new} sia l'effettiva pulsazione di attraversamento. Questa dovrà avere guadagno minore di 1 e sfasamento nullo, quindi utilizzeremo un attenuatore puro su tutte le frequenze: la coppia polo-zero.

$$C(s) = \frac{1 + s \cdot \alpha \cdot T}{1 + s \cdot T}$$

con α pari al rapporto fra la costante di tempo dello zero e del polo, ed è compresa tra 0 e 1, e T pari alla costante di tempo del polo.

Attraverso il supporto di MatLab, mediante la funzione "generica", calcoliamo il valore dei parametri della funzione quali α, T1 e T2.

Calcoliamo il fattore di attenuazione m:

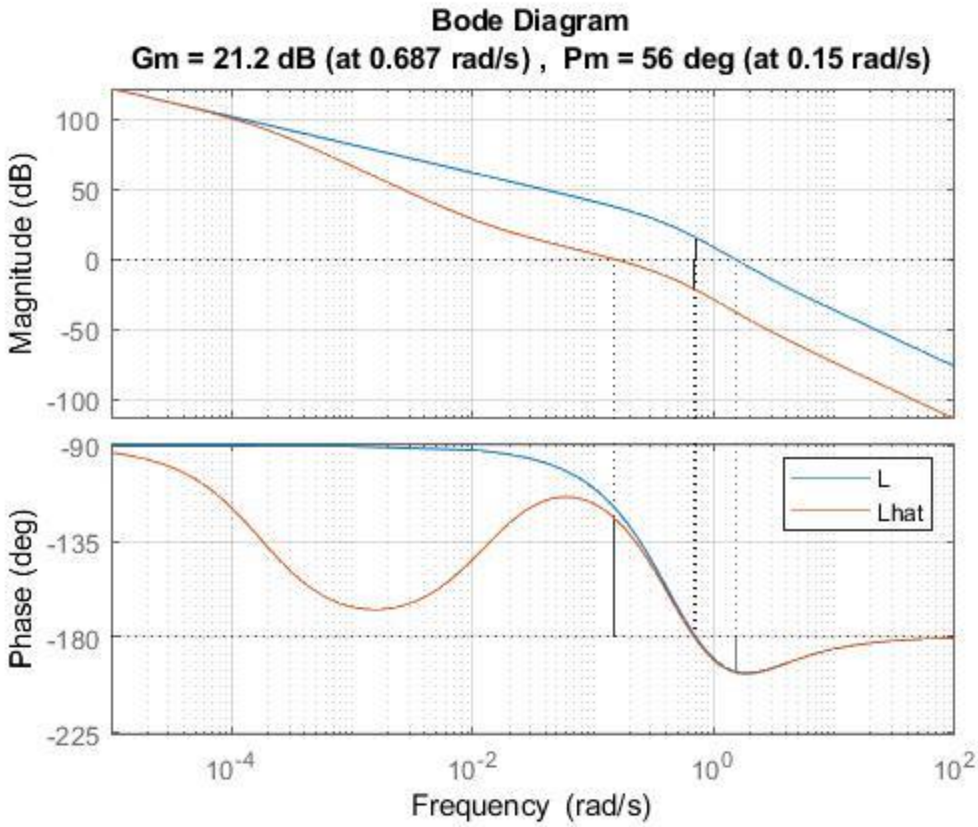
$$m = \frac{1}{|L(j\ \omega_c)|} = 0.0136$$

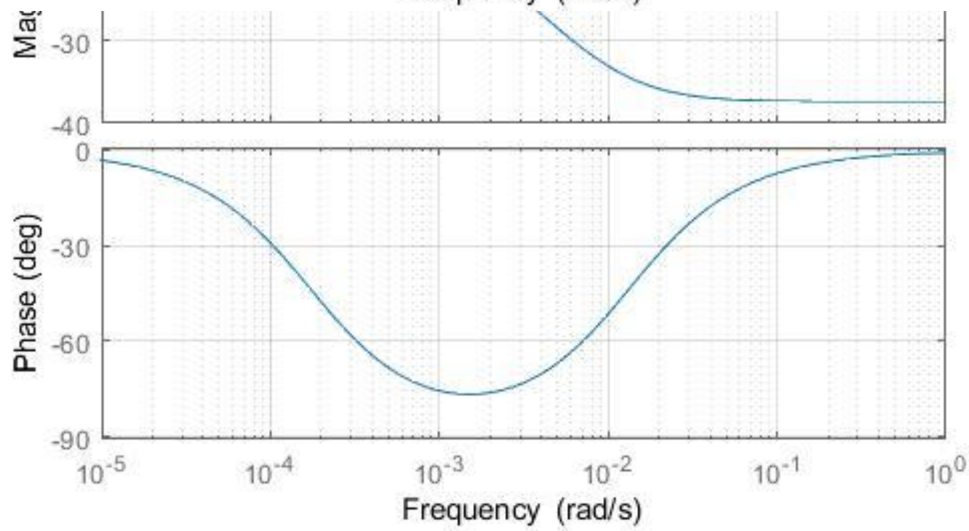
La funzione "generica" ci restituisce i seguenti valore:

$$\tau_z = 76.8500 \quad e \quad \tau_p = 5.6774e + 03$$

Costruiamo la rete:

$$C_d(s) = \frac{1 + s \cdot \tau_z}{1 + s \cdot \tau_p} = \frac{1 + 76.8500\ s}{1 + 5.6774e + 03\ \ s}$$





E la

funzione di anello compensata:

$$L_{hat}(s) = (C * G) * C_d$$

Inoltre sappiamo che, in corrispondenza di ω_{c_new}, la funzione di anello non-compensata è

$$L\left(j\,\widetilde{\omega_{c_{new}}}\right) = Me^{-j\,\gamma} \qquad con\, M > 1$$

La rete correttrice dovrà fornire una attenuazione pari a m e **un ritardo di fase** Θ<0.

$$m = \frac{1}{M} \qquad e \qquad \theta \approx -5°$$

In conclusione dobbiamo trovare tau_z e tau_p tali che

$$\frac{1 + j\,\omega_{c_{new}}\, tau\_z}{1 + j\,\omega_{c_{new}}\, tau\_p} = m\,e^{-j\,\theta}$$

(m < 1, Θ < 0)

$$tau_z = \frac{m - \cos(\theta)}{\omega_{c_{new}} \sin(\theta)} \qquad tau_p = \frac{m\cos(\theta) - 1}{\omega_{c_{new}}\, m \sin(\theta)}$$

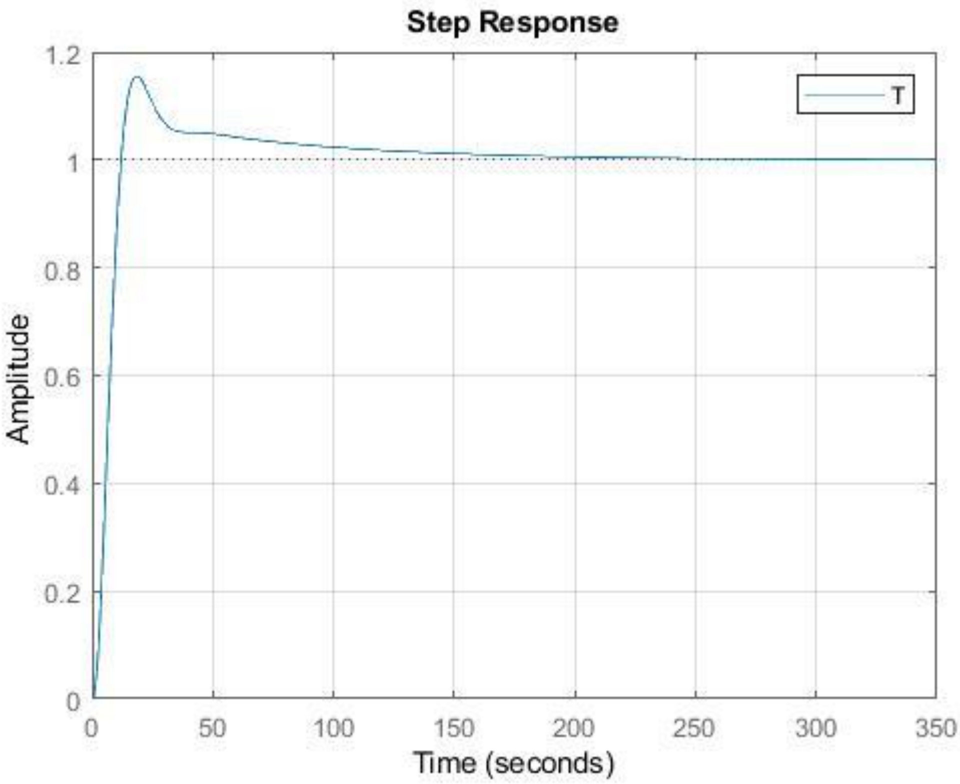
Per entrambe le formule il termine sin(Θ) < 0, e quindi per garantire la positività di tau_z e tau_p i numeratori devono essere entrambi negativi.

Calcolando "a mano" tau_z e tau_p tramite queste ultime formule, otteniamo gli stessi valori ottenuti tramite MatLab e la funzione 'generica'.

In entrambe le formule sin(Θ) < 0, quindi entrambi i numeratori devono essere negativi per far si che tau_z e tau_p siano entrambi positivi.

La risposta in frequenza in corrispondenza del numero complesso $\omega_{c_{new}}$ sarà:

$$C_{lag}(j\,\omega_{c_{new}}) = m\,e^{-j\,\theta}$$



Abbiamo ottenuto una **massima sovraelongazione** del 15.5110 % e un **tempo di assestamento** di 8.8179 sec.

TUTTE LE SPECIFICHE SONO RISPETTATE.