Samuele Iorio - matricola:189706 - Ingegneria informatica

Esercizio b.

$restart$:
$with(inttrans)$:
$with(PolynomialTools)$:
$with(DynamicSystems)$:
$with(plots)$:

$$G := s \rightarrow \frac{100 \cdot (10\,s - 1)}{16\,s \cdot \left(s^2 - \frac{1}{2}s + \frac{1}{16}\right)} :$$

$simplify(G(s))$

$$\frac{1000\,s - 100}{16\,s\left(s - \frac{1}{4}\right)^2} \qquad \textbf{(1)}$$

Costruire, utilizzando Adobe Illustrator o programma equivalente ed argomentando tutti i passaggi, il Diagramma di Bode per la seguente funzione di trasferimento (Allegare file .ai o .eps).

Il Diagramma di Bode è una rappresentazione grafica separata del modulo della risposta in frequenza |G(j ω)| e della sua fase ∠G(j ω) al variare entrambi di ω ∈ (-∞, +∞). Mediante la rappresentazione tramite il Diagramma di Bode si costruiscono quindi due diagrammi cartesiani in cui la variabile indipendente è la pulsazione ω e le variabili dipendenti sono, rispettivamente, il modulo e la fase di G(j ω).
Un Diagramma di Bode è quindi una coppia di grafici (ω, |G(j ω)|) (detto diagramma dei moduli e (ω, |G(j ω)|), detto diagramma delle fasi.

Troviamo i **poli** e gli **zeri** della funzione di trasferimento G(s): i primi si trovano ponendo il denominatore della funzione di trasferimento pari a zero, mentre i secondi ponendo a zero il numeratore sempre di G(s):

$zeri := solve(numer(\textbf{(1)}) = 0, s)$

$$zeri := \frac{1}{10} \qquad \textbf{(2)}$$

$poli := solve(denom(\textbf{(1)}) = 0, s)$

$$poli := 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \qquad \textbf{(3)}$$

Abbiamo:

• uno **zero** a fase non minima (cioè Re(z) > 0), 1/10; in corrispondenza di pulsazioni maggiori della

pulsazione di taglio di tale zero avremo sui moduli un aumento di pendenza +20db/dec, mentre sulle fasi avremo un contributo in ritardo di +45°;
- un **polo** nell'origine che sul diagramma dei moduli è una retta di pendenza di -20db/dec, mentre sulle fasi si avrà un contributo di -90°;
- due **poli** reali e coincidenti, instabili, che danno un contributo di -20db/dec ognuno sul diagramma dei moduli, mentre sulle fasi un contributo di +45°.

Indico con **m** il numero di zeri, **v** il numero di poli nell'origine ed **r** il numero di poli reali:

$m := 1 :$

$v := 1 :$

$r := 2 :$

La nostra funzione di trasferimento G(s) **non** è BIBO stabile, a causa della presenza del polo nell'origine.

Trovo le **pulsazioni di taglio** di poli e zeri:

$$T_1 := \frac{1}{zeri}$$

$$T_1 := 10 \tag{4}$$

$$\tau_1 := \frac{1}{\frac{1}{4}}$$

$$\tau_1 := 4 \tag{5}$$

$$\tau_2 := \tau_1$$

$$\tau_2 := 4 \tag{6}$$

$$\Omega := \frac{1}{|T_1|}$$

$$\Omega := \frac{1}{10} \tag{7}$$

$$\omega_1 := \frac{1}{|\tau_1|}$$

$$\omega_1 := \frac{1}{4} \tag{8}$$

$$\omega_2 := \frac{1}{|\tau_2|}$$

$$\omega_2 := \frac{1}{4} \tag{9}$$

Calcolo il **guadagno di Bode:**

$$k_b := \lim_{s \to 0} (s \cdot \mathbf{(1)})$$

$$k_b := -100 \quad \textbf{(10)}$$

e lo trasformo in decibel

$k_{b-db} := 20 \cdot \log_{10}(|\textbf{(10)}|)$

$$k_{b\text{-}db} := 40 \quad \textbf{(11)}$$

Ricaviamo smorzamento e pulsazione naturale risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} \omega_n^2 = \dfrac{1}{16} \\ 2 \cdot \delta \cdot \omega_n = -\dfrac{1}{2} \end{cases} :$$

$solve\left(\left\{\omega_n^2 = \frac{1}{16}, 2 \cdot \delta \cdot \omega_n = -\frac{1}{2}\right\}, [\delta, \omega_n]\right)$

$$\left[\left[\delta = -1, \omega_n = \frac{1}{4}\right], \left[\delta = 1, \omega_n = -\frac{1}{4}\right]\right] \quad \textbf{(12)}$$

che saranno:

$\omega_n := \frac{1}{4}$:

$\delta := -1$:

Notiamo che lo smorzamento $\delta \notin \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, per cui non avremo un fenomeno di risonanza.

Quindi sul diagramma dei moduli avrò uno slittamento verso l'alto pari a +40db; mentre sul diagramma delle fasi avremo uno slittamento di ±180° dovuto al fatto che $k_b < 0$.

Quindi la fase del guadagno è pari a ±180°.

Riscriviamo la funzione di trasferimento nella forma di Bode:

$$G(s) = K_b \cdot \frac{(T_1 s + 1) \cdot (T_2 s + 1) \cdot \ldots \cdot (T_m s + 1)}{s^r \cdot (\tau_1 s + 1) \cdot (\tau_2 s + 1) \cdot \ldots \cdot (\tau_n s + 1)}$$

dove $T_i = -\frac{1}{z_i}$, $\tau_i = -\frac{1}{p_i}$

La ***forma di Bode*** costruita è la seguente:

$$G(s) := \frac{k_b \cdot \left(1 - \frac{s}{\Omega}\right)}{\left(1 - \frac{s}{\omega_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{s}{\omega_2}\right) \cdot s}$$

$$G(s) := -\frac{100\ (1 - 10\ s)}{(1 - 4\ s)\ (1 - 4\ s)\ s} \quad \textbf{(13)}$$

Determino G(jω):

$G(\ j\omega)$

$$\frac{1000\ j\omega - 100}{16\ j\omega \left(j\omega^2 - \frac{1}{2}\ j\omega + \frac{1}{16}\right)} \quad \textbf{(14)}$$

A questo punto posso calcolare la **bassa frequenza** sui moduli e sulle fasi:

Moduli

La zona di bassa frequenza dei moduli sarà data da tutte quelle pulsazioni

$\omega < \min\{\Omega, \omega_1, \omega_2\} = \frac{1}{10} = 0,1$

Quindi ω<0,1

Mentre la zona di alta frequenza è data da tutte quelle pulsazioni

$\omega > \max\{\Omega, \omega_1, \omega_2\} = \frac{1}{4} = 0,25$

Quindi ω>0,25

La pendenza del diagramma in bassa frequenza sarà $-20 \cdot v = -20$ dB/dec mentre in alta frequenza il diagramma avrà pendenza $-20 \cdot v + 20 \cdot m - 20 \cdot r$ dB/dec = -40 dB/dec.

In corrispondenza di 0,1 rad/sec il modulo viene anticipato di 20 dB/dec, da parte dello zero a fase non minima, mentre in corrispondenza di 0,25 rad/sec viene attenuato di -40 dB/dec dai due poli instabili.

Fasi

La zona di <u>bassa frequenza</u> delle fasi sarà data da tutte quelle pulsazioni

$\omega < \frac{1}{10} \cdot \min\{\Omega, \omega_1, \omega_2\} = 0,01$

Quindi ω< 0,01

Mentre la zona di alta frequenza è data da tutte quelle pulsazioni
$\omega > 10 \cdot \max\left\{\Omega, \omega_1, \omega_2\right\} = 2, 50$
Quindi ω> 2,50

Il valore che la fase assumerà inizialmente, in BF, è definito come → $\measuredangle k_b$- v*90° (fase del guadagno - v*90°).
La fase finale, in AF, invece, la possiamo ricavare tramite la formula:

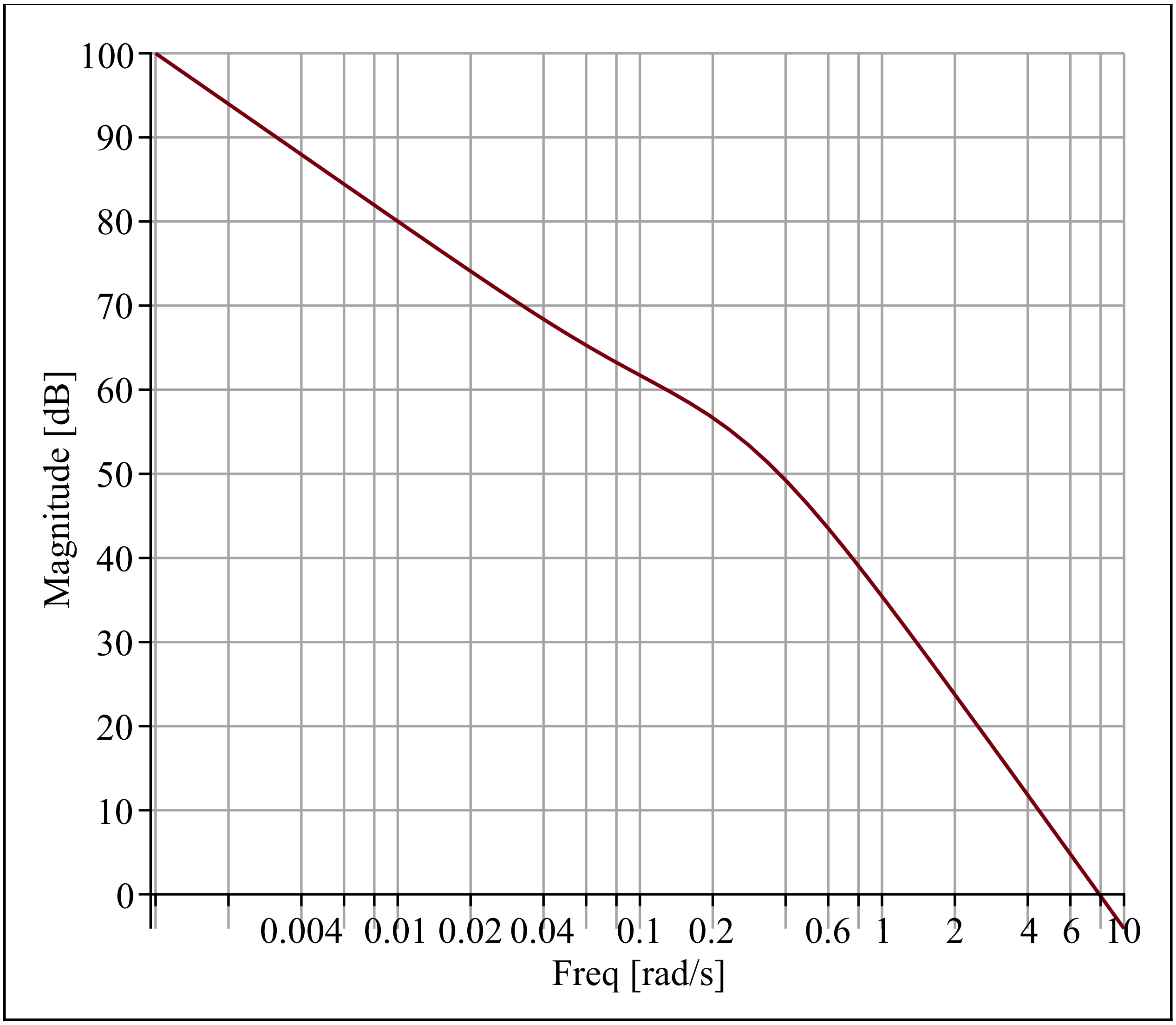
$\measuredangle k_b$- v 90° + m^-90°- r^-90° - m^+ 90° + r^+ 90°= 90°-90°+ 2*90°= 180°
dove m^+ sono gli zeri a fase non minima, m^- gli zeri a fase minima, r^+ i poli instabili e r^- i poli stabili.

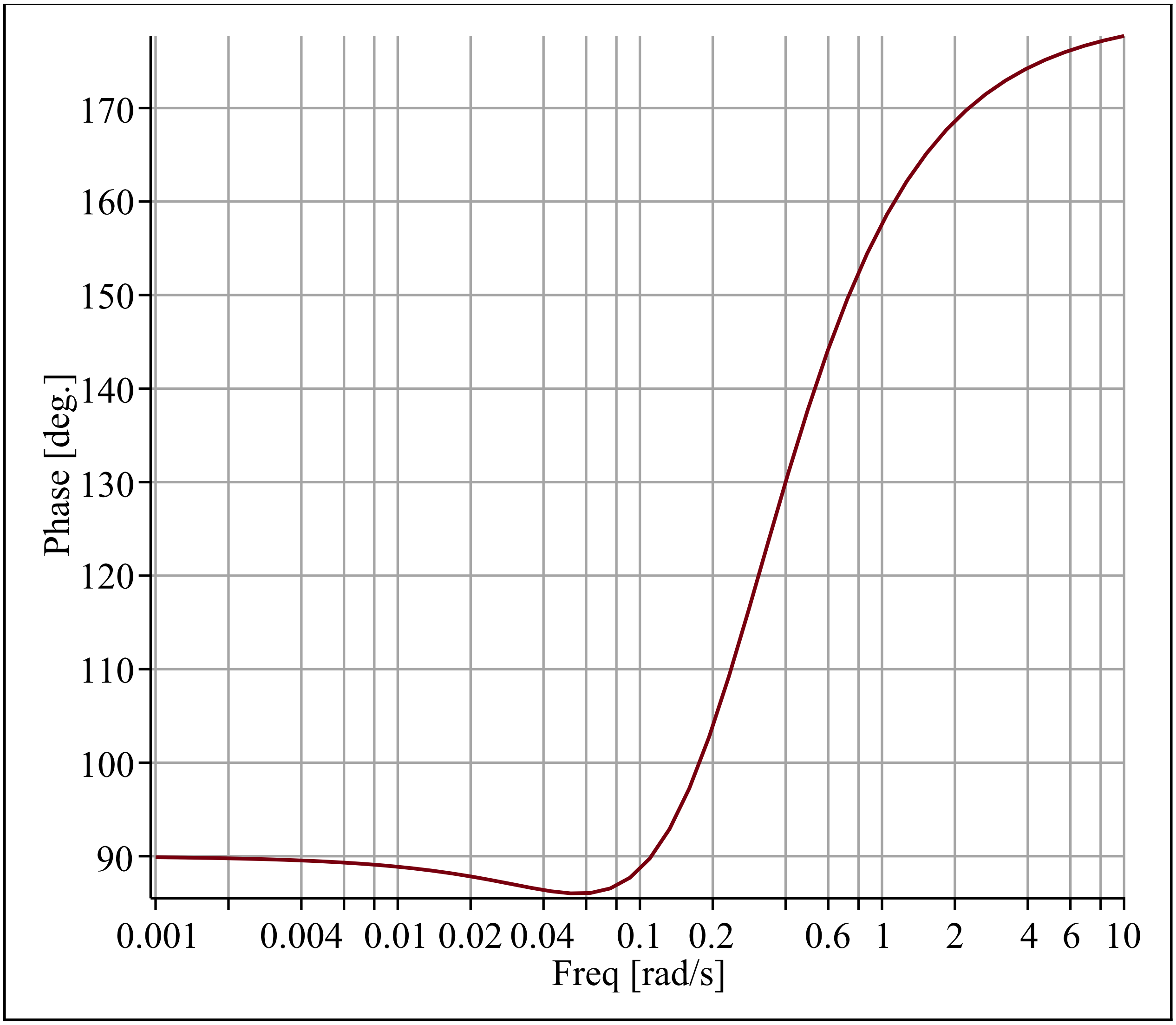
In corrispondenza di 0,01 rad/sec la pendenza sarà di -45° (contributo dello zero a fase non minima), per poi passare a +90° in corrispondenza di 0,25 rad/sec (contributo dei due poli reali instabili).
In corrispondenza di 1 rad/sec, invece, la fase viene anticipata di 45° e in corrispondenza di 25 rad/sec si ha un contributo di -90° (contributo dei due poli reali instabili).

A questo punto possiamo disegnare su Adobe Illustrator le pulsazioni di taglio dei poli e dello zero, individuare sulle fasi la zona di media frequenza (**MF**) nell'intervallo [Ω/10, Ω*10].
In corrispondenza dei poli (diversi dall'origine) e dello zero posiziono i contributi dati sia sui moduli che sulle fasi.
Calcolo la pendenza iniziale del diagramma dei moduli come >> 20(m-r)-20v.

Nel nostro caso il guadagno è negativo, quindi la sua fase è ±180°: scelgo +180°.
Fase iniziale= 180°-90°= 90°.

COME VERIFICA UTILIZZIAMO MAPLE:
$BodePlot(TransferFunction(G(s)))$


100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
Magnitude [dB]
0.004
0.01
0.02
0.04
0.1
0.2
0.6
1
2
4
6
10
Freq [rad/s]



170
160
150
140
130
120
110
100
90
Phase [deg.]
0.001
0.004
0.01
0.02
0.04
0.1
0.2
0.6
1
2
4
6
10
Freq [rad/s]