

c. Si consideri il seguente schema a blocchi in retroazione algebrica ed unitaria

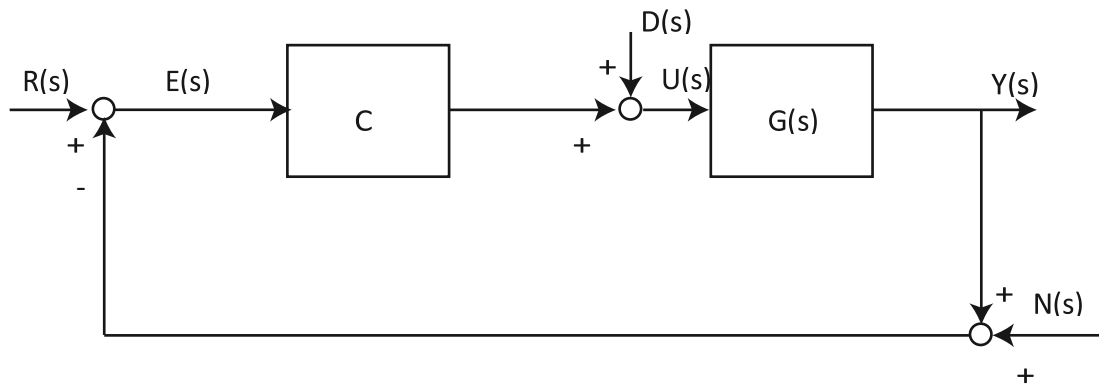


Figure 1: Schema a Blocchi in Retroazione Algebrica ed Unitaria

La funzione di trasferimento dell'impianto è

$$G(s) = \frac{2}{(1 + 3s)}$$

Determinare:

1. uno schema di controllo on-off scegliendo il livello del riferimento da asservire e discutendo l'andamento del segnale di controllo al variare della fascia di incertezza intorno alla quale far variare l'uscita asservita;
2. Si supponga che il regolatore abbia la seguente struttura lineare;

$$C(s) = \frac{K}{s(s+1)}$$

Determinare, servendosi degli strumenti di CAD spiegati durante il corso (Maple, Matlab e Simulink),

- (a) il valore limite di K in corrispondenza del quale la stabilità in retroazione non è più garantita;
- (b) scelto un valore di K appartenente alla regione di instabilità rappresentare il diagramma dei moduli e delle fasi della funzione di sensitività e sensitività complementare;
- (c) sempre considerando il valore di K scelto in precedenza valutare, servendosi delle opportune risposte in frequenza, l'andamento dell'errore di inseguimento al riferimento $r(t) = \sin\left(\frac{t}{3}\right) 1(t)$. Quanto vale il più piccolo errore di inseguimento ottenibile dalla struttura di controllo così assegnata oltre il quale il sistema non è più stabile a ciclo chiuso?;
- (d) si consideri sempre il valore di K scelto nel secondo punto. Nell'ipotesi che il disturbo sia il seguente segnale

$$d(t) = \sin\left(\frac{t}{30}\right) 1(t)$$

e che il rumore di misura abbia la seguente espressione

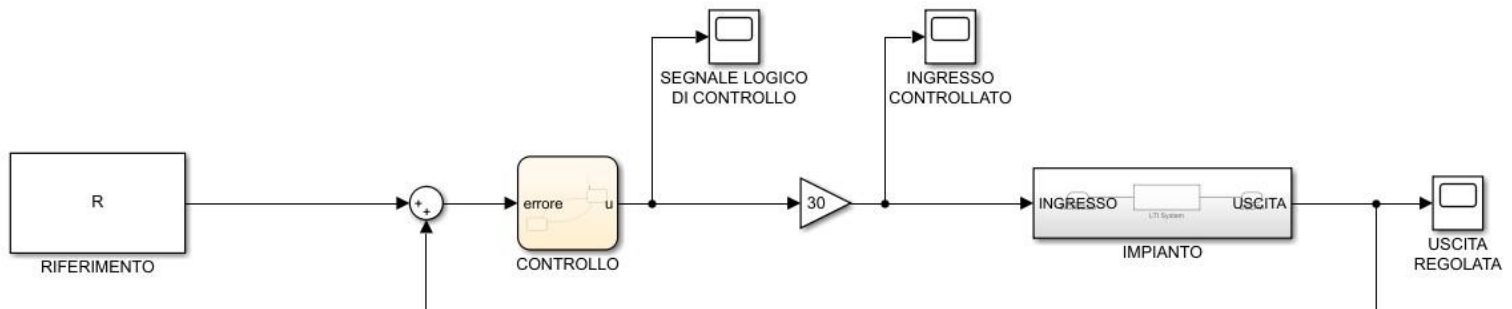
$$n(t) = \sin(30t) 1(t)$$

quanto vale in configurazione *caso peggiore* l'ampiezza dell'errore sull'uscita regolata a regime? Argomentare sfruttando le risposte in frequenza dello schema retroazionato e le eventuali (se applicabili) approssimazioni in bassa e alta frequenza della funzione di anello.

1.

Lo schema di controllo ON-OFF realizzato in Simulink è il seguente:

Ho utilizzato:



- dei blocchi **Scope**, per monitorare, l'andamento dell'errore di inseguimento, dell'uscita regolata e del segnale di controllo;
- un blocco **Sum**;
- un blocco **Gain** (guadagno), che tramuta il segnale di controllo logico che viene fuori dall'automa in un segnale fisico;
- un blocco **Chart**, che implementa l'algoritmo di controllo tramite un automa a due stati che va in switching tra ON ($u=1$) e OFF ($u=0$);
- un blocco **LTI System**, per la funzione di trasferimento dell'impianto caricata dal Workspace di Matlab;
- **Constant**, per il valore del riferimento che rappresenta l'obiettivo.

Proiettiamoci verso lo sviluppo della soluzione. Notiamo come la funzione di trasferimento dell'impianto modella un sistema SISO (Single Input Single Output) lineare e stabile (in particolare BIBO - Bounded Input Bounded Output).

Quindi non esistono altri ingressi (a parte il segnale di controllo) e lo stesso vale per l'uscita regolata.

Sappiamo poi che ad un segnale limitato fornito in ingresso all'impianto, corrisponde un'uscita limitata. (vera perché i poli del sistema sono tutti a parte reale strettamente negativa)

Dato il sistema del primo ordine $G(s) = \frac{2}{(1+3s)}$ dobbiamo vedere come questo risponde all'interno di un problema di asservimento di posizione. Scelgo il riferimento $r(t) = 1(t)$, il gradino (segnale di Heaviside) di ampiezza unitaria.

Ho definito la funzione $G(s)$ nel workspace di MatLab, precedentemente, e poi l'ho inserita all'interno del foglio Simulink nel blocco LTI System.

L'ampiezza della fascia di incertezza è data dal riferimento e da una costante ε che varia per vedere l'andamento del segnale di controllo e dell'uscita regolata:

$$r(t) - \varepsilon < y(t) < r(t) + \varepsilon < y_{\infty}$$

Ora più epsilon è grande tanto maggiore sarà il livello di incertezza sull'uscita regolata che si ritrova in un intervallo di ampiezza maggiore al crescere della costante. Al contrario, al decrescere del valore l'intervallo si restringe.

La situazione ideale è che l'uscita regolata sia più o meno uguale al riferimento ($Y(s) \approx R(s)$). Confrontando y_{rif} con l'uscita effettiva $y(t)$, ottengo l'errore di inseguimento, definito come

Se il valore destro della fascia di tolleranza non è minore della temperatura di regime il controllo on-off non "scatta".

Prendiamo la condizione:

$$y(t) < r(t) + \varepsilon$$

Essa è violata quando:

$$y(t) \geq r(t) + \varepsilon$$

Avremo, allora:

$$r(t) - y(t) = e(t) \leq -\varepsilon$$

Lo stesso discorso si può fare per:

$$y(t) > r(t) - \varepsilon$$

Essa è violata quando:

$$y(t) \leq r(t) - \varepsilon$$

Avremo, allora:

$$r(t) - y(t) = e(t) \geq \varepsilon$$

Quindi i valori che fanno accendere o spegnere l'automa sono: $e(t) \geq \varepsilon$, $e(t) \leq -\varepsilon$

Samuele Iorio – matricola: 189706 – Ingegneria Informatica

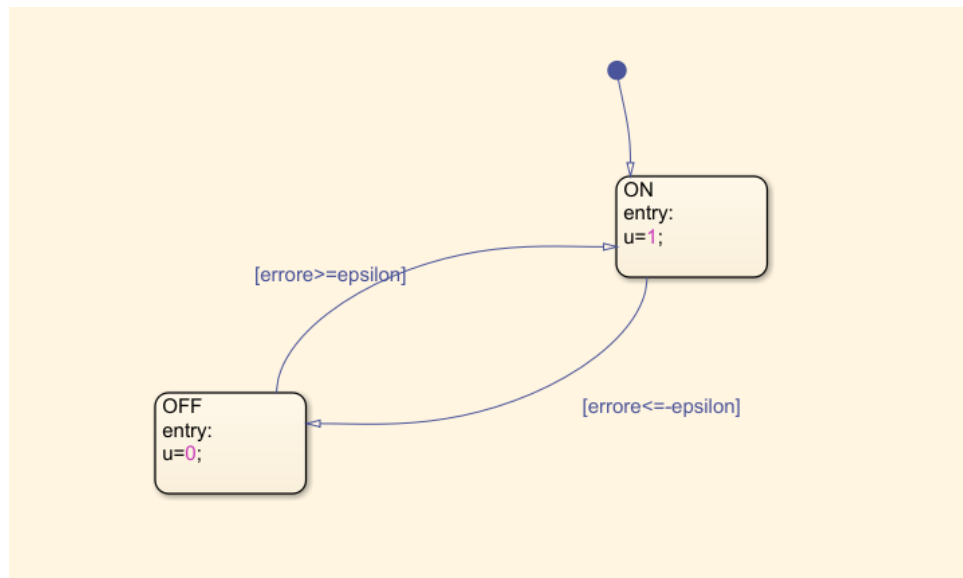
Scegliamo come valore di riferimento: $r(t) = 0.5$

Scegliamo la fascia di tolleranza pari a: $\epsilon = 0.02$

I valori entro i quali oscillerà l'uscita regolata sono: $0.48 < y(t) < 0.52$

Analizziamo ora il controllo **ON/OFF**.

Lo schema logico di controllo elaborato in **Simulink** è il seguente:



L'ingresso dell'automa è l'errore di inseguimento, mentre l'uscita è il segnale di controllo logico u .

Le transizioni di stato sono dettate dal valore dell'errore di inseguimento rispetto al parametro dello schema epsilon.

Ricordiamo che l'errore di inseguimento è:

$$e(t) = y_{rif} - y(t)$$

Se il valore dell'errore è minore di $-\epsilon$, e cioè l'uscita ha violato l'upper bound di tolleranza, il controllo passa nello stato di **OFF** (se era ad **ON**) istantaneamente.

Mentre un errore maggiore di $+\epsilon$ induce il controllo a passare nello stato di **ON** (se non fosse già ad **ON**) per "sollevare" l'uscita.

2.

(a) Determinare il valore limite di K in corrispondenza del quale la stabilità in retroazione non è più garantita.

Noi sappiamo che:

$$G(s) = \frac{2}{(1 + 3s)}; \quad C(s) = \frac{k}{s * (s + 1)}$$

Utilizziamo il Criterio di Routh per determinare il valore limite di k: tale criterio ci permette di determinare il numero di radici, a parte reale positiva/negativa, di un polinomio a partire dai suoi coefficienti. Noi lo useremo per valutare la posizione delle radici al variare di un generico parametro K, per determinare il valore limite di K in corrispondenza del quale la stabilità in retroazione non è più garantita.

Dato lo schema a blocchi in retroazione algebrica ed unitaria, valutiamo la funzione di trasferimento a ciclo chiuso:

$$W(s) = \frac{G(s) * C(s)}{1 + C(s) * G(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

$$\text{dove } L(s) = C(s) * G(s) \rightarrow L(s) = \frac{2k}{s(s + 1)(1 + 3s)}$$

$$\text{Quindi} \quad W(s) = \frac{2k}{s(s + 1)(1 + 3s) + 2k}$$

Consideriamo il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso W(s):

$$\text{Den}(W(s)) = s(s + 1)(1 + 3s) + 2k = 3s^3 + 4s^2 + s + 2k.$$

Costruiamo la tabella di Routh, posiziono i coefficienti e risolvo:

s^3	3	1
s^2	4	$2k$
s^1	$-\frac{3}{2}k + 1$	
s^0	$2k$	

Analizzo la seconda colonna: 3 e 4 sono entrambi maggiori di zero, quindi abbiamo una prima permanenza; 4 e $(-\frac{3}{2}k + 1)$ per avere una permanenza in segno $(-\frac{3}{2}k + 1)$ deve essere maggiore di zero; $(-\frac{3}{2}k + 1)$ e $2k$ per avere una permanenza devono essere entrambi maggiori di zero.

Quindi:

$$\begin{cases} -\frac{3}{2}k + 1 > 0 \\ 2k > 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad 0 < k < \frac{2}{3}$$

Quindi per valori di k che si trovano all'interno di questo intervallo, la stabilità in retroazione è garantita. Al di fuori di tale intervallo invece la stabilità in retroazione non è più garantita: infatti se andiamo a sostituire un valore fuori dall'intervallo, a k nella prima colonna della tabella di Routh, non otteniamo radici tutte a parte reale strettamente negativa.

Questo procedimento è noto come ex-post.

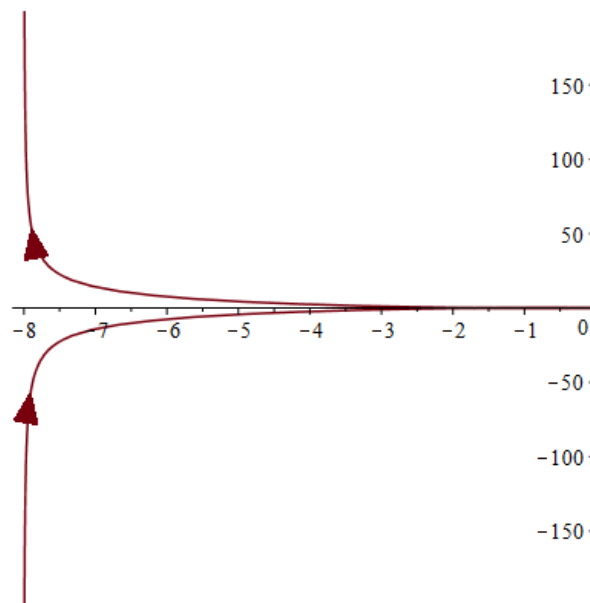
Altro modo per verificare la stabilità interna di un sistema è applicare, usare il criterio di Nyquist.

In particolare quest'ultimo afferma:

Sia assegnato uno schema in retroazione algebrica e unitaria e supponiamo che la funzione di anello $L(s)$ abbia P poli a parte reale strettamente positiva. Allora, il numero di zeri di $1+L(s)$ nel semipiano destro, Z , è pari a $Z=N+P$

dove N rappresenta la somma algebrica delle rotazioni totali che il diagramma di Nyquist di $L(s)$ presenta intorno al punto critico $-1+j0$. Ciascuna rotazione in senso orario si segna con un $+1$, al contrario le rotazioni in senso antiorario si valutano con un -1 .

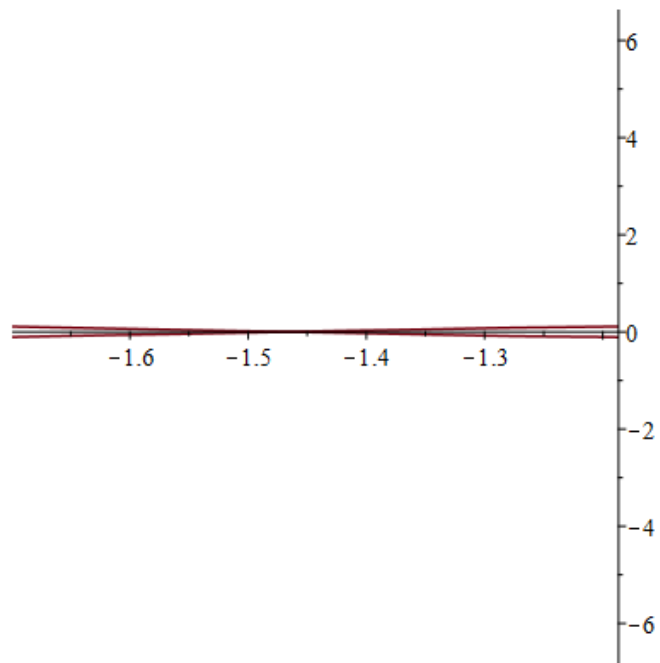
Utilizzo Maple e scelgo $k=1$:



Notiamo che, a causa del polo nell'origine, la curva non è finita al finito (abbiamo un asintoto verticale in $\text{Re}(j\omega) = -8$).

Inoltre per il fatto che abbiamo elementi dinamici (quindi polo nell'origine e due poli stabili) la fase finale sarà pari a -270° .

Ingrandendo la figura notiamo che il diagramma attraversa l'asse reale negativo quindi il margine di guadagno sarà una quantità finita.



(b) scelto a piacere un valore di K appartenente alla regione di stabilità rappresentare il diagramma dei moduli e delle fasi della funzione di sensitività e sensitività complementare.

Per prima cosa scegliamo un valore di k appartenente all'intervallo $0 < k < \frac{2}{3}$, per cui la stabilità in retroazione è garantita: **$k = 0,40$** .

Dopodiché scriviamo le funzioni di sensitività e di sensitività complementare:

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} \quad e \quad T(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

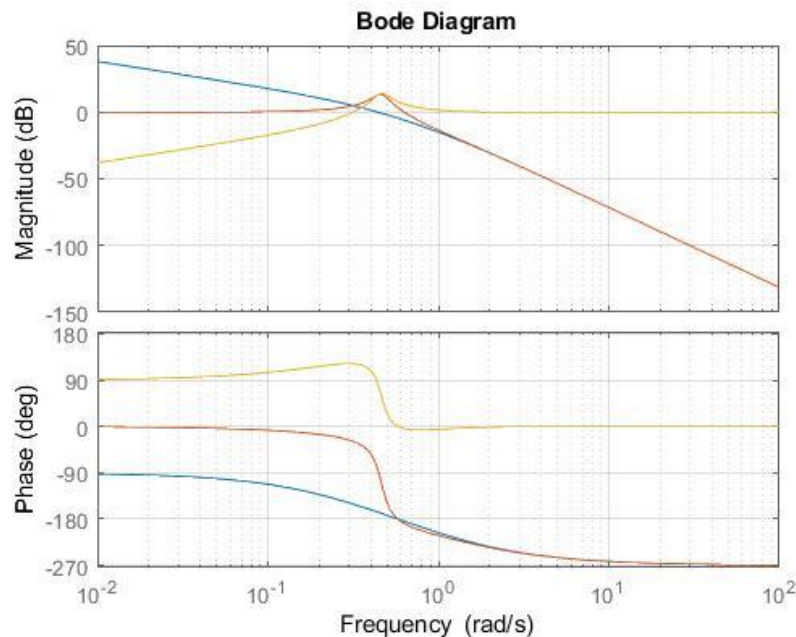
Conoscendo $L(s)$, andiamogli a sostituire il valore di k ottenendo:

$$L(s) = \frac{2k}{s(s+1)(1+3s)} = \frac{0,80}{(s^2+s)(1+3s)}$$

Quindi

$$S(s) = \frac{1}{1 + \frac{0,80}{(s^2+s)(1+3s)}} = \dots = \frac{3s^3 + 4s^2 + s}{3s^3 + 4s^2 + s + 0,80} \quad e \quad T(s) = \frac{0,40}{(s^2+s)(1+3s) + 0,80}$$

Utilizziamo MatLab per rappresentare il diagramma dei moduli e delle fasi di $T(s)$ e $S(s)$.



Considerazioni:

- **BASSA FREQUENZA:** la sensibilità complementare, che identifica la FDT a ciclo chiuso, ha una risposta in frequenza piatta e costante. Quindi tutti i segnali situati in bassa frequenza vengono riprodotti fedelmente sull'uscita regolata con la stessa ampiezza di ingresso. Per quanto riguarda la sensibilità, in BF il diagramma dei moduli è approssimativamente il reciproco del diagramma dei moduli della funzione di anello, per cui se abbiamo riferimenti/disturbi a banda limitata, l'errore di inseguimento sarà piccolo e l'effetto sull'uscita dei disturbi risulterà trascurabile.
- **ALTA FREQUENZA:** in AF il diagramma dei moduli della sensibilità complementare è approssimabile a quello della funzione di anello e gli errori di misura in alta frequenza sono compensati. Quindi la retroazione è inesistente. Il diagramma dei moduli della sensibilità, invece, in AF, è quasi piatto. Perciò i riferimenti in AF non vengono asserviti dall'impianto controllato e, nel caso ci siano disturbi, quest'ultimi non vengono compensati a dovere.
- **MEDIA FREQUENZA:** il diagramma dei moduli della sensibilità complementare $T(s)$ in MF è simile al diagramma dei moduli di un sistema del secondo ordine con poli complessi coniugati a guadagno statico unitario. Presenta inoltre un effetto di risonanza.

(c) sempre considerando il valore di K scelto in precedenza valutare, servendosi delle opportune risposte in frequenza, l'andamento dell'errore di inseguimento al riferimento $r(t)=\sin(t/3) \cdot 1(t)$. Quanto vale il più piccolo errore di inseguimento ottenibile dalla struttura di controllo così assegnata oltre il quale il sistema non è più stabile a ciclo chiuso?

Il nostro riferimento è un segnale periodico elementare, quindi anche l'uscita sarà un segnale periodico elementare che avrà la stessa pulsazione del riferimento per il teorema della risposta armonica: $Y(s) = T(s) \cdot R(s)$.

$r(t) = R \cdot \sin(\omega t)$ con ω pulsazione e R ampiezza del riferimento.

Possiamo applicare sempre il teorema della risposta armonica per verificare che $E(s)$ avrà la stessa pulsazione:

$$e_{\infty}(t) = E \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

dove $E = R \cdot |S(j\omega)|$ e $\varphi = \arg(S(j\omega))$.

Dobbiamo rendere $e_{\infty}(t)$ il più piccolo possibile.

Per poterlo fare occorre diminuire l'ampiezza E , a parità di R , e quindi diminuire il modulo della risposta in frequenza della sensitività $|S(j\omega)| = 1 / |1 + L(j\omega)|$ valutata in corrispondenza della pulsazione di riferimento.

Quindi dobbiamo incrementare $|1 + L(j\omega)|$: è possibile farlo se approssimativamente il modulo $|L(j\omega)|$ è reso grande a piacere.

Da quanto visto nel punto **a_2**, abbiamo un limite: affinché sia garantita la stabilità in retroazione

$$L(s) = \frac{0.80}{(s^2 + s) \cdot (1 + 3s)}$$

al massimo.

restart :

assume(ω , *real*) :

$$L := s \rightarrow \frac{0.80}{s \cdot (s + 1) \cdot (1 + 3 s)}$$

$$L := s \mapsto \frac{0.80}{s (s + 1) (1 + 3 s)} \quad (1)$$

$$L_freq := eval(L(s), s = I \cdot \omega)$$

$$L_freq := \frac{-0.80 I}{\omega (I \omega + 1) (1 + 3 I \omega)} \quad (2)$$

$$S_freq := \frac{1}{1 + L_freq}$$

$$S_freq := \frac{1}{1 - \frac{0.80 I}{\omega (I \omega + 1) (1 + 3 I \omega)}} \quad (3)$$

$$|S_freq|$$

$$\frac{1}{\left| 1 - \frac{0.80 I}{\omega (I \omega + 1) (1 + 3 I \omega)} \right|} \quad (4)$$

$$\arg(S_freq)$$

$$\arg\left(\frac{1}{1 - \frac{0.80 I}{\omega (I \omega + 1) (1 + 3 I \omega)}}\right) \quad (5)$$

$$e_\infty := t \rightarrow |S_freq| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(S_freq)) :$$

$$e_\infty(t)$$

$$\frac{\sin\left(\omega t + \arg\left(\frac{1}{1 - \frac{0.80 I}{\omega (I \omega + 1) (1 + 3 I \omega)}}\right)\right)}{\left| 1 - \frac{0.80 I}{\omega (I \omega + 1) (1 + 3 I \omega)} \right|} \quad (6)$$

Ora dobbiamo valutare $e_\infty(t)$ in corrispondenza della pulsazione del riferimento

$$r(t) = \sin\left(\frac{t}{3}\right) \cdot \text{Heaviside}(t)$$

$$eval\left(e_\infty(t), \omega = \frac{1}{3}\right)$$

$$1.185113658 \sin\left(\frac{t}{3} + 2.119345729\right) \quad (7)$$

Questo è il valore del più piccolo errore di inseguimento ottenibile dalla struttura di controllo

$$C(s) = \frac{0.40}{s \cdot (s + 1)} . \text{ Scegliendo un guadagno } k > 0.40 \text{ non è più garantita la stabilità a ciclo chiuso.}$$

(d) si consideri sempre il valore di K scelto nel secondo punto. Nell'ipotesi che il disturbo sia il seguente segnale $d(t) = \sin\left(\frac{t}{30}\right) 1(t)$ e che il rumore di misura abbia la seguente espressione $n(t) = \sin(30t) 1(t)$ quanto vale in configurazione caso peggiore l'ampiezza dell'errore sull'uscita regolata a regime? Argomentare sfruttando le risposte in frequenza dello schema retroazionato e le eventuali (se applicabili) approssimazioni in bassa e alta frequenza della funzione di anello.

Nel dominio di Laplace l'espressione analitica dell'uscita misurata risulta essere la seguente:

$$Y(s) = T(s) \cdot R(s) + S_d(s) \cdot D(s) - T(s) \cdot N(s)$$

dove $T(s) = L(s) / (1 + L(s))$ è la sensitività complementare e $S_d(s) = G(s) / (1 + L(s))$ è la sensitività del disturbo.

Quindi l'uscita $Y(s)$ è legata al disturbo $D(s)$, al riferimento $R(s)$ e all'errore di misura sull'uscita $N(s)$

restart :

assume(ω , *real*) :

$$G := s \rightarrow \frac{2}{1 + 3s} :$$

$G(s)$

$$\frac{2}{1 + 3s} \quad (1)$$

$$C := s \rightarrow \frac{0.40}{s \cdot (s + 1)} :$$

$C(s)$

$$\frac{0.40}{s(s + 1)} \quad (2)$$

$$L := s \rightarrow \frac{0.80}{s \cdot (s + 1) \cdot (1 + 3s)} :$$

$L(s)$

$$\frac{0.80}{s(s + 1)(1 + 3s)} \quad (3)$$

$$L_freq := eval(L(s), s = I \cdot \omega)$$

$$L_freq := \frac{-0.80 I}{\omega (I \omega + 1) (1 + 3 I \omega)} \quad (4)$$

$$T_freq := \frac{L_freq}{1 + L_freq} :$$

T_freq

$$\frac{-0.80 I}{\omega (I \omega + 1) (1 + 3 I \omega) \left(1 - \frac{0.80 I}{\omega (I \omega + 1) (1 + 3 I \omega)} \right)} \quad (5)$$

$$Y_n := |eval(T_freq, \omega = 30)| \cdot 1 :$$

Y_n

$$9.870455866 \cdot 10^{-6} \quad (6)$$

$$\phi := 180 + \text{argument}(eval(T_freq, \omega = 30))$$

$$\phi := 181.6152181 \quad (7)$$

Grazie al teorema della risposta armonica calcolo $y_{n,\infty}$ dove $Y_n = |T(j\omega)| \cdot N$ (con N ampiezza del signal n(t)) e $\phi = 180 + \arg(T(j\omega))$ e $\omega = 30 \text{ rad/sec}$.

$$y_{n,\infty} := t \rightarrow Y_n \cdot \sin(30 \cdot t + \phi) :$$

$y_{n,\infty}(t)$

$$9.870455866 \cdot 10^{-6} \sin(30 t + 181.6152181) \quad (8)$$

$$Y_{n,appr} := |eval(L_freq, \omega = 30)| \cdot 1$$

$$Y_{n,appr} := 9.870451539 \cdot 10^{-6} \quad (9)$$

$$\phi_{appr} := 180 + \text{argument}(eval(L_freq, \omega = 30))$$

$$\phi_{appr} := 181.6152280 \quad (10)$$

$$y_{n,appr} := t \rightarrow Y_{n,appr} \cdot \sin(30 \cdot t + \phi_{appr}) :$$

$$y_{n,appr}(t)$$

$$9.870451539 \cdot 10^{-6} \sin(30 t + 181.6152280) \quad (11)$$

Per il teorema della risposta armonica $y_{d,\infty} = Y_d \cdot \sin(\omega \cdot t + \xi)$, dove $Y_d = |S_d(j\omega)| \cdot D$ (D è l'ampiezza del segnale $d(t)$) e $\xi = \arg(S_d(j\omega))$ con $\omega = \frac{1}{3} \frac{rad}{s}$

$$S_d := s \rightarrow \frac{(1)}{1 + L(s)} :$$

$$S_d(s)$$

$$\frac{2}{(1 + 3 s) \left(1 + \frac{0.80}{s (s + 1) (1 + 3 s)} \right)} \quad (12)$$

$$S_d_{freq} := eval(S_d(s), s = I \cdot \omega)$$

$$S_d_{freq} := \frac{2}{(1 + 3 I \omega) \left(1 - \frac{0.80 I}{\omega (I \omega + 1) (1 + 3 I \omega)} \right)} \quad (13)$$

$$Y_d := \left| eval(S_d_{freq}, \omega = \frac{1}{30}) \right|$$

$$Y_d := 0.08377241205 \quad (14)$$

$$\xi := \arg(eval(S_d_{freq}, \omega = \frac{1}{30}))$$

$$\xi := 1.562381795 \quad (15)$$

Sempre per il teorema della risposta armonica si ha che:

$$y_{d,\infty} := t \rightarrow Y_d \cdot \sin\left(\frac{1}{30} \cdot t + \xi\right) :$$

$$y_{d,\infty}(t)$$

$$0.08377241205 \sin\left(\frac{t}{30} + 1.562381795\right) \quad (16)$$

dove $Y_d = |S_d(j\omega)| \cdot D$ (con D ampiezza del segnale $d(t)$ e $\xi = \arg(S_d(j\omega))$ e $\omega = 1/30$ rad/sec).

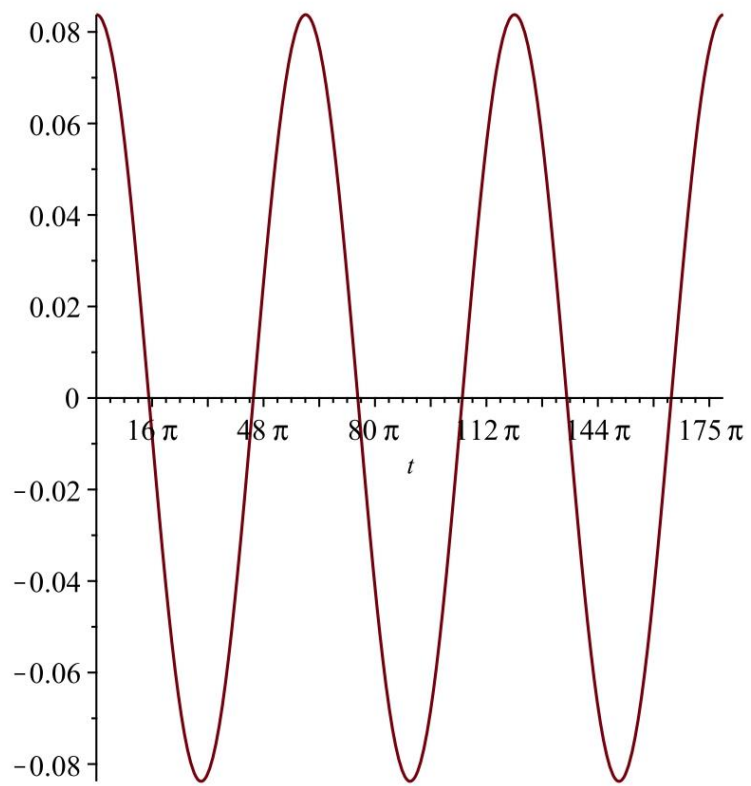
Ora dobbiamo valutare il caso peggiore: calcolare la massima ampiezza che può assumere la funzione data dalla somma di questi due contributi.

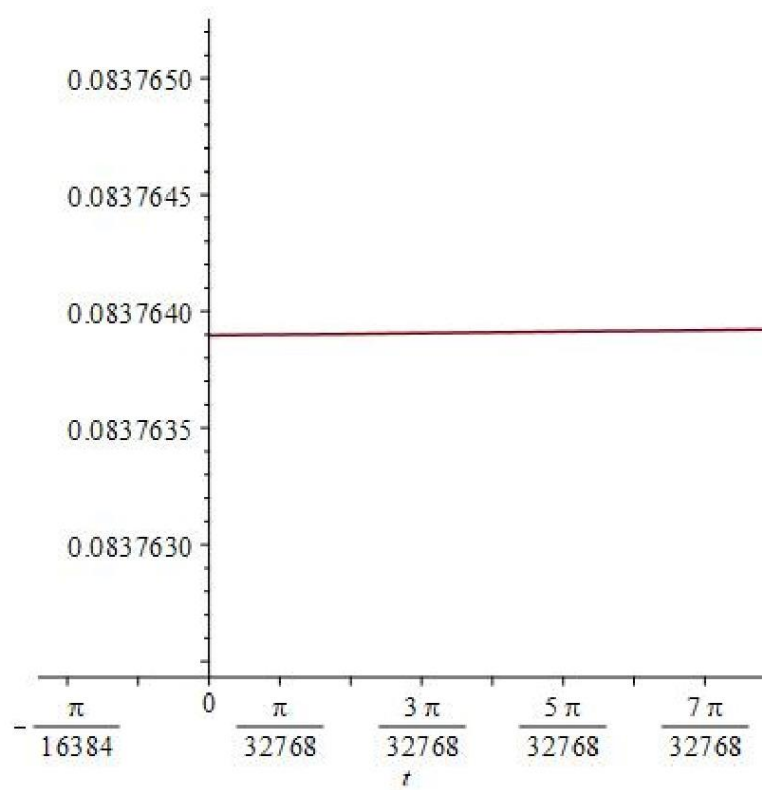
$$errore := t \rightarrow y_{n,\infty}(t) + y_{d,\infty}(t) :$$

$$errore(t)$$

$$9.870455866 \cdot 10^{-6} \sin(30 t + 181.6152181) + 0.08377241205 \sin\left(\frac{t}{30} + 1.562381795\right) \quad (17)$$

$$plot\left(errore(t), t = 0 .. 3 \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{\frac{1}{30}}\right)\right)$$





Osserviamo che l'ampiezza massima che può assumere l'errore sull'uscita regolata a regime è $A = 0.0837639$