

**FONDAMENTI DI AUTOMATICA**

**Esercizio a.**

*restart :*

Considero un sistema lineare e stazionario a tempo continuo descritto dalla seguente risposta.

$$y := t \rightarrow \left( \frac{15}{32} - 20 \cdot e^{-t} + \frac{5t}{16} - \frac{25 \cdot e^{-\frac{4}{5}t} \cdot (-25 + 6t)}{32} \right) :$$

$y(t)$

$$\frac{15}{32} - 20 e^{-t} + \frac{5t}{16} - \frac{25 e^{-\frac{4}{5}t} (-25 + 6t)}{32} \quad (1)$$

*alla rampa*

*alla rampa* (2)

$u := t \rightarrow t :$

$u(t)$   $t$  (3)

Data la risposta del sistema, scritta sù, dobbiamo determinare:

1. la funzione di trasferimento del sistema ed i suoi poli e zeri;
2. i modi di evoluzione libera del sistema;
3. la risposta all'impulso del sistema;
4. la risposta al gradino ed il suo grafico;
5. la risposta forzata al segnale  $u(t) = e^{-t} \cdot 1(t)$ ;
6. un possibile modello ARMA la cui funzione di trasferimento è quella ottenuta nel primo punto dell'esercizio;
7. tenendo conto del modello determinato al punto precedente valutare la risposta all'ingresso  $u(t) = 1(-t)$ ;

La risposta del sistema è data dalla somma di due contributi:  $y(t) = y_f(t) + y_l(t)$  --- risposta forzata e risposta libera.

Il primo contributo è dipendente dall'ingresso ed è indipendente dalle condizioni iniziali.

Il secondo contributo, invece, dipende solo dalle condizioni iniziali: essa determina l'evoluzione dinamica del sistema privo di ingresso con condizioni iniziali non nulle.

In questo caso assumo che le condizioni iniziali siano tutte nulle e che la risposta alla rampa  $Y_r(s)$  coincida con  $Y_f(s) = G(s) * (1/s^2)$  dove  $1/s^2$  è la trasformata di Laplace della rampa unitaria.

## 1) Determinare la funzione di trasferimento del sistema ed i suoi poli e zeri.

Per prima cosa carico il toolbox di Maple, che ci mette a disposizione degli strumenti per valutare le trasformate integrali, inclusa la trasformata di Laplace.

*with(inttrans) :*

Calcolo le trasformate di Laplace, dell'ingresso del sistema  $u$  ( $\Rightarrow U(s)$ ) e dell'uscita  $y$  ( $\Rightarrow Y(s)$ ).

$Y := s \rightarrow \text{laplace}(y(t), t, s) :$

$$Y(s)$$

$$\frac{5 (5 s + 1)}{s^2 (1 + s) (5 s + 4)^2} \quad (1.1)$$

$$U := s \rightarrow \text{laplace}(u(t), t, s) :$$

$$U(s)$$

$$\frac{1}{s^2} \quad (1.2)$$

La funzione di trasferimento di un sistema lineare e stazionario a tempo continuo è una funzione a variabile complessa che rappresenta il comportamento del sistema mettendo in relazione il suo ingresso con la sua uscita, inoltre se moltiplicata per la trasformata di Laplace dell'ingresso, restituisce la risposta forzata del sistema, ed è pari a

$$G := s \rightarrow \left( \frac{Y(s)}{U(s)} \right) :$$

$$G(s)$$

$$\frac{5 (5 s + 1)}{(1 + s) (5 s + 4)^2} \quad (1.3)$$

Osserviamo che il grado del polinomio al denominatore di  $G(s)$  è maggiore rispetto a quello del polinomio al numeratore, perciò ci troviamo davanti ad un sistema proprio, in cui l'uscita non dipende dall'ingresso nell'istante di tempo che stiamo considerando ma solo da quelli passati.

Possiamo allora determinare i **poli** della funzione di trasferimento, ponendo uguale a zero il denominatore della funzione di trasferimento, e gli **zeri** ponendo il numeratore della funzione di trasferimento uguale a zero.

$$\text{zeri} := \text{solve}(\text{numer}(G(s)) = 0, s)$$

$$\text{zeri} := -\frac{1}{5} \quad (1.4)$$

$$\text{poli} := \text{solve}(\text{denom}(G(s)) = 0, s)$$

$$\text{poli} := -1, -\frac{4}{5}, -\frac{4}{5} \quad (1.5)$$

Il sistema presenta 3 poli reali, di cui due coincidenti in  $-4/5$  dovuti al termine elevato al quadrato (quindi il sistema è del terzo ordine), e uno zero reale in  $-1/5$ .

Ricapitolando il sistema sarà **BIBO stabile** in quanto tutti i suoi poli hanno parte reale strettamente negativa, cioè si trovano nel semipiano sinistro.

## 2) Determinare i modi di evoluzione libera del sistema.

I modi di evoluzione libera del sistema rappresentano il contributo che le componenti interne del sistema danno alla risposta. Il loro numero è pari all'ordine della funzione di trasferimento, questo in conseguenza del fatto che il numero dei modi di evoluzione libera del sistema è pari al numero delle radici del polinomio caratteristico (ovvero del polinomio che si trova al denominatore della funzione di trasferimento). Nel nostro caso saranno 3.

In generale: i poli reali semplici generano modi esponenziali, i poli reali coincidenti generano modi esponenziali moltiplicati per un polinomio e, le radici complesse e coniugate, generano modi oscillatori.

Per determinarli applichiamo l'antitrasformata di Laplace alla funzione di trasferimento, ottenendo la risposta all'impulso.

$g := t \rightarrow \text{invlaplace}(G(s), s, t) :$   
 $g(t)$

$$-20 e^{-t} - e^{-\frac{4t}{5}} (-20 + 3t) \quad (2.1)$$

$g(t) := \text{expand}((2.1), \text{op}(\text{indets}((2.1), \text{specfunc}(\text{anything}, \text{exp})))) :$   
 $g(t)$

$$-3 e^{-\frac{4t}{5}} t - 20 e^{-t} + 20 e^{-\frac{4t}{5}} \quad (2.2)$$

Abbiamo ricavato i modi:

$\text{modo}_1 := t \rightarrow \frac{\text{op}(1, (2.2))}{\text{coeff}\left(\text{coeff}\left(\text{op}(1, (2.2)), e^{-\frac{4}{5}t}\right), t\right)} \cdot \text{Heaviside}(t) :$   
 $\text{modo}_1(t)$

$$e^{-\frac{4t}{5}} t \text{Heaviside}(t) \quad (2.3)$$

$\text{modo}_2 := t \rightarrow \frac{\text{op}(2, (2.2))}{\text{coeff}(\text{op}(2, (2.2)), e^{-t})} \cdot \text{Heaviside}(t) :$   
 $\text{modo}_2(t)$

$$e^{-t} \text{Heaviside}(t) \quad (2.4)$$

$\text{modo}_3 := t \rightarrow \frac{\text{op}(3, (2.2))}{\text{coeff}\left(\text{op}(3, (2.2)), e^{-\frac{4}{5}t}\right)} \cdot \text{Heaviside}(t) :$   
 $\text{modo}_3(t)$

$$e^{-\frac{4t}{5}} \text{Heaviside}(t) \quad (2.5)$$

Abbiamo quindi 3 modi di evoluzione libera polinomial-esponenziali.

### 3) Determinare la risposta all'impulso del sistema.

La risposta all'impulso del sistema è quella funzione che descrive il sistema, ottenuta mediante il processo di anti-trasformazione combinata all'ingresso  $U(s)=1$ .

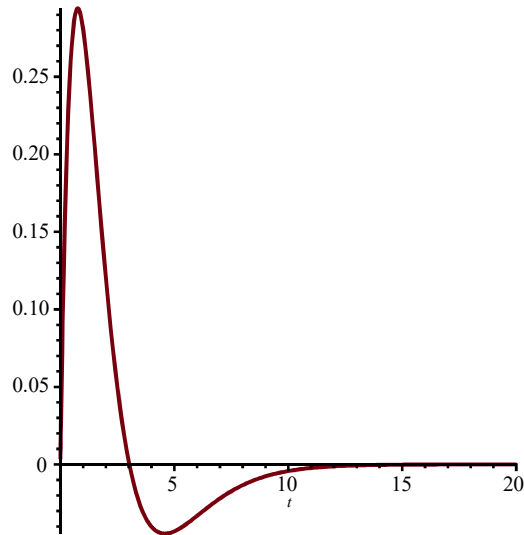
Possiamo ottenere l'anti-trasformata anche come combinazione lineare di fratti semplici, moltiplicati per dei coefficienti estrapolati dalla formula di Heaviside.

La trasformata di Laplace dell'impulso è pari a 1. Quindi dalla relazione  $Y(s)=G(s)*U(s)$ , si ricava che la risposta all'impulso equivale all'antitrasformata di Laplace della funzione di trasferimento (calcolata precedentemente al punto (2.1)).

$g\_2 := t \rightarrow \text{invlaplace}(\mathbf{(1.3)}, s, t) \cdot \text{Heaviside}(t) :$   
 $g\_2(t)$

$$\left( -20 e^{-t} - e^{-\frac{4t}{5}} (-20 + 3t) \right) \text{Heaviside}(t) \quad (3.1)$$

$\text{plot}(g\_2(t), t=0..20)$



#### 4) Determinare la risposta al gradino e il suo grafico.

Ora la funzione di ingresso presa in considerazione è il gradino unitario, noto anche come funzione di Heaviside :

$$1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

$u_{gradino} := t \rightarrow 1 \cdot \text{Heaviside}(t) :$   
 $u_{gradino}(t)$

$$\text{Heaviside}(t) \quad (4.1)$$

Portiamo il segnale nel dominio della trasformata di Laplace:

$U_{gradino} := s \rightarrow \text{laplace}(u_{gradino}(t), t, s) :$   
 $U_{gradino}(s)$

$$\frac{1}{s} \quad (4.2)$$

Quindi la sua trasformata è:

$$U(s) = \int_0^{+\infty} u(t) \cdot e^{-st} dt = \frac{1}{s}$$

Applichiamo la relazione  $Y(s) = G(s) \cdot U(s) = G(s) \cdot (1/s)$

$Y_{gradino} := s \rightarrow (1.3) \cdot (4.2) :$

$Y_{gradino}(s)$

$$\frac{5 (5 s + 1)}{(1 + s) (5 s + 4)^2 s} \quad (4.3)$$

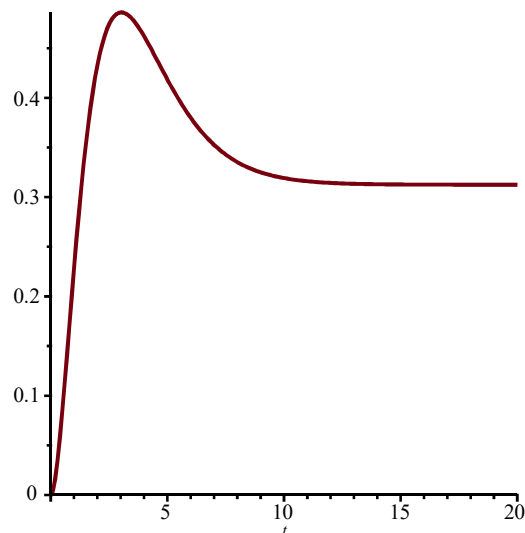
Antitrasformiamo e otteniamo la risposta al gradino del sistema:

$y_{-1} := t \rightarrow \text{invlaplace}((4.3), s, t) \cdot \text{Heaviside}(t) :$

$y_{-1}(t)$

$$\left( \frac{5}{16} + 20 e^{-t} + \frac{5 e^{-\frac{4t}{5}} (-65 + 12 t)}{16} \right) \text{Heaviside}(t) \quad (4.4)$$

$\text{plot}(y_{-1}(t), t = 0..20)$



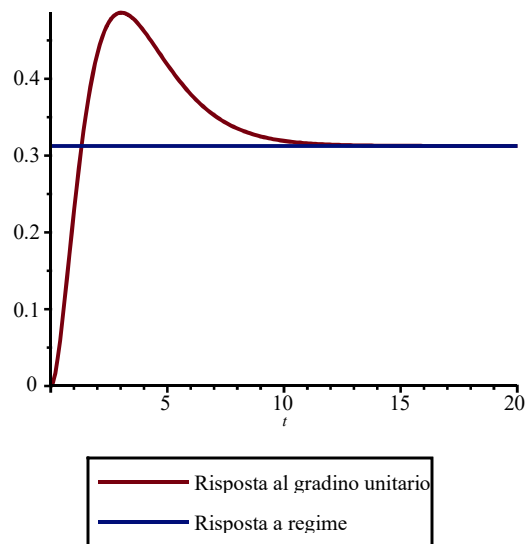
Il sistema è BIBO stabile, quindi è sensato andare a valutare la risposta a regime:

$y_{ss, gradino} := \lim_{t \rightarrow \infty} y_{-1}(t)$

$$y_{ss, gradino} := \frac{5}{16} \quad (4.5)$$

Il grafico della risposta al gradino messa a confronto con il suo valore a regime è:

$\text{plot}([(4.4), (4.5)], t = 0..20, \text{legend} = ["Risposta al gradino unitario", "Risposta a regime"])$



Si può notare come la risposta al gradino, a transitorio esaurito, tenda al proprio valore di regime pari a  $5/16$ .

## 5) Determinare la risposta forzata al segnale $u(t) = e^{-t} \mathbf{1}(t)$ .

Dobbiamo determinare la risposta forzata al segnale  $u(t) = e^{-t} \cdot \mathbf{1}(t)$ .

Warning, if e is meant to be the exponential e, use command/symbol completion or palettes to enter this special symbol, or use the exp function

$$t = e^{-t} t \quad (5.1)$$

Definisco il segnale in ingresso:

$$u_{\text{exp}} := t \rightarrow e^{-t} \cdot \text{Heaviside}(t) :$$

$$u_{\text{exp}}(t)$$

$$e^{-t} \text{Heaviside}(t) \quad (5.2)$$

La sua Trasformata di Laplace è:

$$U_{\text{exp}} := s \rightarrow \text{laplace}(u_{\text{exp}}(t), t, s) :$$

$$U_{\text{exp}}(s)$$

$$\frac{1}{1+s} \quad (5.3)$$

La risposta forzata al segnale esponenziale è:

$$Y_{\text{exp}} := s \rightarrow (1.3) \cdot U_{\text{exp}}(s) :$$

$$Y_{\text{exp}}(s)$$

$$\frac{5 (5 s + 1)}{(1 + s)^2 (5 s + 4)^2} \quad (5.4)$$

Converto in fratti semplici l'espressione appena ottenuta:

`convert((5.4), parfrac)`

$$\frac{875}{5s+4} - \frac{175}{1+s} - \frac{375}{(5s+4)^2} - \frac{20}{(1+s)^2} \quad (5.5)$$

L'ingresso è esponenziale quindi la risposta forzata è data dalla combinazione lineare dei modi di evoluzione libera, che determinano la componente transitoria, e dal contributo associato alla L-trasformata dell'ingresso

$y_{\text{exp}} := t \rightarrow \text{invlaplace}((5.4), s, t) :$

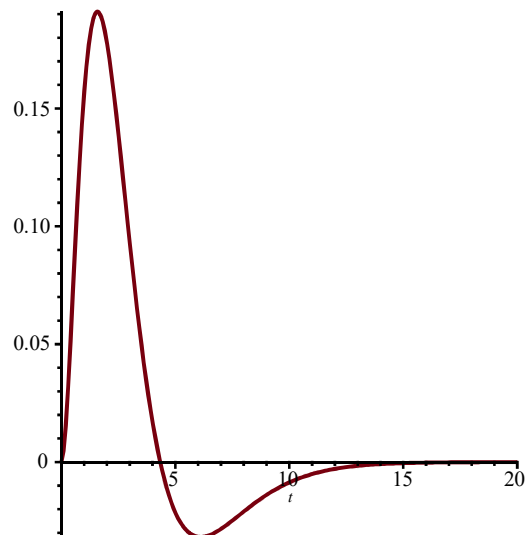
$y_{\text{exp}}(t)$

$$-5 e^{-t} (4t + 35) - 5 e^{-\frac{4t}{5}} (-35 + 3t) \quad (5.6)$$

$y_{ss, \text{exp}} := \lim_{t \rightarrow \infty} (y_{\text{exp}}(t))$

$$y_{ss, \text{exp}} := 0 \quad (5.7)$$

$\text{plot}(y_{\text{exp}}(t), t=0..20)$



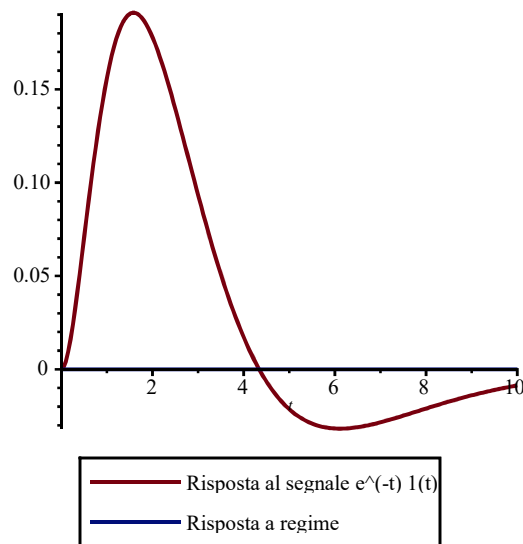
Per verificare che l'espressione della risposta forzata sia corretta, possiamo inoltre calcolare il prodotto di convoluzione della risposta all'impulso e l'ingresso attuale.

Dalla teoria sappiamo che, nel dominio della L-trasformata, il prodotto di convoluzione tra due segnali di classe L è uguale al prodotto algebrico delle rispettive trasformate di Laplace.

Inoltre la risposta all'impulso ha il ruolo di filtro rispetto all'ingresso (che è la funzione filtranda), mentre l'ingresso è la funzione filtrata.

$\text{plot}([y_{\text{exp}}(t), y_{ss, \text{exp}}], t=0..10, \text{legend} = ["Risposta al segnale e^{-(t)} 1(t)", "Risposta a regime"])$





## 6) Determinare un possibile modello ARMA la cui funzione di trasferimento è quella ottenuta nel primo punto dell'esercizio.

Un modello **ARMA** (acronimo di **A**utoregressive **M**oving **A**verage o rappresentazione implicita ingresso-uscita) è la rappresentazione di un sistema lineare stazionario mediante un'equazione differenziale a coefficienti costanti di ordine  $n$ :

$$y^n(t) + a_1 y^{n-1}(t) + a_2 y^{n-2}(t) + \dots + a_n y(t) = b_0 u^m(t) + b_1 u^{m-1}(t) + \dots + b_m u(t)$$

considerando le  $n-1$  condizioni iniziali

$$\left\{ \begin{array}{l} y^{n-1}(0) = C A^{n-1} x_0 \\ y^{n-2}(0) = C A^{n-2} x_0 \\ \dots \\ \dots \\ y'(0) = C A x_0 \\ y(0) = C x_0 \end{array} \right.$$

Richiamiamo  $G(s)$ :

(1.1)

$$\frac{5(5s+1)}{s^2(1+s)(5s+4)^2} \quad (6.1)$$

`polinomio_caratt := denom((1.1))`

$$\text{polinomio\_caratt} := s^2(1+s)(5s+4)^2 \quad (6.2)$$

`expand(polinomio_caratt)`

$$25s^5 + 65s^4 + 56s^3 + 16s^2 \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} \text{primo\_membro} &:= \text{invlaplace}((6.3), s, t) \\ \text{primo\_membro} &:= 25 \text{ Dirac}(5, t) + 65 \text{ Dirac}(4, t) + 56 \text{ Dirac}(3, t) + 16 \text{ Dirac}(2, t) \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} \text{primo\_membro} &:= \text{subs}(\{\text{Dirac}(5, t) = y^{(5)}(t), \text{Dirac}(4, t) = y^{(4)}(t), \text{Dirac}(3, t) = y^{(3)}(t), \text{Dirac}(2, t) = y^{(2)}(t)\}, \text{primo\_membro}) \\ \text{primo\_membro} &:= 25 D^{(5)}(y)(t) + 65 D^{(4)}(y)(t) + 56 D^{(3)}(y)(t) + 16 D^{(2)}(y)(t) \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} n_G &:= s \rightarrow \text{expand}(\text{numer}((1.1))) : \\ n_G(s) &= 25s + 5 \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} \text{secondo\_membro} &:= \text{invlaplace}(n_G(s), s, t) \\ \text{secondo\_membro} &:= 25 \text{ Dirac}(1, t) + 5 \text{ Dirac}(t) \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} \text{secondo\_membro} &:= \text{subs}(\{\text{Dirac}(t) = u(t), \text{Dirac}(1, t) = u^{(1)}(t)\}, \text{secondo\_membro}) \\ \text{secondo\_membro} &:= 25 D(u)(t) + 5 u(t) \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} \text{modello\_arma} &:= \text{primo\_membro} = \text{secondo\_membro} \\ \text{modello\_arma} &:= 25 D^{(5)}(y)(t) + 65 D^{(4)}(y)(t) + 56 D^{(3)}(y)(t) + 16 D^{(2)}(y)(t) \\ &= 25 D(u)(t) + 5 u(t) \end{aligned} \quad (6.9)$$

Questo è il modello ARMA del sistema preso in considerazione.

## 7) Tenendo conto del modello determinato al punto precedente valutare la risposta all'ingresso

$$u(t) = 1(-t)$$

Dobbiamo ora valutare la risposta all'ingresso  $u(t) = 1(-t)$ , il quale vale 1 per  $t < 0$  e 0 per  $t > 0$ .

`plot(Heaviside(-t), t=-10..10, caption=typeset("Grafico di ", Heaviside(-t), "."))`

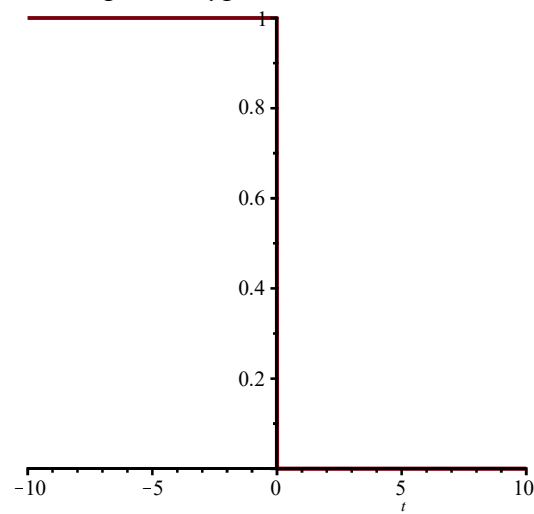


Grafico di Heaviside(-t).

Determiniamo la risposta libera e quella forzata del sistema.

*modello\_arma* := (6.9)

$$\begin{aligned} \text{modello\_arma} &:= 25 D^{(5)}(y)(t) + 65 D^{(4)}(y)(t) + 56 D^{(3)}(y)(t) + 16 D^{(2)}(y)(t) \\ &= 25 D(u)(t) + 5 u(t) \end{aligned} \quad (7.1)$$

*eq\_diff\_s* := *laplace*(*modello\_arma*, *t*, *s*)

$$\begin{aligned} \text{eq\_diff\_s} &:= 25 s^5 \mathcal{L}(y(t), t, s) - 25 D^{(4)}(y)(0) - 25 s D^{(3)}(y)(0) - 25 s^2 D^{(2)}(y)(0) \\ &\quad - 25 s^3 D(y)(0) - 25 s^4 y(0) + 65 s^4 \mathcal{L}(y(t), t, s) - 65 D^{(3)}(y)(0) - 65 s D^{(2)}(y)(0) \\ &\quad - 65 s^2 D(y)(0) - 65 s^3 y(0) + 56 s^3 \mathcal{L}(y(t), t, s) - 56 D^{(2)}(y)(0) - 56 s D(y)(0) \\ &\quad - 56 s^2 y(0) + 16 s^2 \mathcal{L}(y(t), t, s) - 16 D(y)(0) - 16 s y(0) = 25 s \mathcal{L}(u(t), t, s) - 25 u(0) \\ &\quad + 5 \mathcal{L}(u(t), t, s) \end{aligned} \quad (7.2)$$

*eq\_diff\_s* := *subs*( {*laplace*(*y*(*t*), *t*, *s*) = *Y*(*s*), *laplace*(*u*(*t*), *t*, *s*) = *U*(*s*) }, *eq\_diff\_s*)

$$\begin{aligned} \text{eq\_diff\_s} &:= 25 s^5 Y(s) - 25 D^{(4)}(y)(0) - 25 s D^{(3)}(y)(0) - 25 s^2 D^{(2)}(y)(0) \\ &\quad - 25 s^3 D(y)(0) - 25 s^4 y(0) + 65 s^4 Y(s) - 65 D^{(3)}(y)(0) - 65 s D^{(2)}(y)(0) \\ &\quad - 65 s^2 D(y)(0) - 65 s^3 y(0) + 56 s^3 Y(s) - 56 D^{(2)}(y)(0) - 56 s D(y)(0) - 56 s^2 y(0) \\ &\quad + 16 s^2 Y(s) - 16 D(y)(0) - 16 s y(0) = 25 s U(s) - 25 u(0) + 5 U(s) \end{aligned} \quad (7.3)$$

*eq\_diff\_s* := *eval*(*eq\_diff\_s*, *u*(0)=0)

$$\begin{aligned} \text{eq\_diff\_s} &:= 25 s^5 Y(s) - 25 D^{(4)}(y)(0) - 25 s D^{(3)}(y)(0) - 25 s^2 D^{(2)}(y)(0) \\ &\quad - 25 s^3 D(y)(0) - 25 s^4 y(0) + 65 s^4 Y(s) - 65 D^{(3)}(y)(0) - 65 s D^{(2)}(y)(0) \\ &\quad - 65 s^2 D(y)(0) - 65 s^3 y(0) + 56 s^3 Y(s) - 56 D^{(2)}(y)(0) - 56 s D(y)(0) - 56 s^2 y(0) \\ &\quad + 16 s^2 Y(s) - 16 D(y)(0) - 16 s y(0) = 25 s U(s) + 5 U(s) \end{aligned} \quad (7.4)$$

$$\text{risp\_forzata} := \text{solve}(\text{eval}(\text{eq\_diff\_s}, \{y(0)=0, y'(0)=0, y''(0)=0, y'''(0)=0, y^{(4)}(0)=0\}), Y(s))$$

$$\text{risp\_forzata} := \frac{5 U(s) (5 s + 1)}{s^2 (25 s^3 + 65 s^2 + 56 s + 16)} \quad (7.5)$$

*risp\_libera* := *solve*(*eval*(*eq\_diff\_s*, {*U*(*s*)=0}), *Y*(*s*))

$$\begin{aligned} \text{risp\_libera} &:= \frac{1}{s^2 (25 s^3 + 65 s^2 + 56 s + 16)} (25 s^4 y(0) + 25 s^3 D(y)(0) + 65 s^3 y(0) \\ &\quad + 25 s^2 D^{(2)}(y)(0) + 65 s^2 D(y)(0) + 56 s^2 y(0) + 25 s D^{(3)}(y)(0) + 65 s D^{(2)}(y)(0) \\ &\quad + 56 s D(y)(0) + 16 s y(0) + 65 D^{(3)}(y)(0) + 56 D^{(2)}(y)(0) + 16 D(y)(0) \\ &\quad + 25 D^{(4)}(y)(0)) \end{aligned} \quad (7.6)$$

Il sistema è BIBO stabile. Posso determinare la funzione di trasferimento a partire dalla risposta forzata, in quando la funzione di trasferimento di un sistema è quella uscita forzata nel dominio della trasformata di Laplace quando l'ingresso presenta trasformata di Laplace unitaria.

*eval*(*risp\_forzata*, *U*(*s*) = 1)

$$\frac{5 (5 s + 1)}{s^2 (25 s^3 + 65 s^2 + 56 s + 16)} \quad (7.7)$$

Arrivati a questo punto, dobbiamo analizzare due casi:

1. **CASO  $t < 0$** : ipotizzo che il segnale  $1(-t)$  sia stato applicato nel "passato remoto" rispetto a  $t$  e quindi che  $y(t)$ , per  $t < 0$ , sia la risposta a transitorio esaurito. Sappiamo che il sistema è BIBO stabile quindi le condizioni iniziali generano una risposta libera che è combinazione lineare dei modi, i quali tendono a zero per  $t \rightarrow \infty$ . Il segnale  $1(-t)$  è costante quindi la risposta a transitorio esaurito è il guadagno statico del sistema per l'ampiezza del segnale (unitaria). Calcolo la risposta al gradino:

$$t \mapsto \infty \quad (7.8)$$

$$y_{step} := t \rightarrow \text{invlaplace} \left( \frac{(1.3) \cdot 1}{s}, s, t \right) :$$

La risposta all'ingresso  $1(-t)$  (per  $t < 0$ ) sarà la risposta al gradino nell'ipotesi che essa sia applicata in corrispondenza di un istante iniziale  $t_0$  finito posizionato nel passato remoto rispetto a  $t < 0$ :  $t_0$  diventa "passato remoto" rispetto a  $t$  quando  $t_0 \rightarrow -\infty$ .

$$y_{t\_negativo} := \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} y_{step}(t - t_0)$$

$$y_{t\_negativo} := \frac{5}{16} \quad (7.9)$$

e quindi l'uscita per  $t < 0$  vale  $5/16$ , che è coerente con quanto calcolato nella (4.5).

2. **CASO  $t > 0$** : in questo caso  $1(-t) = 0$  per  $t > 0$  (quindi ingresso nullo) e per  $t = 0$  l'ingresso si estingue. Quindi per  $t > 0$  non è presente la risposta forzata. Devo considerare solo la componente in evoluzione libera perchè per  $t \rightarrow 0^-$  l'uscita vale  $5/16$  e per  $t \rightarrow 0^+$  l'uscita varrà sempre  $5/16$  (continuità in zero).

$$n := \text{degree}(\text{denom}((7.7)), s)$$

$$n := 5 \quad (7.10)$$

L'ordine del sistema è 5.

Impongo che la condizione iniziale della soluzione per  $t > 0$  sia pari alla soluzione per  $t < 0$  in corrispondenza dello zero.

$$y(0) := y_{t\_negativo} :$$

$$y(0) = \frac{5}{16} \quad (7.11)$$

Azzerare le condizioni iniziali fino all'ordine  $n-1$ :

$$\text{seq}(\text{assign}('D^{(i)}(y)(0)', 0), i = 1 \dots 4) :$$

$$y_{t\_positivo} := \text{invlaplace}(\text{resp\_libera}, s, t)$$

$$y\_t\_positivo := \frac{5}{16} \quad (7.12)$$

$$y\_t\_positivo := \text{subs}(\{y(0) = y\_t\_negativo\}, y\_t\_positivo)$$

$$y\_t\_positivo := \frac{5}{16} \quad (7.13)$$

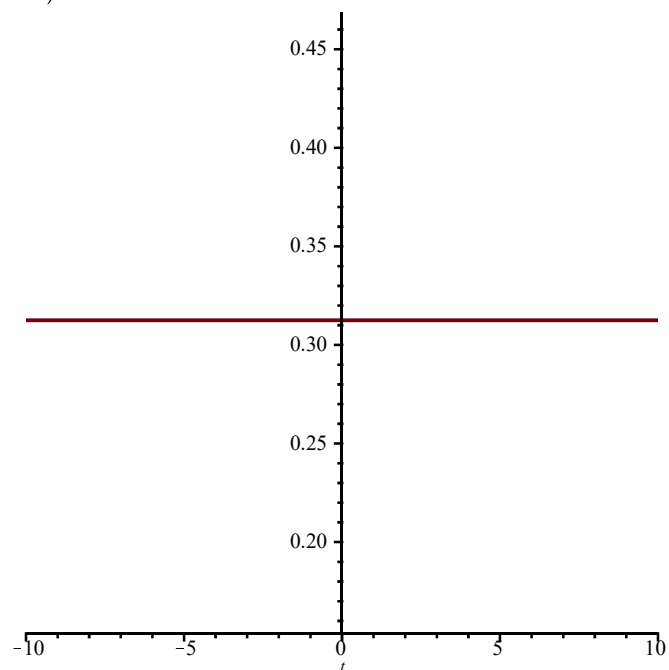
Quindi definisco la soluzione col costrutto piecewise:

$$y\_tot := \begin{cases} y\_t\_negativo & t < 0 \\ y\_t\_positivo & t \geq 0 \end{cases}$$

$$y\_tot := \begin{cases} \frac{5}{16} & t < 0 \\ \frac{5}{16} & 0 \leq t \end{cases} \quad (7.14)$$

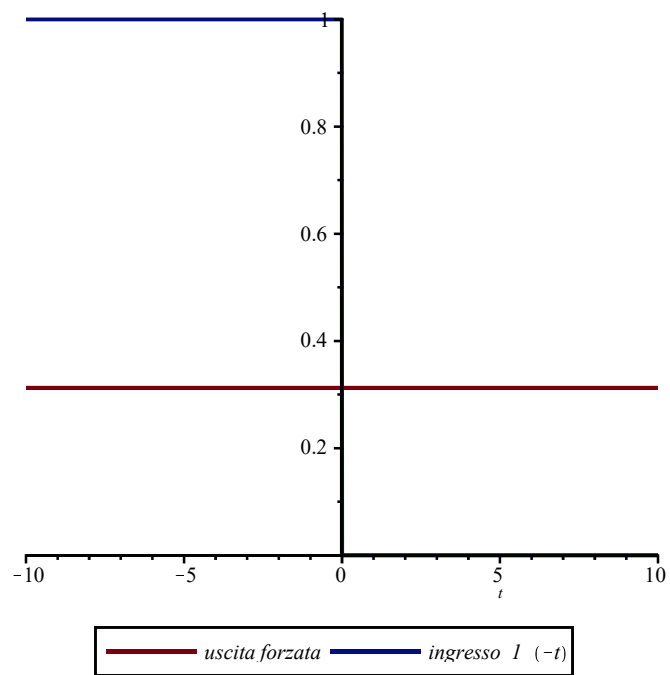
Grafico:

`plot(y_tot(t), t=-10..10)`



Sovrappongo i grafici ingresso/uscita:

`plot([y_tot(t), Heaviside(-t)], t=-10..10, legend=['uscita forzata', 'ingresso_l_(-t)'])`



**Esercizio b.**

*restart :*

*with(inttrans) :*

*with(PolynomialTools) :*

*with(DynamicSystems) :*

*with(plots) :*

$$G := s \rightarrow \frac{100 \cdot (10s - 1)}{16s \cdot \left(s^2 - \frac{1}{2}s + \frac{1}{16}\right)} :$$

*simplify(G(s))*

$$\frac{1000s - 100}{16s \left(s - \frac{1}{4}\right)^2} \quad (1)$$

***Costruire, utilizzando Adobe Illustrator o programma equivalente ed argomentando tutti i passaggi, il Diagramma di Bode per la seguente funzione di trasferimento (Allegare file .ai o .eps).***

Il Diagramma di Bode è una rappresentazione grafica separata del modulo della risposta in frequenza  $|G(j\omega)|$  e della sua fase  $\angle G(j\omega)$  al variare entrambi di  $\omega \in (-\infty, +\infty)$ .

Mediante la rappresentazione tramite il Diagramma di Bode si costruiscono quindi due diagrammi cartesiani in cui la variabile indipendente è la pulsazione  $\omega$  e le variabili dipendenti sono, rispettivamente, il modulo e la fase di  $G(j\omega)$ .

Un Diagramma di Bode è quindi una coppia di grafici  $(\omega, |G(j\omega)|)$  (detto diagramma dei moduli e  $(\omega, \angle G(j\omega))$ , detto diagramma delle fasi.

Troviamo i **poli** e gli **zeri** della funzione di trasferimento  $G(s)$ : i primi si trovano ponendo il denominatore della funzione di trasferimento pari a zero, mentre i secondi ponendo a zero il numeratore sempre di  $G(s)$ :

$$\text{zeri} := \text{solve}(\text{numer}((1)) = 0, s)$$

$$\text{zeri} := \frac{1}{10} \quad (2)$$

$$\text{poli} := \text{solve}(\text{denom}((1)) = 0, s)$$

$$\text{poli} := 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \quad (3)$$

Abbiamo:

- uno **zero** a fase non minima (cioè  $\text{Re}(z) > 0$ ),  $1/10$ ; in corrispondenza di pulsazioni maggiori della

- pulsazione di taglio di tale zero avremo sui moduli un aumento di pendenza +20db/dec, mentre sulle fasi avremo un contributo in ritardo di +45°;
- un **polo** nell'origine che sul diagramma dei moduli è una retta di pendenza di -20db/dec, mentre sulle fasi si avrà un contributo di -90°;
  - due **poli** reali e coincidenti, instabili, che danno un contributo di -20db/dec ognuno sul diagramma dei moduli, mentre sulle fasi un contributo di +45°.

Indico con **m** il numero di zeri, **v** il numero di poli nell'origine ed **r** il numero di poli reali:

$$m := 1 :$$

$$v := 1 :$$

$$r := 2 :$$

La nostra funzione di trasferimento  $G(s)$  **non** è BIBO stabile, a causa della presenza del polo nell'origine.

Trovo le **pulsazioni di taglio** di poli e zeri:

$$T_1 := \frac{1}{zeri} \qquad T_I := 10 \qquad (4)$$

$$\tau_1 := \frac{1}{\frac{1}{4}} \qquad \tau_I := 4 \qquad (5)$$

$$\tau_2 := \tau_1 \qquad \tau_2 := 4 \qquad (6)$$

$$\Omega := \frac{1}{|T_1|} \qquad \Omega := \frac{1}{10} \qquad (7)$$

$$\omega_1 := \frac{1}{|\tau_1|} \qquad \omega_I := \frac{1}{4} \qquad (8)$$

$$\omega_2 := \frac{1}{|\tau_2|} \qquad \omega_2 := \frac{1}{4} \qquad (9)$$

Calcolo il **guadagno di Bode**:

$$k_b := \lim_{s \rightarrow 0} (s \cdot \mathbf{1})$$



$$k_b := -100 \quad (10)$$

e lo trasformo in decibel

$$k_{b-db} := 20 \cdot \log_{10}(|(\mathbf{10})|)$$

$$k_{b-db} := 40 \quad (11)$$

Ricaviamo smorzamento e pulsazione naturale resolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} \omega_n^2 = \frac{1}{16} \\ 2 \cdot \delta \cdot \omega_n = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \text{solve}\left(\left\{\omega_n^2 = \frac{1}{16}, 2 \cdot \delta \cdot \omega_n = -\frac{1}{2}\right\}, [\delta, \omega_n]\right) \\ & \left[\left[\delta = -1, \omega_n = \frac{1}{4}\right], \left[\delta = 1, \omega_n = -\frac{1}{4}\right]\right] \end{aligned} \quad (12)$$

che saranno:

$$\omega_n := \frac{1}{4} :$$

$$\delta := -1 :$$

Notiamo che lo smorzamento  $\delta \notin \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ , per cui non avremo un fenomeno di risonanza.

Quindi sul diagramma dei moduli avrò uno slittamento verso l'alto pari a +40db; mentre sul diagramma delle fasi avremo uno slittamento di  $\pm 180^\circ$  dovuto al fatto che  $k_b < 0$ .

Quindi la fase del guadagno è pari a  $\pm 180^\circ$ .

Riscriviamo la funzione di trasferimento nella forma di Bode:

$$G(s) = K_b \cdot \frac{(T_1 s + 1) \cdot (T_2 s + 1) \cdot \dots \cdot (T_m s + 1)}{s^r \cdot (\tau_1 s + 1) \cdot (\tau_2 s + 1) \cdot \dots \cdot (\tau_n s + 1)}$$

$$\text{dove } T_i = -\frac{1}{z_i}, \tau_i = -\frac{1}{p_i}$$

La **forma di Bode** costruita è la seguente:

$$G(s) := \frac{k_b \cdot \left(1 - \frac{s}{\Omega}\right)}{\left(1 - \frac{s}{\omega_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{s}{\omega_2}\right) \cdot s}$$

$$G(s) := - \frac{100 (1 - 10 s)}{(1 - 4 s) (1 - 4 s) s} \quad (13)$$

Determino  $G(j\omega)$ :

$$G(j\omega) = \frac{1000 j\omega - 100}{16 j\omega \left( j\omega^2 - \frac{1}{2} j\omega + \frac{1}{16} \right)} \quad (14)$$

A questo punto posso calcolare la **bassa frequenza** sui moduli e sulle fasi:

## ▼ Moduli

La zona di bassa frequenza dei moduli sarà data da tutte quelle pulsazioni

$$\omega < \min\{\Omega, \omega_1, \omega_2\} = \frac{1}{10} = 0,1$$

Quindi  $\omega < 0,1$

Mentre la zona di alta frequenza è data da tutte quelle pulsazioni

$$\omega > \max\{\Omega, \omega_1, \omega_2\} = \frac{1}{4} = 0,25$$

Quindi  $\omega > 0,25$

La pendenza del diagramma in bassa frequenza sarà  $-20 \cdot v = -20 \text{ dB/dec}$  mentre in alta frequenza il diagramma avrà pendenza  $-20 \cdot v + 20 \cdot m - 20 \cdot r = -40 \text{ dB/dec}$ .

In corrispondenza di  $0,1 \text{ rad/sec}$  il modulo viene anticipato di  $20 \text{ dB/dec}$ , da parte dello zero a fase non minima, mentre in corrispondenza di  $0,25 \text{ rad/sec}$  viene attenuato di  $-40 \text{ dB/dec}$  dai due poli instabili.

## ▼ Fasi

La zona di bassa frequenza delle fasi sarà data da tutte quelle pulsazioni

$$\omega < \frac{1}{10} \cdot \min\{\Omega, \omega_1, \omega_2\} = 0,01$$

Quindi  $\omega < 0,01$

Mentre la zona di alta frequenza è data da tutte quelle pulsazioni

$$\omega > 10 \cdot \max\{\Omega, \omega_1, \omega_2\} = 2, 50$$

Quindi  $\omega > 2,50$

Il valore che la fase assumerà inizialmente, in BF, è definito come  $\rightarrow \angle k_b - v \cdot 90^\circ$  (fase del guadagno -  $v \cdot 90^\circ$ ).

La fase finale, in AF, invece, la possiamo ricavare tramite la formula:

$$\angle k_b - v \cdot 90^\circ + m^- \cdot 90^\circ - r^- \cdot 90^\circ - m^+ \cdot 90^\circ + r^+ \cdot 90^\circ = 90^\circ - 90^\circ + 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$$

dove  $m^+$  sono gli zeri a fase non minima,  $m^-$  gli zeri a fase minima,  $r^+$  i poli instabili e  $r^-$  i poli stabili.

In corrispondenza di 0,01 rad/sec la pendenza sarà di  $-45^\circ$  (contributo dello zero a fase non minima), per poi passare a  $+90^\circ$  in corrispondenza di 0,25 rad/sec (contributo dei due poli reali instabili).

In corrispondenza di 1 rad/sec, invece, la fase viene anticipata di  $45^\circ$  e in corrispondenza di 25 rad/sec si ha un contributo di  $-90^\circ$  (contributo dei due poli reali instabili).

A questo punto possiamo disegnare su Adobe Illustrator le pulsazioni di taglio dei poli e dello zero, individuare sulle fasi la zona di media frequenza (**MF**) nell'intervallo  $[\Omega/10, \Omega \cdot 10]$ .

In corrispondenza dei poli (diversi dall'origine) e dello zero posiziono i contributi dati sia sui moduli che sulle fasi.

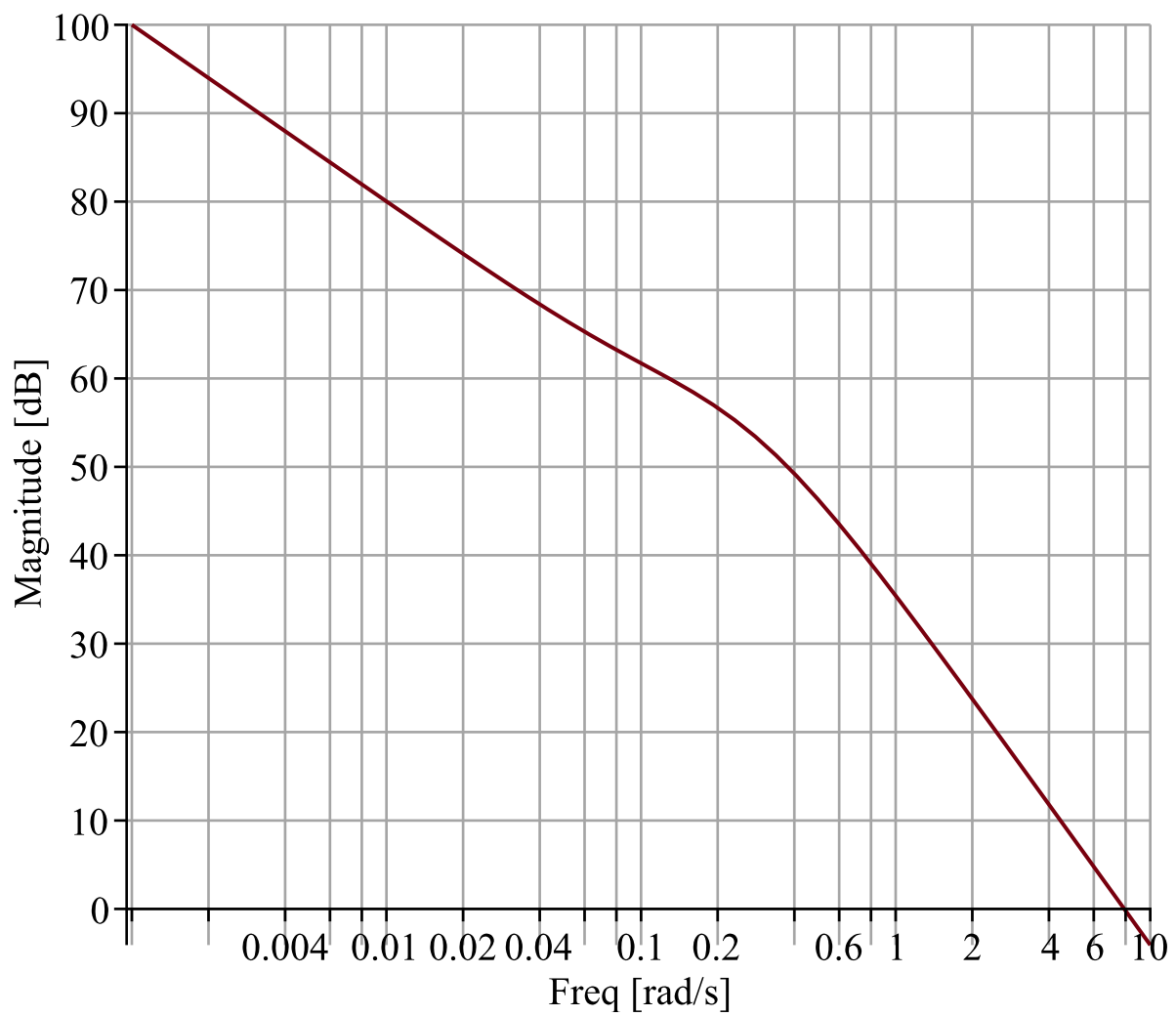
Calcolo la pendenza iniziale del diagramma dei moduli come  $\gg 20(m-r) - 20v$ .

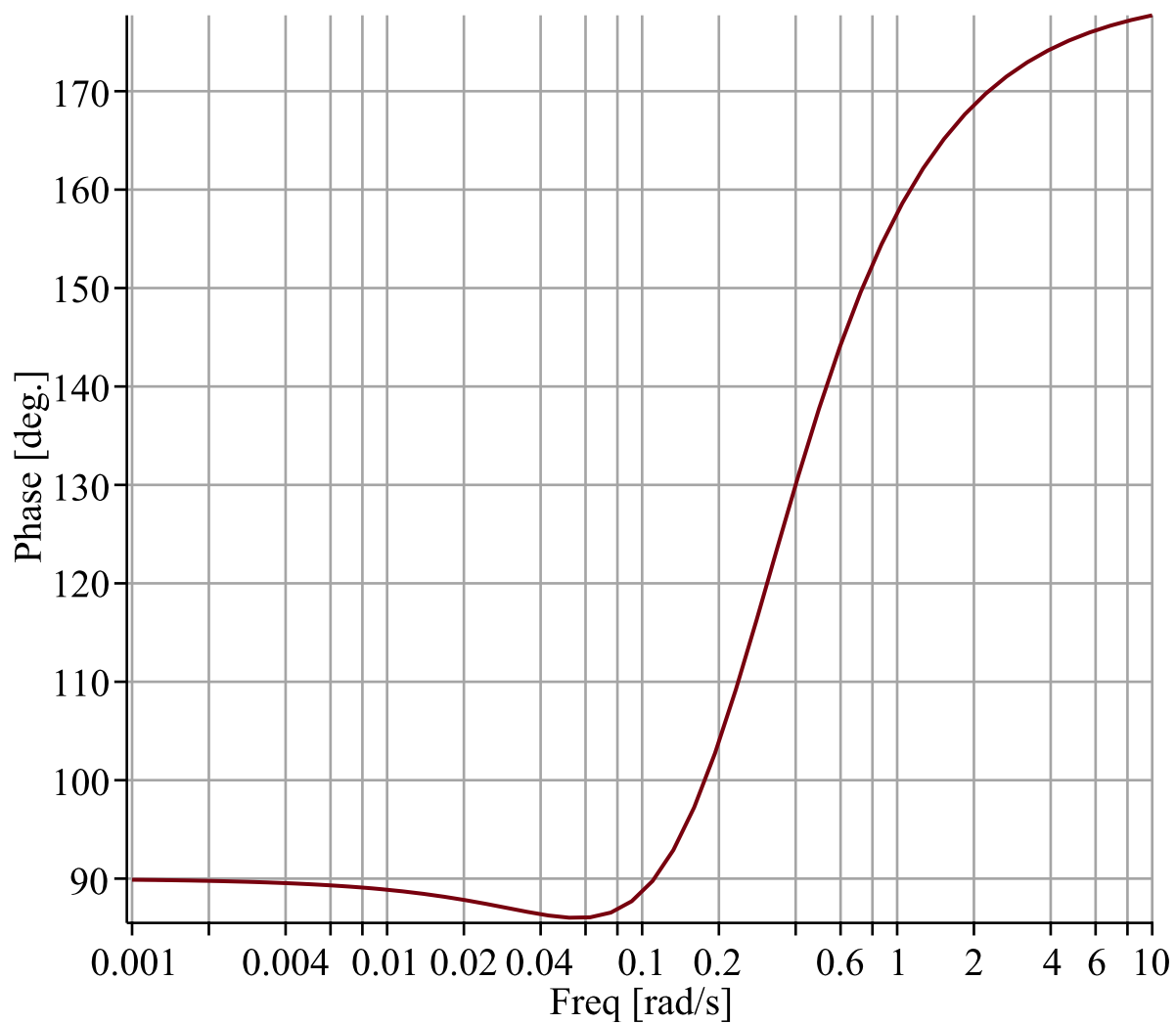
Nel nostro caso il guadagno è negativo, quindi la sua fase è  $\pm 180^\circ$ : scelgo  $+180^\circ$ .

Fase iniziale =  $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ .

COME VERIFICA UTILIZZIAMO MAPLE:

`BodePlot(TransferFunction(G(s)))`





c. Si consideri il seguente schema a blocchi in retroazione algebrica ed unitaria

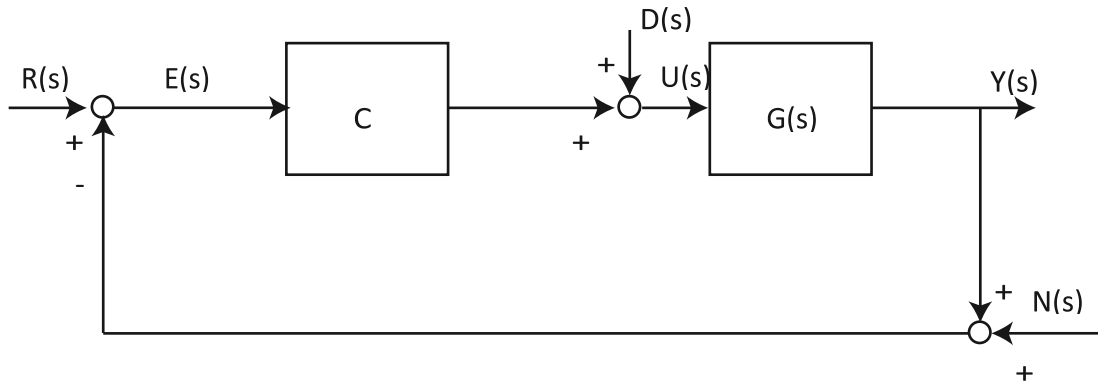


Figure 1: Schema a Blocchi in Retroazione Algebrica ed Unitaria

La funzione di trasferimento dell'impianto è

$$G(s) = \frac{2}{(1 + 3s)}$$

Determinare:

1. uno schema di controllo on-off scegliendo il livello del riferimento da asservire e discutendo l'andamento del segnale di controllo al variare della fascia di incertezza intorno alla quale far variare l'uscita asservita;
2. Si supponga che il regolatore abbia la seguente struttura lineare;

$$C(s) = \frac{K}{s(s+1)}$$

Determinare, servendosi degli strumenti di CAD spiegati durante il corso (Maple, Matlab e Simulink),

- (a) il valore limite di K in corrispondenza del quale la stabilità in retroazione non è più garantita;
- (b) scelto un valore di K appartenente alla regione di instabilità rappresentare il diagramma dei moduli e delle fasi della funzione di sensitività e sensitività complementare;
- (c) sempre considerando il valore di K scelto in precedenza valutare, servendosi delle opportune risposte in frequenza, l'andamento dell'errore di inseguimento al riferimento  $r(t) = \sin\left(\frac{t}{3}\right) 1(t)$ . Quanto vale il più piccolo errore di inseguimento ottenibile dalla struttura di controllo così assegnata oltre il quale il sistema non è più stabile a ciclo chiuso?;
- (d) si consideri sempre il valore di K scelto nel secondo punto. Nell'ipotesi che il disturbo sia il seguente segnale

$$d(t) = \sin\left(\frac{t}{30}\right) 1(t)$$

e che il rumore di misura abbia la seguente espressione

$$n(t) = \sin(30t) 1(t)$$

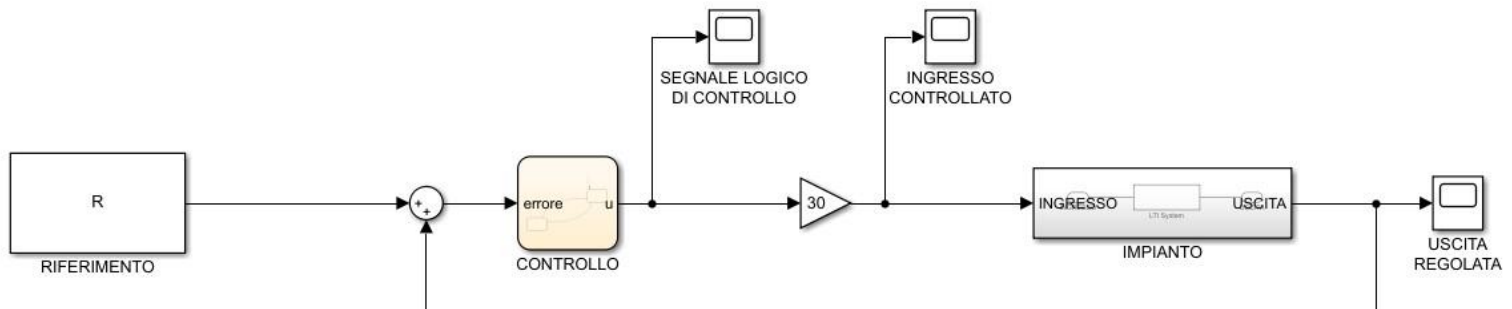
quanto vale in configurazione *caso peggiore* l'ampiezza dell'errore sull'uscita regolata a regime?

Argomentare sfruttando le risposte in frequenza dello schema retroazionato e le eventuali (se applicabili) approssimazioni in bassa e alta frequenza della funzione di anello.

## 1.

Lo schema di controllo ON-OFF realizzato in Simulink è il seguente:

Ho utilizzato:



- dei blocchi **Scope**, per monitorare, l'andamento dell'errore di inseguimento, dell'uscita regolata e del segnale di controllo;
- un blocco **Sum**;
- un blocco **Gain** (guadagno), che tramuta il segnale di controllo logico che viene fuori dall'automa in un segnale fisico;
- un blocco **Chart**, che implementa l'algoritmo di controllo tramite un automa a due stati che va in switching tra ON ( $u=1$ ) e OFF ( $u=0$ );
- un blocco **LTI System**, per la funzione di trasferimento dell'impianto caricata dal Workspace di Matlab;
- **Constant**, per il valore del riferimento che rappresenta l'obiettivo.

Proiettiamoci verso lo sviluppo della soluzione. Notiamo come la funzione di trasferimento dell'impianto modella un sistema SISO (Single Input Single Output) lineare e stabile (in particolare BIBO - Bounded Input Bounded Output).

Quindi non esistono altri ingressi (a parte il segnale di controllo) e lo stesso vale per l'uscita regolata.

Sappiamo poi che ad un segnale limitato fornito in ingresso all'impianto, corrisponde un'uscita limitata. (vera perché i poli del sistema sono tutti a parte reale strettamente negativa)

Dato il sistema del primo ordine  $G(s) = \frac{2}{(1+3s)}$  dobbiamo vedere come questo risponde all'interno di un problema di asservimento di posizione. Scelgo il riferimento  $r(t) = 1(t)$ , il gradino (segnale di Heaviside) di ampiezza unitaria.

Ho definito la funzione  $G(s)$  nel workspace di MatLab, precedentemente, e poi l'ho inserita all'interno del foglio Simulink nel blocco LTI System.

L'ampiezza della fascia di incertezza è data dal riferimento e da una costante  $\varepsilon$  che varia per vedere l'andamento del segnale di controllo e dell'uscita regolata:

$$r(t) - \varepsilon < y(t) < r(t) + \varepsilon < y_{\infty}$$

Ora più epsilon è grande tanto maggiore sarà il livello di incertezza sull'uscita regolata che si ritrova in un intervallo di ampiezza maggiore al crescere della costante. Al contrario, al decrescere del valore l'intervallo si restringe.

La situazione ideale è che l'uscita regolata sia più o meno uguale al riferimento ( $Y(s) \approx R(s)$ ). Confrontando  $y_{rif}$  con l'uscita effettiva  $y(t)$ , ottengo l'errore di inseguimento, definito come

Se il valore destro della fascia di tolleranza non è minore della temperatura di regime il controllo on-off non "scatta".

Prendiamo la condizione:

$$y(t) < r(t) + \varepsilon$$

Essa è violata quando:

$$y(t) \geq r(t) + \varepsilon$$

Avremo, allora:

$$r(t) - y(t) = e(t) \leq -\varepsilon$$

Lo stesso discorso si può fare per:

$$y(t) > r(t) - \varepsilon$$

Essa è violata quando:

$$y(t) \leq r(t) - \varepsilon$$

Avremo, allora:

$$r(t) - y(t) = e(t) \geq \varepsilon$$

Quindi i valori che fanno accendere o spegnere l'automa sono:  $e(t) \geq \varepsilon$  ,  $e(t) \leq -\varepsilon$



Samuele Iorio – matricola: 189706 – Ingegneria Informatica

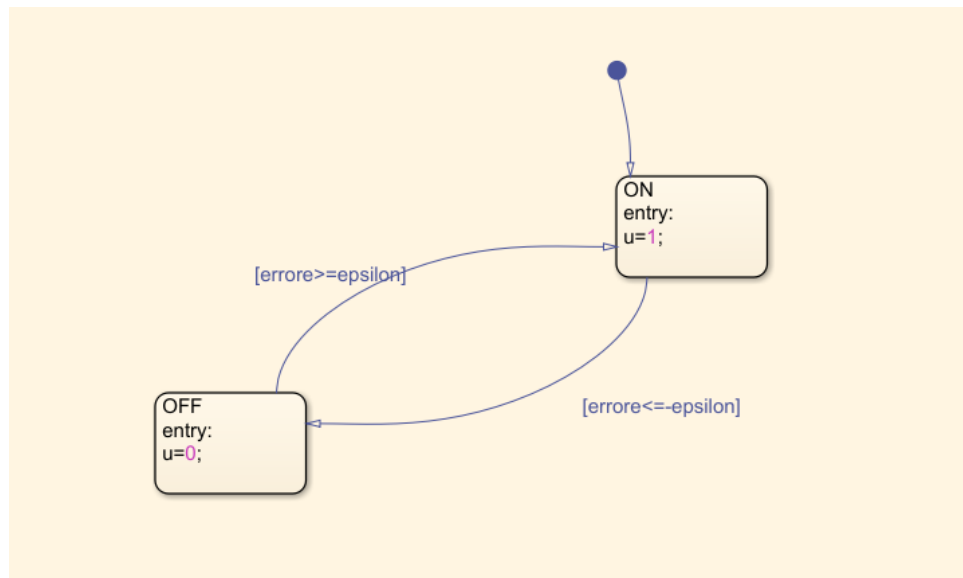
Scegliamo come valore di riferimento:  $r(t) = 0.5$

Scegliamo la fascia di tolleranza pari a:  $\epsilon = 0.02$

I valori entro i quali oscillerà l'uscita regolata sono:  $0.48 < y(t) < 0.52$

Analizziamo ora il controllo **ON/OFF**.

Lo schema logico di controllo elaborato in **Simulink** è il seguente:



L'ingresso dell'automa è l'errore di inseguimento, mentre l'uscita è il segnale di controllo logico  $u$ .

Le transizioni di stato sono dettate dal valore dell'errore di inseguimento rispetto al parametro dello schema  $\epsilon$ .

Ricordiamo che l'errore di inseguimento è:

$$e(t) = y_{rif} - y(t)$$

Se il valore dell'errore è minore di  $-\epsilon$ , e cioè l'uscita ha violato l'upper bound di tolleranza, il controllo passa nello stato di **OFF** (se era ad **ON**) istantaneamente.

Mentre un errore maggiore di  $+\epsilon$  induce il controllo a passare nello stato di **ON** (se non fosse già ad **ON**) per "sollevare" l'uscita.

## 2.

**(a) Determinare il valore limite di K in corrispondenza del quale la stabilità in retroazione non è più garantita.**

Noi sappiamo che:

$$G(s) = \frac{2}{(1 + 3s)}; \quad C(s) = \frac{k}{s * (s + 1)}$$

Utilizziamo il Criterio di Routh per determinare il valore limite di k: tale criterio ci permette di determinare il numero di radici, a parte reale positiva/negativa, di un polinomio a partire dai suoi coefficienti. Noi lo useremo per valutare la posizione delle radici al variare di un generico parametro K, per determinare il valore limite di K in corrispondenza del quale la stabilità in retroazione non è più garantita.

Dato lo schema a blocchi in retroazione algebrica ed unitaria, valutiamo la funzione di trasferimento a ciclo chiuso:

$$W(s) = \frac{G(s) * C(s)}{1 + C(s) * G(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

$$\text{dove } L(s) = C(s) * G(s) \rightarrow L(s) = \frac{2k}{s(s + 1)(1 + 3s)}$$

$$\text{Quindi} \quad W(s) = \frac{2k}{s(s + 1)(1 + 3s) + 2k}$$

Consideriamo il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso W(s):

$$\text{Den}(W(s)) = s(s + 1)(1 + 3s) + 2k = 3s^3 + 4s^2 + s + 2k.$$

Costruiamo la tabella di Routh, posiziono i coefficienti e risolvo:

$s^3$	3	1
$s^2$	4	$2k$
$s^1$	$-\frac{3}{2}k + 1$	
$s^0$	$2k$	

Analizzo la seconda colonna: 3 e 4 sono entrambi maggiori di zero, quindi abbiamo una prima permanenza; 4 e  $(-\frac{3}{2}k + 1)$  per avere una permanenza in segno  $(-\frac{3}{2}k + 1)$  deve essere maggiore di zero;  $(-\frac{3}{2}k + 1)$  e  $2k$  per avere una permanenza devono essere entrambi maggiori di zero.

Quindi:

$$\begin{cases} -\frac{3}{2}k + 1 > 0 \\ 2k > 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad 0 < k < \frac{2}{3}$$

Quindi per valori di  $k$  che si trovano all'interno di questo intervallo, la stabilità in retroazione è garantita. Al di fuori di tale intervallo invece la stabilità in retroazione non è più garantita: infatti se andiamo a sostituire un valore fuori dall'intervallo, a  $k$  nella prima colonna della tabella di Routh, non otteniamo radici tutte a parte reale strettamente negativa.

Questo procedimento è noto come ex-post.

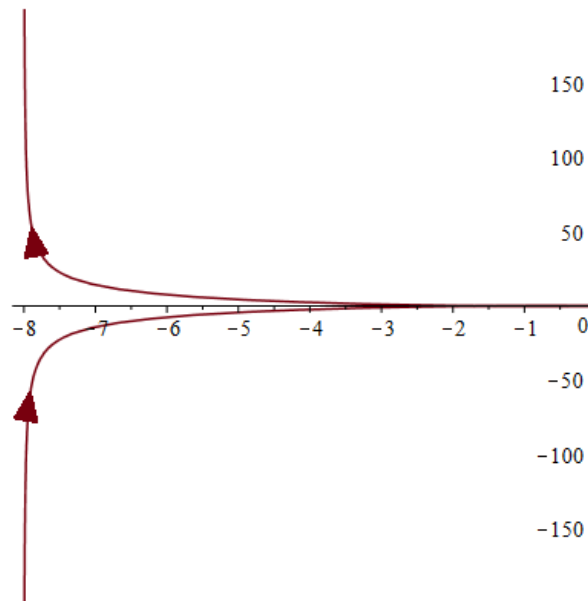
Altro modo per verificare la stabilità interna di un sistema è applicare, usare il criterio di Nyquist.

In particolare quest'ultimo afferma:

*Sia assegnato uno schema in retroazione algebrica e unitaria e supponiamo che la funzione di anello  $L(s)$  abbia  $P$  poli a parte reale strettamente positiva. Allora, il numero di zeri di  $1+L(s)$  nel semipiano destro,  $Z$ , è pari a  $Z=N+P$*

dove  $N$  rappresenta la somma algebrica delle rotazioni totali che il diagramma di Nyquist di  $L(s)$  presenta intorno al punto critico  $-1+j0$ . Ciascuna rotazione in senso orario si segna con un  $+1$ , al contrario le rotazioni in senso antiorario si valutano con un  $-1$ .

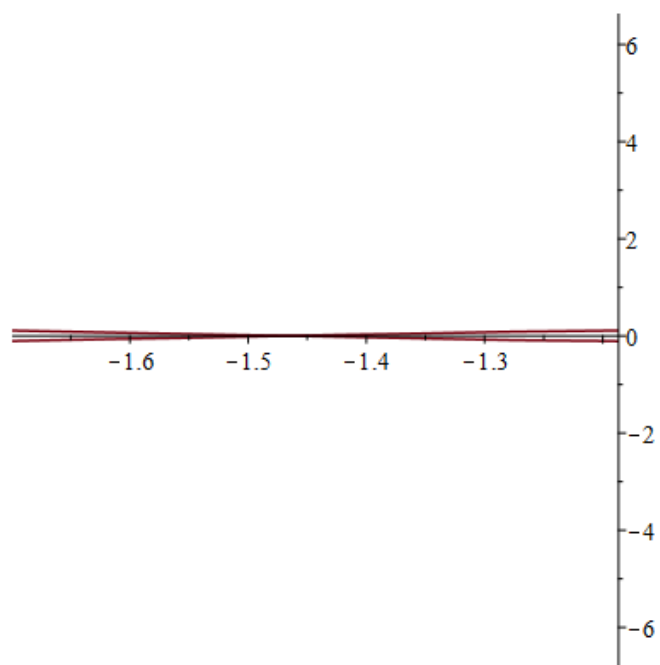
Utilizzo Maple e scelgo  $k=1$ :



Notiamo che, a causa del polo nell'origine, la curva non è finita al finito (abbiamo un asintoto verticale in  $\text{Re}(j\omega) = -8$ ).

Inoltre per il fatto che abbiamo elementi dinamici (quindi polo nell'origine e due poli stabili) la fase finale sarà pari a  $-270^\circ$ .

Ingrandendo la figura notiamo che il diagramma attraversa l'asse reale negativo quindi il margine di guadagno sarà una quantità finita.



**(b) scelto a piacere un valore di  $K$  appartenente alla regione di stabilità rappresentare il diagramma dei moduli e delle fasi della funzione di sensitività e sensitività complementare.**

Per prima cosa scegliamo un valore di  $k$  appartenente all'intervallo  $0 < k < \frac{2}{3}$ , per cui la stabilità in retroazione è garantita:  **$k = 0,40$** .

Dopodiché scriviamo le funzioni di sensitività e di sensitività complementare:

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} \quad e \quad T(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

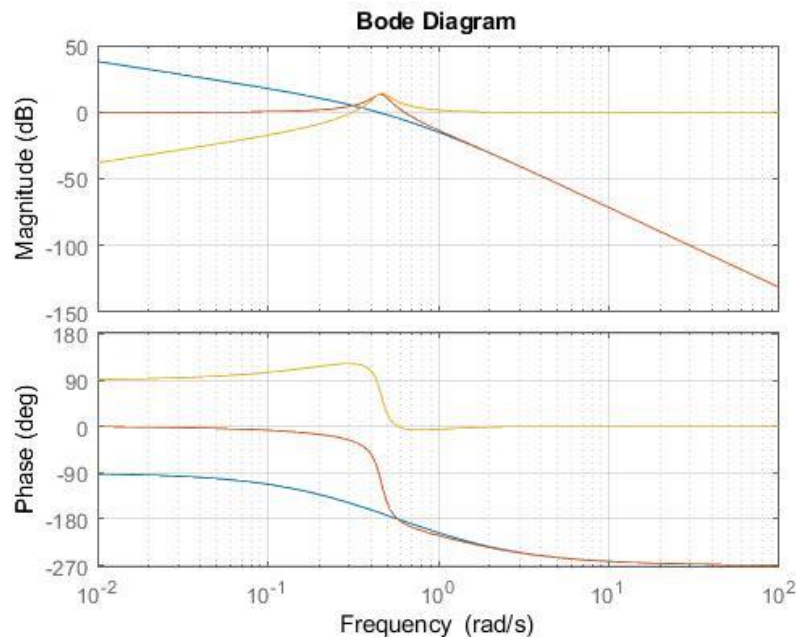
Conoscendo  $L(s)$ , andiamogli a sostituire il valore di  $k$  ottenendo:

$$L(s) = \frac{2k}{s(s+1)(1+3s)} = \frac{0,80}{(s^2+s)(1+3s)}$$

Quindi

$$S(s) = \frac{1}{1 + \frac{0,80}{(s^2+s)(1+3s)}} = \dots = \frac{3s^3+4s^2+s}{3s^3+4s^2+s+0,80} \quad e \quad T(s) = \frac{0,40}{(s^2+s)(1+3s)+0,80}$$

Utilizziamo MatLab per rappresentare il diagramma dei moduli e delle fasi di  $T(s)$  e  $S(s)$ .



### Considerazioni:

- **BASSA FREQUENZA:** la sensibilità complementare, che identifica la FDT a ciclo chiuso, ha una risposta in frequenza piatta e costante. Quindi tutti i segnali situati in bassa frequenza vengono riprodotti fedelmente sull'uscita regolata con la stessa ampiezza di ingresso. Per quanto riguarda la sensibilità, in BF il diagramma dei moduli è approssimativamente il reciproco del diagramma dei moduli della funzione di anello, per cui se abbiamo riferimenti/disturbi a banda limitata, l'errore di inseguimento sarà piccolo e l'effetto sull'uscita dei disturbi risulterà trascurabile.
- **ALTA FREQUENZA:** in AF il diagramma dei moduli della sensibilità complementare è approssimabile a quello della funzione di anello e gli errori di misura in alta frequenza sono compensati. Quindi la retroazione è inesistente. Il diagramma dei moduli della sensibilità, invece, in AF, è quasi piatto. Perciò i riferimenti in AF non vengono asserviti dall'impianto controllato e, nel caso ci siano disturbi, quest'ultimi non vengono compensati a dovere.
- **MEDIA FREQUENZA:** il diagramma dei moduli della sensibilità complementare  $T(s)$  in MF è simile al diagramma dei moduli di un sistema del secondo ordine con poli complessi coniugati a guadagno statico unitario. Presenta inoltre un effetto di risonanza.



**(c) sempre considerando il valore di  $K$  scelto in precedenza valutare, servendosi delle opportune risposte in frequenza, l'andamento dell'errore di inseguimento al riferimento  $r(t)=\sin(t/3) \cdot 1(t)$ . Quanto vale il più piccolo errore di inseguimento ottenibile dalla struttura di controllo così assegnata oltre il quale il sistema non è più stabile a ciclo chiuso?**

Il nostro riferimento è un segnale periodico elementare, quindi anche l'uscita sarà un segnale periodico elementare che avrà la stessa pulsazione del riferimento per il teorema della risposta armonica:  $Y(s) = T(s) \cdot R(s)$ .

$r(t) = R \cdot \sin(\omega t)$  con  $\omega$  pulsazione e  $R$  ampiezza del riferimento.

Possiamo applicare sempre il teorema della risposta armonica per verificare che  $E(s)$  avrà la stessa pulsazione:

$$e_{\infty}(t) = E \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

dove  $E = R \cdot |S(j\omega)|$  e  $\varphi = \arg(S(j\omega))$ .

Dobbiamo rendere  $e_{\infty}(t)$  il più piccolo possibile.

Per poterlo fare occorre diminuire l'ampiezza  $E$ , a parità di  $R$ , e quindi diminuire il modulo della risposta in frequenza della sensitività  $|S(j\omega)| = 1 / |1 + L(j\omega)|$  valutata in corrispondenza della pulsazione di riferimento.

Quindi dobbiamo incrementare  $|1 + L(j\omega)|$ : è possibile farlo se approssimativamente il modulo  $|L(j\omega)|$  è reso grande a piacere.

Da quanto visto nel punto **a\_2**, abbiamo un limite: affinché sia garantita la stabilità in retroazione

$$L(s) = \frac{0.80}{(s^2 + s) \cdot (1 + 3s)}$$

al massimo.

*restart :*

*assume*( $\omega, real$ ) :

$$L := s \rightarrow \frac{0.80}{s \cdot (s + 1) \cdot (1 + 3 s)}$$

$$L := s \mapsto \frac{0.80}{s (s + 1) (1 + 3 s)} \quad (1)$$

$$L\_freq := eval(L(s), s = I \cdot \omega)$$

$$L\_freq := \frac{-0.80 I}{\omega (I \omega + 1) (1 + 3 I \omega)} \quad (2)$$

$$S\_freq := \frac{1}{1 + L\_freq}$$

$$S\_freq := \frac{1}{1 - \frac{0.80 I}{\omega (I \omega + 1) (1 + 3 I \omega)}} \quad (3)$$

$$|S\_freq|$$

$$\frac{1}{\left| 1 - \frac{0.80 I}{\omega (I \omega + 1) (1 + 3 I \omega)} \right|} \quad (4)$$

$$\arg(S\_freq)$$

$$\arg\left(\frac{1}{1 - \frac{0.80 I}{\omega (I \omega + 1) (1 + 3 I \omega)}}\right) \quad (5)$$

$$e_\infty := t \rightarrow |S\_freq| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(S\_freq)) :$$

$$e_\infty(t)$$

$$\frac{\sin\left(\omega t + \arg\left(\frac{1}{1 - \frac{0.80 I}{\omega (I \omega + 1) (1 + 3 I \omega)}}\right)\right)}{\left| 1 - \frac{0.80 I}{\omega (I \omega + 1) (1 + 3 I \omega)} \right|} \quad (6)$$

Ora dobbiamo valutare  $e_\infty(t)$  in corrispondenza della pulsazione del riferimento

$$r(t) = \sin\left(\frac{t}{3}\right) \cdot \text{Heaviside}(t)$$

$$eval\left(e_\infty(t), \omega = \frac{1}{3}\right)$$

$$1.185113658 \sin\left(\frac{t}{3} + 2.119345729\right) \quad (7)$$

Questo è il valore del più piccolo errore di inseguimento ottenibile dalla struttura di controllo

$$C(s) = \frac{0.40}{s \cdot (s + 1)} . \text{ Scegliendo un guadagno } k > 0.40 \text{ non è più garantita la stabilità a ciclo chiuso.}$$

**(d) si consideri sempre il valore di  $K$  scelto nel secondo punto. Nell'ipotesi che il disturbo sia il seguente segnale  $d(t) = \sin\left(\frac{t}{30}\right) 1(t)$  e che il rumore di misura abbia la seguente espressione  $n(t) = \sin(30t) 1(t)$  quanto vale in configurazione caso peggiore l'ampiezza dell'errore sull'uscita regolata a regime? Argomentare sfruttando le risposte in frequenza dello schema retroazionato e le eventuali (se applicabili) approssimazioni in bassa e alta frequenza della funzione di anello.**

Nel dominio di Laplace l'espressione analitica dell'uscita misurata risulta essere la seguente:

$$Y(s) = T(s) \cdot R(s) + S_d(s) \cdot D(s) - T(s) \cdot N(s)$$

dove  $T(s) = L(s) / (1 + L(s))$  è la sensitività complementare e  $S_d(s) = G(s) / (1 + L(s))$  è la sensitività del disturbo.

Quindi l'uscita  $Y(s)$  è legata al disturbo  $D(s)$ , al riferimento  $R(s)$  e all'errore di misura sull'uscita  $N(s)$

*restart :*

*assume*( $\omega$ , *real*) :

$$G := s \rightarrow \frac{2}{1 + 3s} :$$

$G(s)$

$$\frac{2}{1 + 3s} \quad (1)$$

$$C := s \rightarrow \frac{0.40}{s \cdot (s + 1)} :$$

$C(s)$

$$\frac{0.40}{s(s + 1)} \quad (2)$$

$$L := s \rightarrow \frac{0.80}{s \cdot (s + 1) \cdot (1 + 3s)} :$$

$L(s)$

$$\frac{0.80}{s(s + 1)(1 + 3s)} \quad (3)$$

$$L\_freq := eval(L(s), s = I \cdot \omega)$$

$$L\_freq := \frac{-0.80 I}{\omega (I \omega + 1) (1 + 3 I \omega)} \quad (4)$$

$$T\_freq := \frac{L\_freq}{1 + L\_freq} :$$

$T\_freq$

$$\frac{-0.80 I}{\omega (I \omega + 1) (1 + 3 I \omega) \left( 1 - \frac{0.80 I}{\omega (I \omega + 1) (1 + 3 I \omega)} \right)} \quad (5)$$

$$Y_n := |eval(T\_freq, \omega = 30)| \cdot 1 :$$

$Y_n$

$$9.870455866 \cdot 10^{-6} \quad (6)$$

$$\phi := 180 + \text{argument}(eval(T\_freq, \omega = 30))$$

$$\phi := 181.6152181 \quad (7)$$

Grazie al teorema della risposta armonica calcolo  $y_{n,\infty}$  dove  $Y_n = |T(j\omega)| \cdot N$  (con N ampiezza del signal n(t)) e  $\phi = 180 + \arg(T(j\omega))$  e  $\omega = 30 \text{ rad/sec}$ .

$$y_{n,\infty} := t \rightarrow Y_n \cdot \sin(30 \cdot t + \phi) :$$

$y_{n,\infty}(t)$

$$9.870455866 \cdot 10^{-6} \sin(30 t + 181.6152181) \quad (8)$$

$$Y_{n,appr} := |eval(L\_freq, \omega = 30)| \cdot 1$$

$$Y_{n,appr} := 9.870451539 \cdot 10^{-6} \quad (9)$$

$$\phi_{appr} := 180 + \text{argument}(eval(L\_freq, \omega = 30))$$

$$\phi_{appr} := 181.6152280 \quad (10)$$

$$y_{n,appr} := t \rightarrow Y_{n,appr} \cdot \sin(30 \cdot t + \phi_{appr}) :$$

$$y_{n,appr}(t)$$

$$9.870451539 \cdot 10^{-6} \sin(30 t + 181.6152280) \quad (11)$$

Per il teorema della risposta armonica  $y_{d,\infty} = Y_d \cdot \sin(\omega \cdot t + \xi)$ , dove  $Y_d = |S_d(j\omega)| \cdot D$  ( $D$  è l'ampiezza del segnale  $d(t)$ ) e  $\xi = \arg(S_d(j\omega))$  con  $\omega = \frac{1}{3} \frac{rad}{s}$

$$S_d := s \rightarrow \frac{(1)}{1 + L(s)} :$$

$$S_d(s)$$

$$\frac{2}{(1 + 3 s) \left( 1 + \frac{0.80}{s (s + 1) (1 + 3 s)} \right)} \quad (12)$$

$$S_d_{freq} := eval(S_d(s), s = I \cdot \omega)$$

$$S_d_{freq} := \frac{2}{(1 + 3 I \omega) \left( 1 - \frac{0.80 I}{\omega (I \omega + 1) (1 + 3 I \omega)} \right)} \quad (13)$$

$$Y_d := \left| eval(S_d_{freq}, \omega = \frac{1}{30}) \right|$$

$$Y_d := 0.08377241205 \quad (14)$$

$$\xi := \arg(eval(S_d_{freq}, \omega = \frac{1}{30}))$$

$$\xi := 1.562381795 \quad (15)$$

Sempre per il teorema della risposta armonica si ha che:

$$y_{d,\infty} := t \rightarrow Y_d \cdot \sin\left(\frac{1}{30} \cdot t + \xi\right) :$$

$$y_{d,\infty}(t)$$

$$0.08377241205 \sin\left(\frac{t}{30} + 1.562381795\right) \quad (16)$$

dove  $Y_d = |S_d(j\omega)| \cdot D$  (con  $D$  ampiezza del signal  $d(t)$  e  $\xi = \arg(S_d(j\omega))$  e  $\omega = 1/30$  rad/sec ).

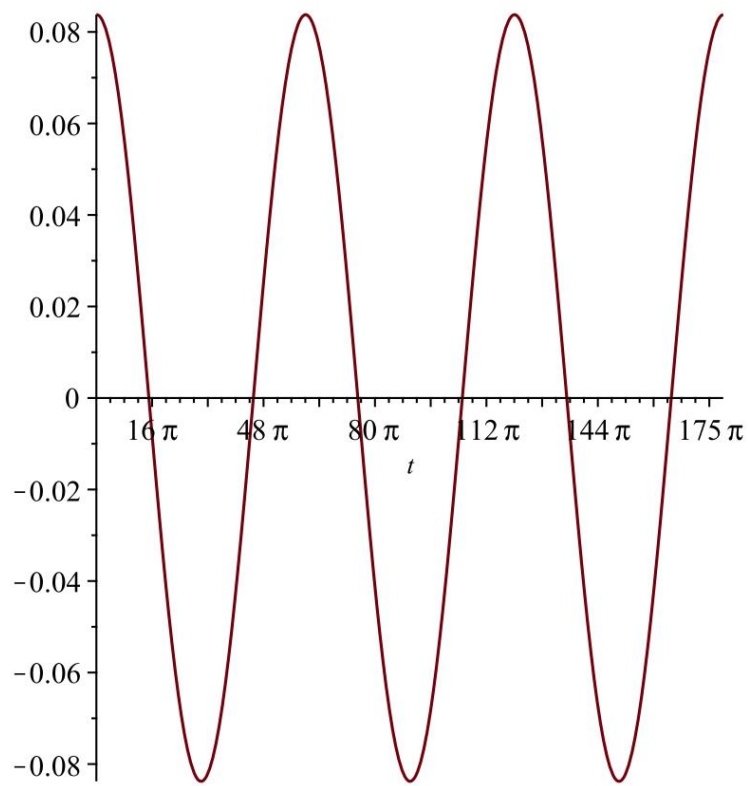
Ora dobbiamo valutare il caso peggiore: calcolare la massima ampiezza che può assumere la funzione data dalla somma di questi due contributi.

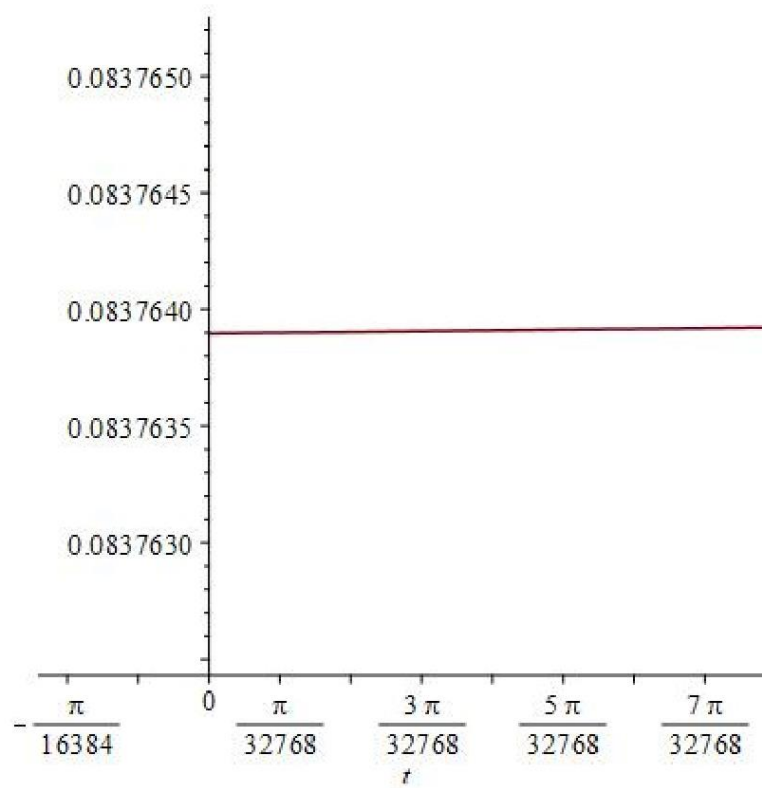
$$errore := t \rightarrow y_{n,\infty}(t) + y_{d,\infty}(t) :$$

$$errore(t)$$

$$9.870455866 \cdot 10^{-6} \sin(30 t + 181.6152181) + 0.08377241205 \sin\left(\frac{t}{30} + 1.562381795\right) \quad (17)$$

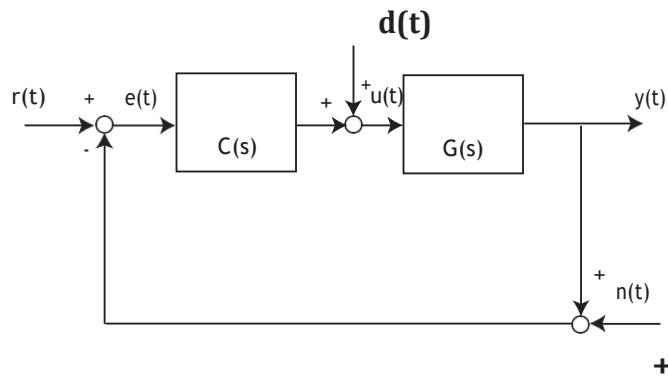
$$plot\left(errore(t), t = 0 .. 3 \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{\frac{1}{30}}\right)\right)$$





Osserviamo che l'ampiezza massima che può assumere l'errore sull'uscita regolata a regime è  $A = 0.0837639$

**d. Si consideri il seguente schema di controllo in retroazione algebrica ed unitaria.**



**Figure 2:**

dove  $G(s)$  rappresenta la f.d.t. del processo

$$G(s) = \frac{(s + 2)}{s \left(s + \frac{1}{2}\right)^2}$$

**Si chiede di determinare un regolatore  $C(s)$  di struttura semplice che garantisca il soddisfacimento delle seguenti specifiche:**

- 1. errore di inseguimento alla rampa inferiore al 25 %;**
  - 2. massima sovraelongazione  $S\% \leq 25\%$ , tempo di assestamento  $t_s \leq 70\text{sec}$ .**
-



## 1.

Dobbiamo determinare, progettare un algoritmo di controllo di struttura semplice, che garantisca le specifiche richieste inserendo, solo se necessari, elementi dinamici,  $C(s)$ .

L'errore di inseguimento è la prima specifica: è un problema legato alla precisione statica del sistema e deve essere inferiore al 25% per un riferimento a rampa. Ci troviamo nella prima parte della sintesi dell'algoritmo di controllo. In questa parte ci occupiamo di soddisfare le specifiche a transitorio esaurito.

Consideriamo la funzione di anello  $L(s) = C(s) \cdot G(s)$  e cerchiamo di capire come si comporta il sistema retroazionato  $T(s)$  approssimativamente.

La nostra funzione di trasferimento  $G(s)$  presenta già un effetto integrale ( $\equiv$  polo nell'origine), e quindi non è necessario introdurne altri: ulteriori inserimenti potrebbero causare instabilità in retroazione.

Oltre a rendere finito l'errore, il controllore deve far sì che questo si trovi al di sotto di un certo valore limite ( $k$ ): il suo compito è quello di 'modulare' l'errore; diciamo che è un amplificatore.

$$C(s) = k$$

La funzione d'anello è pari alla serie tra il controllore e la funzione di trasferimento dell'impianto:

$$L(s) = C(s) \cdot G(s) = k \cdot \left[ \frac{(s+2)}{s \cdot \left(s + \frac{1}{2}\right)^2} \right] = \frac{k \cdot (s+2)}{s \cdot \left(s + \frac{1}{2}\right)^2}$$

La funzione di anello è di tipo 3, con zero e poli reali.

Determiniamo il valore limite  $k$  affinché la specifica sia verificata, applicando la definizione di errore di inseguimento  $\rightarrow$

$$e_{\infty, r} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s \cdot L(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s \cdot \frac{k \cdot (s+2)}{s \cdot \left(s + \frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{1}{8k}$$

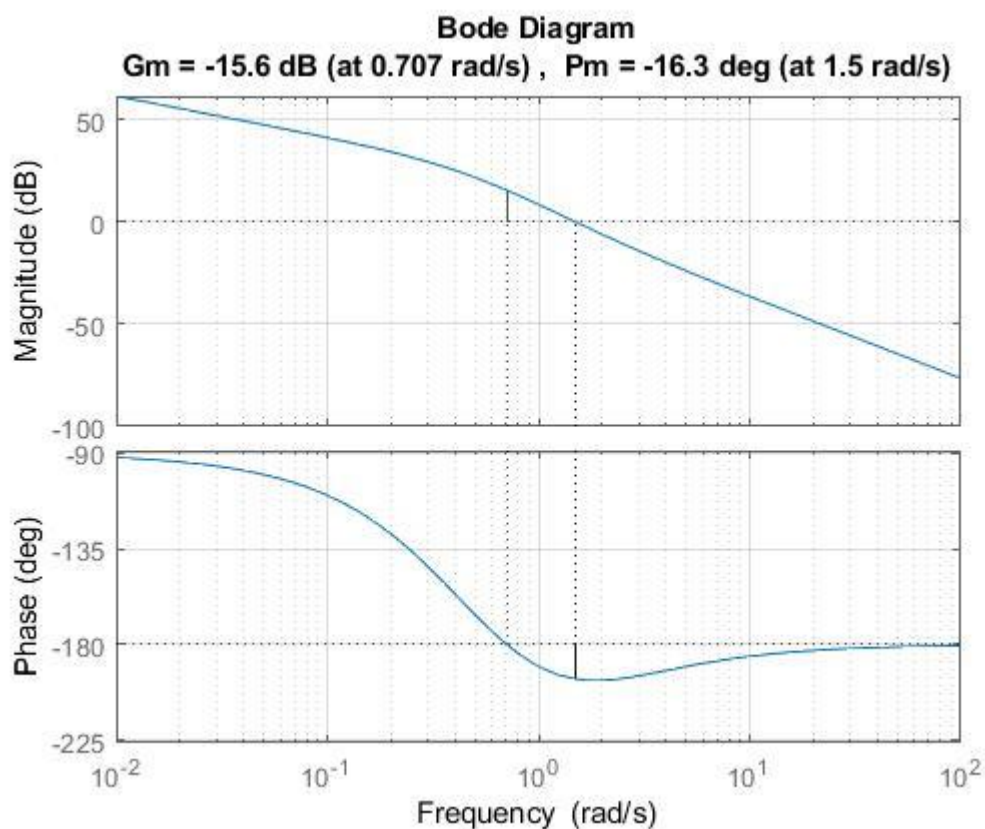
L'errore deve essere minore-uguale del 25%, quindi:

$$\frac{1}{8k} \leq \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad k \geq \frac{1}{2} = 0.5$$

Scegliamo un valore di  $k = 1.5$ : sceglierlo troppo grande innalzerebbe il diagramma dei moduli, e conseguentemente la pulsazione di attraversamento si sposterebbe verso destra e il margine di fase diminuirebbe dato che il diagramma delle fasi è monotono decrescente.

Valutiamo la stabilità in retroazione dello schema di controllo ottenuto: o disegniamo il diagramma di Nyquist o applichiamo il criterio di Bode (se il sistema lo consente) verificando quale sia il segno del margine di fase.

La nostra  $L(s)$  è compatibile con il criterio di Bode: infatti, escludendo i poli nell'origine, gli altri (poli) sono stabili, il diagramma dei moduli è monotono decrescente, il guadagno di Bode è non negativo e la pulsazione di attraversamento è unica.



Notiamo che il margine di fase è negativo,  $-16.3^\circ$ , quindi il sistema in retroazione sarà non stabile a ciclo chiuso.

## 2.

La seconda specifica riguarda: massima sovraelongazione e tempo di assestamento, da soddisfare durante il transitorio. Quindi sono problemi legati alla precisione dinamica del sistema.

Con una serie di approssimazioni cerchiamo di convertire le specifiche sulla massima sovraelongazione e sul tempo di assestamento in vincoli sul margine di fase garantito e sulla pulsazione di attraversamento garantita.

L'algoritmo di controllo è  $C(s) = k = 1.5$ .

Quindi il nostro sistema presenta tre poli e uno zero: sistema del terzo ordine.

Ipotizziamo che in media frequenza il sistema in retroazione possa essere approssimato con un sistema del secondo ordine con una coppia di poli complessi e coniugati:

$$T_{appr}(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Il picco di sovraelongazione deve essere  $S_{\%} \leq 25\%$  e il tempo di assestamento  $t_s \leq 70 \text{ sec.}$

Con le ipotesi fatte prima, possiamo mettere in relazione il picco di sovraelongazione con lo smorzamento  $\delta$  dei poli complessi e coniugati:

$$S = e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$$

Possiamo calcolare il valore dello smorzamento dei poli a ciclo chiuso, andando a sostituire ad  $S$  la sovraelongazione critica 0,25.

$$\delta = 0,4037$$

Possiamo ora calcolare il margine di fase:

$$\phi_m = \delta \cdot 100 = 40.37^\circ$$

Quindi sulla funzione di anello compensata, il margine di fase dovrà essere maggiore di  $40.37^\circ$ .

Il tempo di assestamento è:

$$t_s = \frac{3}{\delta \cdot \omega_n}$$

da cui

$$\omega_n = \frac{3}{\delta \cdot t_s}$$

Andiamo a sostituire a  $t_s$  il valore critico della nostra specifica, ottenendo  $\omega_n = 0.1062 \text{ rad/sec.}$

Conoscendo anche  $\delta$ , possiamo ricavare il rapporto fra la pulsazione di banda passante e la pulsazione naturale:

$$\frac{\omega_{BW}}{\omega_n} = \sqrt{(1 - \delta^2) + \sqrt{(1 - 2\delta^2)^2 + 1}} = 1.3711 \text{ rad/sec}$$

Moltiplicando il valore ottenuto per la pulsazione naturale otteniamo la pulsazione di banda passante:

$$\omega_{BW} = 1.3711 \cdot \omega_n = 0.1456$$

La pulsazione di attraversamento è un'approssimazione per difetto della pulsazione di banda passante, quindi avremo nuovi requisiti da imporre sulla funzione di anello compensata:

$$\begin{cases} \phi_m > 40.37^\circ \\ \omega_c > 0.1456 \text{ rad/sec} \end{cases}$$

Scegliamo  $\omega_{c\_new} = 0.15 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} > 0.1456 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$  come pulsazione di attraversamento di progetto.

Calcoliamo il modulo della funzione di anello non compensata in corrispondenza della pulsazione di attraversamento da me scelta:

$$|L(j \cdot \omega_{c\_new})| = 73.6006$$

E la distanza goniometrica

$$180 - |\arg(L(j \cdot \omega_{c\_new}))| = 60.8907$$

In corrispondenza di tale pulsazione la fase vale -119.1093.

Il modulo invece deve essere attenuato per portarlo da 73.6006 ad 1.

Abbiamo bisogno quindi di una rete corretttrice che faccia in modo che  $\omega_{c\_new}$  sia l'effettiva pulsazione di attraversamento. Questa dovrà avere guadagno minore di 1 e sfasamento nullo, quindi utilizzeremo un attenuatore puro su tutte le frequenze: la coppia polo-zero.

$$C(s) = \frac{1 + s \cdot \alpha \cdot T}{1 + s \cdot T}$$

con  $\alpha$  pari al rapporto fra la costante di tempo dello zero e del polo, ed è compresa tra 0 e 1, e T pari alla costante di tempo del polo.

Attraverso il supporto di MatLab, mediante la funzione “generica”, calcoliamo il valore dei parametri della funzione quali  $\alpha$ ,  $T_1$  e  $T_2$ .

Calcoliamo il fattore di attenuazione  $m$ :

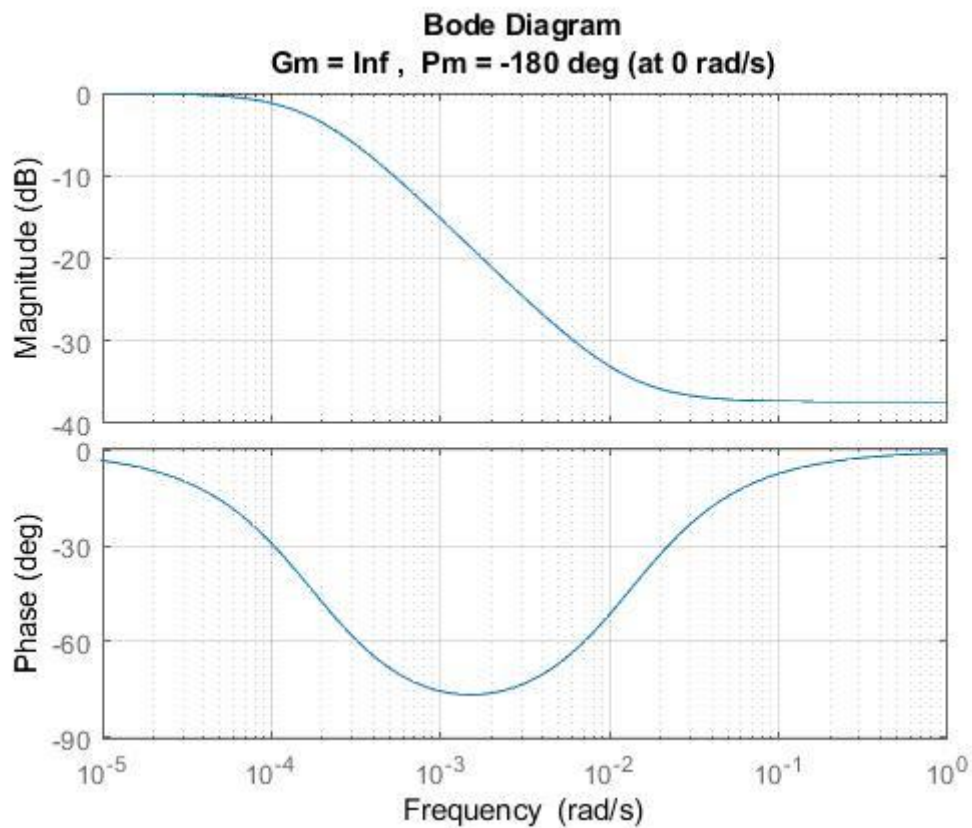
$$m = \frac{1}{|L(j\omega_c)|} = 0.0136$$

La funzione “generica” ci restituisce i seguenti valore:

$$\tau_z = 76.8500 \quad e \quad \tau_p = 5.6774e + 03$$

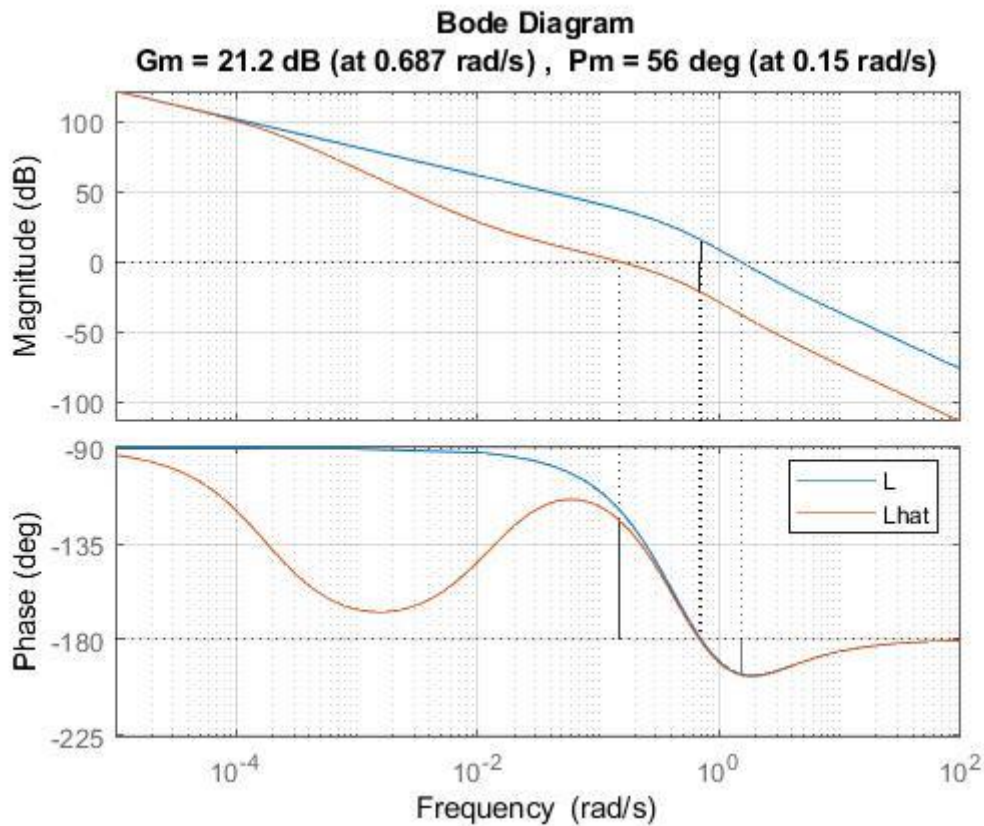
Costruiamo la rete:

$$C_d(s) = \frac{1 + s \cdot \tau_z}{1 + s \cdot \tau_p} = \frac{1 + 76.8500 s}{1 + 5.6774e + 03 s}$$



E la funzione di anello compensata:

$$L_{hat}(s) = (C * G) * C_d$$



Inoltre sappiamo che, in corrispondenza di  $\omega_{c_{new}}$ , la funzione di anello non-compensata è

$$L(j\omega_{c_{new}}) = Me^{-j\gamma} \quad \text{con } M > 1$$

La rete correttiva dovrà fornire una attenuazione pari a  $m$  e **un ritardo di fase**  $\Theta < 0$ .

$$m = \frac{1}{M} \quad e \quad \theta \approx -5^\circ$$

In conclusione dobbiamo trovare  $\tau_z$  e  $\tau_p$  tali che

$$\frac{1 + j\omega_{c_{new}}\tau_z}{1 + j\omega_{c_{new}}\tau_p} = m e^{-j\theta}$$

( $m < 1$ ,  $\theta < 0$ )

$$\tau_z = \frac{m - \cos(\theta)}{\omega_{c_{new}} \sin(\theta)} \quad \tau_p = \frac{m \cos(\theta) - 1}{\omega_{c_{new}} m \sin(\theta)}$$

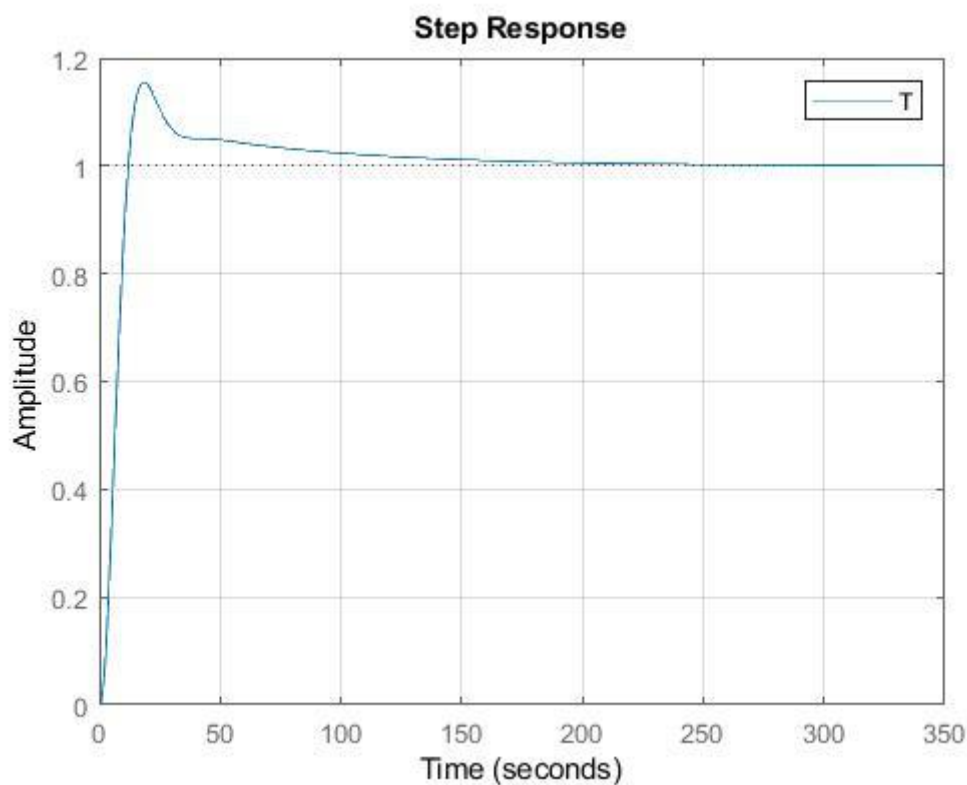
Per entrambe le formule il termine  $\sin(\Theta) < 0$ , e quindi per garantire la positività di  $\tau_z$  e  $\tau_p$  i numeratori devono essere entrambi negativi.

Calcolando “a mano”  $\tau_z$  e  $\tau_p$  tramite queste ultime formule, otteniamo gli stessi valori ottenuti tramite MatLab e la funzione ‘generica’.

In entrambe le formule  $\sin(\Theta) < 0$ , quindi entrambi i numeratori devono essere negativi per far sì che  $\tau_z$  e  $\tau_p$  siano entrambi positivi.

La risposta in frequenza in corrispondenza del numero complesso  $\omega_{c_{new}}$  sarà:

$$C_{lag}(j \omega_{c_{new}}) = m e^{-j \theta}$$



Abbiamo ottenuto una **massima sovraelongazione** del 15.5110 % e un **tempo di assestamento** di 8.8179 sec.

TUTTE LE SPECIFICHE SONO RISPETTATE.