Samuel Lambert

1

$\boxed{A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B}$

$\implies$
supposons $A \subseteq B$
soit $x \in A$, comme $A \subseteq B$ $x \in B$ donc $A \cup B = B$

$\impliedby$
supposons $A \cup B = B$ alors
$A \cup B = B \implies \nexists x \in A, x \notin B \implies A \subseteq B$

2

1. soit $m \in \mathbb{N}$, $m^2 + m = m(m+1)$ donc :

- si m est pair alors $m(m+1)$ peut s'écrire $2(\frac{m}{2}(m+1))$ avec $\frac{m}{2}, m+1 \in \mathbb{N}$ donc $m(m+1) = m^2 + m$ peut s'écrire $2k$ avec $k \in \mathbb{N}$ et est donc pair
- si m est impair alors $m(m+1)$ peut s'écrire $m\left(\frac{(m+1)}{2} \times 2\right) = \frac{m(m+1)}{2} \times 2$ or $\frac{m+1}{2} \in \mathbb{N}$ car m est impair donc $m+1$ est pair donc $\frac{m(m+1)}{2} \in \mathbb{N}$ aussi donc $m(m+1) = m^2 + m$ peut s'écrire $2k$ avec $k \in \mathbb{N}$ et est donc pair

2. si $n^2 - 1$ n'est pas un multiple de 8 alors on a $n^2 - 1 = 8k + m$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $m \in [1, 7]$

$$\begin{aligned}
& n^2 - 1 = 8k + m \\
\implies & n^2k - k = 8k^2 + mk \\
\implies & n^2k = 8k^2 + k + mk \\
\implies & n = \sqrt{\frac{8k^2 + k + mk}{k}} \\
\implies & n = \sqrt{8k + m + 1} \\
\implies & n = 2\sqrt{2k + \frac{m}{4} + \frac{1}{4}} \\
\implies & n = 2\sqrt{\frac{8k + m + 1}{4}}
\end{aligned}$$

objectif : $n = x^2 + x$ avec $x \in \mathbb{N}$

3

soit $m \in \mathbb{Z}$ et $n = m^2$

alors

$$
\begin{aligned}
n &= m^2 \\
2n &= 2m^2 \\
2n &= \sqrt{2}\sqrt{2}m^2
\end{aligned}
$$

$\sqrt{2}$ est irrationnel donc $\sqrt{2}\sqrt{2}m^2$ n'est pas un entier