第 12 回(5 月 14 日2限目)

本日の講義内容はテキスト『統計科学の基礎』の p.208 の 3 行目から p.211 の 4 行目までです。テキストと次ページからの内容を確認して学習しレポートを完成してください。

青字部分はテキストに追加し詳しくした部分です。

kougi2020square

$B(n,p)$ の確率関数 $f(x|n,p)$ と与えられた α $(0<\alpha<1)$ に対して，条件

$$(b.1) \qquad p^n \leqq \alpha \quad (\iff p \leqq \alpha^{1/n})$$

が満たされるとする．$u(p,n;\alpha)$ を

$$P(X \geqq u(p,n;\alpha)) = \sum_{j=u(p,n;\alpha)}^{n} f(j|n,p) \leqq \alpha \tag{7.11}$$

を満たす最小の自然数とする．(7.4) より，F 分布の上側確率を使って $u(p,n;\alpha)$ を求めることが出来る．

条件

$$(b.2) \qquad (1-p)^n \leqq \alpha \quad (\iff p \geqq 1-\alpha^{1/n})$$

が満たされるとする．$\ell(p,n;\alpha)$ を

$$P(X \leqq \ell(p,n;\alpha)) = \sum_{j=0}^{\ell(p,n;\alpha)} f(j|n,p) \leqq \alpha \tag{7.12}$$

を満たす最大の整数とする．(7.5) より，F 分布の上側確率を使って $\ell(p,n;\alpha)$ を求めることが出来る．補題 7.5 の後半部分より, $u(p,n;\alpha)$, $\ell(p,n;\alpha)$ は p の増加関数である．

定理 7.6 X を 2 項分布 $B(n,p)$ に従う確率変数とする．(7.3) を満たす p に対して，条件 (b.1) の下で，事象の等式

$$\{\omega |\ X(\omega) \geqq u(p,n;\alpha)\} = \left\{\omega \middle|\ p \leqq \frac{L(\omega)}{K(\omega)\cdot F_{L(\omega)}^{K(\omega)}(\alpha) + L(\omega)}\right\} \tag{7.13}$$

が成り立ち，条件 (b.2) の下で，事象の等式

$$\{\omega |\ X(\omega) \leqq \ell(p,n;\alpha)\} = \left\{\omega \middle|\ p \geqq \frac{K^*(\omega)\cdot F_{L^*(\omega)}^{K^*(\omega)}(\alpha)}{K^*(\omega)\cdot F_{L^*(\omega)}^{K^*(\omega)}(\alpha) + L^*(\omega)}\right\} \tag{7.14}$$

が成り立つ．ただし，$F_0^m(\alpha) = 1$, 自然数 m_1, m_2 に対して $F_{m_2}^{m_1}(\alpha)$ を自由度 (m_1, m_2) の F 分布の上側 $100\alpha\%$ 点とし，確率変数 K, L, K^*, L^* を

$$K \equiv 2(n - X + 1),\ L \equiv 2X,\ K^* \equiv 2(X+1),\ L^* \equiv 2(n - X).$$

で定義し，$K(\omega) = 2(n - X(\omega) + 1)$ である．$L(\omega)$, $K^*(\omega)$, $L^*(\omega)$ も同様に定義する．

kougi2020square

証明　(b.1) が成り立たなければ，(7.11) 式の右側の不等式を満たす $u(p,n;\alpha)$ は存在しない．$Y(\omega) \equiv L(\omega)/\left\{K(\omega)\cdot F_{L(\omega)}^{K(\omega)}(\alpha)+L(\omega)\right\}$ とする．このとき，$Y(\cdot)$ は $\Omega=\{\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_n\}$ 上の実数値関数で，全事象 Ω は有限個からなる．これにより，$Y(\cdot)$ は定義 2.6 を満たすこととなり，Y は確率変数となる．事象 A, B を

$$A \equiv \{\omega \mid X(\omega) < u(p,n;\alpha)\},\ B \equiv \left\{\omega \,\middle|\, p > \frac{L(\omega)}{K(\omega)\cdot F_{L(\omega)}^{K(\omega)}(\alpha)+L(\omega)}\right\}$$

で定義する．任意の $\omega \in A$ に対して，$x \equiv X(\omega)$ とする．このとき，

$$x < u(p,n;\alpha) \tag{7.15}$$

が成り立つ．補題 7.5 の (7.4) より，(7.15) は

$$P\left(F_{2x}^{2(n-x+1)} \geqq \frac{x(1-p)}{(n-x+1)p}\right) = \sum_{j=x}^{n} f(j|n,p) > \alpha \tag{7.16}$$

と同値である．さらに，

$$\alpha = P\left(F_{2x}^{2(n-x+1)} \geqq F_{2x}^{2(n-x+1)}(\alpha)\right) \tag{h2}$$

である．(7.16) と (h2) により，(7.15) は

$$\begin{aligned} & F_{2x}^{2(n-x+1)}(\alpha) > \frac{x(1-p)}{(n-x+1)p} \\ \iff\ & (n-x+1)pF_{2x}^{2(n-x+1)}(\alpha) > x(1-p) \\ \iff\ & \{(n-x+1)F_{2x}^{2(n-x+1)}(\alpha)+x\}p > x \\ \iff\ & p > \frac{2x}{2(n-x+1)F_{2x}^{2(n-x+1)}(\alpha)+2x} \end{aligned}$$

と同値である．以上により，$\omega \in A \ \Leftrightarrow\ \omega \in B$ が示された．これは $A=B$ である．この両辺の補事象をとることにより，$A^c=B^c$ と同値の (7.13) を得る．

次に (7.14) を導く．(b.2) が成り立たなければ，(7.12) 式の右側の不等式を満たす $\ell(p,n;\alpha)$ は存在しない．事象 C, D を

$$C \equiv \left\{\omega \middle|\ X(\omega) > \ell(p,n;\alpha)\right\},\ D \equiv \left\{\omega \middle|\ p < \frac{K^*(\omega)\cdot F_{L^*(\omega)}^{K^*(\omega)}(\alpha)}{K^*(\omega)\cdot F_{L^*(\omega)}^{K^*(\omega)}(\alpha) + L^*(\omega)}\right\}$$

で定義する．任意の $\omega \in C$ に対して，$x \equiv X(\omega)$ とする．このとき，

$$x > \ell(p,n;\alpha) \tag{7.17}$$

が成り立つ．補題 7.5 の (7.5) より，(7.17) は

$$P\left(F_{2(n-x)}^{2(x+1)} \geqq \frac{(n-x)p}{(x+1)(1-p)}\right) = \sum_{j=0}^{x} f(j|n,p) > \alpha$$

と同値である．さらに，上式は

$$F_{2(n-x)}^{2(x+1)}(\alpha) > \frac{(n-x)p}{(x+1)(1-p)} \iff p < \frac{2(x+1)F_{2(n-x)}^{2(x+1)}(\alpha)}{2(x+1)F_{2(n-x)}^{2(x+1)}(\alpha) + 2(n-x)}$$

と同値である．以上により，$C = D$ である．この両辺の補事象をとることにより，(7.14) を得る．　□

kougi2020square

この定理 7.6 より，系 7.7 を得る．

系 7.7　$0 < p < 1$ となる p に対して，条件 (b.1) の下で，

$$P\left(\frac{L}{K \cdot F_L^K(\alpha) + L} \geqq p\right) = P(X \geqq u(p,n;\alpha)) \leqq \alpha \tag{7.18}$$

が成り立ち，条件 (b.2) の下で，

$$P\left(\frac{K^* \cdot F_{L^*}^{K^*}(\alpha)}{K^* \cdot F_{L^*}^{K^*}(\alpha) + L^*} \leqq p\right) = P(X \leqq \ell(p,n;\alpha)) \leqq \alpha \tag{7.19}$$

が成り立つ．

証明　(7.13) の両辺の確率をとることにより，

$$P\left(\left\{\omega \middle| \ p \leqq \frac{L(\omega)}{K(\omega) \cdot F_{L(\omega)}^{K(\omega)}(\alpha) + L(\omega)}\right\}\right) = P\left(\{\omega | \ X(\omega) \geqq u(p,n;\alpha)\}\right)$$

$$\iff P\left(p \leqq \frac{L}{K \cdot F_L^K(\alpha) + L}\right) = P\left(X \geqq u(p,n;\alpha)\right) \leqq \alpha \ \ ((7.11) \text{ より})$$

が解る．ここで, (7.18) を得る．(7.19) も同様に示される．　□

$$A \equiv \left\{ \frac{L}{K \cdot F_L^K(\frac{\alpha}{2}) + L} \ \geqq \ p \right\}, \quad B \equiv \left\{ \frac{K^* \cdot F_{L^*}^{K^*}(\frac{\alpha}{2})}{K^* \cdot F_{L^*}^{K^*}(\frac{\alpha}{2}) + L^*} \ \leqq \ p \right\}$$

とおくと，$\alpha/2 < 0.5$ であるので，系 7.7 より, $A \cap B = \varnothing$ となり

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \leqq \alpha \tag{7.20}$$

が成り立つ．ここで,

$$\begin{aligned} P\left(\frac{L}{KF_L^K\left(\frac{\alpha}{2}\right) + L} \ < \ p \ < \ \frac{K^* F_{L^*}^{K^*}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{K^* F_{L^*}^{K^*}\left(\frac{\alpha}{2}\right) + L^*} \right) & \\ = \ & P\left(A^c \cap B^c\right) \\ = \ & 1 - P\left((A^c \cap B^c)^c\right) \ \left((D1) \text{ より}\right) \\ = \ & 1 - P\left(A \cup B\right) \ \left((A5),\ (A8) \text{ より}\right) \\ \geqq \ & 1 - \alpha \ \left((7.20) \text{ より}\right) \end{aligned}$$

を導くことができる．

以上により，次の信頼区間を得る．

[**1**] **正確に保守的な信頼区間**; 正則条件として，

$(b.3)$ $$p^n \leqq \alpha/2 \text{ かつ } (1-p)^n \leqq \alpha/2$$

を仮定する．このとき，信頼係数 $1-\alpha$ の正確に保守的な信頼区間は,

$$\frac{L}{KF_L^K\left(\frac{\alpha}{2}\right) + L} \ < \ p \ < \ \frac{K^* F_{L^*}^{K^*}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{K^* F_{L^*}^{K^*}\left(\frac{\alpha}{2}\right) + L^*}$$

で与えられる．　□

次に，$0 < p_0 < 1$ となる p_0 を与え, 帰無仮説 H_0： $p = p_0$ vs. 対立仮説 H_1： $p \neq p_0$ に対する水準 α の両側検定を考える．正則条件として,

$$p_0^n \leqq \alpha/2 \text{ かつ } (1-p_0)^n \leqq \alpha/2 \tag{b.4}$$

を仮定する．

$$A_0 \equiv \left\{ \frac{L}{K \cdot F_L^K(\frac{\alpha}{2}) + L} \ \geqq \ p_0 \right\}, \quad B_0 \equiv \left\{ \frac{K^* \cdot F_{L^*}^{K^*}(\frac{\alpha}{2})}{K^* \cdot F_{L^*}^{K^*}(\frac{\alpha}{2}) + L^*} \ \leqq \ p_0 \right\}$$

とおくと, (7.20) と同様に，H_0 の下で,

$$\begin{aligned} &P\left(\frac{L}{KF_L^K\left(\frac{\alpha}{2}\right) + L} \ \geqq \ p_0 \ \text{ または } \ \frac{K^*F_{L^*}^{K^*}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{K^*F_{L^*}^{K^*}\left(\frac{\alpha}{2}\right) + L^*} \ \leqq \ p_0 \right) \\ &\qquad = P(A_0 \cup B_0) = P(A_0) + P(B_0) \leqq \alpha \end{aligned}$$

[2] 正確に保守的な検定; 正則条件 (b.4) を仮定する．このとき，帰無仮説 H_0 vs. 対立仮説 H_1 に対する水準 α の両側検定は, 次で与えられる．

$$\frac{L}{KF_L^K\left(\frac{\alpha}{2}\right) + L} \ \geqq \ p_0 \ \text{ または } \ \frac{K^*F_{L^*}^{K^*}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{K^*F_{L^*}^{K^*}\left(\frac{\alpha}{2}\right) + L^*} \ \leqq \ p_0 \tag{7.21}$$

$\Longrightarrow$ H_0 を棄却し，H_1 を受け入れ，$p \neq p_0$ と判定する．　□

kougi2020square

この両側検定は, 検定関数

$$\phi(X) = \begin{cases} 1 & \left(\dfrac{L}{KF_L^K\left(\frac{\alpha}{2}\right) + L} \ \geqq\ p_0 \ \text{ または } \ \dfrac{K^* F_{L^*}^{K^*}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{K^* F_{L^*}^{K^*}\left(\frac{\alpha}{2}\right) + L^*} \ \leqq\ p_0 \right) \\ 0 & \left(\dfrac{L}{KF_L^K\left(\frac{\alpha}{2}\right) + L} \ <\ p_0 \ <\ \dfrac{K^* F_{L^*}^{K^*}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{K^* F_{L^*}^{K^*}\left(\frac{\alpha}{2}\right) + L^*} \right) \end{cases}$$

で与えられる検定と同等である．系 7.7 を使って，この検定は，検定関数

$$\phi(X) = \begin{cases} 1 & (X \leqq \ell(p_0, n; \alpha/2) \text{ または } X \geqq u(p_0, n; \alpha/2)) \\ 0 & (\ell(p_0, n; \alpha/2) + 1 \leqq X \leqq u(p_0, n; \alpha/2) - 1) \end{cases} \tag{7.22}$$

で与えられる検定と同等である．

[3] 正確な検定; 条件 (b.4) を満たすと仮定する．このとき，検定関数

$$\phi(X) = \begin{cases} 1 & (X \geqq u(p_0, n; \alpha/2) \text{ または } X \leqq \ell(p_0, n; \alpha/2)) \\ \gamma_1 & (X = u(p_0, n; \alpha/2) - 1) \\ \gamma_2 & (X = \ell(p_0, n; \alpha/2) + 1) \\ 0 & (\ell(p_0, n; \alpha/2) + 1 < X < u(p_0, n; \alpha/2) - 1) \end{cases} \tag{7.23}$$

で与えられる帰無仮説 H_0 に対する両側検定は, H_0 の下で $E_0\{\phi(X)\} = \alpha$ であるので，この検定は水準 α の検定である．ただし,

$$\gamma_1 \equiv \frac{\alpha/2 - P_0\left(X \geqq u(p_0, n; \alpha/2)\right)}{P_0\left(X = u(p_0, n; \alpha/2) - 1\right)}, \ \gamma_2 \equiv \frac{\alpha/2 - P_0\left(X \leqq \ell(p_0, n; \alpha/2)\right)}{P_0\left(X = \ell(p_0, n; \alpha/2) + 1\right)}$$

とし，$P_0(\cdot)$ は H_0 の下での確率測度を表すものとする．γ_1, γ_2 の値は (7.4), (7.5) を使って与えることができる． □

(7.21) を棄却域とする検定はよく知られ，多くの統計書に記載されているが, 条件 (b.4) が書かれていない．困ったことに，(b.4) がなくても，形式的に，棄却領域 (7.21) の検定を実行できる．(b.4) が満たされているときだけ，棄却領域 (7.21) の検定と検定 (7.22) の正当性が主張できる．さらに，(7.23) の正確な検定のほうが (7.22) の正確に保守的な検定よりも検出力が高い．