第14回(5月21日2限目)

本日の講義内容はテキスト『統計科学の基礎』の 8.2 節の始め(p.227 の真ん中)から p.231 の 8 行目までです。テキストと次ページからの内容を確認して学習しレポートを完成してください。

青字部分はテキストに追加し詳しくした部分です。

8.2　1 標本モデルにおける小標本の推測法

小標本での推測論を論述するために，次の補題 8.3 から始める．

補題 8.3　X をポアソン分布 $\mathcal{P}_o(\mu)$ に従う確率変数とする．さらに，自然数 m に対して χ^2_m を自由度 m の χ^2 分布に従う確率変数とし，$\chi^2_0 = 0$ とする．このとき，0 以上の整数 x に対して，

$$P(X \geqq x) = 1 - P\left(\chi^2_{2x} \geqq 2\mu\right), \tag{8.5}$$

$$P(X \leqq x) = P\left(\chi^2_{2(x+1)} \geqq 2\mu\right) \tag{8.6}$$

が成り立つ．上側確率 $P(X \geqq x)$ は μ の増加関数であり，分布関数 $P(X \leqq x)$ は μ の減少関数である．

証明　$x = 0$ のとき，(8.5) は自明であるので，x を自然数とする．さらに，$f(x|\mu)$ を (8.1) で与えられた $\mathcal{P}_o(\mu)$ の密度関数とする．このとき，部分積分により，$\Gamma(x) = (x-1)!$ を使って，

$$\begin{aligned}
P\left(\chi^2_{2x} \leqq 2\mu\right) &= \frac{1}{2^x \Gamma(x)} \int_0^{2\mu} t^{x-1} e^{-\frac{t}{2}} dt \\
&= \frac{1}{2^x \Gamma(x) \cdot x} \int_0^{2\mu} (t^x)' \, e^{-\frac{t}{2}} dt \\
&= \frac{1}{2^x \Gamma(x+1)} \int_0^{2\mu} (t^x)' \, e^{-\frac{t}{2}} dt \\
&= f(x|\mu) + \frac{1}{2^{x+1}\Gamma(x+1)} \int_0^{2\mu} t^x e^{-\frac{t}{2}} dt \\
&= f(x|\mu) + f(x+1|\mu) + \frac{1}{2^{x+2}\Gamma(x+2)} \int_0^{2\mu} t^{x+1} e^{-\frac{t}{2}} dt
\end{aligned}$$

を得る．上式が x の漸化式であることに注目し，同様の部分積分を無限回行うことにより，収束する無限級数で表現でき

$$P\left(\chi^2_{2x} \leqq 2\mu\right) = \sum_{k=x}^{\infty} f(k|\mu) = P(X \geqq x)$$

を導くことができる．ここで (8.5) を得る．

(8.5) より，

$$P(X \leqq x) = 1 - P(X > x) = 1 - P(X \geqq x+1) = P\left(\chi^2_{2(x+1)} \geqq 2\mu\right)$$

が導かれ，(8.6) を得る．後半の μ に関する単調性は，確率の性質から自明である．□

$X_1, \cdots, X_n$ をポアソン分布 $\mathcal{P}_o(\mu)$ からの無作為標本とする．

$$W \equiv \sum_{i=1}^{n} X_i$$

とする．このとき，命題 8.2 より，$W \sim \mathcal{P}_o(n\mu)$ である．

$\mathcal{P}_o(n\mu)$ の確率関数 $f(x|n\mu)$ と与えられた α $(0 < \alpha < 1)$ に対して，$u(\mu, n; \alpha)$ を

$$P\left(W \geqq u(\mu, n; \alpha)\right) = \sum_{k=u(\mu,n;\alpha)}^{\infty} f(k|n\mu) \leqq \alpha$$

を満たす最小の自然数とする．自然数 w に対し $F(w|n\mu) \equiv P\left(\chi^2_{2(w+1)} \geqq 2n\mu\right)$ とおくと，補題 8.3 より，$F(w|n\mu)$ は μ の減少関数である．条件

$$(c.1) \qquad e^{-n\mu} \leqq \alpha \quad (\iff \mu \geqq -\log(\alpha)/n\ )$$

が満たされるとする．このとき，

$$P\left(W \leqq \ell(\mu, n; \alpha)\right) = \sum_{k=0}^{\ell(\mu,n;\alpha)} f(k|n\mu) \leqq \alpha \tag{8.7}$$

を満たす最大の整数 $\ell(\mu, n; \alpha)$ が存在する．

ここで，次の定理 8.4 を導くことができる．

定理 8.4　事象の等式

$$\left\{\omega \middle| \, W(\omega) \geqq u(\mu, n; \alpha)\right\} = \left\{\omega \middle| \, \mu \leqq \frac{\chi^2_{2W(\omega)}(1-\alpha)}{2n}\right\} \tag{8.8}$$

が成り立つ．ただし，$\chi^2_0(\alpha) = 0$，自然数 m に対して $\chi^2_m(\alpha)$ を χ^2_m の上側 $100\alpha\%$ 点とする．

条件 (c.1) の下で，事象の等式

$$\left\{\omega \middle| \, W(\omega) \leqq \ell(\mu, n; \alpha)\right\} = \left\{\omega \middle| \, \mu \geqq \frac{\chi^2_{2(W(\omega)+1)}(\alpha)}{2n}\right\} \tag{8.9}$$

が成り立つ．

証明　$Y(\omega) \equiv \chi^2_{2W(\omega)}(1-\alpha)/(2n)$ とする．このとき，$Y(\cdot)$ は Ω 上の実数値関数で，(8.8) を示せば，定義 2.6 を満たすことが解り，Y は確率変数となる．A，B を

$$A \equiv \left\{\omega \middle| \, W(\omega) < u(\mu, n; \alpha)\right\}, \quad B \equiv \left\{\omega \middle| \, \mu > \frac{\chi^2_{2W(\omega)}(1-\alpha)}{2n}\right\}$$

で定義する．任意の $\omega \in A$ に対して，$w \equiv W(\omega)$ とする．このとき，

$$w < u(\mu, n; \alpha) \tag{8.10}$$

が成り立つ．補題 8.3 の (8.5) より，(8.10) は

$$1 - P\left(\chi^2_{2w} \geqq 2n\mu\right) = \sum_{j=w}^{\infty} f(j|n\mu) > \alpha$$

$$\iff \; P\left(\chi^2_{2w} \geqq \chi^2_{2w}(1-\alpha)\right) = 1-\alpha > P\left(\chi^2_{2w} \geqq 2n\mu\right)$$

と同値である．これにより，上式は

$$\chi^2_{2w}(1-\alpha) < 2n\mu \iff \mu > \frac{\chi^2_{2w}(1-\alpha)}{2n}$$

と同値である．以上により，$\omega \in A \;\Leftrightarrow\; \omega \in B$ が示された．これは $A = B$ である．この両辺の補事象をとることにより，(8.8) を得る．

次に (8.9) を導く．(c.1) が成り立たなければ，(8.7) 式の右側の不等式を満たす $\ell(\mu, n; \alpha)$ は存在しない．

$$C \equiv \left\{\omega \middle| \ W(\omega) > \ell(\mu, n; \alpha)\right\}, \quad D \equiv \left\{\omega \middle| \ \mu < \frac{\chi^2_{2(W(\omega)+1)}(\alpha)}{2n}\right\}$$

とする．任意の $\omega \in C$ に対して，$w \equiv W(\omega)$ とする．このとき，

$$w > \ell(\mu, n; \alpha) \tag{8.11}$$

が成り立つ．補題 8.3 の (8.6) より，(8.11) は

$$P\left(\chi^2_{2(w+1)} \geqq 2n\mu\right) = \sum_{j=0}^{w} f(j|n\mu) > \alpha$$

と同値である．上式は

$$\chi^2_{2(w+1)}(\alpha) > 2n\mu \iff \mu < \frac{\chi^2_{2(w+1)}(\alpha)}{2n}$$

と同値である．

以上により，$C = D$ である．ここで, 両辺の補事象をとることにより，(8.9) を得る．□

定理 8.4 より，系 8.5 を得る．

系 8.5　$0 < \mu$ に対して，

$$P\left(\frac{\chi^2_{2W}(1-\alpha)}{2n} \geqq \mu\right) = P(W \geqq u(\mu, n; \alpha)) \leqq \alpha \tag{8.12}$$

が成り立ち，条件 (c.1) の下で

$$P\left(\frac{\chi^2_{2(W+1)}(\alpha)}{2n} \leqq \mu\right) = P(W \leqq \ell(\mu, n; \alpha)) \leqq \alpha \tag{8.13}$$

が成り立つ．　□

$$A \equiv \left\{\frac{\chi^2_{2W}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}{2n} \geqq \mu\right\}, \quad B \equiv \left\{\frac{\chi^2_{2(W+1)}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2n} \leqq \mu\right\}$$

とおくと，$\alpha/2 < 0.5$ であるので，(8.12), (8.13) より, $A \cap B = \varnothing$ となり

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \leqq \alpha \tag{8.14}$$

を得る．以上により，次の信頼区間を得る．

[1] 正確に保守的な信頼区間; 正則条件

(*c*.2) $$e^{-n\mu} \leqq \alpha/2$$

を仮定する．このとき，信頼係数 $1-\alpha$ の正確に保守的な信頼区間は,

$$\frac{\chi^2_{2W}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}{2n} < \mu < \frac{\chi^2_{2(W+1)}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2n}$$

で与えられる．　□