第 11 回(5 月 11 日2限目)

本日の講義内容はテキスト『統計科学の基礎』の p. 205 の下から 3 行目から p. 208 の 2 行目までです。テキストと次ページからの内容を確認して学習しレポートを完成してください。

青字部分はテキストに追加し詳しくした部分です。

7.2　1 標本モデルにおける小標本の推測法

p が 0 または 1 の自明な場合を除き，以後，

$$0 < p < 1 \tag{7.3}$$

を仮定する．

補題 7.5　X を 2 項分布 $B(n,p)$ に従う確率変数とする．自然数 m_1, m_2 に対して，$F_{m_2}^{m_1}$ を自由度 (m_1, m_2) の F 分布に従う確率変数とし，自然数 m に対して，$F_0^m = 1$ とする．このとき，$x = 0, 1, \cdots, n$ に対して，

$$P(X \geqq x) = P\left(F_{2x}^{2(n-x+1)} \geqq \frac{x(1-p)}{(n-x+1)p}\right), \tag{7.4}$$

$$P(X \leqq x) = P\left(F_{2(n-x)}^{2(x+1)} \geqq \frac{(n-x)p}{(x+1)(1-p)}\right) \tag{7.5}$$

が成り立つ．上側確率 $P(X \geqq x)$ は p の連続な増加関数であり，分布関数 $P(X \leqq x)$ は p の連続な減少関数である．

証明　ベータ分布 $BE(m_1, m_2)$ の密度関数を $f(y|m_1, m_2)$ で表すものとする．$x=0$ のとき (7.4) は自明である．x を n 以下の自然数とし，T がベータ分布 $BE(n-x+1, x)$ に従うとすると，

$$P(T \geqq 1-p) = \int_{1-p}^{1} f(t|\ n-x+1, x)dt$$

となる．$y \equiv 1-t$ とおく変数変換と部分積分により，

$$\begin{aligned}
P(T \geqq 1-p) &= \int_0^p f(y|\ x, n-x+1)dy \\
&= \frac{n!}{(x-1)! \cdot (n-x)!} \int_0^p y^{x-1}(1-y)^{n-x}dy \\
&= \boxed{\text{(a)}} \\
&= \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\
&\qquad + \frac{n!}{x! \cdot (n-x-1)!} \int_0^p y^x (1-y)^{n-x-1}dy \\
&= \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} + \int_0^p f(y|\ x+1, n-x)dy \qquad (7.6)
\end{aligned}$$

が示される．(7.6) は x の漸化式であるので，同様の部分積分を連続して行うことにより，(7.6) は，

$$
\begin{aligned}
P(T \geqq 1-p) &= \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} + \binom{n}{x+1} p^{x+1} (1-p)^{n-x-1} \\
&\quad + \boxed{\text{(b)}} \\
&= \sum_{k=x}^{x+1} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} + \boxed{\text{(b)}} \\
&\cdots\cdots \\
&= \sum_{k=x}^{n-1} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} + \int_0^p f(y|\ n,1) dy \\
&= \sum_{k=x}^{n-1} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} + n \int_0^p y^{n-1} dy \\
&= \sum_{k=x}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = P(X \geqq x) \qquad (7.7)
\end{aligned}
$$

となる．補題 3.19 より，$\{x/(n-x+1)\} \cdot \{T/(1-T)\}$ は自由度 $(2(n-x+1), 2x)$ の F 分布に従う．これにより，

$$
F_{2x}^{2(n-x+1)} = \frac{x}{n-x+1} \cdot \frac{T}{1-T} \qquad (7.8)
$$

である．ここで，(7.7), (7.8) より，

$$
\begin{aligned}
P(X \geqq x) &= P(T \geqq 1-p) \\
&= \boxed{\text{(c)}} \\
&= P\left(F_{2x}^{2(n-x+1)} \geqq \frac{x(1-p)}{(n-x+1)p} \right)
\end{aligned}
$$

を得，(7.4) が導かれた．

$x = n$ のとき (7.5) は自明である．x を $0 \leqq x \leqq n-1$ となる整数とする．U がベータ分布 $BE(x+1, n-x)$ に従うとすると，

$$P(U \geqq p) = \int_p^1 f(u|\ x+1, n-x)du$$

となる．$y \equiv 1-u$ とおく変数変換と部分積分により，${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$ の関係を使って, (7.7) と同様に,

$$
\begin{aligned}
P(U \geqq p) &= \int_0^{1-p} f(y|\ \boxed{\text{(d)}}\ ,\ \boxed{\text{(e)}}\ )dy \ (y \equiv 1-u) \\
&= \frac{n!}{x! \cdot (n-x-1)!} \int_0^{1-p} (1-y)^x y^{n-x-1} dy \\
&= \frac{n!}{x! \cdot (n-x-1)! \cdot (n-x)} \ \boxed{\text{(f)}} \\
&= \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\
&\quad + \frac{n!}{(x-1)! \cdot (n-x)!} \int_0^{1-p} y^{n-x} (1-y)^{x-1} dy \\
&= \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} + \int_0^{1-p} f(y|\ n-x+1, x) dy \\
&= \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} + \binom{n}{x+1} p^{x+1} (1-p)^{n-x-1} \\
&\quad + \int_0^{1-p} f(y|\ n-x+2, x-1) dy \\
&= \binom{n}{n-x} p^x (1-p)^{n-x} + \binom{n}{n-x-1} p^{x+1} (1-p)^{n-x-1} \\
&\quad + \int_0^{1-p} f(y|\ n-x+2, x-1) dy \\
&= \sum_{k=n-x}^{n-x+1} \binom{n}{k} (1-p)^k p^{n-k} + \int_0^{1-p} f(y|\ n-x+2, x-1) dy \\
&\cdots\cdots \\
&= \sum_{k=n-x}^{n-1} \binom{n}{k} (1-p)^k p^{n-k} + \int_0^{1-p} f(y|\ n, 1) dy \\
&= \sum_{k=n-x}^{n} \binom{n}{k} (1-p)^k p^{n-k} \\
&= \sum_{\ell=0}^{x} \binom{n}{\ell} p^\ell (1-p)^{n-\ell} = P(X \leqq x)
\end{aligned} \tag{7.9}
$$

が成り立つ．

補題 3.19 より, $\{(n-x)/(x+1)\}\cdot\{U/(1-U)\}$ は自由度 $(2(x+1), 2(n-x))$ の F 分布に従う．ここで，(7.8) と同様に

$$F^{2(x+1)}_{2(n-x)} = \frac{n-x}{x+1}\cdot\frac{U}{1-U} \tag{7.10}$$

である．(7.9), (7.10) より，

$$\begin{aligned} P(X \leqq x) &= P(U \geqq p) \\ &= \boxed{\text{(g)}} \\ &= P\left(F^{2(x+1)}_{2(n-x)} \geqq \frac{(n-x)p}{(x+1)(1-p)}\right) \end{aligned}$$

を得，(7.5) が導かれた．$P(X \geqq x)$ が p の連続な増加関数であることは，(7.6) と $\int_0^p f(y|\ x, n-x+1)dy$ が p の連続な増加関数であることから解る．同様に, (7.9) から，$P(X \leqq x)$ が p の連続な減少関数であることが解る． □