第7回（4月27日2限目）

本日の講義内容はテキスト『統計科学の基礎』の p. 95 の 10 行目から p. 99 の下から 4 行目までです。テキストと次ページからの内容を確認して学習しレポートを完成してください。

青字部分はテキストに追加し詳しくした部分です。

離散, 連続を問わず確率分布は分布関数によって決定される．確率変数 X の分布関数がある分布 D の分布関数 $F_0(x|\boldsymbol{\theta})$ と一致するとき，X は**分布 D に従う**といい, 記号 $X \sim D$ を使って表す．またしばしば $X \sim F_0(x|\boldsymbol{\theta})$ とも表記する．たとえば, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ は, X が平均 μ, 分散 σ^2 の正規分布に従うことを意味する．

定理 3.4 $X \sim N(0,1) \Longrightarrow \psi_X(t) = e^{-t^2/2}$，$Z \sim N(\mu,\sigma^2) \Longrightarrow \psi_Z(t) = e^{i\mu t - \sigma^2 t^2/2}$ となる．

証明 レポートの問題 3.5 より，

$$
\begin{aligned}
\psi_X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\{\cos(tx) + i\sin(tx)\}\varphi(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\cos(tx)\varphi(x)dx + i\int_{-\infty}^{\infty}\sin(tx)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\cos(tx)\varphi(x)dx
\end{aligned}
$$

が成り立つ． マクローリンの級数展開式 (3.4) より，$\cos(tx) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(tx)^{2k}/(2k)!$ である．$I(k) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k}\varphi(x)dx$ とおくと，部分積分により，

$$
I(k) = \int_{-\infty}^{\infty} -x^{2k-1}\{\varphi(x)\}'dx = (2k-1)\int_{-\infty}^{\infty} x^{2k-2}\varphi(x)dx = (2k-1)I(k-1)
$$

この漸化式により

$$
\begin{aligned}
I(k) &= (2k-1)I(k-1) = (2k-1)\cdot(2k-3)I(k-2)\cdots\cdots 3I(1) \\
&= (2k-1)\cdot(2k-3)I(k-2)\cdots\cdots 3\int_{-\infty}^{\infty} x^2\varphi(x)dx \\
&= (2k-1)\cdot(2k-3)I(k-2)\cdots\cdots 3\cdot 1
\end{aligned}
$$

を得る．

これらと (3.2) により

$$
\psi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(tx)^{2k}}{(2k)!}\varphi(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k
$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{t^2}{2} \right)^k = e^{-t^2/2}$$

となる．

$$P(\mu + \sigma X \leqq x) = P\left(X \leqq \frac{x-\mu}{\sigma} \right) = \Phi(t)\big|_{t=\frac{x-\mu}{\sigma}} = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)$$

より，$\mu + \sigma X \sim N(\mu, \sigma^2)$ である．ゆえに，$Z = \mu + \sigma X$ と書ける．また $\psi_X(t) = e^{-t^2/2}$ を使うと，

$$\begin{aligned} \psi_Z(t) &= E\left(e^{it\mu + it\sigma X} \right) = E\left(e^{it\mu} e^{it\sigma X} \right) \\ &= e^{it\mu} E(e^{it\sigma X}) = e^{it\mu} \psi_X(\sigma t) = e^{it\mu} e^{-\sigma^2 t^2/2} \end{aligned}$$

を得，すべてが示された．　□

定理 3.5 次の (1), (2) が成り立つ.

(1) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\Longrightarrow X - \mu \sim N(0, \sigma^2),\ cX \sim N(c\mu, c^2\sigma^2).$$

(2) (分布の再生性) X_1, X_2 は互いに独立と仮定する．このとき,

$$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)\ (i = 1, 2) \Longrightarrow \sum_{i=1}^{2} X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{2}\mu_i, \sum_{i=1}^{2}\sigma_i^2\right)$$

である.

証明 (1) 定理 3.4 より $\psi_X(t) = e^{i\mu t - \sigma^2 t^2/2}$ となる.

$$\psi_{X-\mu}(t) = E\left\{e^{it(X-\mu)}\right\} = e^{-it\mu}E\left(e^{itX}\right) = e^{-it\mu}\psi_X(t) = e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

これは $N(0, \sigma^2)$ の特性関数を表す．特性関数と分布関数は 1 対 1 対応であるので，$X - \mu \sim N(0, \sigma^2)$ が解る．同様に

$$\psi_{cX}(t) = E\left\{e^{itcX}\right\} = \psi_X(tc) = e^{itc\mu - \frac{\sigma^2 (tc)^2}{2}}$$

を得，$cX \sim N(c\mu, c^2\sigma^2)$ が示された.

(2) X_1 と X_2 は独立より, 補題 2.25(3) を使って,

$$\begin{aligned}\psi_{X_1+X_2}(t) &= E\left\{e^{it(X_1+X_2)}\right\} = E\left(e^{itX_1}\right)E\left(e^{itX_2}\right)\\ &= \psi_{X_1}(t)\psi_{X_2}(t) = e^{i\mu_1 t - \sigma_1^2 t^2/2}e^{i\mu_2 t - \sigma_2^2 t^2/2}\\ &= e^{i(\mu_1+\mu_2)t - (\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2/2}\end{aligned}$$

を得る．これは $N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ の特性関数を表す. □

• 定理 3.5 の (2) で示されたように, ある確率分布族に従う確率変数の和の分布が同一の分布族の確率分布に従うとき，確率分布族は**再生的**であるという．正規分布は再生的である.

定理 3.5 より次の系を得る.

系 3.6　$X_1, \cdots, X_k$ は互いに独立と仮定する．$c_1, \cdots, c_k$ を実定数とし，$Y \equiv \sum_{i=1}^{k} c_i X_i$ とおく．このとき，

$$X_i \ \sim \ N(\mu_i, \sigma_i^2) \ (i = 1, \cdots, k) \implies Y \ \sim \ N\left(\sum_{i=1}^{k} c_i \mu_i, \sum_{i=1}^{k} c_i^2 \sigma_i^2\right)$$

が成り立つ．また, $E(Y) = \sum_{i=1}^{k} c_i \mu_i$, $V(Y) = \sum_{i=1}^{k} c_i^2 \sigma_i^2$ より,
$Y \ \sim \ N\big(E(Y), V(Y)\big)$ と言いかえることができる.

特に，$X \sim N(\mu, \sigma^2) \implies aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$ が成り立つ.　□

$N(0,1)$, $N(1,1)$, $N(0,2)$ の密度関数を重ね描きしたものを, 図 3.1 に載せている. 平均が大きくなればグラフは右に平行移動し, 分散が大きくなれば山は低くなる.

Z を標準正規分布に従う確率変数とすると,

$$P(-Z \leqq x) = P(Z \geqq -x) = \int_{-x}^{\infty} \varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt = P(Z \leqq x)$$

が成り立ち, $-Z$ も Z と同じ標準正規分布に従う. このような分布を，**0 について対称な分布**あるいは単に**対称な分布**であるという. その密度関数 $\varphi(x)$ と分布関数 $\Phi(x)$ について,

$$\varphi(-x) = \varphi(x), \quad 1 - \Phi(-x) = \Phi(x) \tag{3.11}$$

が成り立つ.

表 **3.1** 正規分布の密度関数の値

x	$N(0,1)$ の密度関数 $\varphi(x)$	$N(0,2)$ の密度関数 $\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$	$N(0,0.5)$ の密度関数 $\sqrt{2}\varphi\left(\sqrt{2}x\right)$	$N(1,1)$ の密度関数 $\varphi(x-1)$	$N(-1,1)$ の密度関数 $\varphi(x+1)$
-3.0	0.0044	0.0297	0.0001	0.0001	0.0540
-2.0	0.0540	0.1038	0.0103	0.0044	0.2420
-1.0	0.2420	0.2197	0.2076	0.0540	0.3989
-0.5	0.3521	0.2650	0.4394	0.1295	0.3521
0.0	0.3989	0.2821	0.5642	0.2420	0.2420
0.5	0.3521	0.2650	0.4394	0.3521	0.1295
1.0	0.2420	0.2197	0.2076	0.3989	0.0540
2.0	0.0540	0.1038	0.0103	0.2420	0.0044
3.0	0.0044	0.0297	0.0001	0.0540	0.0001

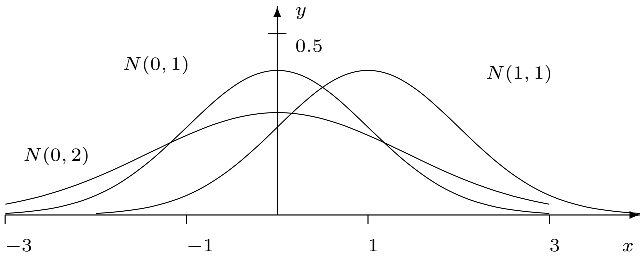


図 **3.1** 正規分布の密度関数

表 **3.2**　正規分布の分布関数の値

x	$N(0,1)$ の分布関数 $\Phi(x)$	$N(0,2)$ の分布関数 $\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$	$N(0,0.5)$ の分布関数 $\Phi\left(\sqrt{2}x\right)$	$N(1,1)$ の分布関数 $\Phi(x-1)$	$N(-1,1)$ の分布関数 $\Phi(x+1)$
-3.0	0.0013	0.0169	0.0000	0.0000	0.0228
-2.0	0.0228	0.0786	0.0023	0.0013	0.1587
-1.0	0.1587	0.2398	0.0786	0.0228	0.5000
-0.5	0.3085	0.3618	0.2398	0.0668	0.6915
0.0	0.5000	0.5000	0.5000	0.1587	0.8413
0.5	0.6915	0.6382	0.7602	0.3085	0.9332
1.0	0.8413	0.7602	0.9214	0.5000	0.9772
2.0	0.9772	0.9214	0.9977	0.8413	0.9987
3.0	0.9987	0.9831	1.0000	0.9772	1.0000

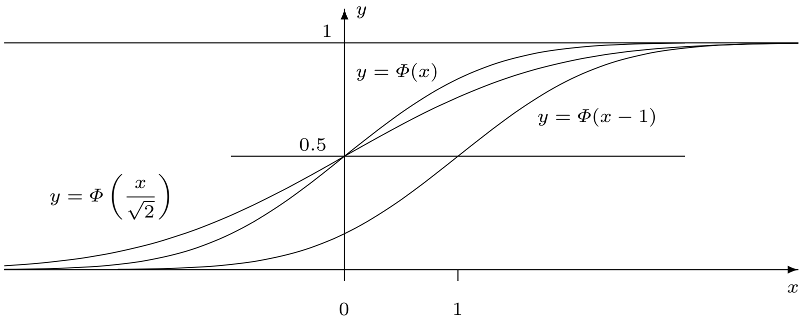


図 **3.2** 正規分布の分布関数のグラフ

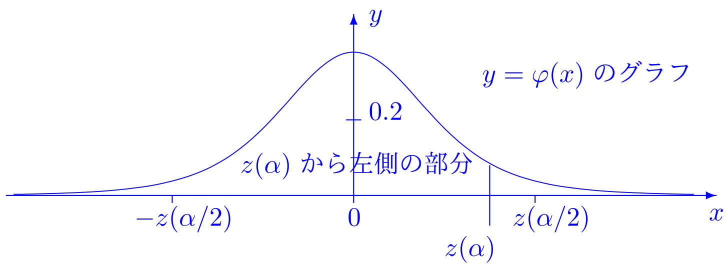
[テキストの **261** ページの付表 1 の説明]

Z は標準正規分布に従うとする．このとき，Z の密度関数は $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ で与えられる．$z(\beta)$ を標準正規分布の上側 100β パーセント点とする．すなわち，$P(Z \geqq z(\beta)) = P(Z > z(\beta)) = \displaystyle\int_{z(\beta)}^{\infty} \varphi(x)dx = \beta$ である．

(1)

$$\begin{aligned} P(Z < z(\alpha)) &= \int_{-\infty}^{z(\alpha)} \varphi(x)dx \\ &= 1 - P(Z \geqq z(\alpha)) \\ &= 1 - \int_{z(\alpha)}^{\infty} \varphi(x)dx = 1 - \alpha \end{aligned}$$

であり，　これを図示したものが以下である．



(2)

$$\begin{aligned}
\int_{-z(\alpha)}^{z(\alpha)} \varphi(x)dx &= P(|Z| < z(\alpha/2)) \\
&= 1 - P(|Z| \geqq z(\alpha/2)) \\
&= 1 - \{P(Z \geqq z(\alpha/2)) + P(Z \leqq -z(\alpha/2))\} \\
&= 1 - 2P(Z \geqq z(\alpha/2)) \\
&= 1 - 2\int_{z(\alpha/2)}^{\infty} \varphi(x)dx \\
&= 1 - 2(\alpha/2) = 1 - \alpha
\end{aligned}$$

であり，　これを図示したものが以下である．