

отображение F мы наложим несколько более сильные условия, потребовав непрерывности смешанных производных $\frac{d^2y}{du dv}$ и $\frac{d^2y}{dv du}$ и возможности применения формулы Грина для области Γ^*). Нетрудно убедиться и в том, что стремление к пределу в формуле (47.27) происходит равномерно в смысле, указанном в теореме 1 п. 46.1

Несмотря на простоту вывода формулы (47.27), следует отметить, что доказательство теоремы 1, приведенное в п. 46.1, идейно предпочтительнее, так как оно лучше раскрывает сущность вопроса, связанную с тем, что дифференцируемое отображение в малом достаточно хорошо аппроксимируется линейным отображением.

47.8. Криволинейные интегралы, не зависящие от пути интегрирования

Все кривые (контуры), рассматриваемые в этом пункте, будут всегда предполагаться кусочно-гладкими; для краткости это не будет каждый раз специально оговариваться.

Рассмотрим вопрос о том, когда криволинейным интеграл $\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy$ зависит только от точек A и B и не зависит от выбора

кривой \widehat{AB} , их соединяющей.

Теорема 3. Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны в плоской области G , тогда эквивалентны следующие три условия.

1. Для любого замкнутого контура γ , лежащего в G ,

$$\int_{\gamma} Pdx + Qdy = 0.$$

2. Для любых двух точек $A \in G$ и $B \in G$ значение интеграла

$$\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy$$

не зависит от кривой $\widehat{AB} \subset G$, соединяющей точки A и B .

3. Выражение $Pdx + Qdy$ является в G полным дифференциалом, т. е. существует функция $u(M) = u(x, y)$, $M = (x, y)$, определенная в G и такая, что

$$du = Pdx + Qdy. \quad (47.28)$$

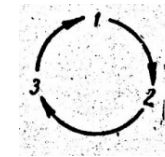
В этом случае если $A \in G$ и $B \in G$, то

$$\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy = u(B) - u(A) \quad (47.29)$$

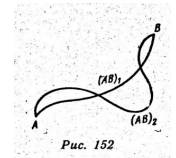
для любой кривой \widehat{AB} , соединяющей в G эти точки.

Таким образом, выполнение каждого из условий 1, 2 и 3 необходимо и достаточно для выполнения каждого из двух остальных.

Доказательство. Покажем, что из первого условия следует второе, из второго - третье, а из третьего - первое, т.е. проведем доказательство по схеме



Этим будет, очевидно, доказано, что из любого условия 1, 2 и 3 следует любое другое из них.



Но

$$\begin{aligned} \int_{(\widehat{AB})_1 \cup (\widehat{BA})_2} Pdx + Qdy &= \int_{(\widehat{AB})_1} Pdx + Qdy + \int_{(\widehat{BA})_2} Pdx + Qdy = \\ &= \int_{(\widehat{AB})_1} Pdx + Qdy - \int_{(\widehat{AB})_2} Pdx + Qdy. \end{aligned} \quad (47.31)$$

т.е. свойство 2 выполняется.

Второй шаг: $2 \rightarrow 3$. Пусть $M_0 \in G$, $M = (x, y) \in G$ и $\widehat{M_0M}$ — некоторая кривая, соединяющая в G точки M_0 и M . Положим

$$u(M) = \int_{\widehat{M_0M}} Pdx + Qdy.$$

В силу условия 2 при фиксированной точке M_0 функция $u(x, y)$ является однозначной функцией, так как значение $u(M) = u(x, y)$ не