отображение F мы наложили несколько более сильные условия, потребовав непрерывности смешанных производных $\dfrac{d^2y}{du\,dv}$ и $\dfrac{d^2y}{dv\,du}$ и возможности применения формулы Грина для области Γ^*). Нетрудно убедиться и в том, что стремление к пределу в формуле (47.27) происходит равномерно в смысле, указанном в теореме 1 п. 46.1

Несмотря на простоту вывода формулы (47.27), следует отметить, что доказательство теоремы 1, приведенное в п. 46.1, идейно предпочтительнее, так как оно лучше раскрывает сущность вопроса, связанную с тем, что дифференцируемое отображение в малом достаточно хорошо аппроксимируется линейным отображением.

47.8. Криволинейные интегралы, не зависящие от пути интегрирования

Все кривые (контуры), рассматриваемые в этом пункте, будут всегда предполагаться кусочно-гладкими; для краткости это не будет каждый раз специально оговариваться.

Рассмотрим вопрос о том, когда криволинейным интеграл $\int\limits_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy$ зависит только от точек A и B и не зависит от выбора кривой $\widehat{AB}$, их соединяющей.

Теорема 3. *Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны в плоской области G, тогда эквивалентны следующие три условия.*

1. Для любого замкнутого контура γ, лежащего в G,

$$\int\limits_{\gamma} Pdx + Qdy = 0.$$

2. Для любых двух точек $A \in G$ и $B \in G$ значение интеграла

$$\int\limits_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy$$

не зависит от кривой $\widehat{AB} \subset G$, соединяющей точки A и B.

3. Выражение $P\,dx + Q\,dy$ является в G полным дифференциалом, т. е. существует функция $u(M) = u(x, y)$, $M = (x, y)$, определенная в G и такая, что

$$du = Pdx + Qdy. \tag{47.28}$$

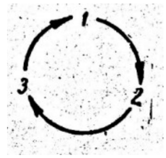
В этом случае если $A \in G$ и $B \in G$, то

$$\int\limits_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy = u\,(B) - u\,(A) \tag{47.29}$$

для любой кривой $\widehat{AB}$, соединяющей в G эти точки.

Таким образом, выполнение каждого из условий 1, 2 и 3 необходимо и достаточно для выполнения каждого из двух остальных.

Доказательство. Покажем, что из первого условия следует второе, из второго - третье, а из третьего - первое, т.е. проведем доказательство по схеме



Этим будет, очевидно, доказано, что из любого условия 1, 2 и 3 следует любое другое из них.

Первый шаг: 1 $\to$ 2. Пусть $A \in G$, $B \in G$ и даны две кривые $\left(\widehat{AB}\right)_1$ и $\left(\widehat{AB}\right)_2$, соединяющие в G точки A и B (рис. 152). Сумма $\left(\widehat{AB}\right)_1 \smile \left(\widehat{BA}\right)_2$ кривых $\left(\widehat{AB}\right)_1$ и $\left(\widehat{BA}\right)_2$ образует замкнутый контур, и потому в силу выполнения свойства 1

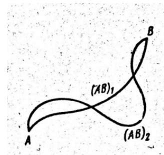


Рис. 152

$$\int\limits_{\left(\widehat{AB}\right)_1 \smile \left(\widehat{BA}\right)_2} Pdx + Qdy = 0. \tag{47.30}$$

Но

$$\int\limits_{\left(\widehat{AB}\right)_1 \smile \left(\widehat{BA}\right)_2} Pdx+Qdy = \int\limits_{\left(\widehat{AB}\right)_1} Pdx+Qdy+ \int\limits_{\left(\widehat{BA}\right)_2} Pdx+Qdy =$$

$$\int\limits_{\left(\widehat{AB}\right)_1} Pdx + Qdy - \int\limits_{\left(\widehat{AB}\right)_2} Pdx + Qdy. \tag{47.31}$$

т.е. свойство 2 выполняется.

Второй шаг: 2 $\to$ 3. Пусть $M_0 \in G$, M=(x, y) $\in$ G и $\widehat{M_0M}$– некоторая кривая, соединяющая в G точкиM_0 и M. Положим

$$u(M) = \int\limits_{\widehat{M_0M}} Pdx + Qdy.$$

В силу условия 2 при фиксированной точке M_0 функция u(x, y) является однозначной функцией, так как значение u(M) = u(x, y) не