*) Methode de Cramer : (1)

Si la Matrice A est inversible $\det(A) \neq 0$, alors le systeme est dit cramer, admet une Solution donnée par la formule de Cramer : $x_i = \dfrac{\det(A_i)}{\det(A)}$

* Methode d'élimination de Gauss :

- La ~~pho~~ fonction de la phase d'elimination est de Transformer le systéme $AX = B$ sous la forme $A'X = b'$
- Le systéme est ensuite résolu par substitution.
- faut mettre les elements de Triangulaire inférieure à 0. $\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet \end{pmatrix}$
- Si le pivot $a_{ii} = 0$ (on permute entre 2 lignes)

$$Det = (-1)^P \det(C)$$

P : nbr de Permutations de ligne

C : la Matrice triangulaire Sup (la dernière Matrice trouvé)

* Methode de Gauss à Pivot partiel : ②

Consiste à ~~trouve~~ chercher un pivot non nul dans la même colonne, où ce pivot est le plus grand en Valeur absolue, quand on le Trouve on permute.

$$a_{pk}^{(k)} = \max_{k \le i \le n} |a_{ik}^{(k)}|$$

- La derniere Matrice doit avoir des 0 ~~à la Matrice~~ (triangulaire inferieur).

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot \end{pmatrix}$$

$$Det = (-1)^p \cdot \det(C)$$

* Methode de Gauss Pivot Total : (Sans oublier de Permuter x_1 et x_3 ... si on permute les (C))

- Consiste à chercher Un pivot non nul ~~dans Toutes~~ les lignes et Colonnes, où ce pivot est le plus grand en Valeur absolu, quand on le trouve on permute.

$$\max(|\ |, |\ |)$$

- La derniere matrice doit être ecrite de cette Sorte :

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot \end{pmatrix}$$

$$Det = (-1)^p \cdot \det(C)$$

③

* Methode de Gauss Jordan:

mettre la matrice donné en Matrice identité $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

et on peut avoir la Matrice ~~I~~ Inversible dans l'autre coté $\left(\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\text{Matrice}\\A^{-1}\end{matrix}\right)$ Si la questiòn est de resoudre le système linéaire,

$$Det = (-1)^{P} \prod_{j=1}^{n} \left(A[k,j]\right)$$

$A[k,j]$: Les pivots utiliser dans chaque étape.

P: nombre de permutation

* Methode de la Factorisation L U:

* justifier l'existance de la factorisation:

$$Det\,|A_n| \neq 0$$

A_n: Les Sous matrices.

L: Triangulaire inferieur avec des 1 sur la diagonale.

U: Triangulaire Superieur avec des U sur la diagonale

(4) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}$ $U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{pmatrix}$

après on fait $A = LU$

Une fois qu'on a trouver les element de la Matrice L et U, on fait $LY = B$.

Y est un Vecteur $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, B vecteur donné dans l'exo.

Une fois on trouve les valeurs de y_1, y_2, y_3, on fait $UX = Y$.

X est un Vecteur $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, Y : le Vecteur précedent

La Solution du ~~systémome~~ système est le Vecteur X.

* Resolution du système $A^2x = b$ sans calculer A^2:

- on commence par faire $Ly = b$ (sachant y est $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ et b est le Vecteur X qu'on a trouvé quand on a calculer $UX = Y$).
- puis on calcule $UX = Y$ (sachant que x est $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et Y est le y calculé ~~précedement~~ la dernière fois)

* Methode de la Factorisation de cholesky:

- A symetrique $\Longleftrightarrow A = A^t$
- Les elements de la diagonale doivent être > 0.
- ~~Les~~ Det $|A_n| > 0$

A_n: Les sous matrices.

L: Triangulaire inférieur avec des 1 sur la diagonale.

6

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \quad L^t = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}$$

- on fait $A = L . L^t$

Une fois qu'on a Trouvé les element de la Matrice L et L^t, on fait $LY = B$. (Meme façon que facto LU)

- un fois on Trouve le valeurs de Y.

on fait $L^t X = Y$

X est un Vecteur.

La Solution du Systeme est X.

on doit Trouver : $\rho(J) < 1$ pour que la Methode de Jacobi ~~est~~ soit Convergente (CNS)

*** Les itérations avec Methode de Jacobi :**

$$Ax = b$$

Trouver x_1, x_2, x_3 sans les calculer.

- Aprés Tu calcules les itérations.

escemple :

$$(S') = \begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(3 + x_2^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{2}\left(2 + x_1^{(k)}\right) \end{cases}$$

Dans la 1ere itératoion Tu Trouveras un Nouveau vecteur $\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right)$

dans la 1ere itération $\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right)$ sont des données dans l'esco.

8

* La diagonale est strictement dominante (DSD):

$|a_{ii}| > \sum |a_{ij}|$ } CS: condition suffisante.

* ecrire les matrice D, E, F:

D: Diagonale.

E: $-a_{ij}$ Triangulaire inferieur.

F: $-a_{ij}$ Triangulaire Supérieur.

* Trouver la Matrice à l'aide de la Methode de Jacobi:

$$J = D^{-1}(E+F) = I_d - D^{-1}A$$

* Etudier la Convergence avec la Methode de Jacobi:

$$\det(J - \lambda I_3) = 0$$

Etudier la convergence = Trouver le Rayon Spectral

$$\rho(J) = \max|\lambda| \quad i \leq n$$

(Condition necessaire suffisante)

* Trouver la Matrice à l'aide de la Methode de Gauss-Seidel :

$$G = (D-E)^{-1}F$$

* Etudier la Convergence avec la Methode de Gauss-Seidel : (Condition necessaire suffisante)

$$\det(G - \lambda I_3) = 0$$

etudier la convergence = Trouver le rayon spectral

$$\rho(G) = \max_{i \leq n} |\lambda|$$

on doit Trouver : $\rho(G) < 1$ pour que la Methode de Gauss-Seidel soit convergente (CNS)

* Les iterations avec Methode de Gauss-Seidel :

$$Ax = B$$

- Trouver x_1, x_2, x_3 sans les calculer.

exemple :

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{2}\left(1 - x_2^{(k)} + x_3^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{2}\left(- x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{2}\left(1 - x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)}\right) \end{cases}$$

- Alors que on a trouvé $x_1^{(k+1)}$ du coup pas la peine d'attendre la prochaine itération pour mettre la nouvelle valeur de x_1. on la remplace dans les équations qui suivent pour trouver x_2 et x_3.

- c'est la différence dans Jacobi on attend la prochaine itération pour mettre les nouvelles valeurs de x_1, x_2, x_3. Dans Gauss_Seidel on attend pas la prochaine itération.

* Calculer le nombre d'itérations nécessaires :

* Jacobi :

$$N_i = E\left(\frac{\ln \varepsilon}{\ln(J)}\right) + 1$$

* Gauss-Seidel :

$$N_i = E\left(\frac{\ln \varepsilon}{\ln(G)}\right) + 1$$