THG 23/12/2022

CHAPITRE 1:

* Loi du prédecesseur:

$$\Gamma^{-}(x)=\{y\in X / \exists u\in U \text{ où } I(u)=y \text{ et } T(u)=x\}$$

* Loi du Successeur:

$$\Gamma^{+}(x)=\{y\in X / \exists u\in U \text{ où } T(u)=y \text{ et } I(u)=x\}$$

* L'ensemble des Voisins:

$$\Gamma(x)=\Gamma^{+}(x)\cup\Gamma^{-}(x)$$

* Loi Semi-degré exterieur:

$$d_G^{+}(x)=|\{u\in U / I(u)=x\}|$$

* Loi Semi-degré interieur:

$$d_G^{-}(x)=|\{u\in U / T(u)=x\}|$$

* Loi degré d'un Sommet:

$$\underbrace{dG(x)}_{\text{nb pair}}=d_G^{+}(x)+d_G^{-}(x)$$

Remarque:

- Si un Sommet possède une ou plusieurs boucles, chacune apporte une Contribution de 2 dans le calcul du degré de ce Sommet.

* Le plus grand degré des Sommets:

$$\underset{x\in G}{Max}\, d(x)=\Delta(G)$$

* Le plus petit degré des Sommets:

$$\underset{x\in G}{Min}\, d(x)=\gamma(G)$$

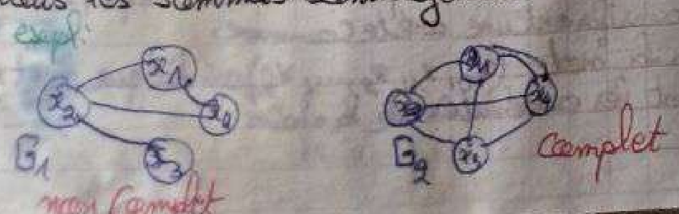
Remarque:

- On Appelle un Sommet dont le degré est égal à zero $[d_G(x)=0]$ un Sommet Isolé. et un sommet dont le degré est égal à un $[d_G(x)=1]$ un Sommet pendant.

* Graphe Complet:

on appelle graphe Complet un graphe dont tous les Sommets sont adjacents.

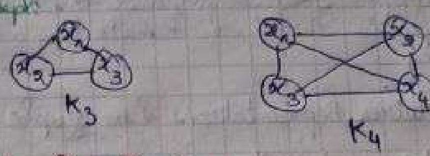
exepl:



Remarque:

- Si un graphe G est simple et Complet d'ordre n, on le note K_n.

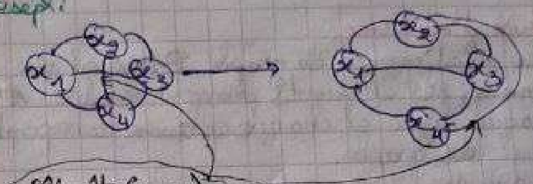
exepl:



* Graphe planaire:

Un graphe est dit planaire si on peut le dessiner sur un plan de telle façon que les arêtes ne se coupent pas, en dehors de leurs extrémités.

exepl:



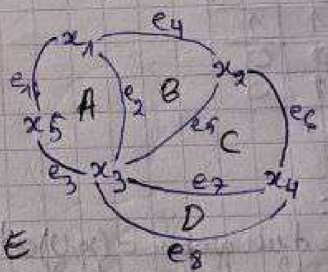
L'arête $(x_2\, x_4)$ peut être redessinée de telle façon que le graphe soit planaire

Remarque:

- Les graphes planaires vérifient la formule $|X|+F=|E|+2$ tel que: F est le nombre de faces (ou régions), $|X|$ le nombre de Sommets, et $|E|$ le nombre d'arêtes.

exepl:

on Considère le graphe planaire G suivant:



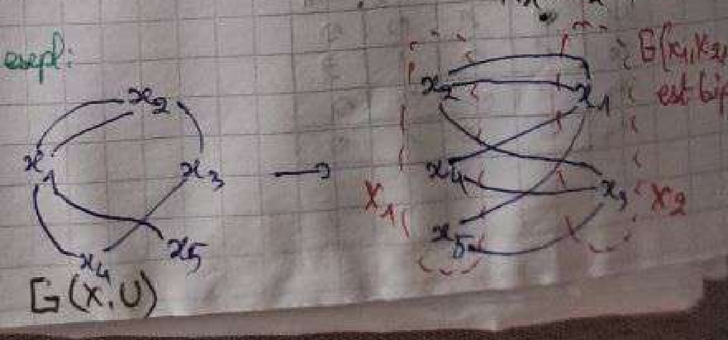
- A, B, C et D sont des faces finies.
- E est la face infinie
- Les arêtes e_1, e_2 et e_3 sont les frontières de la face A.
- Les faces A et B sont adjacentes.

* Graphe biparti:

Un graphe est biparti si l'ensemble de ses sommets peut être reparti en 2 classes X_1 et X_2 telles que, 2 Sommets de la même classe ne soient pas adjacents.

On le note $G=(X_1, X_2, U)$ avec: $X_1\cup X_2=X$, $X_1\cap X_2=\emptyset$

exepl:



Remarque :
- Un graphe G est biparti complet, si tout sommet de X_1 est adjacent à tout sommet de X_2.
- Si de plus le graphe G est simple, alors G est un graphe simple biparti-complet, on le note K_{pq} avec $|X_1| = p$ et $|X_2| = q$

CHAPITRE 2 : Autres Représentations d'un graphe.

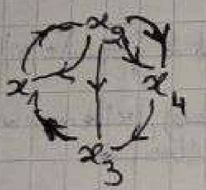
* La représentation matricielle :

À un graphe $G = (X, U)$ contenant n sommets et m arcs, c'est à dire : $|X| = n$, et $|U| = m$, on associera trois types de matrices :

* La Matrice d'adjacence :

La matrice d'adjacence du graphe $G(X,U)$ est une matrice $n * n$; ses éléments prennent 2 valeurs ou 0. Chaque ligne et chaque colonne correspondent à un sommet du graphe.
1 : signifie que les 2 sommets sont reliés par un arc orienté
0 : signifie que les 2 sommets ne sont pas reliés par un arc.

expl :

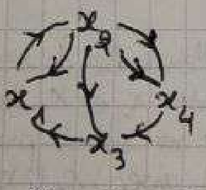


	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	1	0	0
x_2	1	0	1	1
x_3	1	0	0	0
x_4	0	0	1	0

* La Matrice Associée :

La matrice associée d'un graphe $G(X,U)$ est une matrice $n * n$, où chaque ligne et chaque colonne correspondent à un sommet du graphe, les éléments de la matrice associée indique le nombre d'arcs orientés dans le même sens reliant deux sommets.

expl :



	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	1	0	0
x_2	1	0	1	2
x_3	1	0	0	0
x_4	0	0	1	0

Remarque :
Dans la matrice associée on a :
- La somme des valeurs d'une ligne détermine le demi-degré $(d_G^+(x))$ du sommet x correspondant.
- La somme des valeurs d'une colonne détermine le demi-degré intérieur $(d_G^-(x))$ du sommet x correspondant. le demi-degré extérieur

* La Matrice d'incidence aux arcs :

La matrice d'incidence aux arcs d'un graphe $G(X,U)$ est une matrice $n * m$, ses éléments prennent les valeurs 1, 0 ou -1. Chaque ligne de la matrice est associée à un sommet et chaque colonne à un arc. Chaque élément de la matrice indique la relation entre un sommet et un arc comme suit :
+1 : signifie que le sommet est une extrémité initiale à l'arc
-1 : signifie que le sommet est une extrémité terminale de l'arc
0 : signifie qu'il n'existe pas de relations entre le sommet et l'arc.

expl :

	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	U_7
x_1	1	-1	-1	0	0	0	0
x_2	-1	1	0	1	1	1	0
x_3	0	0	1	-1	0	0	-1
x_4	0	0	0	0	-1	-1	1

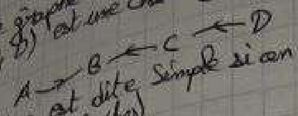
Remarque :
Cette matrice ne convient pas pour les graphes avec boucles.
Dans la matrice d'incidence on a :
- Le nombre de valeurs égales à (+1) d'une ligne donne le degré extérieur $(d_G^+(x))$ du sommet x correspondant.
- Le nombre de valeurs égales à (-1) d'une ligne donne le degré intérieur $(d_G^-(x))$ du sommet x correspondant.

CHAPITRE 3 : La Connexité dans un graphe.

* La chaîne :

Soit $G(X,U)$ un graphe, une chaîne joignant 2 sommets x_0 et x_k dans un graphe G est une suite de sommets reliés par des arêtes tels que, 2 sommets successifs ont une arête commune.
On la note : $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_k)$ on dit que x_0 et x_k sont les extrémités de la chaîne

expl: Dans le graphe G, la suite de Sommets suivante (A, B, C, D) est une chaine joignant A à D.



Une chaine est dite Simple si on passe une seule fois par ses arcs (arêtes)

*** Le chemin:**

Soit $G(X, U)$ un graphe, un chemin du Sommet x_0 à x_k dans un graphe G, est une suite de Sommets reliés successivement par des arcs orientés dans le même sens ; on le note $(x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k)$.

Autrement dit: 2 Sommets successifs d'un chemin sont respectivement extrémité initiale et terminale du même arc, exception faite au premier, et au dernier Sommet.

expl: Dans le graphe G, la Suite de Sommets suivante (A, D, C, E) est un chemin joignant A à E

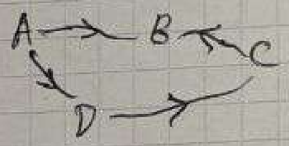
Un chemin est dit Simple si on passe une seule fois par ses arcs.

Remarque: Dans un chemin (chaîne) simple ~~dont~~ tous (tes) les Arcs (arêtes) sont différents (tes)

*** Le cycle:**

Un cycle est une chaine simple dont les 2 extrémités coïncident (x_0 coïncide avec x_k), on le note $(x_0, x_1, \ldots, x_k = x_0)$

expl: Dans le graphe G, la Suite de Sommets suivante (A, B, C, D, A) est un cycle.

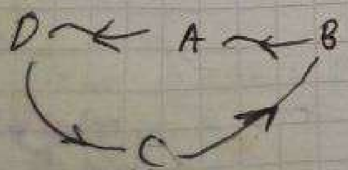


Remarque: Une Boucle est un cycle particulier.

*** Le circuit:**

Un circuit est un chemin dont les 2 extrémités sont confondues, on le note par $(x_0, x_1, \ldots, x_k = x_0)$

expl: Dans le graphe G, la suite suivante (A, D, C, B, A) est un circuit.



Une chaine (cycle - chemin - circuit) est dite élémentaire si on passe une seule fois par ses Sommets (tous les Sommets sont différents).

Remarque: La notion de chaîne et de cycle ne respecte l'orientation des arcs, par contre celle de chemin et de circuit la respecte.

I/ La Connexité:

*** la notion de la Connexité:**

on définit la Connexité dans un graphe par la relation entre 2 Sommets de la manière suivante:

2 Sommets x et y ont une relation de connexité $\Leftrightarrow$ il existe une chaine entre x et y ou bien $x = y$

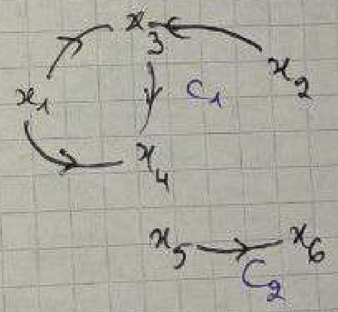
expl:

- il existe une chaine entre le Sommet x_1 et x_2 notée $C = (x_1, x_3, x_2)$

*** Les Composantes Connexes:**

on Appelle Composante connexe un ensemble de Sommets, qui ont 2 à 2 relation de la Connexité de plus tout ~~les~~ Sommet en dehors de la Composante n'a pas de relation de Connexité avec les Sommets de cette Composante.

expl: C_1: Composante Connexe 1
C_2: Composante Connexe 2



Résumé du cours de théorie des graphes

1 Notions de base

a) Vocabulaire

Définition. Un **graphe** est constitué :
– d'un ensemble fini de points appelés sommets,
– d'un ensemble fini de lignes, appelées arêtes ; chaque arête relie deux sommets appelés ses extrémités.
Si les deux extrémités d'une arête sont égales, on dit que l'arête est une boucle.
Deux arêtes différentes peuvent avoir les mêmes extrémités.

Un **graphe simple** est un graphe sans boucle dans lequel deux sommets sont reliés par au plus une arête. Dans un graphe simple, une arête a est définie sans ambiguïté par ses extrémités s et s', on note $a = ss'$.

Deux sommets sont **voisins** s'ils sont reliés par une arête.

Le **degré** du sommet s, noté $d(s)$, est le nombre d'arêtes dont s est une extrémité. Les boucles sont comptées 2 fois (une fois par extrémité).

Définition. Soit G un graphe. G' est un **sous-graphe** de G si G' est un graphe tel que les sommets de G' sont des sommets de G et les arêtes de G' sont des arêtes de G.
Le **sous-graphe engendré** par un ensemble de sommets S' est le sous-graphe de G dont les arêtes sont S', avec toutes les arêtes possibles (c'est-à-dire toutes les arêtes de G dont les deux extrémités sont dans S').

Définition. Un **graphe orienté** est un graphe où chaque arête est orientée par une flèche. Une arête orientée va d'une extrémité initiale à une extrémité finale. Dans un graphe orienté, $d^+(s)$ est le nombre d'arêtes orientées ayant s comme extrémité initiale et $d^-(s)$ est le nombre d'arêtes orientées ayant s comme extrémité finale.

Dans la suite, les graphes sont non orientés sauf si on le précise.

b) Graphes isomorphes

Définition. Deux graphes simples G, G' sont **isomorphes** si on peut numéroter les sommets de G et G' par $s_1, \dots, s_n$ de façon que :
$s_i s_j$ est une arête dans $G \iff s_i s_j$ est une arête dans G'.

Propriété 1. Deux graphes isomorphes ont les mêmes propriétés : même nombre de sommets et d'arêtes, mêmes degrés, ...

Le **graphe complet** est le graphe simple à n sommets dont tous les sommets sont voisins. On le note K_n. Pour n fixé, ce graphe est unique (c'est-à-dire que deux graphes complets à n sommets sont isomorphes).

c) Théorème des poignées de mains

Théorème 2. Soit G un graphe, S l'ensemble de ses sommets et a le nombre d'arêtes de G. Alors la somme des degrés vérifie : $\sum_{s \in S} d(s) = 2a$. En particulier, la somme des degrés est toujours paire.

2 Chemins, connexité, distance

a) Chemins

Définition. Un **chemin** dans un graphe est une suite d'arêtes mises bout à bout, reliant deux sommets appelés les **extrémités** du chemin.
Quand le graphe est simple, un chemin est défini sans ambiguïté par la suite des sommets, et $s_0 s_1 \ldots s_n$ désigne le chemin constitué des arêtes $s_0 s_1, s_1 s_2, \ldots, s_{n-1} s_n$. Les sommets s_0 et s_n sont les extrémités de ce chemin.
Un chemin orienté (dans un graphe orienté) est une suite d'arêtes orientées telles que l'extrémité finale d'une arête est égale à l'extrémité initiale de l'arête suivant. Si s_1 est l'extrémité initiale du chemin orienté, et s_2 son extrémité finale, on dit que le chemin orienté va de s_1 à s_2.

Définition. La longueur d'un chemin est égale au nombre d'arêtes qui le constituent. Un chemin est **fermé** si les deux extrémités sont égales. Une chemin est **simple** si toutes les arêtes du chemin sont différentes. Un chemin fermé simple est un **cycle**.

b) Connexité

Définition. Un graphe G est **connexe** si pour tous sommets distincts s_1 et s_2, il existe un chemin d'extrémités s_1 et s_2 (dans un graphe orienté, on demande qu'il existe un chemin allant de s_1 à s_2).
Si s est un sommet de G, la **composante connexe** de s dans G est le plus grand sous-graphe connexe de G contenant s.

Algorithme de connexité. C'est un algorithme pour trouver la composante connexe d'un sommet s_0 dans un graphe non orienté G.
On appelle "étiquette" une information qu'on ajoute à un sommet (en général on l'écrit sur le dessin, à côté du sommet).

- On met l'étiquette 0 au sommet s_0.
- Étape 1 : on met l'étiquette 1 aux sommets différents de s_0 qui sont voisins à s_0.
- Étape n : on met l'étiquette n aux sommets sans étiquette voisins à un sommet d'étiquette $n-1$.

On s'arrête quand, à l'étape n, il n'y a aucune étiquette n à mettre. La composante connexe de s_0 est le sous-graphe engendré par tous les sommets ayant une étiquette.

Pour savoir si un graphe est connexe : on applique l'algorithme de connexité à un sommet quelconque s. Le graphe est connexe si et seulement si la composante connexe de s est le graphe G tout entier.
Remarque. Cet algorithme appliqué à un graphe orienté ne donne pas la composante connexe de s_0, il donne seulement les sommets qu'on peut atteindre par un chemin orienté partant de s_0 (l'existence d'un chemin orienté de s_0 vers s n'implique pas l'existence d'un chemin orienté de s vers s_0).

c) Distance

Définition. Soit G un graphe et s, s' deux sommets. La **distance** entre s et s' est la plus petite longueur d'un chemin d'extrémité s et s'. Dans un graphe orienté, la distance de s vers s' est la plus petite longueur d'un chemin orienté allant de s à s'.

Algorithme de distance. C'est le même que l'algorithme de connexité.
Si on cherche la distance entre s_0 et s_1, on applique l'algorithme à s_0, on continue jusqu'à étiqueter s_1.
- Si s_1 a l'étiquette n alors la distance entre s_0 et s_1 est n.
- Si l'algorithme s'arrête sans avoir rencontré s_1, alors s_0 et s_1 ne sont pas dans la même composante connexe et la distance entre s_0 et s_1 n'est pas définie.

L'algorithme de distance marche aussi pour les graphes orientés : il donne la distance de s_0 vers s_1 (qui n'est pas nécessairement égale à la distance de s_1 vers s_0).

3 Cycles eulériens et hamiltoniens

a) Cycles et chemins eulériens

Définition. Dans un graphe, un **chemin eulérien** est un chemin qui contient une fois et une seule chaque arête du graphe. Un chemin eulérien fermé est appelé un **cycle eulérien**.

Théorème 3 (théorème d'Euler).
– Un graphe **connexe** a un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.
– Un graphe connexe a un chemin eulérien non fermé si et seulement si exactement 2 sommets sont de degré impair. Dans ce cas, ces 2 sommets sont les extrémités du chemin eulérien.

Construction d'un cycle eulérien quand tous les sommets sont de degré pair.
On va construire un cycle eulérien partant d'un sommet s_0 donné.
On construit un chemin simple (c'est-à-dire ne passant pas deux fois par une même arête) partant de s_0. On prolonge le chemin autant que possible. Quand on ne peut plus prolonger le chemin, son extrémité finale est nécessairement s_0, donc c'est un cycle. On l'appelle $\mathcal{C}$.
- Si $\mathcal{C}$ contient toutes les arêtes de G : $\mathcal{C}$ est un cycle eulérien, on a terminé.
- Sinon, soit G_1 le sous-graphe obtenu en retirant le cycle $\mathcal{C}$ de G. On choisit un sommet s_1 commun à G_1 et à $\mathcal{C}$. On construit un chemin simple dans G_1, partant de s_1, et on le prolonge autant qu'on peut. Le chemin obtenu est un cycle $\mathcal{C}'$. On intercale le cycle $\mathcal{C}'$ dans le cycle $\mathcal{C}$ et on obtient un cycle $\mathcal{C}_1$.
Si $\mathcal{C}_1$ contient toutes les arêtes de G, on a terminé. Sinon, on recommence (on retire le cycle $\mathcal{C}_1$ de G, etc).

G a un nombre fini d'arêtes, donc l'algorithme se termine.
A la fin, on obtient un cycle contenant toutes les arêtes de G, c'est-à-dire un cycle eulérien.

Construction d'un chemin eulérien quand il y a deux sommets s_1 et s_2 de degré impair :
On construit un chemin simple partant de s_1 et on le prolonge tant qu'on peut. L'extrémité finale de ce chemin est nécessairement s_2. On retire du graphe le chemin construit, on obtient un sous-graphe G_1 dont tous les degrés sont pairs. Le reste de l'algorithme est identique au cas des cycles eulériens : on construit un cycle dans G_1 qu'on intercale dans le chemin de s_1 à s_2, etc.

b) Cycles hamiltoniens

Définition. Soit G un graphe simple. Un **cycle hamiltonien** est un cycle passant une et une seule fois par tous les sommets de G (le sommet de départ et d'arrivée n'est compté qu'une fois).

Le graphe complet à n sommets ($n \geq 3$) a un cycle hamiltonien : les n sommets (dans l'ordre qu'on veut) forment un cycle hamiltonien.

Il n'existe pas d'algorithme efficace pour construire un cycle hamiltonien. Le théorème suivant donne une condition suffisante (mais pas nécessaire).

Théorème 4 (théorème de Dirac). Soit G un graphe simple à n sommets avec $n \geq 3$. Si pour tout sommet s, $d(s) \geq n/2$, alors il existe un cycle hamiltonien dans G.

4 Coloriage

a) Vocabulaire

Définition. Soit G un graphe simple. Un **coloriage** de G consiste à attribuer des couleurs aux sommets de manière que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Le **nombre chromatique** de G est le nombre minimum de couleurs nécessaires à son coloriage. On le note $\boldsymbol{\gamma(G)}$.

Définition. Un sous-ensemble de sommets est **stable** s'il ne contient pas de sommets voisins.

[x,y] : Arête (arc non orienté)

[x,x] : Boucle : c'est ...

Propriété 5. Si on a un coloriage de G, l'ensemble des sommets d'une couleur donnée est un sous-ensemble stable. C'est la même chose de se donner :
- un coloriage avec k couleurs.
- k sous-ensembles stables sans éléments communs dont la réunion est l'ensemble des sommets.

b) Encadrement du nombre chromatique

Il n'existe pas de formule ou d'algorithme efficace donnant le nombre chromatique à tous les coups. En général, on obtient un encadrement : $m \leq \gamma(G) \leq M$. Si $m = M$, on a trouvé $\gamma(G)$ (qui vaut $m = M$).

Propriété 6. Si H est un sous-graphe de G alors $\gamma(H) \leq \gamma(G)$; en particulier, si G contient un sous-graphe complet à k sommets alors $\gamma(G) \geq k$ (le nombre chromatique d'un graphe complet à k sommets est k).

Propriété 7. Si on a un coloriage de G avec k couleurs alors $\gamma(G) \leq k$.

Théorème 8. Si r est le maximum des degrés des sommets du graphe simple G, $\gamma(G) \leq r + 1$.

c) Algorithme de coloriage

- On classe les sommets de G de telle sorte que leurs degrés soient décroissants :
$s_1, s_2, \ldots, s_n$ avec $d(s_1) \geq d(s_2) \geq d(s_3) \cdots \geq d(s_n)$.
- Étape 1 : on donne la couleur C1 au sommet s_1. On parcourt la liste des sommets, dans l'ordre. Quand on rencontre un sommet non voisin à un sommet déjà colorié avec C1, on lui donne la couleur C1.
- Étapes suivantes : on donne une nouvelle couleur C au premier sommet de la liste non colorié. On parcourt la liste des sommets, dans l'ordre. Quand on rencontre un sommet non colorié et non voisin à un sommet déjà colorié avec C, on lui donne la couleur C.
On s'arrête quand tous les sommets sont coloriés. On a alors un coloriage de G.

Attention : cet algorithme donne souvent un bon coloriage, mais pas toujours un coloriage avec le moins de couleurs possible.

5 Automates

Définition. Un **automate** (ou automate fini déterministe) est un graphe orienté qui possède un sommet initial et un ou plusieurs sommets finaux, et dont toutes les arêtes ont une étiquette appartenent à un ensemble fini $\mathcal{A}$. De plus, de chaque sommet part une seule arête avec une étiquette donnée.

Convention. On indique le sommet initial par une flèche qui pointe sur ce sommet et dont l'extrémité intiale ne par d'aucun sommet (contrairement aux arêtes du graphe). On indique les sommets finaux en les entourant d'un double rond. En général, les sommets sont numérotés et entourés d'un rond.

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble fini de lettres (ou de chiffres). $\mathcal{A}$ est appelé un **alphabet**, et les suites finies d'éléments de $\mathcal{A}$ sont appelées des **mots**. Dans un mot, l'ordre des lettres compte ; des lettres peuvent être répétées.

Définition. Soit G un automate étiqueté par l'alphabet $\mathcal{A}$. On dit qu'un mot m est reconnu par G s'il existe un chemin orienté partant du sommet initial et arrivant à un sommet final, dont la suite des étiquettes des arêtes du chemin forment le mot m. L'ordre compte (les arêtes sont prises dans l'ordre du chemin et doivent donner les lettres du mot dans l'ordre).

RESUME DE THEORIE DES GRAPHES

I. Graphe $G(X, U, \psi, \nu, \varepsilon)$

1. Définitions

- **Graphe $G(X, U, \psi, \nu, \varepsilon)$:**
  - X, U : ensembles de nœuds et d'arc
  - $\psi : U \to X \times X$ fonction d'incidence
  - ν, ε : fonctions d'étiquetage des nœuds et arc
- **Sous graphe de G :** G moins certains arcs et nœuds associés
- **Graphe partiel de G :** G mois certains arcs (graphe où on extrait les arêtes)
- **Sous graphe partiel de G :** graphe partiel d'un sous graphe
- **Clique :** Nœuds d'un sous graphe complet de G
- **Graphe complémentaire de G :** $\bar{G}(X, \bar{U})$

2. Propriétés

- **Ordre du graphe :** $|G| = \text{card}\, X$: Nombre de Sommets : $|V| = n$
- **Taille du graphe :** $\|G\| = \text{card}\, U$ $|E| = m$:
- **Graphe régulier :** $d(x) = cst\ \forall x$ (Tous les sommets ont le meme degrés et le meme nbr d'arêtes) $\boxed{m = \frac{k * n}{2}}$ nombre d'arêtes d'un k-régu
- **Graphe complet :** tous nœuds reliés (complet si les sommets de G sont 2 à 2 adjacents)
- **p-graphe :** maxi p arcs avec même extrémités (P : le nbr max d'arêtes liant 2 Sommet)
- **Graphe simple :** 1-graphe alors : $m \leq \frac{n(n-1)}{2}$ / $d(x) \geq \frac{n}{2}$
- **Graphe multiple :** p-graphe avec $p > 1$
- **Graphe symétrique :** Que des arêtes
- **Graphe antisymétrique :** Aucune arête
- **Graphe transitif :** $\exists(x, y)$ et $(y, z) \Rightarrow \exists(x, z)$

graphe Valué : chacune des aretes ou Sommets presente une Valeur (poids)

II. Nœuds ($\in X$)

- y successeur de $x \Leftrightarrow x$ prédécesseur de $y \Leftrightarrow \exists(x, y) \in U$
- x adjacent à $y \Leftrightarrow y$ adjacent à $x \Leftrightarrow \exists(x, y)$ ou $(y, x) \in U$

- $\Gamma^+(x)$: successeurs de x
- $\Gamma^-(x)$: prédécesseurs de x
- $\Gamma^+(x) \cup \Gamma^-(x)$: adjacents de x

- $d^+(x) = |\Gamma^+(x)|$: demi-degré extérieur de x
- $d^-(x) = |\Gamma^-(x)|$: demi-degré intérieur de x
- $d(x) = d^+(x) + d^-(x)$: degré de x

Degré : $d(x)$: le nb d'arcs (aretes) qui lui sont incidents.

- $\Gamma^+(x) = 0 \Leftrightarrow x$ est un puits
- $\Gamma^-(x) = 0 \Leftrightarrow x$ est une source
- $\Gamma^+(x) = \Gamma^-(x) = 0 \Leftrightarrow x$ est un nœud isolé

Adjacence : 2 Sommets d'un graphe sont dit adjacents s'ils sont joint par un Arc ou une arete.

Multiplicité : le nb max d'aretes ou arc liant 2 m Sommets. Si Max $a_{ij} \leq 1$ simple Sinon pas simple

Incidence : Si xy est une Arete (Arc) on dit alors que l'arete (Arc) xy est incident à x et à y.

2 Arcs (Aretes) sont adjacents s'ils sont incident à au moins un meme Sommet.

RESUME DE THEORIE DES GRAPHES

III. Arc et arêtes ($\in U$)

1. Définitions

- (x, y) : Arc (orienté)
- $[x, y]$: Arête (arc non orienté)
- $[x, x]$: Boucle : c'est un arc ou une arête dont les 2 extrémités sont confondues.

2. Propriétés

- u incident extérieurement à $x \Leftrightarrow u = (x, \dots)$
- u incident intérieurement à $x \Leftrightarrow u = (\dots, x)$
- U incident extérieurement à $X \Leftrightarrow$ tous les arcs partent de X
- U incident intérieurement à $X \Leftrightarrow$ tous les arcs arrivent dans X

- $\omega^+(x)$: arcs incidents extérieurement
- $\omega^-(x)$: arcs incidents intérieurement
- $\omega^+(A) = \{(x, y) \in U | x \in A,\ y \notin A\}$: cocircuit exterieur
- $\omega^-(A) = \{(x, y) \in U | x \notin A,\ y \in A\}$: cocircuit interieur
- $\omega(A) = \omega^+(A) \cup \omega^-(A)$: cocycle

IV. Séquences

1. Définitions

- **Chaine :** Séquence ne tenant pas compte du sens des arcs (Séquence successive de Sommets $x_1 e_1 x_2 e_2 \dots$)
- **Cycle :** Chaine qui revient au départ (Chaine dont les extremités sont Confondues)
- **Pseudo-cycle :** Cycle où une arête peut être utilisée plusieurs fois
- **Chemin :** Séquence tenant compte du sens des arcs (Chaine dont les arc sont tous orienté dans le meme sens)
- **Circuit :** Chemin qui revient au départ

cocycle : est un Sous ensemble d'arcs ou d'aretes liant 2 block d'un graphe

2. Propriétés

- **Elémentaire :** Ne passe pas 2 fois par le même nœud
- **Simple :** Ne passe pas 2 fois par le même arc
- **Eulérien :** Passe par chaque arc 1 fois exactement (Sommet degré impair)
- **Hamiltonien :** Passe par chaque nœud 1 fois exactement
- **Connexité :** x connexe à $y \Leftrightarrow \exists$ Chaine(x, y) (si on peut visiter n'importe lequel sommet x à partir d'un Sommet y)
- **Forte-connexité :** x connexe à $y \Leftrightarrow \exists$ Chemin(x, y)

3. Distances

- **Distance(i,j) :** Longueur du plus court chemin de i à j
- **Diamètre de G :** $\max_{i,j \in X} \text{distance}(i, j)$
- **Excentricité de i :** $\max_{j \in X} \text{distance}(i, j)$
- **Centre de G :** Nœud d'excentricité minimale

Matrice d'adjacence : * Graphe non orienté : $a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i \text{ et } j \text{ sont adjacent} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ * orienté : $\begin{cases} 1 \text{ s'il existe un arc de } i \text{ vers } j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Matrice d'incidence : $\begin{cases} 1 \text{ si } I(U_j) = i \\ -1 \text{ si } T(U_j) = i \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ initiale, Terminale

V. Propriétés

1. Connexité

- **Graphe (frtmt-)connexe :** Nœuds du graphe 2 à 2 (fortement-)connexes.
- **Composante (frtmt-)connexe :** Nœuds d'un sous-graphe 2 à 2 (fortement-)connexes. (entre 2 sommets des arêtes)
- **Graphe semi-frtmt-connexe :** Graphe dont des composantes frtmt-connexes sont connexes
- **Classe d'équivalence :** Composante frtmt-connexe maximale
- **Graphe réduit :** Graphe limité aux classes d'équivalences
- **Nombre de connexité :** Nombre de classes d'équivalences

G Connexe $m \geq n-1$ / G est Sans cycle $m \leq n-1$

2. Arbre

- **Racine r / Anti-racine $\bar{r}$:** $\forall x, \exists$ Chemin(r, x) / $\forall x, \exists$ Chemin$(x, \bar{r})$
- **Arbre de coût min :** Graphe partiel | somme des arcs minimale

arbre : est un graphe connexe sans cycle, arborescence : un arbre qui admet une racine.

3. Points sensibles

- **Point d'articulation :** Nœud dont la suppr. augmente le nombre de composante connexes
- **Isthme :** Arête dont la suppr. augmente le nombre de composante connexes
- **Coupe :** Ensemble d'arcs séparant le graphe en 2

4. Adjacence

∈ biparti se partitionne en 2 classes

- **Graphe bi-parti :** X peut-être partitionné en 2 stables (graphe l'ensemble de ses sommets peuvent être
- **Stable :** Sous-graphe | Deux nœuds ne sont pas adjacents. (Sous graphe sans arêtes)
- **Couplage :** Sous-graphe partiel | 2 arêtes ne sont pas adjacentes. (crée des couples) (indépendante)
  - *Max : nombre d'arêtes max / Parfait : tous les nœuds sont saturés* (non adjacents
  - *Nœud saturé si dans le couplage*
- **Recouvrement :** Famille d'arête qui sature tous les nœuds
- **Absorbant A :** $\forall x \notin A, \exists$ successeur dans A
- **Noyau S :** Stable absorbant *(Unique pour graphe sans circuit)*
- **Support T de G :** Tout arête de G a au moins une extrémité dans T
  - *T support de $G \Leftrightarrow (X - T)$ stable de G*
- **Nombre chromatique :** Nombre minimum de stables dont l'union est X

Couplage Maximal : il est impossible d'ajouter une arête au couplage.
Couplage Maximum : il est impossible de trouver un Couplage de taille plus importante dans le graphe.

5. Représentation

- **Graphe planaire :** Existence d'une représentation où les arêtes ne se croisent pas (les arêtes ne se coupent pas)
  - *Saturé si ajout d'un arc fait perdre la planarité* $m \leq 3n-6$ planaire
  - *Non planaire si $K_{3,3}$ ou $K_5 \subset G$* $m > 3n-6$ Pas planaire
- **Graphe dual G^* :** Nœuds G^* = faces G / Arêtes G^* : adjacence de faces G
  - *G^* planaire, connexe, sans nœud isolé*
- **Graphe de ligne G' :** Nœuds G' = arêtes G / Arêtes : adjacence d'arêtes dans G
- **Graphes isomorphes :** $\exists$ bijection entre graphes
- **Graphe triangulé :** Si tout cycle de lg > 3 admet une corde (relie 2 nœuds non-consécutifs)
- **Graphe d'intervalle :** 1 nœud par ensemble / Arrête si ensemble ont une intersection $\neq \emptyset$
  - *Triangulé, complémentaire = graphe de comparabilité*
  - *Sous-graphe induit par sous-ensemble de nœuds est graphe d'intervalle*
- **Graphe de comparabilité :** Permet d'établir une relation d'ordre
  - *$\Leftrightarrow \forall$ pseudo-cycle de lg impaire, $\exists$ une corde permettant de sauter 1 nœud*
- **Graphe de flot :** 1 source et 1 puits, arcs : capacité $c(u)$, flot $f(u)$
  - *Flot compatible : $f(u) \leq c(u)$ / Flot complet : $f(u) = c(u)$*

Nbre de face = m − n + 2

Rang (A) = le nbr max de colonne LI.

VI. Algorithmes

1. Maximisation de flot : Ford-Fulkerson

- Initialiser avec un flot nul
- Chercher une chaine source – puit
- Saturer la chaine (sachant que les arcs parcourus à l'envers reçoivent un flot négatif)
- Répéter en augmentant le flot

2. Calcul du « plus court chemin » : Dijkstra

a. Principe

- Calcul du chemin ayant le poids le plus faible.
- Arcs valués positivement, pas de circuit.
- Pour trouver le chemin, il faut que chaque nœud se souvienne de son prédécesseur privilégié.

b. Algorithme pour un chemin de 1 à k

$S = \{1\}$ % noeuds déjà visités
$\mu(1) = 0$ % potentiel depuis 1
$\mu(j) = \infty \; \forall j \notin S$ % potentiel depuis 1 initialement infinis
$i = 1$ % dernier nœud visité

while $k \notin S$
  % calcul des potentiels depuis le dernier nœud ajouté
  for $j \in \Gamma^+(i)$
    $\mu(j) = \min\{\mu(j)\ ;\ \mu(i) + \text{cout}\, i, j\}$
  end

  % selection du noeud entrant i
  $i = \underset{j \notin S}{\operatorname{argmin}}\, \mu(j)$
  $S = S \cup \{i\}$
end