Proba

* Calculer une Probabilité :

Ω : l'ensemble des resultats finis.

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{Nb de Cas favorable}}{\text{Nb de Cas Possible.}}} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

* Probabilité Conditionnelle :

A sachant B (quand, lorsque, sachant que)

$$P\left(\substack{\text{evenemenement}\\ \text{Condition}}\right) = P_B(A) = P(A/B).$$

$$\boxed{P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}}$$

$$\boxed{P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)}$$

$$\boxed{P(A\cap B) = P(A) + P(B) - P(A\cup B)}$$

Si Vous Avez $P(A)$ et $P(B)$ mais pas $P(A\cup B)$ → $\boxed{P(A\cap B) = P(A) \times P(B/A)}$ → B sachant A

1

I/ Analyse Combinatoire :

* Arrangement avec Repetition : (avec ordre)

- Successivement (l'ordre)
- Avec Remise (Avec Rep)
- on Tire "p" parmi (n)

* $n^p \Rightarrow$ nbr de façons de choisir "p" objet parmi (n)

exemple : ABC (3 lettres) on Tire 2 lettres parmi 3.

$$n^p = 3^2 = 9$$

AB	CA	BB
BA	BC	CC
AC	CB	AA

* Arrangement sans Repetition : (avec ordre)

- Successivement (l'ordre)
- Sans Remise (Sans Rep)
- on Tire "p" parmi (n)

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

exemple : meme que celui d'avant.

$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3\times2\times1}{1} = 6$$

AB	AC	BC
BA	CA	CB

*** Permutation (Arrangement): (Avec ordre)**

Cas particulier : $n = p$

- Tirage Succesif
- Tirage sans/Avec Remise
- on tire "n" permi "n"

} Permutation.

$n!$ $\qquad$ $\dfrac{n!}{k_1!\,k_2!\ldots k_n!}$

Non Rep

*** Permutation sans Rep (Remise):**

- Combien de façons peut-on placer un groupe de 5 personnes sur 5 chaises.

$$n! = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

*** Permutation avec Rep (Remise):**

- Combien de mots peut-on former avec A, B, C

$\underbrace{C, D}_{k_1=2}, \underbrace{E, E, D}_{k_2=2}, \underbrace{F, F, F}_{k_3=3}$

$$\frac{9!}{2!\,2!\,3!} = 15120$$

* Combinaison : (Sans ordre)

- on Tire "p" parmi n
- Simultanement (Sans ordre)
- Sans Remise (Sans Rep)

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

nbr de façons de choisir "p" objets parmi "n" sans ordre et sans Rep

exemple : ABC (3 lettres) on Tire 2 lettres parmi 3 simultanement.

$$C_3^2 = \frac{A_3^2}{2!} = \frac{3!}{2!(1!)} = \frac{3\times2\times1}{2\times1} = 3$$

$\boxed{AB, BA}$ 1 $\boxed{BC, CB}$ 2 $\boxed{AC, CA}$ 3

II les lois d'une variable aleatoire :

→ Continue $X = [\ldots\ ]$: intervalle

→ Discrete $X = \{1, 2, 3, 4\}$

* Variables aleatoires discretes

*** Loi de X (Fonction de masse) :**

$$P_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0;1]$$

$$x \longrightarrow P_X(x) = \boxed{P(X = x)}$$

d'ou $\sum P(X=x) = 1$

*** Fonction cumulative (Fonction de Repartition) :**

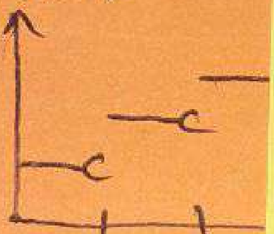
$$F : \mathbb{R} \longrightarrow [0;1]$$

$$x \longrightarrow F(x) = \boxed{P(X \leqslant x)}$$

Mase de cette fonction atteint 1

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_1 \\ P(X = x_1) & \text{si } x_1 \leqslant x < x_2 \\ P(X = x_1) + P(X = x_2) & \text{si } x_2 \leqslant x < x_3 \\ P(X = x_1) + \ldots & \text{si } x \geqslant x_n \end{cases}$$

* graphe de F



graphe en

- $P(a < X \leq b) = F(b) - $
- $P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) + P(X = a)$
  $= F(b) - F(a) + P(X = a)$
- $P(a < X < b) = P(a < X \leq b) - P(X = b)$
  $= F(b) - F(a) - P(X = b)$
- $P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$
- $P(X < a) = P(X \leq a - 1) = F(a - 1)$

* Esperance :

$$E(X) = \sum x \, p(X = x)$$

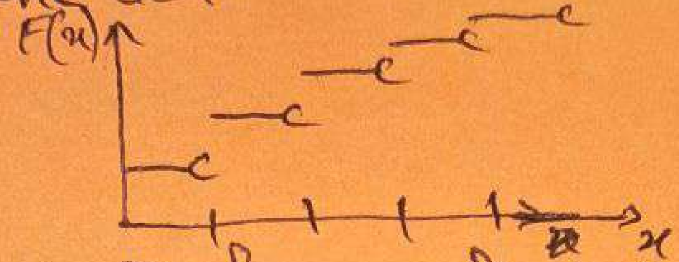
* Variance :

$$V(X) = \sum x^2 p(X = x) - E(X)^2$$

* Ecart Type :

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

* graphe de F



graphe en escalier de F

- $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$
- $P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) + P(X = a)$
  $= F(b) - F(a) + P(X = a)$
- $P(a < X < b) = P(a < X \leq b) - P(X = b)$
  $= F(b) - F(a) - P(X = b)$
- $P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$
- $P(X < a) = P(X \leq a - 1) = F(a - 1)$

* Variables aléatoires continues:

* Loi de X (Fonction de densité):

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \geq 0 \ ; \forall x \in \mathbb{R} \\ f \text{ est intégrable} \\ \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1 \end{array}\right\} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

* Fonction de Répartition: $F'(x) \underset{\text{dérivé}}{\overset{\text{intégral}}{=}} f(x_0)$

- Si $x \leq a$: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 0$

- Si $a \leq x < b$: $F(x) = \int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt + \int_{a}^{x} f(t)\,dt$

- Si $x \geq b$: $F(x) = \int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt + \int_{a}^{b} f(t)\,dt + \int_{b}^{x} f(t)\,dt$

* Espérance:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\,dx$$

7

* Variance :

$$V(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx - (E(x))^2$$

* L'ecart Type :

$$\sigma x = \sqrt{V(x)}$$

III/ Loi Usuelles de Probabilités :

I/ lois discretess

* loi de Bernoulli : est une experience aleatoire ayant deux issues possibles (succès, echec, defectueuse, non defectuese)

P : succès

q : echec : $q = 1 - p$

on note : $X \rightsquigarrow B(p)$

$$\boxed{P(X=x) = p^{x}(1-p)^{1-x}} \quad x = 0;1;$$

$$\boxed{E(x) = p}$$

$$V(x) = p - p^2 = p(1-p) = \boxed{pq}$$

* <u>loi Binomiale :</u> qui represente le nombre de succés obtenus en n epreuves de bernoulli.

on note : $X \rightsquigarrow B(n, p)$ — n: nb epreuves — p: Proba Succés

$$\boxed{P(X=x) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x} \quad x = 0, 1, \ldots, n}$$

$$\boxed{E(x) = np}$$

$$\boxed{q = 1-p}$$

$$\boxed{V(x) = npq}$$

*** Loi de Poisson**: un evenement qui se produit λ fois durant un intervalle de Temps donné. X: represente le nb de fois que cet evenement se produise dans un intervalle de Temps donné.

On note: $X \rightsquigarrow P(\lambda)$

$$\boxed{P(X=x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} \quad x \in \mathbb{N}}$$

$$\boxed{E(X) = V(X) = \lambda}$$

II/ Lois Continues :

*** Loi Uniforme :** on dit qu'une va X suit une loi uniforme de Paramètres a et b si sa fct de densité est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

on note $X \rightsquigarrow U(a,b)$

- Sa fct de repartition est donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

$$E(x) = \frac{a+b}{2} \qquad V(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

*** Loi exponentielle :** on dit qu'une v.a X suit une loi Exp de paramètre $\lambda > 0$ si sa fct de densité est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

on note $X \rightsquigarrow exp(\lambda)$

* Sa fct de répartition est donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

– la loi expo~~nt~~ est utilisée pour modéliser les Temps d'attente ou durée de vie.

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \qquad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

* **Loi Normale** : on dit qu'une va X suit une loi normale (dite aussi de Laplace-Gauss) de paramètres m et $\sigma > 0$, si sa fct de densité est donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp - \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

on note $X \rightsquigarrow N(m, \sigma)$

$$Z = \frac{X-m}{\sigma} \text{ suit une loi } N(0,1)$$

$$P(X \leq x_1) = P\left(\frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{x_1-m}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{x_1-m}{\sigma}\right)$$

$$E(X) = m \qquad V(X) = \sigma^2$$

* Les Estimations:

$x_1, x_2, \dots x_n$: les valeurs de l'echantillon

$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$: la Moyenne de l'echantillon, le Meilleur estimateur de la Moyenne.

$\hat{m} = \hat{x}$: moyenne de l'echantillon.

$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{X}^2$: la variance de l'echantillon

$\hat{s}^2 = \frac{n}{n-1} S^2$: le meilleur estimateur de la variance

valeur estimé

$\sigma = \hat{s} = \sqrt{\hat{s}^2}$: le meilleur estimateur de l'ecart Type.

Niveau $= 1-\alpha$ seuil : α

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = 5\% \Rightarrow z_\alpha = 1,96 \\ \alpha = 1\% \Rightarrow z_\alpha = 2,575 \\ \alpha = 3\% \Rightarrow z_\alpha = 2,17 \\ \alpha = 10\% \Rightarrow z_\alpha = 1,645 \end{array}\right\} \text{loi normale.}$$

Donnée	Intervalles de Confiance
$n > 30$ σ Connu	$IC_\alpha(m) = \left[\bar{x} - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ $\Phi(z_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ table $N(0,1)$
$n > 30$ σ inconnu	$IC_\alpha(m) = \left[\bar{x} - z_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}}\right]$ ecart Type $\Phi(z_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$
$n \leq 30$ σ Connu $X \sim N(m, \sigma)$	$IC_\alpha(m) = \left[\bar{x} - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ $\Phi(z_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$
$n \leq 30$ σ inConnue $X \sim N(m, \sigma)$	$IC_\alpha(m) = \left[\bar{x} - t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}}\right]$ ecart type $P(T > t_\alpha) = \frac{\alpha}{2}$ $T \sim T_{n-1}$ (en utilisant loi de student ligne = $n-1$ colonne = α)
$n > 30$ $n\hat{p} > 5$ $n\hat{p}(1-\hat{p}) > 5$	$IC_\alpha(p) = \left[f - z_\alpha \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, f + z_\alpha \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$ $\hat{p} = f$, $\Phi(z_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ $N(0,1)$

m Connue	$IC_\alpha(\sigma^2) = \left[\frac{ns^2}{k_1}, \frac{ns^2}{k_2}\right]$ $P(\chi^2_n > k_1) = \frac{\alpha}{2}$ $P(\chi^2_n > k_2) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ si $n > 30$ on fait la loi Normal $\chi^2_{(n)} \approx N(n, \sqrt{2n})$
m inconnue	$IC_\alpha(\sigma^2) = \left[\frac{(n-1)s^2}{k_1}, \frac{(n-1)s^2}{k_2}\right]$ $P(\chi^2_{(n-1)} > k_1) = \frac{\alpha}{2}$; $P(\chi^2_{(n-1)} > k_2) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ si $n > 30$: $\chi^2_{(n-1)} \approx N($[illegible]$)$

$\Phi(\alpha) = 1 - \Phi(-\alpha)$

$\Phi(-\alpha) = 1 - \Phi(\alpha)$