Traitement numérique du signal − 3 ETI

ABID CHAREF Samy - VERNOUX Thomas

Compte rendu TP2

Transformée de Fourier discrète

1 Préparation

Préparation partie 2

1) La propriété essentielle d'une TFTD est que celle-ci est 1-périodique avec f, la fréquence réduite, comme variable continue.

2) On considère la séquence $x[k] = r^k U[k]$ avec $r < 1$. Déterminons $X(f)$, la TFTD de $x[k]$. Par définition il vient :

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-2i\pi kf}$$

Ainsi,

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^k U[k] e^{-2i\pi kf} = \sum_{k=0}^{\infty} r^k e^{-2i\pi kf} = \sum_{k=0}^{\infty} (re^{-2i\pi f})^k$$

Or on sait que que $\left|e^{-2i\pi f}\right| < 1$ et $r < 1$ donc cette série géométrique converge. Finalement, on obtient :

$$X(f) = \frac{1}{1-re^{-2i\pi f}}$$

Préparation partie 3

Soit $s[k] = cos(2\pi f_0 k)$ pour $0 \le k \le M-1$

1)Pour $f \ne f_0$ On a $S(f) = \sum_{k=0}^{M-1} s[k] e^{-2i\pi kf}$, sachant que d'après la formule d'Euler $cos(2\pi f_0 k) = \frac{1}{2}(e^{+i2\pi k f_0} + e^{-i2\pi k f_0})$, il vient :

$$S(f) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{M-1} (e^{-2i\pi k(f-f_0)} + e^{2i\pi k(f+f_0)})$$

Sachant que d'une part $\left|(e^{-2i\pi k(f-f_0)}\right| < 1$ et d'autre part $\left|(e^{2i\pi k(f+f_0)}\right| < 1$, on en déduit :

$$S(f) = \frac{1}{2}\left(\frac{1-e^{-i2\pi k(f-f_0)M}}{1-e^{-i2\pi k(f-f_0)}} + \frac{1-e^{i2\pi k(f+f_0)M}}{1-e^{i2\pi k(f+f_0)}}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-i\pi k(f-f_0)(M-1)} \frac{sin(\pi k M(f-f_0))}{sin(\pi k(f-f_0))} + e^{-i\pi k(f+f_0)(M-1)} \frac{sin(\pi k M(f+f_0))}{sin(\pi k(f+f_0))}\right)$$

2) Cas 1 $f = f_0$:

Posons $x = f - f_0$, alors $\lim_{f \to f_0} x = 0$, ainsi en utilisant un développement limité au voisinage de 0, il vient :

$$\frac{sin(\pi k M(f-f_0))}{sin(\pi k(f-f_0))} \sim \frac{\pi k M(f-f_0)}{\pi k(f-f_0)} = M$$

D'où on en déduit, $\lim_{f \to f_0} S = \frac{1}{2}\left(M + e^{-i2\pi k f_0(M-1)} \frac{sin(\pi 2kMf_0)}{sin(\pi 2kf_0)}\right)$

3) On raisonne de la même manière pour le cas 2 $f = -f_0$, on obtient :

$$\lim_{f \to -f_0} S = \frac{1}{2}\left(e^{i2\pi k f_0(M-1)} \frac{sin(\pi 2kMf_0)}{sin(\pi 2kf_0)} + M\right)$$

2 TFTD d'une séquence de longueur infinie et TFD

1) Introduction

Le but de cette partie est de mettre en évidence les différences entre la TFTD et la TFD des séquences définies par : $x[k] = (0.91)^k U[k]$ et $s[k] = (0.91)^k$ pour $0 \le k \le M-1$.

Pour cela nous allons tracer les deux fonctions en question et les comparer.

2) Fonction génératrice de séquences

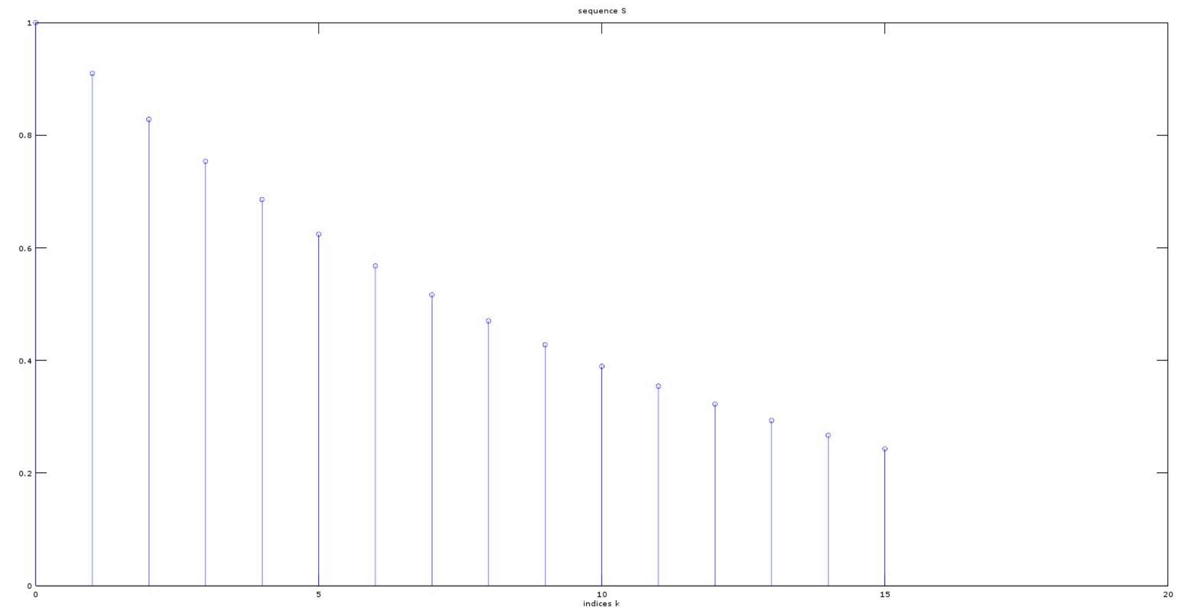
Cette fonction a pour but de générer une séquence de durée limitée $s[k] = (0,91)^k$ pour $0 \le k \le M-1$. Elle prend en paramètre la longueur M de cette séquence et retourne la TFD de cette séquence ainsi que ses abscisses.

```
function [S,k_S] = generateur_de_sequence_s_de_k (M)
  k = linspace(-1.5,1.5,M); # notre séquence s'étend de -1.5 à 1.5
  s = (0.91).^(k); # On crée la séquence
  figure(1) # On affiche la séquence créée avec stem
  stem(k,s);
```

```
  title("sequence S");

  # on va calculer la TFD 2048 points
  S = fft(s,2048); # fft renvoi la TFD
  k_S = linspace(0,1,2048); # on crée le vecteur abscisses
```

```
clear all ; clc ; close all

M=5; # nombre de points composant la séquence (variable)
[S,k_S] = generateur_de_sequence_s_de_k (M); # S est la fft de s,
le signal en question
```

Cette fonction permet aussi l'affichage de la séquence $s[k]$ créée.



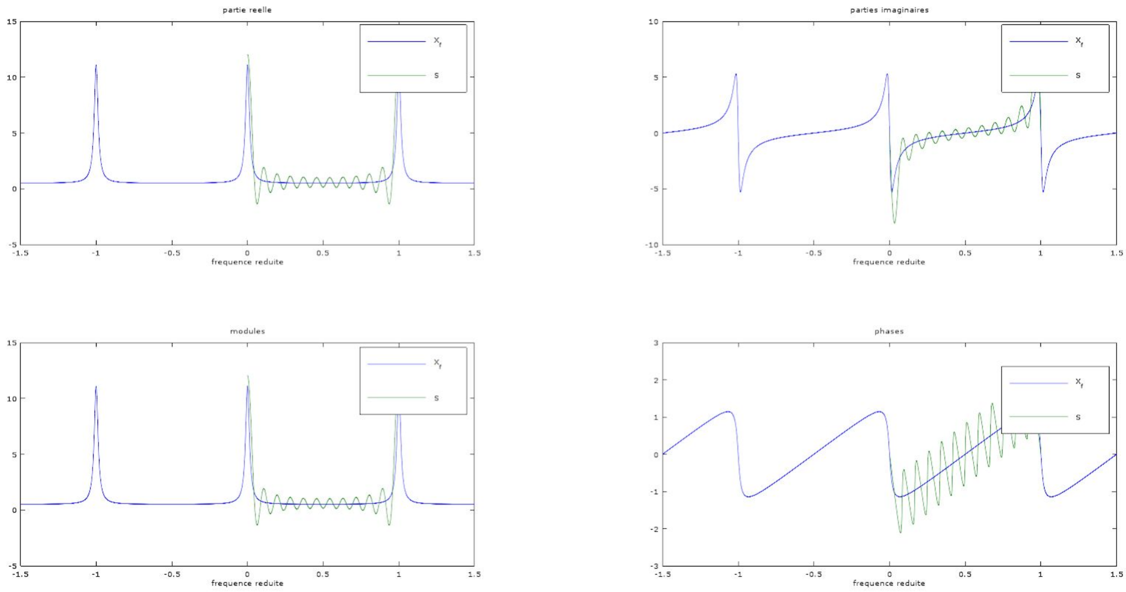
Séquence S[k] pour k allant de 0 à 15

On observe bel et bien une décroissance au fur à mesure que les indices augmentent. Ce qui confirme qu'il s'agit d'une suite géométrique de raison $r < 1$.

3) Etude de $X(f)$ et $S(f)$. Liens entre TFTD et TFD.

Dans cette partie on étudie $X(f)$ et $S(f)$ qui constituent respectivement la TFTD de $x[k]$ et la TFD 2048-points de $s[k]$ auquelle on a adapté l'intervalle des abscisse en fréquences réduites f. Pour cela on affiche sur une même figure les parties réelles, imaginaires, modules et phases de $S(f)$ et $X(f)$.

```
# On génère le vecteur X(f) ainsi que le vecteur fréquences
N = 2048;
f = -1.5:1/N:1.5-1/N;
r = 0.91;
X_f = 1./(1-r*exp(-2*i*pi*f));
# Il y a ensuite divers affichages, cf .m en annexe.
```



Partie réelle, imaginaire, module et phase des séquence S(f) et X(f)

On rappelle les relations trouvées lors de la préparation et dans le cours :
$X(f) = \sum_{k=0}^{\infty} s[k]e^{-2i\pi kf}$ et $S[n] = S(f_n) = \sum_{k=0}^{N-1} s[k]e^{-2i\pi kf_n}$ avec $f_n = \frac{n}{N},\ 0 \leq n \leq N-1$
On observe tout d'abord que $X(f)$ est 1-périodique puisqu'il s'agit d'une TFTD.

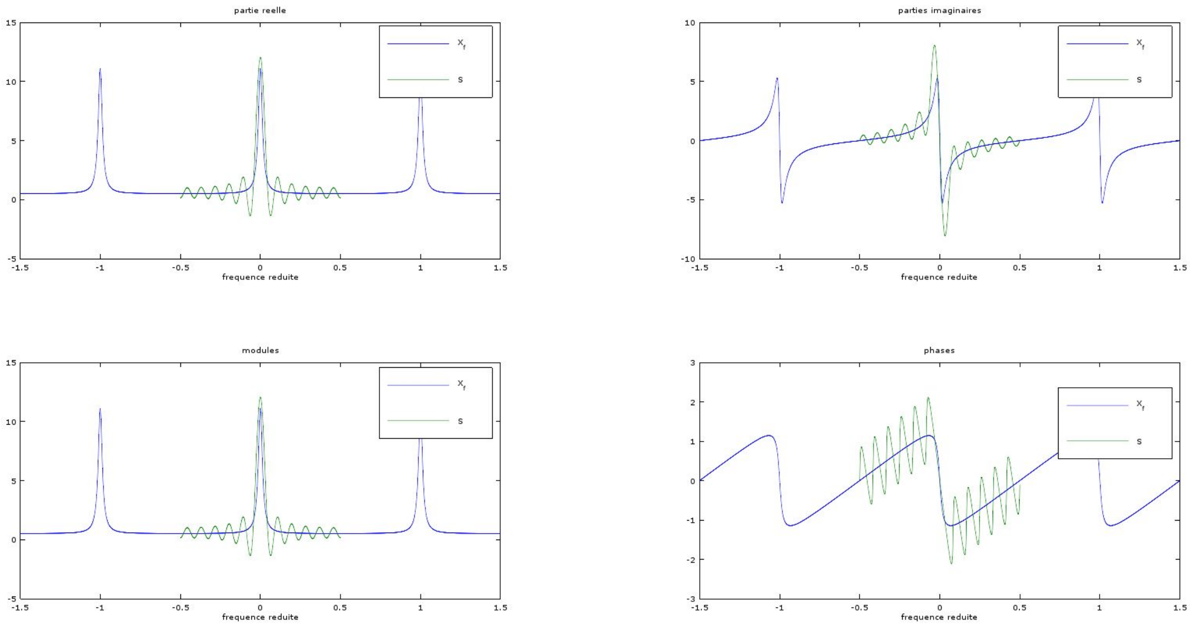
De plus on remarque que $S(f)$ est définie sur $f \in [0, 1[$. Cela s'explique par le fait que S est une TFD. Si l'on s'intéresse aux relations présentées précédemment, on peut voir que si on restreint X à une période, le fait d'échantillonner N valeurs espacées de $\frac{1}{N}$ revient à calculer S. Cela concorde, d'un point vue mathématique $X(f) = \lim_{N\to\infty} S(f_n)$. C'est en ce sens qu'intervient la fonction d'Heaviside qui permet d'assurer cette relation mathématique grâce à la restriction de x aux indices positives.
Ainsi les échantillons de S correspondent aux valeurs de X aux fréquences réduites $\frac{n}{N}$ avec $0 \leq n \leq N-1$

D'un point de vue graphique on observe bien que la TFD conserve dans l'ensemble (à quelques points près) les caractéristiques (ou encore les valeurs prises) d'une TFTD, notamment les allures des parties réelles, imaginaires , modules et phases.

On observe également que les oscillations de S sont très importantes, en effet celles-ci sont dues à la durée du signal (ici le nombre de points M que l'on prend pour réaliser le signal s) qui est trop faible impactant ainsi la résolution fréquentielle, ce point sera explicité plus tard.

Ainsi on conclut que l'intérêt d'utiliser une TFD (à condition que l'on prend une bonne valeur de durée) est d'avoir accès à l'information fréquentielle d'une séquence x de longueur infinie donnée par une TFTD.

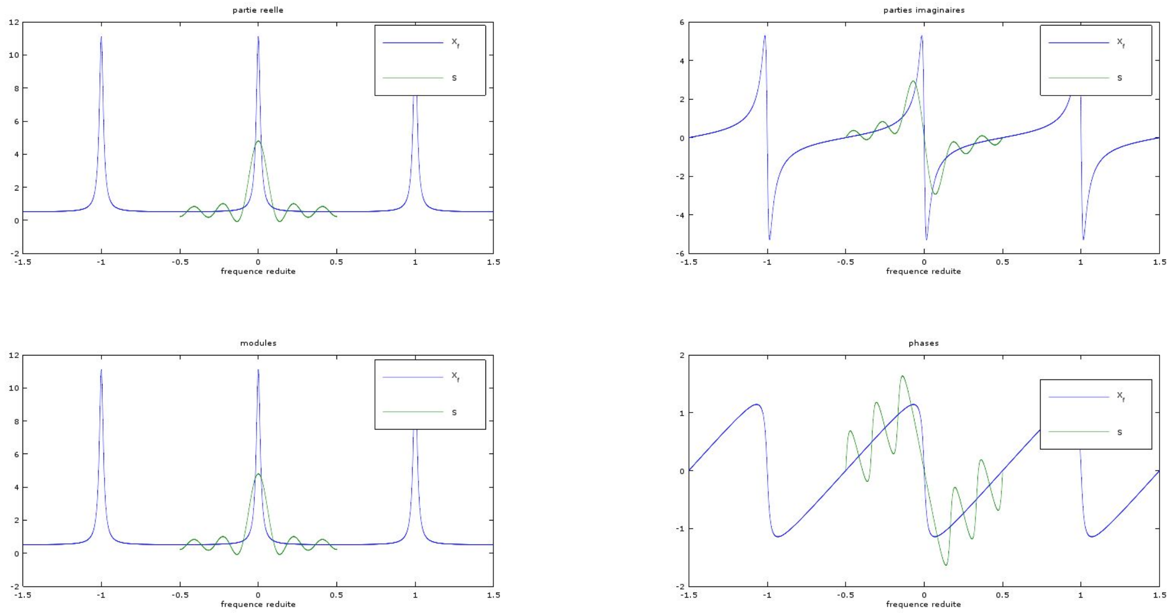
4) Utilisation de la commande FFTSHIFT.



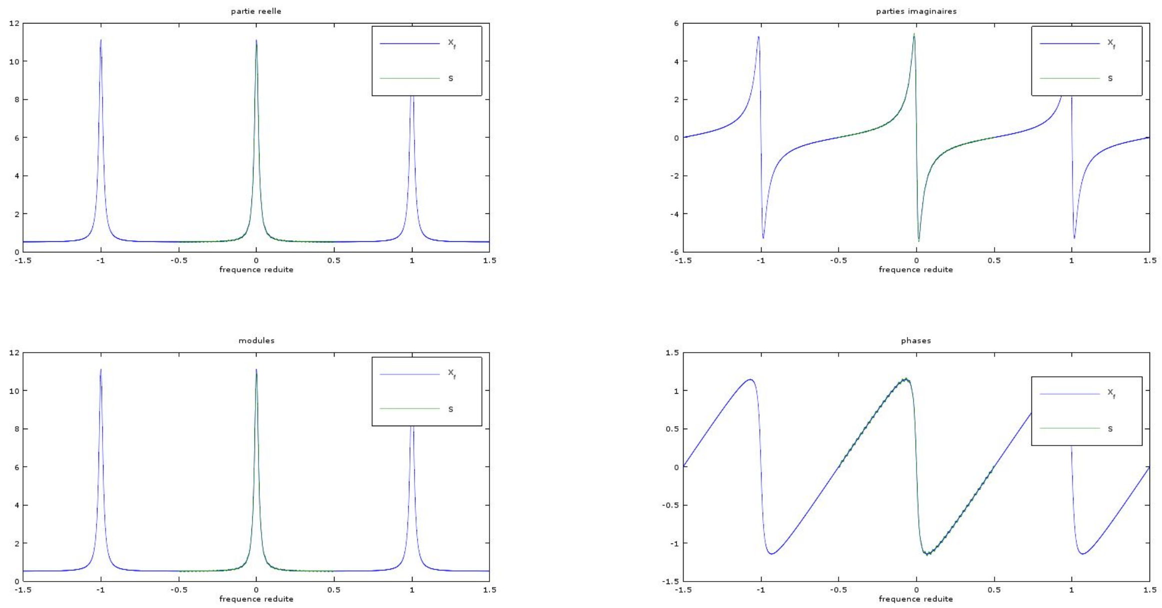
Partie réelle, imaginaire, module et phase des séquence S(f) et X(f)

Les fonctions FFT et FFTSHIFT représentent la TFD de s respectivement de 0 à 1 et de -0.5 à 0.5. La fonction FFTSHIFT met donc l'harmonique de fréquence 0 au centre du spectre.

5) Figures et interprétations de S(f) et X(f) pour M=5 et M=40, étude de la résolution fréquentielle.



Partie réelle, imaginaire, module et phase des séquence S(f) et X(f) pour M = 5



Partie réelle, imaginaire, module et phase des séquence S(f) et X(f) pour M = 40

On observe que plus M est grand plus la largeur des oscillations en fréquence est petite. En effet si on s'intéresse au lobe principal centré en 0 dans les deux cas, on peut lire que la largeur de ce dernier pour M = 5 est de 0.30 et pour M = 40 on a une largeur négligeable.

Cela est due à l'influence de la convolution par un sinus cardinal qui n'est pas la même dans deux cas.
Effectivement, tout signal continu ou discret à temps limité est en réalité la multiplication d'une porte de durée D (ou M égale au nombre de points d'un signal discret) et du signal en question. De ce fait lors du passage en fréquentiel, cela revient à convoluer par un sinus cardinal de la forme $\frac{sin(\pi\nu M)}{\pi\nu}$. Ainsi plus M est grand, plus la période est petite et plus les lobes caractéristiques d'un sinus cardinal sont fins. Et ainsi la résolution fréquentielle du signal devient meilleure.

3 TFD de sinusoïdes

1) Fonction

Cette fonction a pour but la génération d'une séquence de la forme $s[k] = cos(2\pi f_0 k)$ pour $0 \le k \le M-1$ et de sa TFD N-points. Pour cela elle prend en paramètres d'entrée f_0 et N, le nombre de points de la TFD.

Code :

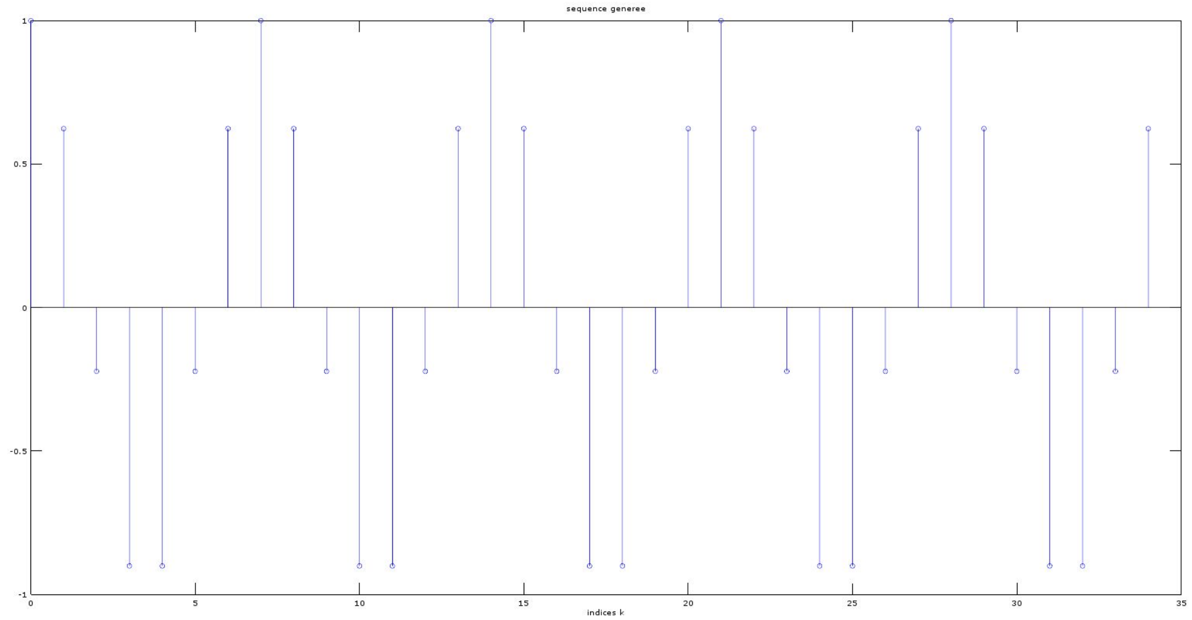
```
function [S,k] = fonction_partie_3_sinusoides (f0,N)
  k = 0:34;
  s = cos ( 2 * pi * f0 * k );
  S = fft(s,N);
  f_reduite = linspace(0,1,N);
  # l'affichage des parties réelle, imaginaire, module et phase de
la TFD graduées en fréquences réduites


  # après il n'y a que de l'affichage.
```

2) Génération sequence

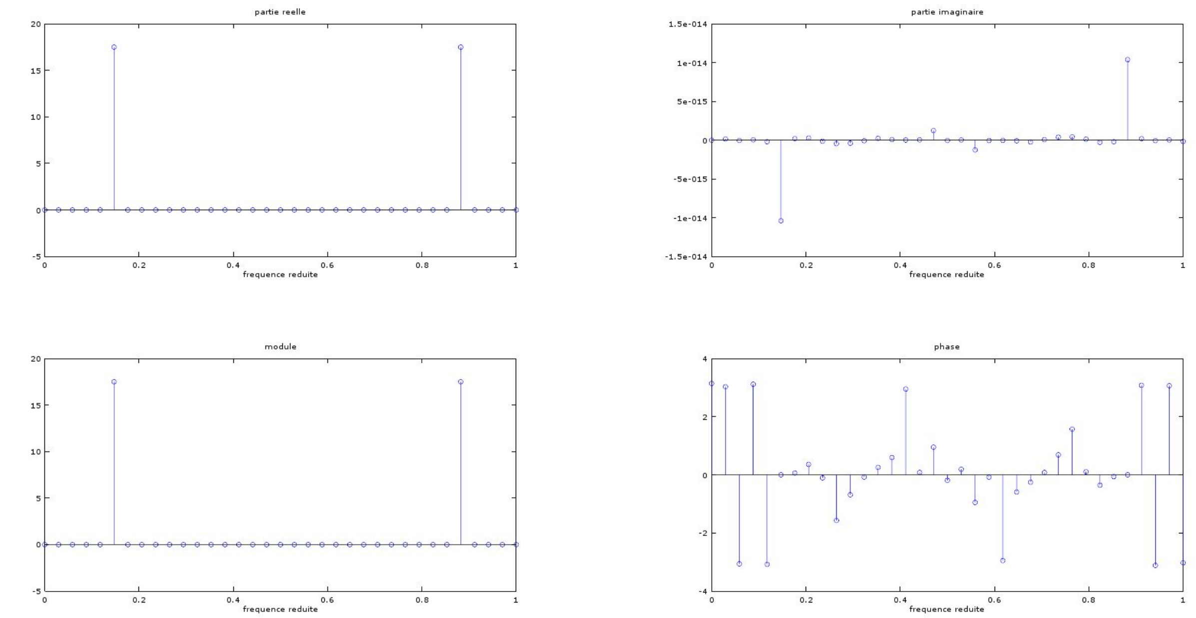
Code :

```
clear all ; clc ; close all
      N = 70;
f0 = 2 * 5/35;
[S,k] = fonction_partie_3_sinusoides (f0,N);
```

TFD 35 points



Séquence s[k] générée



Partie réelle, imaginaire, module et phase de la séquence S(f) pour une TFD de 35 points

La finesse de l'analyse est de Δ_f = 1/35 .

Partie réelle

On obtient des composantes nulles à toutes les fréquences à l'exception des fréquences 0.14 et 0.86.
De plus on peut voir que les amplitudes des deux pics sont égales à $N/2 = 17.5$
En effet cela est dû au fait que la séquence $s[k]$ est un cosinus de fréquence $= 1/7 = 0.14$ puisque la transformée de Fourier classique d'un cosinus est la somme de deux diracs centrés en f_0 et $-f_0$ il n'est pas surprenant d'obtenir une figure similaire pour la TFD

associée. Comme ici on donne une représentation qui va de 0 à 1 , on peut voir une la deuxième harmonique à $1 - f_0 = 1 - 0.14 = 0.86$.

Toutefois, il reste quand même un écart entre $f_0 = 1/7 = 0.1428$ et 0,147, cela est dû au critère de finesse.

Partie imaginaire

La partie imaginaire est nulle, en effet la fonction cosinus étant paire la TFD est réelle.

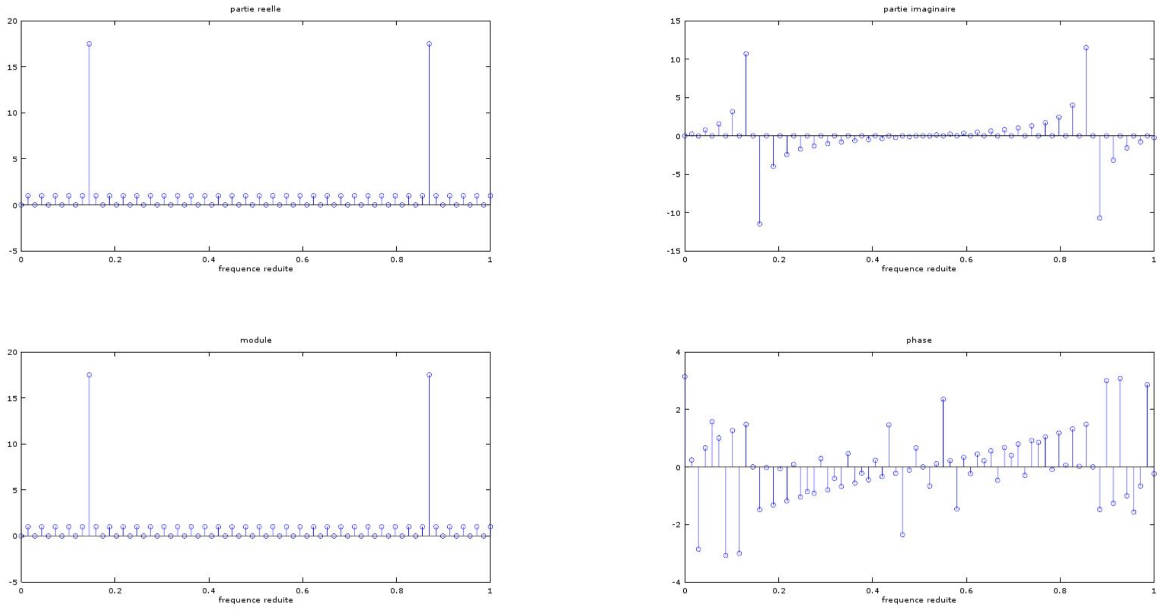
Module

La partie imaginaire étant nulle, le module est égale à la partie réelle, l'interprétation est donc la même.

Valeurs / amplitudes

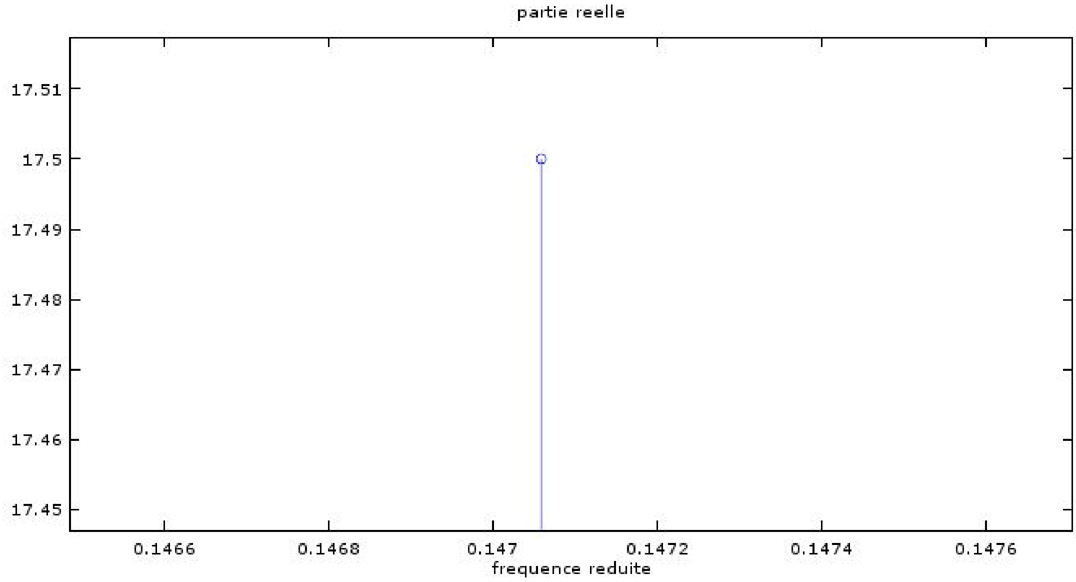
Partie réelle : 17.5
Partie imaginaire : 10^{-14}
Module : 17.5
Phase : 2.95

TFD 70 points



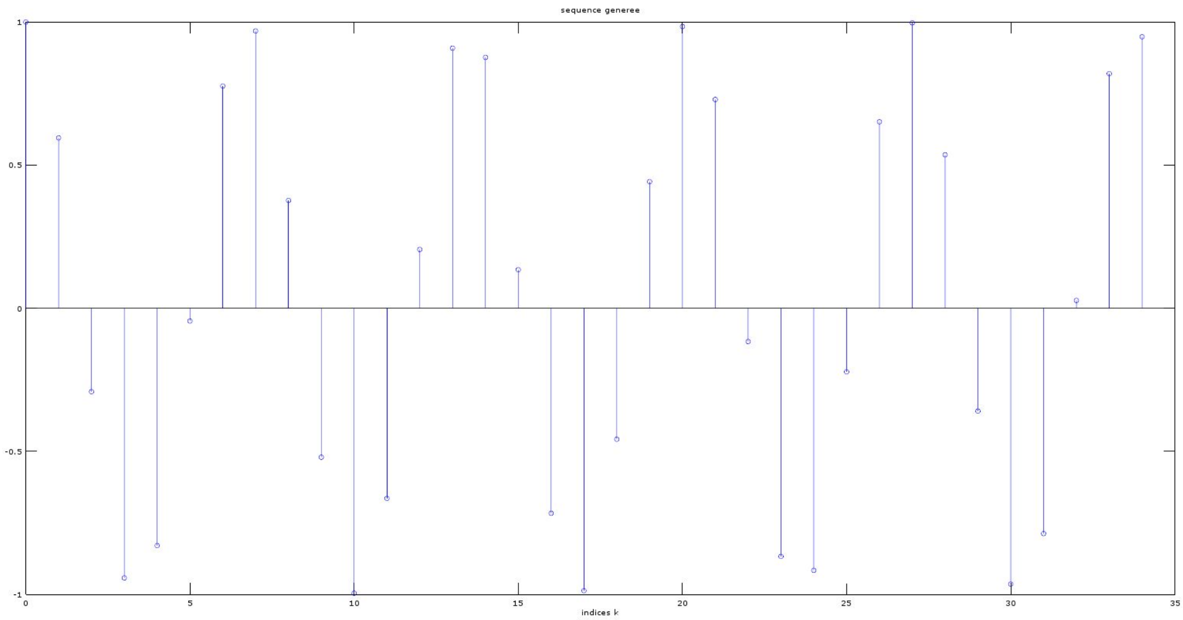
Partie réelle, imaginaire, module et phase des séquence S(f) une TFD de 70 points

On remarque qu'il y a apparition d'une partie imaginaire non nul et donc d'un déphasage. En utilisant une TFD de 70 points on a doublé le nombre d'échantillons utilisés, de ce fait la finesse d'analyse a nettement augmentée, c'est pour cela que la mesure de f_0 est beaucoup plus précise ici (environ 0.145 cf figure ci-dessous).

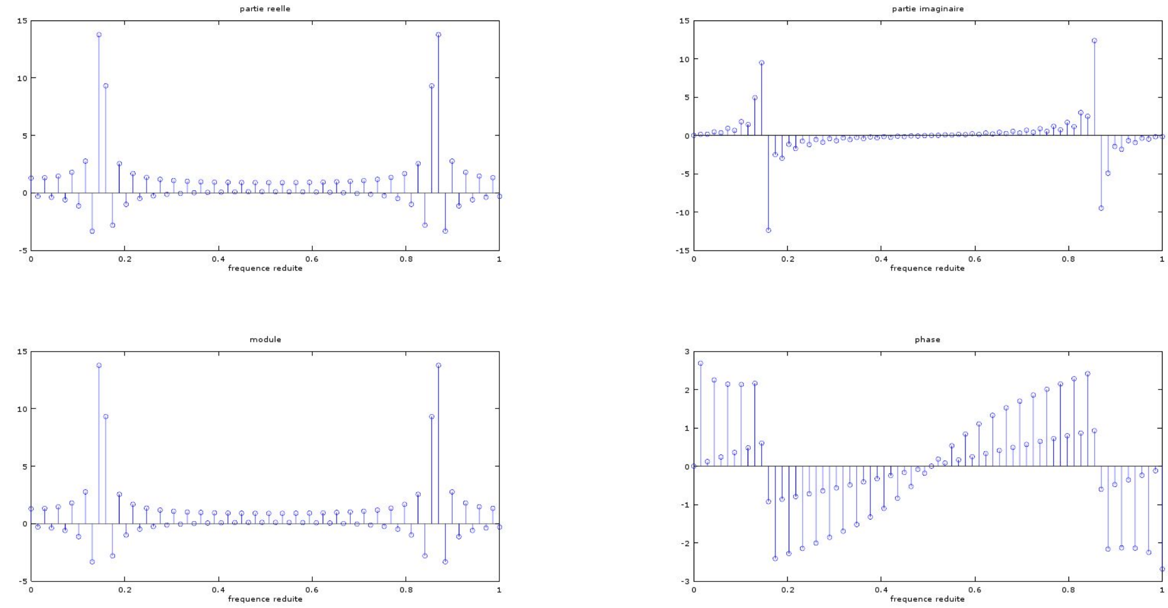


On peut mettre également en évidence le phénomène de zero-padding dû au fait qu'on utilise un nombre d'échantillons supérieur à la longueur de la séquence.

3) Séquence 35 points, 5.2 périodes



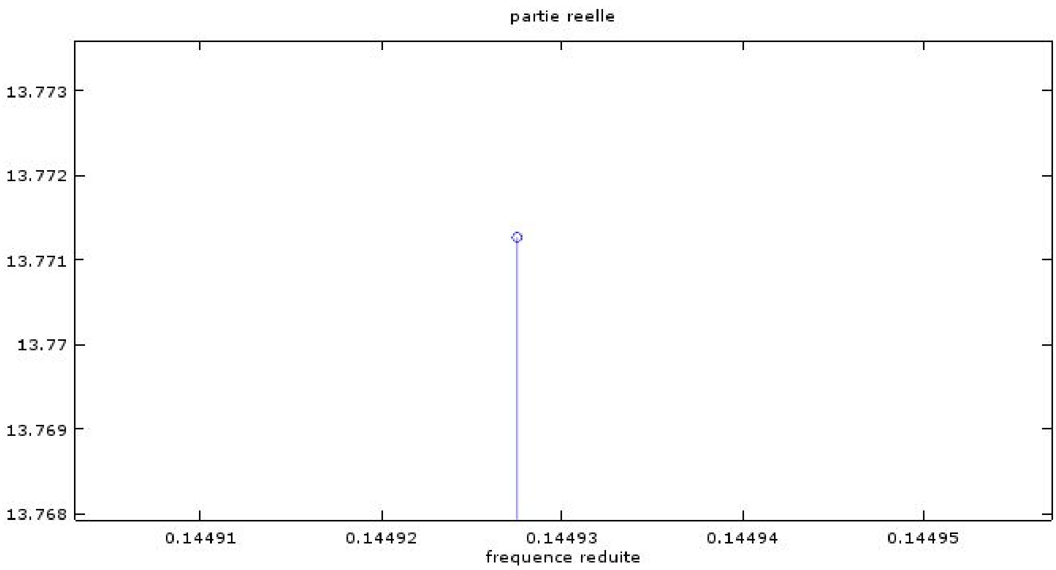
Séquence générée



Partie réelle, imaginaire, module et phase des séquence S(f) pour 5.2 périodes

A) Quelle est la valeur de la fréquence correspondant au pic d’amplitude ?

La valeur de la fréquence correspondante au pic d’amplitude est 0.1449 (cf figure ci dessous).



Mesure du pic d’amplitude

B) Cela correspond-il avec la valeur théorique ?

La valeur théorique est 0.14857, on est donc relativement proche.

C) Quelles sont les amplitudes des composantes maximales ?

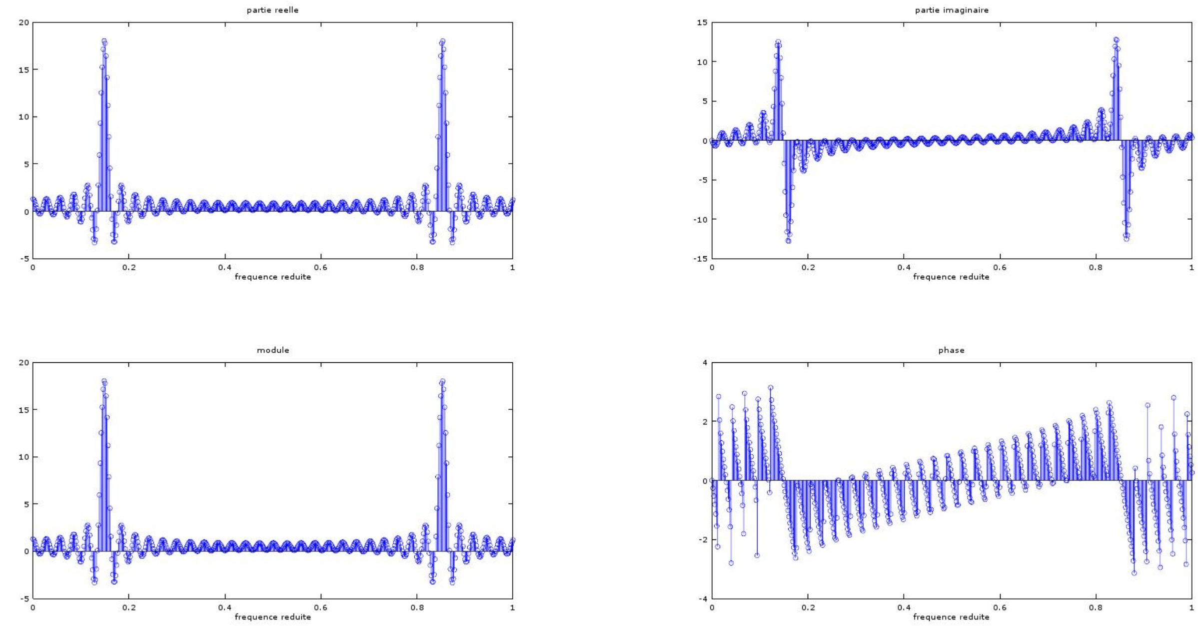
L'amplitude de la composante maximale est de 13.71.

D) Différences avec la courbe précédente.

D'un point de vue temporel, la période a diminuée, en effet avec le même nombre de points on trace plus de périodes.
D'un point de vue fréquentiel, l'amplitude des pics de la TFD 35 points n'est pas la même que ce qu'on a pu obtenir précédemment. En effet, comme nous avons changé la période, nous avons en quelque sorte décalé les points d'échantillonnage. Ainsi, le point le plus proche du maximum s'est rapproché ou s'est éloigné du maximum. Dans notre cas il s'est rapproché puisqu'on passe d'une amplitude max de 13.7 à 17.5.

E) Déterminer N pour connaître la fréquence exacte du cosinus.

Pour connaître la fréquence exacte du cosinus, il faut que la TFD de ce dernier soit très précise, de sorte que l'on puisse lire précisément le maximum de cette fonction et surtout la fréquence dont l'amplitude est maximale.
Avec N=500, on obtient une TFD assez détaillée pour lire l'abscisse du maximum (cf figure ci-dessous.



TFD-500 points de s

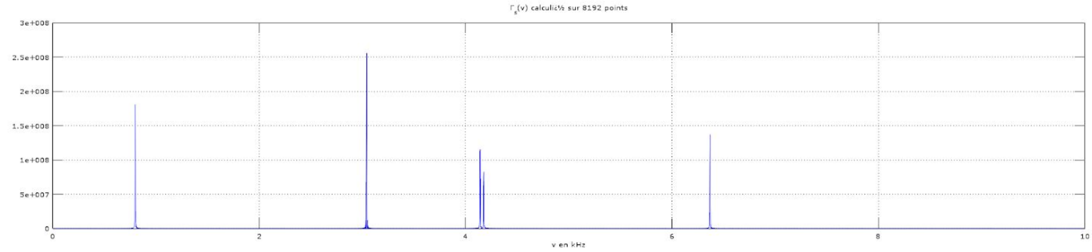
On lit bien la fréquence du cosinus qui est de 0.148.

4 Résolution fréquentielle

L'objectif de cet exercice est de réaliser l'analyse spectral d'un signal quelconque. Nous disposons pour cela d'une fonction analysespectrale. Cette fonction prend les paramètres suivants :
numsig : *le numéro du signal*
M : *le nombre d'échantillons du signal*
nue : *la fréquence d'échantillonnage*
N : *la nombre de points de la TFD*

Pour que cette fonction nous retourne la TFD du signal il nous faut bien dimensionner ces variables.

1) Dans un premier temps nous avons déterminé la fréquence maximale de notre signal. Il s'agit de 6.5kHz environ.



   Il nous faut donc prendre une fréquence d'échantillonnage au moins deux fois supérieure (critère de Shannon), c'est à dire $\nu_e = 14kHz$.

2) Nous avons ensuite déterminé le nombre d'échantillons que nous allons utiliser pour effectuer notre TFD. Pour cela on a respecté le critère de finesse de la consigne qui est de 3Hz. Sachant que la finesse delta nue = nue/N, on a donc dû prendre N > 5333.
   On prendra donc N = 8192 (N doit être une puissance de 2).

3) Nous avons choisi de prendre une durée M = 4000 échantillons qui sont suffisants pour représenter l'intégralité du spectre.